

# Magnetismus interpretiert als Mehrteilchenphänomen

Steffen Kühn  
steffen.kuehn@quantino-theory.de

20. November 2016

## Zusammenfassung

In der klassischen Elektrodynamik besitzt eine Punktladung immer sowohl ein elektrisches, als auch ein magnetisches Feld. Dieses folgt aus den Liénard-Wiechert-Potentialen, welche die Lösung der Maxwellgleichungen für eine Punktladung darstellen. In diesem Artikel wird jedoch dargelegt, dass es sich bei der magnetischen Kraft um einen Effekt handelt, welcher sich einfacher und besser ohne das Vorhandensein eines Magnetfeldes bei Punktladungen erklären lässt und der vermutlich erst durch die Überlagerung der rein elektrischen, relativistisch verzerrten Einzelfelder aller am Strom beteiligten Ladungsträger ergibt. Der Artikel zeigt weiterhin, dass sich mit beiden Ansätzen die jeweils richtigen Ergebnisse für den unendlich langen geraden Leiter, als auch für die unendlich kleine Leiterschleife ergeben. Der konventionelle Weg benötigt zum Erreichen dieser Aussagen starke Zusatzpostulate, wie das ad-hoc vorhandene B-Feld bei einer Punktladung, sowie das Lorentzkraftgesetz. Diese a-priori Annahmen sind bei der zweiten Variante nicht erforderlich. Der Artikel zeigt ebenfalls, dass sich die Kräfte zwischen Punktladungen in beiden Fällen unterscheiden und bei Punktladungen somit auch ein physikalischer Unterschied vorhanden ist.

## Inhaltsverzeichnis

|  |          |
|--|----------|
| <b>1 Einführung</b>  | <b>2</b> |
| <b>2 Die EM-Kraft zwischen zwei langsamen Punktladungen</b>                | <b>2</b> |
| 2.1 Herleitung aus den Liénard-Wiechert-Potentialen . . . . .              | 2        |
| 2.2 Interpretation der klassischen Lösung . . . . .                        | 3        |
| 2.3 Die physikalisch sinnvolle Kraft zwischen zwei Punktladungen . . . . . | 4        |
| <b>3 Elektrische Ströme</b>  | <b>4</b> |
| 3.1 Die Kraftwirkung eines Stromelementes . . . . .                        | 4        |
| 3.2 Linearer Strom . . . . .   | 5        |
| 3.3 Unendlich kleine Leiterschleife . . . . .                              | 6        |
| <b>4 Zusammenfassung und Fazit</b>   | <b>8</b> |
| <b>Literatur</b>   | <b>8</b> |

# 1 Einführung

Um die Kraft eines stromdurchflossenen Drahtes auf eine Probeladung zu ermitteln, verwendet man üblicherweise das Biot-Savart-Gesetz um zunächst das magnetische Feld der Gesamtanordnung zu berechnen. Anschließend wird die magnetische Kraft mit Hilfe der Lorentzkraftformel bestimmt. Diese Vorgehensweise stellt den praktisch einfachsten und schnellsten Weg dar. Gleichzeitig ist diese Methode recht abstrakt.

Eine andere Möglichkeit zur Berechnung besteht grundsätzlich darin, die Maxwellgleichungen für den konkreten Fall einer Punktladung zu lösen und dann anschließend die elektromagnetischen Felder aller beteiligten Punktladungen entlang des Strompfades zu integrieren. Dieser Weg wird jedoch selten beschritten, da er mathematisch aufwendig ist. Zusätzlich gewinnt man dadurch keine neuen Erkenntnisse oder Einsichten, denn das Feld einer Punktladung ist komplex und unanschaulich, da auch eine Punktladung bereits über ein voll ausgebildetes Magnetfeld verfügt. Wodurch dieses entsteht bleibt unklar und muss als gegeben akzeptiert werden.

Bekannt ist jedoch, dass die elektromagnetische Kraft eng mit der Relativität verknüpft ist. So kann gezeigt werden, dass sich elektrische Felder bei Wechsel des Bezugssystems in magnetische Felder transformieren und umgekehrt [1, p. 640]. Trotzdem bleibt die elektromagnetische Kraft eine komplizierte Kraft, die nicht vollständig auf eine Punktquelle ausgerichtet zu sein scheint. Der Autor dieses Artikels hat jedoch entdeckt, dass es möglich ist für eine Punktladung ein deutlich einfacheres, relativistisch plausibles Feld anzugeben, das nur aus einem elektrischen Anteil besteht und welches bei Integration entlang beliebiger homogener Strompfade die resultierenden magnetischen Kräfte immer korrekt vorhersagt.

## 2 Die EM-Kraft zwischen zwei langsamen Punktladungen

### 2.1 Herleitung aus den Liénard-Wiechert-Potentialen

Das elektromagnetische Feld einer bewegten Punktladung lässt sich mit Hilfe der Liénard-Wiechert-Potentiale angeben. Falls sich die Punktladung  $q_s$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  am Koordinatenursprung befindet und sich von dort mit der Geschwindigkeit  $\vec{u}$  gleichförmig entfernt, so gilt [1, p. 618]

$$\varphi = \frac{c q_s}{4 \pi \varepsilon_0 \sqrt{(c^2 t - \vec{u} \vec{r})^2 + (c^2 - u^2) (r^2 - c^2 t^2)}} \quad (1)$$

und

$$\vec{A} = \frac{\vec{u}}{c^2} \varphi. \quad (2)$$

Dabei ist  $\varphi$  das elektrische Potential. Bei  $\vec{A}$  handelt es sich um das sogenannte Vektorpotential. Das elektrische und magnetische Feld erhält man ganz allgemein durch die Gleichungen [1, p. 451]

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3)$$

und

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (4)$$

Für den speziellen Fall der gleichförmig bewegten Punktladung folgt aus (1) das elektrische Feld

$$\vec{E} = \frac{c q_s (c^2 - u^2) (\vec{r} - \vec{u} t)}{4 \pi \varepsilon_0 \sqrt{(r^2 - c^2 t^2) (c^2 - u^2) + (c^2 t - \vec{r} \vec{u})^2}^3} \quad (5)$$

und aus (2) die magnetische Flussdichte

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{E}. \quad (6)$$

Im Weiteren sind die Zeitabhängigkeiten nicht von Bedeutung. Stattdessen genügt es, einen beliebigen, festgehaltenen Zeitpunkt zu betrachten. Für  $t = 0$  ist das elektrische Feld am einfachsten. Aus diesem Grund wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit der konkrete Zeitpunkt  $t = 0$  gewählt. Aus (5) folgt

$$\vec{E} = \frac{c q_s (c^2 - u^2) \vec{r}}{4 \pi \varepsilon_0 \sqrt{r^2 (c^2 - u^2) + (\vec{r} \cdot \vec{u})^2}^3} \quad (7)$$

Die Formel (6) bleibt davon unbeeinflusst. Eine weitere Vereinfachung lässt sich erreichen, indem man sich auf die Betrachtung von Punktladungen beschränkt, die sehr viel langsamer sind als die Lichtgeschwindigkeit ( $u \ll c$ ). Unter diesen Umständen ist nämlich eine Taylorreihenentwicklung bezüglich  $u$  an der Stelle Null möglich. Praktisch führt man diese durch, indem man  $\vec{u}$  durch  $\tau \vec{u}$  ersetzt und die eigentliche Reihenentwicklung bezüglich  $\tau$  durchführt. Zum Abschluss wird  $\tau$  zu Eins gesetzt. In diesem Fall liefert eine Reihentwicklung die Approximation

$$\vec{E} \approx \frac{q_s}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \left( \left( 1 + \frac{u^2}{2c^2} \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{r \cdot c} \right)^2 \right), \quad (8)$$

wobei alle Terme größer zweiter Ordnung vernachlässigt wurden.

Um die Kraftwirkung  $\vec{F}$  dieser Punktladung auf eine zweite, gleichförmig bewegte Punktladung  $q_d$  am Ort  $\vec{r}$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  zu berechnen, benötigt man neben dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  auch noch das Magnetfeld  $\vec{B}$ . Dieses lässt sich über Gleichung (6) aus der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  ableiten. Zum Abschluss wird das Lorentzkraftgesetz [1, p. 259]

$$\vec{F} = q_d \vec{E} + q_d \vec{v} \times \vec{B} \quad (9)$$

angewendet. Es folgt

$$\vec{F} = q_d \vec{E} + \frac{q_d}{c^2} \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{E}). \quad (10)$$

Auch für den magnetischen Teil wird eine Reihenentwicklung bezüglich  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  durchgeführt. Durch Vernachlässigung aller Terme größer 2-ter Ordnung und Zusammenfassung erhält man die Kraft

$$\vec{F}_M(\vec{r}, \vec{u}, q_s) = \frac{q_s q_d}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \left( 1 + \frac{u^2}{2c^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{\vec{r}}{r} \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{r \cdot c} \right)^2 + \frac{\vec{r}}{r} \times \frac{\vec{u}}{c} \times \frac{\vec{v}}{c} \right). \quad (11)$$

die eine langsame gleichförmige Ladung  $q_s$  auf eine andere langsame gleichförmig bewegte Ladung  $q_d$  der klassischen maxwellschen Elektrodynamik zufolge ausübt.

## 2.2 Interpretation der klassischen Lösung

Die Formel (11) zeigt, dass die elektromagnetische Kraft in der klassischen Elektrodynamik bereits im einfachsten Fall, also bei zwei unbeschleunigten, langsamen Punktladungen sehr komplex und unübersichtlich ist. Insbesondere fällt auf, dass die Kräfte wegen des magnetischen Anteils in der Regel nicht parallel zum Verbindungsvektor zwischen den beiden Ladungen ausgerichtet sind. Die elektromagnetische Kraft ist somit keine Zentralkraft.

Des Weiteren fällt auf, dass offenbar auch das Relativitätsprinzip verletzt ist. Addiert man nämlich zu beiden Geschwindigkeiten eine beliebige kleine Geschwindigkeit  $\vec{w}$  so verändert sich die resultierende Kraft. Am offensichtlichsten wird das, wenn zunächst zwei ruhende Ladungen betrachtet werden. Bei ruhenden Ladungen gilt  $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$ . Die elektromagnetische Kraft vereinfacht sich zu

$$\vec{F}_M = \frac{q_s q_d}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (12)$$

was dem Coulombgesetz entspricht. Für einen sich mit der Geschwindigkeit  $-\vec{w}$  bewegendem Beobachter stellt sich die Situation anders dar. Für ihn gilt  $\vec{u} = \vec{v} = \vec{w}$ , d.h.

$$\vec{F}_M = \frac{q_s q_d}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \left( 1 + \frac{w^2}{2 c^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{\vec{r}}{r} \left( \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{w}}{c} \right)^2 + \frac{\vec{r}}{r} \times \frac{\vec{w}}{c} \times \frac{\vec{w}}{c} \right). \quad (13)$$

Wegen der Beziehung  $\vec{r} \times \vec{w} \times \vec{w} = \vec{w} (\vec{r} \cdot \vec{w}) - \vec{r} w^2$  folgt

$$\vec{F}_M = \frac{q_s q_d}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \left( 1 - \frac{w^2}{2 c^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{\vec{r}}{r} \left( \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{w}}{c} \right)^2 + \frac{\vec{w}}{c} \left( \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{w}}{c} \right) \right), \quad (14)$$

was nicht dem Coulombgesetz entspricht und auch keine Zentralkraft darstellt, da ein Teil der Kraft parallel zu  $\vec{w}$  ausgerichtet ist.

Es liegt an dieser Stelle nahe zu vermuten, dass auf dem Weg zu Formel (11) ein Rechenfehler aufgetreten ist. Das ist jedoch nicht der Fall, da sich mit der Einzelkraft (11) für elektrische Ströme die korrekten Kräfte finden lassen. Dieses wird noch im weiteren Verlauf gezeigt werden.

## 2.3 Die physikalisch sinnvolle Kraft zwischen zwei Punktladungen

Neben der Lösung (11) gibt es einen weiteren Ansatz für die elektrische Kraft zwischen zwei Punktladungen. Dieser besteht aus dem rein elektrischen Anteil (7) multipliziert mit dem Lorentzfaktor

$$\gamma(u) = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Durch eine Reihenentwicklung bezüglich  $\vec{u}$  an der Stelle Null und Abbruch nach dem zweiten Glied folgt

$$\vec{E} \approx \frac{q_s}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \left( \left( 1 + \frac{u^2}{c^2} \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{u}}{c} \right)^2 \right). \quad (16)$$

Für die elektrische Kraft zwischen zwei Punktladungen mit den Geschwindigkeiten  $\vec{v}$  und  $\vec{u}$  gilt dann für  $\|\vec{v} - \vec{u}\| \ll c$

$$\vec{F}_R(\vec{r}, \vec{u}, q_s) = \frac{q_s}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \left( \left( 1 + \frac{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{c^2} \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{(\vec{u} - \vec{v})}{c} \right)^2 \right). \quad (17)$$

Auch mit dieser Formel ist es möglich, die korrekten Kräfte für beliebige Ströme zu berechnen, wie im weiteren Verlauf noch gezeigt werden wird. Der Index  $R$  steht hier für *relativistisch*.

Es sei an dieser Stelle noch erwähnt, dass es sich bei der Kraft (17) immer um eine Zentralkraft handelt. Des Weiteren wird darauf hingewiesen, dass auch das Relativitätsprinzip erfüllt ist, denn das Hinzuzählen beliebiger Geschwindigkeiten  $\vec{w}$  zu den Geschwindigkeiten  $\vec{v}$  und  $\vec{u}$  ändert nichts an der resultierenden Kraft.

## 3 Elektrische Ströme

### 3.1 Die Kraftwirkung eines Stromelementes

In elektrischen Leitern, wie metallischen Drähten, wird ein Strom durch die Bewegung von Elektronen, also negativ geladenen Punktladungen verursacht. Bei dotierten Halbleitern bewegen sich hingegen Elektronen, als auch positiv geladene Fehlstellen. Um solche Phänomene im Weiteren einfacher und übersichtlicher analysieren zu können, wird an dieser Stelle das Stromelement definiert.

Dabei soll es sich um zwei entgegengesetzt gleich groß geladene Punktladungen handeln, bei der die elektrisch positiv geladene Punktladung die Geschwindigkeit  $\vec{u}/2$  hat, während sich die negative geladene Punktladung mit  $-\vec{u}/2$  genau in die Gegenrichtung bewegt. Beide Punktladungen sollen sich weiterhin zum Zeitpunkt der Betrachtung exakt am gleich Ort aufhalten.

Die Kraftwirkung  $\vec{F}_c$ , die ein solches Stromelement am Koordinatenursprung auf eine sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegende Probeladung am Ort  $\vec{r}$  ausübt, lautet

$$\vec{F}_{MC}(\vec{r}, \vec{u}, q_s) := \vec{F}_M\left(\vec{r}, \frac{\vec{u}}{2}, q_s\right) + \vec{F}_M\left(\vec{r}, -\frac{\vec{u}}{2}, -q_s\right) \quad (18)$$

bzw.

$$\vec{F}_{RC}(\vec{r}, \vec{u}, q_s) := \vec{F}_R\left(\vec{r}, \frac{\vec{u}}{2}, q_s\right) + \vec{F}_R\left(\vec{r}, -\frac{\vec{u}}{2}, -q_s\right). \quad (19)$$

Durch Einsetzen der Formel (11) wird aus Definition (18)

$$\vec{F}_{MC}(\vec{r}, \vec{u}, q_s) = \frac{q_s q_d \mu_0}{4 \pi r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{u} \times \vec{v} \right). \quad (20)$$

Die Verwendung von Gleichung (17) in Definition (19) ergibt nach einer Reihenentwicklung bezüglich  $\vec{v}$  und  $\vec{u}$  und Abbruch nach den Termen zweiter Ordnung die Beziehung

$$\vec{F}_{RC}(\vec{r}, \vec{u}, q_s) = \frac{q_d q_s \mu_0}{4 \pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} \left( \frac{3}{r^2} (\vec{r} \vec{u}) (\vec{r} \vec{v}) - 2 \vec{u} \vec{v} \right). \quad (21)$$

Es wird angemerkt, dass in beiden Fällen die Beziehung  $\varepsilon_0 r^2 = 1/\mu_0$  verwendet wurde.

### 3.2 Linearer Strom

Es ist offensichtlich, dass sich die Formeln für die Kräfte der Stromelemente (20) und (21) vollständig unterscheiden und eine gänzlich andere Struktur besitzen. Gleichung (21) beschreibt eine Zentralkraft, während Formel (20) ein Wirbelfeld darstellt. Umso mehr erstaunt es, dass es mit beiden Formeln möglich ist, die korrekten Gesamtkräfte von stromdurchflossenen Drähten auf bewegte Probeladungen zu berechnen. Dieses wird zunächst für den einfachsten Fall, den unendlich langen, geraden Leiter gezeigt.

Dazu wird zunächst ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $\vec{u} = (u_x, 0, 0)$  und  $\vec{r} = (r_x, 0, r_z)$  gesetzt. Aus Formel (20) folgt dann

$$\vec{F}_{MC}(\vec{r}, \vec{u}, \lambda) = \frac{\lambda q_d \mu_0}{4 \pi} \frac{r_z u_x}{\sqrt{r_x^2 + r_z^2}^3} \begin{pmatrix} v_z \\ 0 \\ -v_x \end{pmatrix}, \quad (22)$$

wobei statt der Ladung  $q_s$  die Linienladungsdichte  $\lambda$ , also die Menge an Ladung pro Längenelement, eingesetzt wurde. Die Integration entlang der x-Achse ergibt

$$\vec{F}_{MT} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{MC}(\vec{r}, \vec{u}, \lambda) dr_x = \frac{\lambda q_d \mu_0 u_x}{2 \pi r_z} \begin{pmatrix} v_z \\ 0 \\ -v_x \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Mit  $I = \lambda u_x$  folgt

$$\vec{F}_{MT} = \frac{q_d \mu_0 I}{2 \pi r_z} \begin{pmatrix} v_z \\ 0 \\ -v_x \end{pmatrix}, \quad (24)$$

was genau dem Ergebnis entspricht, dass man mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes und unter Verwendung der Lorentzkraftformel erhält.

Genau das gleiche Resultat erhält man aber auch bei Verwendung der Formel (21). Hier folgt

$$\vec{F}_{RC}(\vec{r}, \vec{u}, \lambda) = \frac{\lambda q_d \mu_0}{4\pi} \frac{(r_x^2 v_x - 2r_z^2 v_x + 3r_x r_z v_z) u_x}{\sqrt{r_x^2 + r_z^2}^5} \begin{pmatrix} r_x \\ 0 \\ r_z \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Die Integration entlang der die x-Achse ergibt

$$\vec{F}_{RT} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{RC}(\vec{r}, \vec{u}, \lambda) dr_x = \frac{\lambda q_d \mu_0 u_x}{2\pi r_z} \begin{pmatrix} v_z \\ 0 \\ -v_x \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Auch hier folgt wieder wegen  $I = \lambda u_x$

$$\vec{F}_{RT} = \frac{q_d \mu_0 I}{2\pi r_z} \begin{pmatrix} v_z \\ 0 \\ -v_x \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Das entspricht genau der Lösung (24) und damit derjenigen, die man konventionell mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes und unter Verwendung der Lorentzkraftformel erhalten hätte.

### 3.3 Unendlich kleine Leiterschleife

Das Modell des unendlich langen geraden Drahtes stellt einen wichtigen, aber relativ einfachen Spezialfall dar. Um zu zeigen, dass die Formel (21) immer zu den richtigen magnetischen Feldern führt, ist es erforderlich, eine unendlich kleine Leiterschleife zu untersuchen, da diese einen elementaren magnetischen Dipol bildet.

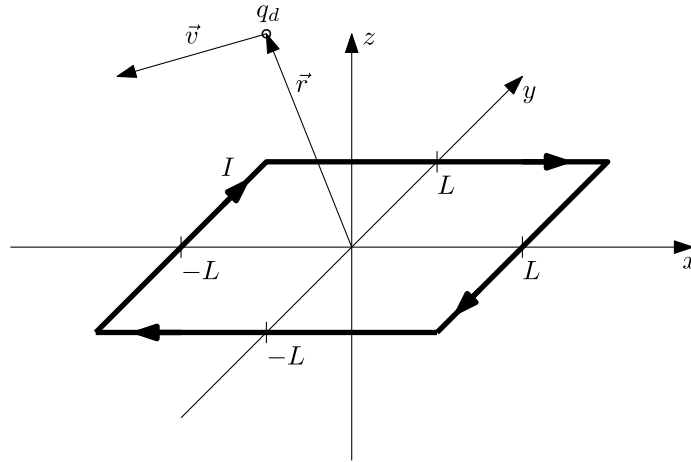


Abbildung 1: Leiterschleife

Die Abbildung 1 zeigt die geometrischen Gegebenheiten der Leiterschleife, welche Kern der nachfolgenden Untersuchung ist. Der gesamte Strom in ihr besteht aus vier Teilströmen. Die Integration muss daher über vier Teilbereiche gehen. Die gesamte Kraft berechnet sich daher durch

$$\begin{aligned} \vec{F}_T = & \int_{-L}^{+L} \vec{F}_C(\vec{r} - (x \vec{e}_x + L \vec{e}_y), u \vec{e}_x, \lambda) dx + \int_{-L}^{+L} \vec{F}_C(\vec{r} - (L \vec{e}_x - y \vec{e}_y), -u \vec{e}_y, \lambda) dy + \\ & \int_{-L}^{+L} \vec{F}_C(\vec{r} - (-x \vec{e}_x - L \vec{e}_y), -u \vec{e}_x, \lambda) dx + \int_{-L}^{+L} \vec{F}_C(\vec{r} - (-L \vec{e}_x + y \vec{e}_y), u \vec{e}_y, \lambda) dy. \quad (28) \end{aligned}$$

Dieses Integral lässt sich für ein  $L$ , welches nicht gegen Null geht, nur sehr aufwendig lösen. Die Berechnung lässt sich jedoch stark vereinfachen, wenn der Grenzwertübergang  $L \rightarrow 0$  bereits von vornherein berücksichtigt wird. Zu diesem Zweck wird der Ausdruck  $\int_{-L}^{+L} f(x, L) dx$  in eine Taylorreihe entwickelt und diese nach dem Glied zweiter Ordnung abgebrochen. Es folgt für kleine  $L \rightarrow 0$  die Beziehung

$$\int_{-L}^{+L} f(x, L) dx = 2L f(0, 0) + 2L^2 \left. \frac{\partial}{\partial L} f(0, L) \right|_{L=0}. \quad (29)$$

Mit Hilfe der Gleichung (29) lässt sich das Integral (28) erheblich vereinfachen und es gilt

$$\begin{aligned} \vec{F}_T &\approx 2L \vec{F}_C(\vec{r}, u \vec{e}_x, \lambda) + 2L^2 \left. \frac{\partial}{\partial L} \vec{F}_C(\vec{r} - L \vec{e}_y, u \vec{e}_x, \lambda) \right|_{L=0} \\ &\quad 2L \vec{F}_C(\vec{r}, -u \vec{e}_y, \lambda) + 2L^2 \left. \frac{\partial}{\partial L} \vec{F}_C(\vec{r} - L \vec{e}_x, -u \vec{e}_y, \lambda) \right|_{L=0} \\ &\quad 2L \vec{F}_C(\vec{r}, -u \vec{e}_x, \lambda) + 2L^2 \left. \frac{\partial}{\partial L} \vec{F}_C(\vec{r} + L \vec{e}_y, -u \vec{e}_x, \lambda) \right|_{L=0} \\ &\quad 2L \vec{F}_C(\vec{r}, u \vec{e}_y, \lambda) + 2L^2 \left. \frac{\partial}{\partial L} \vec{F}_C(\vec{r} + L \vec{e}_x, u \vec{e}_y, \lambda) \right|_{L=0}. \end{aligned} \quad (30)$$

Mit Hilfe der Beziehungen  $\vec{F}_C(\vec{r}, u \vec{e}_x, \lambda) = -\vec{F}_C(\vec{r}, -u \vec{e}_x, \lambda)$  und  $\vec{F}_C(\vec{r}, u \vec{e}_y, \lambda) = -\vec{F}_C(\vec{r}, -u \vec{e}_y, \lambda)$ , die sowohl für die Formel (20), als auch für die Formel (21) gelten, wird daraus

$$\begin{aligned} \vec{F}_T &= 2L^2 \left. \frac{\partial}{\partial L} \vec{F}_C(\vec{r} - L \vec{e}_y, u \vec{e}_x, \lambda) \right|_{L=0} + 2L^2 \left. \frac{\partial}{\partial L} \vec{F}_C(\vec{r} - L \vec{e}_x, -u \vec{e}_y, \lambda) \right|_{L=0} \\ &\quad 2L^2 \left. \frac{\partial}{\partial L} \vec{F}_C(\vec{r} + L \vec{e}_y, -u \vec{e}_x, \lambda) \right|_{L=0} + 2L^2 \left. \frac{\partial}{\partial L} \vec{F}_C(\vec{r} + L \vec{e}_x, u \vec{e}_y, \lambda) \right|_{L=0}. \end{aligned} \quad (31)$$

In die Gleichung (31) werden nun die Kräfte der Stromelemente (20) und (21) eingesetzt. Für die klassische Variante (20), die aus den Maxwellgleichungen abgeleitet wurde, folgt

$$\vec{F}_{MT} = \frac{L^2 \lambda q_d \mu_0 u}{\pi} \left( \vec{v} \times \frac{\vec{e}_z r^2 - 3 \vec{r} (\vec{e}_z \vec{r})}{r^5} \right). \quad (32)$$

Exakt das gleiche Ergebnis erhält man, indem man in Gleichung (31) die alternative Formel für die Kraft eines Stromelementes (21) einsetzt, d.h.

$$\vec{F}_{RT} = \frac{L^2 \lambda q_d \mu_0 u}{\pi} \left( \vec{v} \times \frac{\vec{e}_z r^2 - 3 \vec{r} (\vec{e}_z \vec{r})}{r^5} \right). \quad (33)$$

Der Ausdruck  $\lambda u$  entspricht auch hier wieder dem Strom  $I$  in der Leiterschleife. Definiert man nun noch, wie allgemein üblich, das magnetische Dipolmoment

$$\vec{\mu} = I (2L)^2 \vec{e}_z \quad (34)$$

als Produkt aus Strom und Flächenelement, dann folgt

$$\vec{F}_{MT} = \vec{F}_{RT} = q_d \left( \vec{v} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 \vec{r} (\vec{\mu} \vec{r}) - \vec{\mu} r^2}{r^5} \right). \quad (35)$$

Der Term

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 \vec{r} (\vec{\mu} \vec{r}) - \vec{\mu} r^2}{r^5} \quad (36)$$

ist dabei bekanntermaßen die magnetische Flussdichte des magnetischen Dipols, d.h. es gilt

$$\vec{F}_{MT} = \vec{F}_{RT} = q_d \left( \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (37)$$

Das ist wiederum klar als Lorentzkraft erkennbar.

## 4 Zusammenfassung und Fazit

Dieser Artikel hat gezeigt, dass Magnetismus nicht zwangsläufig als komplizierte, inhärente und nicht weiter erklärbare Eigenschaft einer jeden Punktladung hingenommen werden muss. Stattdessen ist es möglich, ja sogar wahrscheinlich, dass die als Magnetismus bekannten Effekte erst durch die Überlagerung der einzelnen elektrischen Felder aller an einem Strom beteiligten Ladungsträger entstehen. Die elektrischen Kräfte zwischen gleichförmig bewegten Punktladungen können dazu grundsätzlich Zentralkräfte sein.

Die Gleichung (16) ist das vermutlich korrekte elektrische Feld einer langsamen, gleichförmig bewegten Punktladung aus Sicht einer anderen langsamen, gleichförmig bewegten Punktladung. Die Ähnlichkeit mit dem elektrischen Feld (8), welches mit Hilfe der Liénard-Wiechert-Potentiale berechnet wurde, ist sofort offensichtlich. In beiden Fällen erkennt man die elliptische Verformung des Feldes durch den Einfluss der Relativität. Die klassische, vermutlich falsche, Variante ist jedoch in dem Sinne normiert, als das der elektrische Fluss durch eine umgebende geschlossene Oberfläche unabhängig von der Geschwindigkeit der Punktladung immer gleich bleibt. Dies ist eine Forderung der ersten Maxwellgleichung, also des Gaußschen Gesetzes. Möglicherweise liegt hier der Fehler, denn lässt man es zu, dass sich der elektrische Fluss mit der Geschwindigkeit entsprechend dem skalaren Lorentzfaktor verstärkt, so kann man alle magnetischen Effekte allein durch den Einfluss der Relativität erklären.

Der Autor dieses Artikels befürchtet, dass die Maxwellgleichungen fehlerhaft oder unvollständig sein könnten und empfiehlt eine dringende Untersuchung. Dieses ist insbesondere deshalb von oberster Priorität, da fast alle anderen Theorien der Physik auf die Elektrodynamik aufbauen und Fehler in diesem grundlegenden Teilgebiet zu enormen Komplexitätsteigerungen der mathematischen Beschreibungen und im Extremfall sogar zu falschen experimentellen Vorhersagen, beispielsweise in der Plasmaphysik, führen könnten.

## Literatur

- [1] Günter Lehner. *Elektromagnetische Feldtheorie*. Number ISBN 3-540-00998-1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004.