

Resumo

A Teoria da Relatividade Especial conduz a dois resultados, considerados incompreensíveis por vários renomados físicos, que são a dilatação do tempo e a denominada contração espacial de Lorentz. A solução desses paradoxos me conduziu ao desenvolvimento da Relatividade Ondulatória onde a variação temporal é devida à diferença nos percursos de propagação da luz e o espaço é constante entre os observadores.

Da análise do desenvolvimento da Relatividade Ondulatória podemos sintetizar as seguintes conclusões:

- é uma teoria com princípios totalmente físicos,
- as transformações são lineares,
- matem intactos os princípios Euclidianos,
- considera a transformação de Galileu distinta em cada referencial,
- une a velocidade da luz e o tempo em um único fenômeno,
- desenvolve uma translação real entre os referenciais.

A Relatividade Ondulatória (RO) fornece um conjunto de transformações entre dois referenciais em movimento relativo uniforme, diferentes das obtidas com as transformações de Lorentz, para: Espaço (x,y,z), Tempo (t), Velocidade (\vec{u}), Aceleração (\vec{a}), Energia (E), Momento (\vec{p}), Força (\vec{F}), Campo elétrico (\vec{E}), Campo magnético (\vec{B}), Freqüência da luz (γ), Corrente Elétrica (\vec{J}) e Densidade de Carga Elétrica (ρ).

Tanto a Relatividade ondulatória quanto a Relatividade Especial de Albert Einstein explicam, a experiência de Michel-Morley, o efeito Doppler longitudinal e transversal e fornecem fórmulas exatamente idênticas para:

$$\text{Aberração do zênite} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{v}{c} / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

$$\text{Fórmula de Fresnel} \Rightarrow c' = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

$$\text{Massa (m) com velocidade (u)} = [\text{massa de repouso (m}_0)] \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

$$\text{Energia} \Rightarrow E = m \cdot c^2.$$

$$\text{Momento} \Rightarrow \vec{p} = \frac{m_0 \cdot \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

$$\text{Relação entre Momento (p) e Energia (E)} \Rightarrow E = c \cdot \sqrt{m_0^2 \cdot c^2 + p^2}.$$

$$\text{Relação entre os Campos Elétrico (}\vec{E}\text{) e Magnético (}\vec{B}\text{)} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}.$$

$$\text{Fórmula de Biot-Savart} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} \vec{u}$$

$$\text{Equação da onda de Louis De Broglie} \Rightarrow \psi(x,t) = a \cdot \text{sen} \left[2\pi \gamma \left(t - \frac{x}{u} \right) \right] \text{ onde } u = \frac{c^2}{v}.$$

Com as equações de transformações entre dois referenciais da RO, obtêm-se a invariância de forma para as equações de Maxwell, seguintes:

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Rot} \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \Rightarrow \operatorname{Rot} \vec{B} = \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Obtêm-se inclusive a invariância de forma para a equação da onda e equação de continuidade sob forma diferencial:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

Outros trabalhos:

§9 O Efeito Sagnac.

§10 A experiência de Ives-Stilwell.

§11 Transformação entre dois referenciais da potencia dos raios luminosos de uma fonte na Teoria da Relatividade Especial.

§12 Linearidade.

§13 Richard C. Tolman.

§14 Composição de Velocidade.

§15 Invariância.

§16 Tempo e freqüência.

§17 Transformação de H. Lorentz

§18 A Experiência de Michelson & Morley

§19 Retrocesso do periélio de Mercúrio de $-7,13''$

§§19 Avanço do periélio de Mercúrio de $42,79''$

§20 Inércia

§21 Avanço do Periélio de Mercúrio de $42,79''$ calculado com a Relatividade Ondulatória

§22 Deformação espacial

§23 Curvatura do Espaço e Tempo

§24 Princípio Variacional

Relatividade Ondulatória

§1 Transformações para Espaço e Tempo

A Relatividade Ondulatória (RO) mantém o princípio da relatividade (a) e o princípio da Constancia da velocidade da luz (b), exatamente iguais a Teoria da Relatividade Especial (TRE), que Albert Einstein assim definiu:

a) As leis segundo as quais se modificam os estados dos sistemas físicos são as mesmas, quer sejam referidas a um determinado sistema de coordenadas, quer o sejam a qualquer outro que tenha movimento de translação uniforme em relação ao primeiro.

b) Qualquer raio de luz move-se no sistema de coordenadas “em repouso” com velocidade determinada c , que é a mesma, quer esse raio seja emitido por um corpo em repouso, quer o seja por um corpo em movimento (que explica a experiência de Michel-Morley).

Imaginemos inicialmente dois observadores O e O' (no vácuo), movendo-se um em relação ao outro em movimento uniforme de translação, isto é, os observadores não giram relativamente um ao outro. Assim o Observador O , solidário aos eixos x , y e z de um sistema de coordenadas Cartesianas retangulares, vê o observador O' mover-se com velocidade v , no sentido positivo do eixo x , com os respectivos eixos paralelos e deslizando ao longo do eixo x , enquanto que O' , solidário aos eixos x' , y' e z' de um sistema de coordenadas Cartesianas retangulares, vê O mover-se com velocidade $-v$, no sentido negativo do eixo x' , com os respectivos eixos paralelos e deslizando ao longo do eixo x' . O observador O mede o tempo t e o observador O' mede o tempo t' ($t \neq t'$). Admitamos que, ambos os observadores acertem seus relógios de modo que, quando ocorrer à coincidência das origens dos sistemas de coordenadas $t = t' = \text{zero}$.

No instante que $t = t' = 0$, um raio de luz é projetado a partir da origem comum aos dois observadores. Decorrido o intervalo de tempo t o observador O notará que seu raio de luz atingiu simultaneamente com o de O' o ponto A de coordenadas (x,y,z) com velocidade c e que a origem do sistema do observador O' percorreu a distância $v t$ ao longo do sentido positivo do eixo x , concluindo que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad 1.1$$

$$x' = x - v t. \quad 1.2$$

Semelhantemente, decorrido o intervalo de tempo t' o observador O' notará que seu raio de luz atingiu simultaneamente com o de O o ponto A de coordenadas (x',y',z') com velocidade c e que a origem do sistema do observador O percorreu a distância $v' t'$ ao longo do sentido negativo do eixo x' , concluindo que:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad 1.3$$

$$x = x' + v' t'. \quad 1.4$$

Igualando 1.1 com 1.3 temos

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad 1.5$$

Devido à simetria $y = y'$ e $z = z'$, que simplificam 1.5 em

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2. \quad 1.6$$

Para o observador O $x' = x - v t$ (1.2) que aplicado em 1.6 fornece

$$x^2 - c^2 t^2 = (x - v t)^2 - c^2 t'^2 \text{ de onde:}$$

$$t' = t \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}}. \quad 1.7$$

Para o observador O' $x = x' + v' t'$ (1.4) que aplicado em 1.6 fornece

$$(x' + v' t')^2 - c^2 t'^2 = x'^2 - c^2 t'^2 \text{ de onde:}$$

$$t = t' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2 t'}}. \quad 1.8$$

Quadro I, transformações para o espaço e tempo

$x' = x - vt$	1.2	$x = x' + v' t'$	1.4
$y' = y$	1.2.1	$y = y'$	1.4.1
$z' = z$	1.2.2	$z = z'$	1.4.2
$t' = t \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}}$	1.7	$t = t' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2 t'}}$	1.8

Do sistema de equações formado por 1.2 e 1.4 encontramos

$$vt = v' t' \text{ ou } |v|t = |v'|t' \text{ (considerando } t > 0 \text{ e } t' > 0)$$

1.9

o que demonstra a invariância do espaço na relatividade ondulatória.

Do sistema de equações formado por 1.7 e 1.8 encontramos

$$\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}} \cdot \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2 t'}} = 1.$$

1.10

Se em 1.2 $x' = 0$ então $x = vt$, que aplicadas em 1.10 fornece,

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} = 1.$$

1.11

Se em 1.10 $x = ct$ e $x' = ct'$ então

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{v'}{c}\right) = 1.$$

1.12

Para o observador O, o princípio da Constância da velocidade da luz, garante que as componentes u_x , u_y e u_z da velocidade da luz, também são constantes ao longo de seus eixos, por isso

$$\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} = u_x, \frac{y}{t} = \frac{dy}{dt} = u_y, \frac{z}{t} = \frac{dz}{dt} = u_z$$

1.13

e com isso podemos escrever

$$\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}.$$

1.14

Com a utilização de 1.7 e 1.9 e 1.14 podemos escrever

$$\frac{|v|}{|v'|} = \frac{t'}{t} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}.$$

1.15

Diferenciando 1.9 com v e v' constantes, ou seja, somente o tempo variando temos

$$|v|dt = |v'|dt' \text{ ou } \frac{|v|}{|v'|} = \frac{dt'}{dt},$$

1.16

mas de 1.15 $\frac{|v|}{|v'|} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}$ então $dt' = dt \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}$.

1.17

Sendo v e v' constantes as razões $\frac{|v|}{|v'|}$ e $\frac{t'}{t}$ em 1.15 também devem ser constantes, por isso o diferencial

de $\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}}$ deve ser igual a zero, de onde deduz-se $\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} = u_x$, que é exatamente igual a 1.13.

Para o observador O', o princípio da Constância da velocidade da luz, garante que as componentes, $u'x'$, $u'y'$ e $u'z'$ da velocidade da luz, também são constantes ao longo de seus eixos, por isso

$$\frac{x'}{t'} = \frac{dx'}{dt'} = u'x', \frac{y'}{t'} = \frac{dy'}{dt'} = u'y', \frac{z'}{t'} = \frac{dz'}{dt'} = u'z', \quad 1.18$$

e com isso podemos escrever,

$$\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2t'}} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}. \quad 1.19$$

Com a utilização de 1.8, 1.9 e 1.19 podemos escrever

$$\frac{|v'|}{|v|} = \frac{t}{t'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2t'}} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}. \quad 1.20$$

Diferenciando 1.9 com v' e v constantes, ou seja, somente o tempo variando temos

$$|v'|dt' = |v|dt \text{ ou } \frac{|v'|}{|v|} = \frac{dt}{dt'}, \quad 1.21$$

$$\text{mas de 1.20 } \frac{|v'|}{|v|} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}} \text{ então } dt = dt' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}. \quad 1.22$$

Sendo v' e v constante as razões $\frac{|v'|}{|v|}$ e $\frac{t}{t'}$ em 1.20 também deve ser constante, por isso o diferencial de

$$\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2t'}} \text{ deve ser igual à zero, de onde se deduz } \frac{x'}{t'} = \frac{dx'}{dt'} = u'x', \text{ que é exatamente igual a 1.18.}$$

Substituindo 1.14 e 1.19 em 1.10 obtemos,

$$\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}} = 1. \quad 1.23$$

Para o observador O, o vetor posição do ponto A de coordenadas (x,y,z) é

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad 1.24$$

e o vetor posição da origem do sistema do observador O' é

$$\vec{R}'_o = vt\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \Rightarrow \vec{R}'_o = vt\vec{i}. \quad 1.25$$

Para o observador O', o vetor posição do ponto A de coordenadas (x',y',z') é

$$\vec{R}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}', \quad 1.26$$

e o vetor posição da origem do sistema do observador O é

$$\vec{R}'_o = -v't'\vec{i}' + 0\vec{j}' + 0\vec{k}' \Rightarrow \vec{R}'_o = -v't'\vec{i}'. \quad 1.27$$

Devido a 1.9, 1.25 e 1.27 temos, $\vec{R}'_o = -\vec{R}'_o$.

Como 1.24 é igual a 1.25 mais 1.26 temos

$$\vec{R} = \vec{R}'_o + \vec{R}' \Rightarrow \vec{R}' = \vec{R} - \vec{R}'_o. \quad 1.29$$

Aplicando 1.28 em 1.29 temos, $\vec{R} = \vec{R}' - \vec{R}'_o$.

Para o observador O o vetor velocidade da origem do sistema do observador O' é

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}'_o}{dt} = v\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = v\vec{i}. \quad 1.31$$

Para o observador O' o vetor velocidade da origem do sistema do observador O é

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{R}'_o}{dt'} = -v'\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \Rightarrow \vec{v}' = -v'\vec{i}. \quad 1.32$$

De 1.15, 1.20, 1.31 e 1.32 encontramos as seguintes relações entre \vec{v} e \vec{v}'

$$\vec{v} = \frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}}, \quad 1.33$$

$$\vec{v}' = \frac{-\vec{v}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}}. \quad 1.34$$

Observação: no quadro I as fórmulas 1.2, 1.2.1 e 1.2.2 são os componentes do vetor 1.29 e as fórmulas 1.4, 1.4.1 e 1.4.2 são os componentes do vetor 1.30.

§2 Lei das Transformações das Velocidades \vec{u} e \vec{u}'

Diferenciando 1.29 e dividindo por 1.17 temos

$$\frac{d\vec{R}'}{dt'} = \frac{d\vec{R} - d\vec{R}'_o}{dt \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}} \Rightarrow \vec{u}' = \frac{\vec{u} - \vec{v}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}} = \frac{\vec{u} - \vec{v}}{\sqrt{K}}. \quad 2.1$$

Diferenciando 1.30 e dividindo por 1.22 temos

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}' - d\vec{R}'_o}{dt' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{u}' - \vec{v}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}} = \frac{\vec{u}' - \vec{v}'}{\sqrt{K'}}. \quad 2.2$$

Quadro 2, lei das transformações das velocidades \vec{u} e \vec{u}'

$\vec{u}' = \frac{\vec{u} - \vec{v}}{\sqrt{K}}$	2.1	$\vec{u} = \frac{\vec{u}' - \vec{v}'}{\sqrt{K'}}$	2.2
$u'x' = \frac{ux - v}{\sqrt{K}}$	2.3	$ux = \frac{u'x' + v'}{\sqrt{K'}}$	2.4
$u'y' = \frac{uy}{\sqrt{K}}$	2.3.1	$uy = \frac{u'y'}{\sqrt{K'}}$	2.4.1
$u'z' = \frac{uz}{\sqrt{K}}$	2.3.2	$uz = \frac{u'z'}{\sqrt{K'}}$	2.4.2
$ v' = \frac{ v }{\sqrt{K}}$	1.15	$ v = \frac{ v' }{\sqrt{K'}}$	1.20
$\sqrt{K} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}$	2.5	$\sqrt{K'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}$	2.6

Multiplicando 2.1 por si mesma temos:

$$u' = \frac{u \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}}. \quad 2.7$$

Se em 2.7 fizermos $u = c$ então $u' = c$ conforme exige o princípio da constância da velocidade da luz.

Multiplicando 2.2 por si mesma temos:

$$u = \frac{u' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{u'^2} + \frac{2v'u'x'}{u'^2}}}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}}. \quad 2.8$$

Se em 2.8 fizermos $u' = c$ então $u = c$ conforme exige o princípio da constância da velocidade da luz.

Se em 2.3 fizermos $ux = c$ então $u'x' = \frac{c-v}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} - \frac{2vc}{c^2}}} = c$ conforme exige o princípio da constância da

velocidade da luz.

Se em 2.4 fizermos $u'x' = c$ então $ux = \frac{c+v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'c}{c^2}}} = c$ conforme exige o princípio da constância da

velocidade da luz.

Remodelando 2.7 e 2.8 temos:

$$\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}. \quad 2.9$$

$$\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad 2.10$$

As relações diretas entre os tempos e as velocidades de dois pontos no espaço, podem ser obtidas, com as igualdades $\vec{u}' = 0 \Rightarrow u'x' = 0 \Rightarrow ux = v$ provenientes de 2.1, que aplicadas em 1.17, 1.22, 1.20 e 1.15 fornecem

$$dt' = dt \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} - \frac{2vv'}{c^2}} \Rightarrow dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}, \quad 2.11$$

$$dt = dt' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'O}{c^2}} \Rightarrow dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}, \quad 2.12$$

$$|v| = \frac{|v'|}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'O}{c^2}}} \Rightarrow |v| = \frac{|v'|}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}, \quad 2.13$$

$$|v'| = \frac{|v|}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} - \frac{2vv'}{c^2}}} \Rightarrow |v'| = \frac{|v|}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}. \quad 2.14$$

Aberração do zênite.

Para o observador O' solidário com a estrela, $u'x' = 0$, $u'y' = c$ e $u'z' = 0$, e para o observador O solidário com a Terra temos do conjunto 2.3

$$0 = \frac{ux - v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}} \Rightarrow ux = v, c = \frac{uy}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vv}{c^2}}} \Rightarrow uy = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, uz = 0,$$

$$u = \sqrt{ux^2 + uy^2 + uz^2} = \sqrt{v^2 + \left(c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2} + 0^2 = c \text{ exatamente como prevê o princípio da relatividade}$$

Para o observador O a luz se propaga em uma direção que faz um ângulo com o eixo y vertical dado por

$$\text{tanga} = \frac{ux}{uy} = \frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 2,15$$

que é a fórmula de aberração do Zênite na relatividade especial.

Se invertêssemos os observadores obteríamos do conjunto 2.4

$$0 = \frac{u'x' + v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}} \Rightarrow u'x' = -v', c = \frac{u'y'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'(-v')}{c^2}}} \Rightarrow u'y' = c\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}, u'z' = 0,$$

$$u' = \sqrt{u'x'^2 + u'y'^2 + u'z'^2} = \sqrt{(-v')^2 + \left(c\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}\right)^2} + 0^2 = c$$

$$\text{tanga} = \frac{u'x'}{u'y'} = \frac{-v'}{c\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{-v'/c}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \quad 2,16$$

que é igual a 2.15, indicando o sinal negativo o sentido contrário dos ângulos.

Fórmula de Fresnel

Considerando em 2.4, $u'x' = c/n$ a velocidade da luz relativa à água, $v' = v$ a velocidade da água em relação ao aparelho, então $ux = c'$ será a velocidade da luz relativa ao laboratório portanto

$$c' = \frac{c/n + v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{2vc/n}{c^2}}} = \frac{c/n + v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{2v}{nc}}} = \left(\frac{c}{n} + v\right) \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{2v}{nc}\right)^{-\frac{1}{2}} \cong \left(\frac{c}{n} + v\right) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{2v}{nc}\right)\right]$$

desprezando o termo v^2/c^2 temos

$$c' \cong \left(\frac{c}{n} + v\right) \left(1 - \frac{v}{nc}\right) \cong \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2} - \frac{v^2}{nc}$$

e desprezando o termo v^2/nc temos a fórmula de Fresnel

$$c' = \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad 2,17$$

Efeito Doppler

Fazendo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ em 1.5 temos $r^2 - c^2 t^2 = r'^2 - c^2 t'^2$ ou $(r - ct) = (r' - ct') \frac{(r' + ct')}{(r + ct)}$ substituindo então $r = ct$, $r' = ct'$ e 1.7 encontramos

$(r - ct) = (r' - ct') \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}}$ como $c = \frac{w}{k} = \frac{w'}{k'}$ então $\frac{1}{k}(kr - wt) = \frac{1}{k'}(k'r' - w't')$ $\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}}$ onde para atender ao princípio da relatividade definiremos

$$k' = k \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}} \quad 2.18$$

resultando na expressão $(kr - wt) = (k'r' - w't')$ simétrica e invariável entre os observadores.

Para o observador O uma expressão na forma de $\psi(r, t) = f(kr - wt)$ 2.19

representa uma curva que se propaga na direção de \vec{R} . Para o observador O' uma expressão na forma de

$$\psi'(r', t') = f'(k'r' - w't') \quad 2.20$$

representa uma curva que se propaga na direção de \vec{R}' .

Aplicando em 2.18 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $k' = \frac{2\pi}{\lambda'}$, 1.14, 1.19, 1.23, 2.5 e 2.6 temos

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{K}} \text{ e } \lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{K'}} \quad 2.21$$

que aplicadas em $c = y\lambda = y'\lambda'$ fornece, $y' = y\sqrt{K}$ e $y = y'\sqrt{K'}$. 2.22

Considerando a relação de Planck-Einstein entre energia (E) e frequência (y), temos para o observador O $E = hy$ e para o observador O' $E' = hy'$ que substituídas em 2.22 fornecem

$$E' = E\sqrt{K} \text{ e } E = E'\sqrt{K'} \quad 2.23$$

Se o observador O, que vê o observador O' se deslocar com velocidade v no sentido positivo do eixo x , emite ondas de frequência y e velocidade c no sentido positivo do eixo x , então de acordo com 2.22 e

$$ux = c \text{ o observado O' medirá as ondas com velocidade } c \text{ e frequência } y' = y \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad 2.24$$

que é exatamente a fórmula clássica do efeito Doppler longitudinal.

Se o observador O', que vê o observador O se deslocar com velocidade $-v'$ no sentido negativo do eixo x' , emite ondas de frequência y' e velocidade c , então o observador O de acordo com 2.22 e $u'x' = -v'$ medirá ondas de frequência y e velocidade c em um plano perpendicular ao deslocamento de O' dadas por

$$y = y' \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \quad 2.25$$

que é exatamente a fórmula do efeito Doppler transversal na relatividade especial.

§3 Transformações das Acelerações \vec{a} e \vec{a}'

Diferenciando 2.1 e dividindo por 1.17 temos

$$\frac{d\vec{u}'}{dt'} = \frac{d\vec{u}/\sqrt{K}}{dt\sqrt{K}} + (\vec{u} - \vec{v}) \frac{v}{c^2} \frac{d\vec{u}x/K\sqrt{K}}{dt\sqrt{K}} \Rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{a}}{K} + (\vec{u} - \vec{v}) \frac{v}{c^2} \frac{ax}{K^2}. \quad 3.1$$

Diferenciando 2.2 e dividindo por 1.22 temos

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}'/\sqrt{K'}}{dt'\sqrt{K'}} - (\vec{u}' - \vec{v}') \frac{v'}{c^2} \frac{du'x'/K'\sqrt{K'}}{dt'\sqrt{K'}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{a}'}{K'} - (\vec{u}' - \vec{v}') \frac{v'}{c^2} \frac{a'x'}{K'^2}. \quad 3.2$$

Quadro 3, transformações das acelerações \vec{a} e \vec{a}'

$\vec{a}' = \frac{\vec{a}}{K} + (\vec{u} - \vec{v}) \frac{v}{c^2} \frac{ax}{K^2}$	3.1	$\vec{a} = \frac{\vec{a}'}{K'} - (\vec{u}' - \vec{v}') \frac{v'}{c^2} \frac{a'x'}{K'^2}$	3.2
$a'x' = \frac{ax}{K} + (ux - v) \frac{v}{c^2} \frac{ax}{K^2}$	3.3	$ax = \frac{a'x'}{K'} - (u'x' + v') \frac{v'}{c^2} \frac{a'x'}{K'^2}$	3.4
$a'y' = \frac{ay}{K} + uy \frac{v}{c^2} \frac{ax}{K^2}$	3.3.1	$ay = \frac{a'y'}{K'} - u'y' \frac{v'}{c^2} \frac{a'x'}{K'^2}$	3.4.1
$a'z' = \frac{az}{K} + uz \frac{v}{c^2} \frac{ax}{K^2}$	3.3.2	$az = \frac{a'z'}{K'} - u'z' \frac{v'}{c^2} \frac{a'x'}{K'^2}$	3.4.2
$a' = \frac{a}{K}$	3.8	$a = \frac{a'}{K'}$	3.9
$K = 1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}$	3.5	$K' = 1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}$	3.6

Dos quadros 2 e 3 podemos concluir que se para o observador O $\vec{u} \cdot \vec{a} = \text{zero}$ e $c^2 = ux^2 + uy^2 + uz^2$, então também para o observador O' $\vec{u}' \cdot \vec{a}' = \text{zero}$ e $c^2 = u'x'^2 + u'y'^2 + u'z'^2$, portanto \vec{u} é perpendicular a \vec{a} e \vec{u}' é perpendicular a \vec{a}' conforme exige a teoria dos vetores.

Diferenciando 1.9 com as velocidades e os tempos variando temos, $tdv + vdt = t'dv' + v'dt'$, mas considerando 1.16 temos:

$$vdt = v'dt' \Rightarrow tdv = t'dv' \quad 3.7$$

onde substituindo 1.15 e dividindo por 1.17 obtemos, $\frac{dv'}{dt'} = \frac{dv}{dtK}$ ou $a' = \frac{a}{K}$. 3.8

Podemos também substituir 1.20 em 3.7 e dividir por 1.22 deduzindo

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt'K'} \text{ ou } a = \frac{a'}{K'}. \quad 3.9$$

As relações diretas entre os módulos das acelerações a e a' de dois pontos no espaço podem ser obtidas, com as igualdades $\vec{u}' = 0 \Rightarrow u'x' = 0 \Rightarrow a'x' = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{v} \Rightarrow ux = v$ provenientes de 2.1, que aplicadas em 3.8 e 3.9 fornecem

$$a' = \frac{a}{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}} = \frac{a}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{ e } a = \frac{a'}{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}} = \frac{a'}{1 + \frac{v'^2}{c^2}}. \quad 3.10$$

Que também podem ser deduzidas de 3.1 e 3.2 se utilizarmos as mesmas igualdades $\vec{u}' = 0 \Rightarrow u'x' = 0 \Rightarrow a'x' = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{v} \Rightarrow ux = v$ provenientes de 2.1.

§4 Transformações dos Momentos \vec{p} e \vec{p}'

Definidos como $\vec{p} = m(u)\vec{u}$ e $\vec{p}' = m'(u')\vec{u}'$,

4.1

onde $m(u)$ e $m'(u')$ simbolizam as massas funções dos módulos das velocidades $u = |\vec{u}|$ e $u' = |\vec{u}'|$.

Obteremos as relações entre $m(u)$ e $m'(u')$ e a massa em repouso m_0 , analisando o choque elástico em um plano entre a esfera s que para o observador O se desloca ao longo do eixo y com velocidade $u_y = w$ e a esfera s' que para o observador O' se desloca ao longo do eixo y' com velocidade $u'_y = -w$. As esferas quando observadas em repouso relativo são idênticas e têm massa m_0 . O choque considerado é simétrico em relação a uma linha paralela aos eixos y e y' que passe no centro das esferas no momento da colisão.

Antes e após o choque as esferas têm velocidades observadas por O e O' de acordo com a seguinte tabela obtida do quadro 2

	Esfera	Observador O	Observador O'
Antes do choque	s	$uxs = zero, uys = w$	$u'x's = -v', u'y's = w\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$
	s'	$uxs' = v, uys' = -w\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$	$u'x's' = zero, u'y's' = -w$
Após o choque	s	$uxs = zero, uys = -\bar{w}$	$u'x's = -v', u'y's = -\bar{w}\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$
	s'	$uxs' = v, uys' = \bar{w}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$	$u'x's' = zero, u'y's' = \bar{w}$

Para o observador O , o princípio de conservação dos momentos, estabelece que os momentos $px = m(u)ux$ e $py = m(u)uy$, das esferas s e s' em relação aos eixos x e y , permanecem constantes antes e após o choque, por isso para o eixo x

$$m(\sqrt{uxs^2 + uys^2})uxs + m(\sqrt{uxs'^2 + uys'^2})uxs' = m(\sqrt{uxs^2 + uys^2})uxs + m(\sqrt{uxs'^2 + uys'^2})uxs',$$

onde substituindo os valores da tabela obtemos

$$m\left(\sqrt{v^2 + \left(-w\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2}\right)v = m\left(\sqrt{v^2 + \left(\bar{w}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2}\right)v \text{ de onde concluímos que } \bar{w} = w,$$

e para o eixo y

$$m(\sqrt{uxs^2 + uys^2})uys + m(\sqrt{uxs'^2 + uys'^2})uys' = m(\sqrt{uxs^2 + uys^2})uys + m(\sqrt{uxs'^2 + uys'^2})uys',$$

onde substituindo os valores da tabela obtemos

$$m(w)w - m\left(\sqrt{v^2 + \left(-w\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2}\right)w\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -m(\bar{w})\bar{w} + m\left(\sqrt{v^2 + \left(\bar{w}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2}\right)\bar{w}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

simplicando encontramos

$$m(w) = m\left(\sqrt{v^2 + w^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \text{ onde quando } w \rightarrow 0 \text{ se torna}$$

$$m(0) = m\left(\sqrt{v^2 + 0^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow m(0) = m(v)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

mais $m(0)$ é igual a massa m_0 em repouso portanto

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ no caso da velocidade ser relativa } v = u \Rightarrow m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

4.2

que aplicada em 4.1 fornece $\vec{p} = m(u)\vec{u} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$. 4.1

Com os mesmos procedimentos obteríamos para o observador O'

$$m'(u') = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \quad 4.3$$

$$\text{e } \vec{p}' = m'(u')\vec{u}' = \frac{m_0\vec{u}'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}. \quad 4.1$$

$$\text{Simplificando a simbologia adotaremos } m = m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad 4.2$$

$$\text{e } m' = m'(u') = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \quad 4.3$$

que simplificam os momentos em $\vec{p} = m\vec{u}$ e $\vec{p}' = m'\vec{u}'$. 4.1

Aplicando 4.2 e 4.3 em 2.9 e 2.10 obtemos

$$m = m' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}} \Rightarrow m = m' \sqrt{K'} \quad \text{e} \quad m' = m \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}} \Rightarrow m' = m \sqrt{K}. \quad 4.4$$

Definindo força como Newton temos $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt}$ e $\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} = \frac{d(m'\vec{u}')}{dt'}$, com isso podemos então definir a energia cinética como

$$E_k = \int_0^u \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_0^u \frac{d(m\vec{u})}{dt} \cdot d\vec{R} = \int_0^u d(m\vec{u}) \cdot \vec{u} = \int_0^u (u^2 dm + m u du),$$

$$\text{e } E'_k = \int_0^{u'} \vec{F}' \cdot d\vec{R}' = \int_0^{u'} \frac{d(m'\vec{u}')}{dt'} \cdot d\vec{R}' = \int_0^{u'} d(m'\vec{u}') \cdot \vec{u}' = \int_0^{u'} (u'^2 dm' + m' u' du').$$

Remodelando 4.2 e 4.3 e diferenciando temos $m^2 c^2 - m^2 u^2 = m_0^2 c^2 \Rightarrow u^2 dm + m u du = c^2 dm$ e $m'^2 c^2 - m'^2 u'^2 = m_0^2 c^2 \Rightarrow u'^2 dm' + m' u' du' = c^2 dm'$, que aplicadas nas fórmulas da energia cinética fornece

$$E_k = \int_{m_0}^m c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2 = E - E_0 \quad \text{e} \quad E'_k = \int_{m_0}^{m'} c^2 dm' = m' c^2 - m_0 c^2 = E' - E_0, \quad 4.5$$

onde $E = mc^2$ e $E' = m' c^2$ 4.6

são as energias totais como na relatividade especial e $E_0 = m_0 c^2$ a energia de repouso. 4.7

Aplicando 4.6 em 4.4 obtemos exatamente 2.23.

De 4.6, 4.2, 4.3 e 4.1 encontramos:

$$E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \quad \text{e} \quad E' = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p'^2}, \quad 4.8$$

Relações idênticas as da relatividade especial.

Multiplicando 2.1 e 2.2 por m_0 obtemos:

$$\frac{m_0 \vec{u}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow m' \vec{u}' = m \vec{u} - m \vec{v} \Rightarrow \vec{p}' = \vec{p} - \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad 4.9$$

$$\text{e } \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \vec{u}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} - \frac{m_0 \vec{v}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \Rightarrow m \vec{u} = m' \vec{u}' - m' \vec{v}' \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}' - \frac{E'}{c^2} \vec{v}' . \quad 4.10$$

Quadro 4, transformações dos momentos \vec{p} e \vec{p}'

$\vec{p}' = \vec{p} - \frac{E}{c^2} \vec{v}$	4.9	$\vec{p} = \vec{p}' - \frac{E'}{c^2} \vec{v}'$	4.10
$p' x' = px - \frac{E}{c^2} v$	4.11	$px = p' x' + \frac{E'}{c^2} v'$	4.12
$p' y' = py$	4.11.1	$py = p' y'$	4.12.1
$p' z' = pz$	4.11.2	$pz = p' z'$	4.12.2
$E' = E \sqrt{K}$	2.23	$E = E' \sqrt{K'}$	2.23
$m = m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$	4.2	$m' = m'(u') = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}$	4.3
$m' = m \sqrt{K}$	4.4	$m = m' \sqrt{K'}$	4.4
$E_k = E - E_o$	4.5	$E'_k = E' - E_o$	4.5
$E = mc^2$	4.6	$E' = m' c^2$	4.6
$E_o = m_0 c^2$	4.7	$E_o = m_0 c^2$	4.7
$E = c \sqrt{m_o^2 c^2 + p^2}$	4.8	$E' = c \sqrt{m_o^2 c^2 + p'^2}$	4.8

Equação de onda de Louis de Broglie

O observador O' associa a uma partícula em repouso em sua origem as seguintes propriedades:

- massa de repouso m_0
- tempo $t' = t_o$
- Energia de repouso $E_o = m_0 c^2$
- Frequência $\gamma_o = \frac{E_o}{h} = \frac{m_0 c^2}{h}$
- Função de onda $\psi_o = a \text{sen} 2\pi \gamma_o t_o$ com $a = \text{constante}$.

O observador O associa a uma partícula com velocidade v as seguintes propriedades:

- massa $m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (de 4.2 onde $u = v$)
- tempo $t = \frac{t_o}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2} - \frac{2vv}{c^2}}} = \frac{t_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (de 1.7 com $ux = v$ e $t' = t_o$)
- Energia $E = \frac{E_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (de 2.23 com $ux = v$ e $E' = E_o$)

-Frequência $\gamma = \frac{\gamma_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_o c^2/h}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E/h$ (de 2.22 com $ux = v$ e $\gamma' = \gamma_o$)

-distância $x = vt$ (de 1.2 com $x' = 0$)

-Função de onda $\psi = asen2\pi\gamma_o t_o = asen2\pi\gamma \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = asen2\pi\gamma \left(t - \frac{x}{u} \right)$ com $u = \frac{c^2}{v}$

-Comprimento de onda $u = \gamma\lambda = \frac{c^2}{v} = \frac{E}{p} = \frac{\gamma h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$ (de 4.9 com $\vec{p}' = \vec{p}_o = 0$)

Para voltarmos ao referencial do observador O' onde $\vec{u}' = 0 \Rightarrow u' x' = 0$, consideraremos as seguintes variáveis:

-distância $x = v't'$ (de 1.4 com $x' = 0$)

-tempo $t = t' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'O}{c^2}} = t' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}$ (de 1.8 com $u' x' = 0$)

-frequência $\gamma = \gamma' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}$ (de 2.22 com $u' x' = 0$)

-velocidade $v = \frac{v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}$ (de 2.13)

que aplicadas a função de onda fornece

$$\psi' = asen2\pi\gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) = asen2\pi\gamma' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \left(t' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} - \frac{v'^2 t'}{c^2 \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \right) = asen2\pi\gamma' t',$$

mas como $t' = t_o$ e $\gamma' = \gamma_o$ então $\psi' = \psi_o$.

§5 Transformações das Forças \vec{F} e \vec{F}'

Diferenciando 4.9 e dividindo por 1.17 temos

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \frac{d\vec{p}}{dt\sqrt{K}} - \frac{dE}{dt\sqrt{K}} \frac{\vec{v}}{c^2} \Rightarrow \vec{F}' = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[\vec{F} - \frac{dE}{dt} \frac{\vec{v}}{c^2} \right] \Rightarrow \vec{F}' = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{u}) \frac{\vec{v}}{c^2} \right]. \quad 5.1$$

Diferenciando 4.10 e dividindo por 1.22 temos

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}'}{dt'\sqrt{K'}} - \frac{dE'}{dt'\sqrt{K'}} \frac{\vec{v}'}{c^2} \Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{K'}} \left[\vec{F}' - \frac{dE'}{dt'} \frac{\vec{v}'}{c^2} \right] \Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{K'}} \left[\vec{F}' - (\vec{F}' \cdot \vec{u}') \frac{\vec{v}'}{c^2} \right]. \quad 5.2$$

Do sistema formado por 5.1 e 5.2 obtemos

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE'}{dt'} \quad \text{ou} \quad \vec{F} \cdot \vec{u} = \vec{F}' \cdot \vec{u}', \quad 5.3$$

que é um invariante entre os observadores na relatividade ondulatória.

Quadro 5, transformações das Forças \vec{F} e \vec{F}'

$\vec{F}' = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{u}) \frac{\vec{v}}{c^2} \right]$	5.1	$\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{K'}} \left[\vec{F}' - (\vec{F}' \cdot \vec{u}') \frac{\vec{v}'}{c^2} \right]$	5.2
$F' x' = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[Fx - (\vec{F} \cdot \vec{u}) \frac{v}{c^2} \right]$	5.4	$Fx = \frac{1}{\sqrt{K'}} \left[F' x' + (\vec{F}' \cdot \vec{u}') \frac{v'}{c^2} \right]$	5.5
$F' y' = Fy / \sqrt{K}$	5.4.1	$Fy = F' y' / \sqrt{K'}$	5.5.1
$F' z' = Fz / \sqrt{K}$	5.4.2	$Fz = F' z' / \sqrt{K'}$	5.5.2
$\frac{dE'}{dt'} = \frac{dE}{dt}$	5.3	$\vec{F} \cdot \vec{u} = \vec{F}' \cdot \vec{u}'$	5.3

§6 Transformações das densidades de carga ρ , ρ' e densidades de corrente \vec{J} e \vec{J}'

Multiplicando 2.1 e 2.2 pela densidade de carga elétrica em repouso definida como $\rho_o = \frac{dq}{dv_o}$ temos

$$\frac{\rho_o \vec{u}'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{\rho_o \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{\rho_o \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow \rho' \vec{u}' = \rho \vec{u} - \rho \vec{v} \Rightarrow \vec{J}' = \vec{J} - \rho \vec{v} \quad 6.1$$

$$\text{e } \frac{\rho_o \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\rho_o \vec{u}'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} - \frac{\rho_o \vec{v}'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \Rightarrow \rho \vec{u} = \rho' \vec{u}' - \rho' \vec{v}' \Rightarrow \vec{J} = \vec{J}' - \rho' \vec{v}'. \quad 6.2$$

Quadro 6, transformações das densidades de carga ρ , ρ' e densidades de corrente \vec{J} e \vec{J}'

$\vec{J}' = \vec{J} - \rho \vec{v}$	6.1	$\vec{J} = \vec{J}' - \rho' \vec{v}'$	6.2
$J' x' = Jx - \rho v$	6.3	$Jx = J' x' + \rho' v'$	6.4
$J' y' = Jy$	6.3.1	$Jy = J' y'$	6.4.1
$J' z' = Jz$	6.3.2	$Jz = J' z'$	6.4.2
$\vec{J} = \rho \vec{u}$	6.5	$\vec{J}' = \rho' \vec{u}'$	6.6
$\rho = \frac{\rho_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$	6.7	$\rho' = \frac{\rho_o}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$	6.8
$\rho' = \rho \sqrt{K}$	6.9	$\rho = \rho' \sqrt{K'}$	6.10

Do sistema formado por 6.1 e 6.2 obtivemos 6.9 e 6.10.

§7 Transformações dos campos elétricos \vec{E} , \vec{E}' e magnéticos \vec{B} , \vec{B}'

Aplicando as forças de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ e $\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}')$ em 5.1 e 5.2 temos

$$q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}') = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \left[q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} \right] \frac{\vec{v}}{c^2} \right]$$

$$\text{e } q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \frac{1}{\sqrt{K'}} \left[q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}') - \left[q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}') \cdot \vec{u}' \right] \frac{\vec{v}'}{c^2} \right], \text{ que simplificadas se tornam}$$

$$(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}') = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - (\vec{E} \cdot \vec{u}) \frac{\vec{v}}{c^2} \right] \text{ e } (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \frac{1}{\sqrt{K'}} \left[(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}') - (\vec{E}' \cdot \vec{u}') \frac{\vec{v}'}{c^2} \right] \text{ de onde}$$

obtemos a invariância de $\vec{E} \cdot \vec{u} = \vec{E}' \cdot \vec{u}'$ entre os observadores como conseqüência de 5.3 e as seguintes componentes de cada eixo

$$(E' x' + u' y' B' z' - u' z' B' y') = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[Ex + uyBz - uzBy - \frac{Exuxv}{c^2} - \frac{Eyu yv}{c^2} - \frac{Ezuzv}{c^2} \right] \quad 7.1$$

$$(E' y' + u' z' B' x' - u' x' B' z') = \frac{1}{\sqrt{K}} [Ey + uzBx - uxBz] \quad 7.1.1$$

$$(E' z' + u' x' B' y' - u' y' B' x') = \frac{1}{\sqrt{K}} [Ez + uxBy - uyBx] \quad 7.1.2$$

$$(Ex + uyBz - uzBy) = \frac{1}{\sqrt{K'}} \left[E' x' + u' y' B' z' - u' z' B' y' + \frac{E' x' u' x' v'}{c^2} + \frac{E' y' u' y' v'}{c^2} + \frac{E' z' u' z' v'}{c^2} \right] \quad 7.2$$

$$(Ey + uzBx - uxBz) = \frac{1}{\sqrt{K'}} [E' y' + u' z' B' x' - u' x' B' z'] \quad 7.2.1$$

$$(Ez + uxBy - uyBx) = \frac{1}{\sqrt{K'}} [E' z' + u' x' B' y' - u' y' B' x'] \quad 7.2.2$$

Para o conjunto 7.1 e 7.2 obtemos duas soluções descritas nos quadros 7 e 8.

Quadro 7, transformações dos campos elétricos \vec{E} , \vec{E}' e magnéticos \vec{B} e \vec{B}'

$E' x' = \frac{Ex}{\sqrt{K}} \left(1 - \frac{vux}{c^2} \right)$	7.3	$Ex = \frac{E' x'}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v' u' x'}{c^2} \right)$	7.4
$E' y' = \frac{Ey}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux}{c^2} \right) - \frac{vBz}{\sqrt{K}}$	7.3.1	$Ey = \frac{E' y'}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'}{c^2} \right) + \frac{v' B' z'}{\sqrt{K'}}$	7.4.1
$E' z' = \frac{Ez}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux}{c^2} \right) + \frac{vBy}{\sqrt{K}}$	7.3.2	$Ez = \frac{E' z'}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'}{c^2} \right) - \frac{v' B' y'}{\sqrt{K'}}$	7.4.2
$B' x' = Bx$	7.5	$Bx = B' x'$	7.6
$B' y' = By + \frac{v}{c^2} Ez$	7.5.1	$By = B' y' - \frac{v'}{c^2} E' z'$	7.6.1
$B' z' = Bz - \frac{v}{c^2} Ey$	7.5.2	$Bz = B' z' + \frac{v'}{c^2} E' y'$	7.6.2
$E' y' = Ey \sqrt{K}$	7.7	$Ey = E' y' \sqrt{K'}$	7.8
$E' z' = Ez \sqrt{K}$	7.7.1	$Ez = E' z' \sqrt{K'}$	7.8.1
$By = -\frac{ux}{c^2} Ez$	7.9	$B' y' = -\frac{u' x'}{c^2} E' z'$	7.10
$Bz = \frac{ux}{c^2} Ey$	7.9.1	$B' z' = \frac{u' x'}{c^2} E' y'$	7.10.1

Quadro 8, transformações dos campos elétricos \vec{E} , \vec{E}' e magnéticos \vec{B} e \vec{B}'

$E' x' = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[Ex - (\vec{E} \cdot \vec{u}) \frac{v}{c^2} \right]$	7.11	$Ex = \frac{1}{\sqrt{K'}} \left[E' x' + (\vec{E}' \cdot \vec{u}') \frac{v'}{c^2} \right]$	7.12
$E' y' = \frac{1}{\sqrt{K}} [Ey - vBz]$	7.11.1	$Ey = \frac{1}{\sqrt{K'}} (E' y' + v' B' z')$	7.12.1
$E' z' = \frac{1}{\sqrt{K}} [Ez + vBy]$	7.11.2	$Ez = \frac{1}{\sqrt{K'}} (E' z' - v' B' y')$	7.12.2
$B' x' = Bx$	7.13	$Bx = B' x'$	7.14
$B' y' = By$	7.13.1	$By = B' y'$	7.14.1
$B' z' = Bz$	7.13.2	$Bz = B' z'$	7.14.2

Relação entre o campo elétrico e o campo magnético

Se um campo eletromagnético tem para o observador O' a componente magnética nula $\vec{B}' = zero$ e a componente elétrica \vec{E}' . Para o observador O este campo se apresenta com ambas as componentes, sendo o campo magnético descrito pelo conjunto 7.5 e tem como componentes:

$$B_x = zero, \quad B_y = -\frac{vE_z}{c^2}, \quad B_z = \frac{vE_y}{c^2}, \quad 7.15$$

que são equivalentes a $\vec{B} = \frac{I}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$. 7.16

Fórmula de Biot-Savart

O observador O' associa a uma carga elétrica, em repouso, distribuída uniformemente ao longo de seu eixo x' as propriedades eletromagnéticas seguintes:

-densidade linear de carga elétrica em repouso $\rho_o = \frac{dq}{dx'}$

-corrente elétrica nula $I' = zero$

-campo magnético nulo $\vec{B}' = zero \Rightarrow \vec{u}' = zero$

-campo elétrico radial de módulo $E' = \sqrt{E' y'^2 + E' z'^2} = \frac{\rho_o}{2\pi\epsilon_o R}$ em qualquer ponto de raio

$R = \sqrt{y'^2 + z'^2}$ com a componente $E' x' = zero$.

Para o observador O trata-se de uma carga elétrica distribuída uniformemente ao longo de seu eixo x com velocidade $ux = v$ a qual associa as propriedades eletromagnéticas seguintes:

-densidade linear de carga elétrica $\rho = \frac{\rho_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (de 6.7 com $u = v$)

-corrente elétrica $I = \rho v = \frac{\rho_o v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

-campo elétrico radial de módulo $E = \frac{E'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (de acordo com os conjuntos 7.3 e 7.5 com

$\vec{B}' = zero \Rightarrow \vec{u}' = zero$ e $ux = v$)

-campo magnético de componentes $B_x = zero$, $B_y = -\frac{vE_z}{c^2}$, $B_z = \frac{vE_y}{c^2}$ e módulo

$$B = \frac{vE}{c^2} = \frac{v}{c^2} \frac{E'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{c^2} \frac{I}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\rho_o}{2\pi\epsilon_o R} = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \text{ onde } \mu_o = \frac{I}{\epsilon_o c^2}, \text{ sendo na forma vetorial}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \vec{u} \quad 7.17$$

onde \vec{u} é um vetor unitário perpendicular ao campo elétrico \vec{E} e tangente a circunferência que passa pelo ponto de raio $R = \sqrt{y^2 + z^2}$ porque do conjunto 7.4 e 7.6 $\vec{E} \cdot \vec{B} = zero$.

§8 Transformações dos operadores diferenciais

Quadro 9, operadores diferenciais

$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}$	8.1	$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'}$	8.2
$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}$	8.1.1	$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}$	8.2.1
$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$	8.1.2	$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$	8.2.2
$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{v}{\sqrt{K}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vx}{c^2 t} \right) \frac{\partial}{\partial t}$	8.3	$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{v'}{\sqrt{K'}} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v'x'}{c^2 t'} \right) \frac{\partial}{\partial t'}$	8.4

Do sistema formado por 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4 e com 1.15 e 1.20 encontramos somente as soluções

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{x'/t'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} = 0 \quad 8.5$$

Do que concluímos que somente as funções ψ (2.19) e ψ' (2.20) que atenderem as condições

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \text{ e } \frac{\partial \psi'}{\partial x'} + \frac{x'/t'}{c^2} \frac{\partial \psi'}{\partial t'} = 0, \quad 8.6$$

podem representar a propagação com velocidade c na relatividade ondulatória, indicando que o campo propaga com velocidade definida e sem distorção atendendo a 1.13 e 1.18. Devido à simetria, também podemos escrever para os demais eixos

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{y/t}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi'}{\partial y'} + \frac{y'/t'}{c^2} \frac{\partial \psi'}{\partial t'} = 0 \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{z/t}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi'}{\partial z'} + \frac{z'/t'}{c^2} \frac{\partial \psi'}{\partial t'} = 0. \quad 8.7$$

Das transformações de espaço e tempo da relatividade ondulatória obtemos para o teorema de Jacob

$$J = \frac{\partial(x', y', z', t')}{\partial(x, y, z, t)} = \frac{1 - \frac{vux}{c^2}}{\sqrt{K}} \text{ e } J' = \frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial(x', y', z', t')} = \frac{1 + \frac{v'u'x'}{c^2}}{\sqrt{K'}}, \quad 8.8$$

variáveis com ux e $u'x'$ conseqüência do princípio da constância da velocidade da luz, mas são iguais $J = J'$ e serão iguais a um $J = J' = 1$ quando $ux = u'x' = c$.

Invariância da Equação de Onda

A equação de onda para o observador O' é

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \text{zero}$$

onde aplicando às fórmulas do quadro 9 e 1.13 obtemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \left[\frac{v}{\sqrt{K}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 = \text{zero}$$

de onde encontramos

$$K \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{2v^3}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{4v^2 ux}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{v^4}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2v^3 ux}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{2v^3}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{2v^2 ux}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{2v^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2vux}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2v^3 ux}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{v^2 ux^2}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{v^4}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \text{zero}$$

que simplificando fornece

$$K \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2v^2 ux}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2vux}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{v^2 ux^2}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \text{zero}$$

onde reordenando os termos encontramos

$$K \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2} \right) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2ux}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{ux^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) = \text{zero} \quad 8.9$$

mais de 8.5 e 1.13 temos $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u x}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2ux}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{ux^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = zero$

que aplicada em 8.9 fornece a equação de onda para o observador O

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = zero. \quad 8.10$$

Para retornar ao referencial do observador O' aplicaremos em 8.10 às fórmulas do quadro 9 e 1.18, obtendo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \left[-\frac{v'}{\sqrt{K'}} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \right]^2 = zero$$

de onde encontramos

$$\begin{aligned} & K' \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + K' \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + K' \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{2v'}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} - \frac{2v'^3}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} - \frac{4v'^2 u' x'}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{v'^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{v'^4}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \\ & + \frac{2v'^3 u' x'}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{v'^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2v'}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{2v'^3}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{2v'^2 u' x'}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} - \frac{2v'^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{2v' u' x'}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \\ & - \frac{v'^3 u' x'}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{v'^2 u' x'^2}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{v'^4}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = zero \end{aligned}$$

que simplificando fornece

$$K' \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + K' \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + K' \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{2v'^2 u' x'}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} - \frac{v'^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{v'^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{2v' u' x'}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{v'^2 u' x'^2}{c^6} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = zero$$

onde reordenando os termos encontramos

$$K' \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + K' \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + K' \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v' u' x'}{c^2} \right) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{v'^2}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2u' x'}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{u' x'^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) = zero$$

mais de 8.5 e 1.18 temos

$$\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{x'/t'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{u' x'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{2u' x'}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{u' x'^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = zero$$

que substituída na equação reordenada fornece a equação de onda para o observador O'.

Invariância da Equação de continuidade

A equação de continuidade na forma diferencial para o observador O' é

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}' = zero \Rightarrow \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial J_x'}{\partial x'} + \frac{\partial J_y'}{\partial y'} + \frac{\partial J_z'}{\partial z'} = zero \quad 8.11$$

onde substituindo as fórmulas do quadro 6, 9 e 1.13 obtemos

$$\left(\frac{v}{\sqrt{K}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right) \rho \sqrt{K} + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) (J_x - \rho v) + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = zero$$

fazendo as operações encontramos

$$\frac{v \partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{vux}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial J_x}{\partial t} - \frac{v \partial \rho}{\partial x} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = zero$$

que simplificando fornece

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{vux}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial J_x}{\partial t} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = zero$$

onde aplicando $J_x = \rho ux$ com ux constante obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{vux}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial (\rho ux)}{\partial t} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = zero \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = zero \quad 8.12$$

que é a equação de continuidade na forma diferencial para o observador O.

Para obtermos novamente a equação de continuidade na forma diferencial para o observador O'. Substituiremos as fórmulas do quadro 6, 9 e 1.18 em 8.12 obtendo:

$$\left(-\frac{v'}{\sqrt{K'}} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v'u'x'}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \right) \rho' \sqrt{K'} + \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) (J'x' + \rho'v') + \frac{\partial J'y'}{\partial y'} + \frac{\partial J'z'}{\partial z'} = zero$$

fazendo as operações encontramos

$$-\frac{v'\partial\rho'}{\partial x'} + \frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \frac{v'^2}{c^2} \frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \frac{v'u'x'}{c^2} \frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \frac{\partial J'x'}{\partial x'} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial J'x'}{\partial t'} + \frac{v'\partial\rho'}{\partial x'} - \frac{v'^2}{c^2} \frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \frac{\partial J'y'}{\partial y'} + \frac{\partial J'z'}{\partial z'} = zero$$

que simplificando fornece

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \frac{v'u'x'}{c^2} \frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \frac{\partial J'x'}{\partial x'} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial J'x'}{\partial t'} + \frac{\partial J'y'}{\partial y'} + \frac{\partial J'z'}{\partial z'} = zero$$

onde aplicando $J'x' = \rho'u'x'$ com $u'x'$ constante obtemos

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \frac{v'u'x'}{c^2} \frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \frac{\partial J'x'}{\partial x'} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial(\rho'u'x')}{\partial t'} + \frac{\partial J'y'}{\partial y'} + \frac{\partial J'z'}{\partial z'} = zero \Rightarrow \frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \frac{\partial J'x'}{\partial x'} + \frac{\partial J'y'}{\partial y'} + \frac{\partial J'z'}{\partial z'} = zero$$

que é a equação de continuidade na forma diferencial para o observador O'.

Invariância das Equações de Maxwell

Que na forma diferencial são escritas na seguinte forma

Com carga elétrica

Para o observador O		Para o observador O'	
$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	8.13	$\frac{\partial E'x'}{\partial x'} + \frac{\partial E'y'}{\partial y'} + \frac{\partial E'z'}{\partial z'} = \frac{\rho'}{\epsilon_0}$	8.14
$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$	8.15	$\frac{\partial B'x'}{\partial x'} + \frac{\partial B'y'}{\partial y'} + \frac{\partial B'z'}{\partial z'} = 0$	8.16
$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$	8.17	$\frac{\partial E'y'}{\partial x'} - \frac{\partial E'x'}{\partial y'} = -\frac{\partial B'z'}{\partial t'}$	8.18
$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$	8.19	$\frac{\partial E'z'}{\partial y'} - \frac{\partial E'y'}{\partial z'} = -\frac{\partial B'x'}{\partial t'}$	8.20
$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$	8.21	$\frac{\partial E'x'}{\partial z'} - \frac{\partial E'z'}{\partial x'} = -\frac{\partial B'y'}{\partial t'}$	8.22
$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 J_z + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$	8.23	$\frac{\partial B'y'}{\partial x'} - \frac{\partial B'x'}{\partial y'} = \mu_0 J'_z + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'z'}{\partial t'}$	8.24
$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$	8.25	$\frac{\partial B'z'}{\partial y'} - \frac{\partial B'y'}{\partial z'} = \mu_0 J'_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'x'}{\partial t'}$	8.26
$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 J_y + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$	8.27	$\frac{\partial B'x'}{\partial z'} - \frac{\partial B'z'}{\partial x'} = \mu_0 J'_y + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'y'}{\partial t'}$	8.28

Sem carga elétrica $\rho = \rho' = zero$ e $\vec{J} = \vec{J}' = zero$

Para o observador O		Para o observador O'	
$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$	8.29	$\frac{\partial E'x'}{\partial x'} + \frac{\partial E'y'}{\partial y'} + \frac{\partial E'z'}{\partial z'} = 0$	8.30
$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$	8.31	$\frac{\partial B'x'}{\partial x'} + \frac{\partial B'y'}{\partial y'} + \frac{\partial B'z'}{\partial z'} = 0$	8.32
$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$	8.33	$\frac{\partial E'y'}{\partial x'} - \frac{\partial E'x'}{\partial y'} = -\frac{\partial B'z'}{\partial t'}$	8.34
$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$	8.35	$\frac{\partial E'z'}{\partial y'} - \frac{\partial E'y'}{\partial z'} = -\frac{\partial B'x'}{\partial t'}$	8.36
$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$	8.37	$\frac{\partial E'x'}{\partial z'} - \frac{\partial E'z'}{\partial x'} = -\frac{\partial B'y'}{\partial t'}$	8.38

$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$	8.39	$\frac{\partial B'_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial B'_{x'}}{\partial y'} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'_{z'}}{\partial t'}$	8.40
$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$	8.41	$\frac{\partial B'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial B'_{y'}}{\partial z'} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'_{x'}}{\partial t'}$	8.42
$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$	8.43	$\frac{\partial B'_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial B'_{z'}}{\partial x'} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'_{y'}}{\partial t'}$	8.44
$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$	8.45		

Demonstremos a invariância da lei de Gauss na forma diferencial, que para o observador O' é

$$\frac{\partial E'_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E'_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E'_{z'}}{\partial z'} = \frac{\rho'}{\epsilon_0} \quad 8.14$$

onde substituindo as fórmulas dos quadros 6, 7, 9 e 1.13, e considerando ux constante, obtemos

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{E_x}{\sqrt{K}} \left(1 - \frac{vux}{c^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{E_y}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux}{c^2} \right) - \frac{vB_z}{\sqrt{K}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{E_z}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux}{c^2} \right) + \frac{vB_y}{\sqrt{K}} \right] = \frac{\rho \sqrt{K}}{\epsilon_0}$$

fazendo os produtos, somando e subtraindo o termo $\frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x}$, encontramos

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{vux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{v^2 ux}{c^4} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{vux}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{v \partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{vux}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{v \partial B_y}{\partial z} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho K}{\epsilon_0}$$

que reordenando resulta em

$$- \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{ux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) - v \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux}{c^2} \right) = \frac{\rho K}{\epsilon_0}$$

onde o primeiro parêntese é 8.5 e por isso igual a zero, o segundo parêntese é igual a

$$-v(\mu_0 J_x) = -v\mu_0 \rho ux = -\frac{v\rho ux}{\epsilon_0 c^2} \text{ obtido de 8.25 e 8.45 resultando então em}$$

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux}{c^2} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vux}{c^2} \right) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{vux}{c^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{vux}{c^2}$$

$$\text{de onde obtemos } \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad 8.13$$

que é a lei de Gauss na forma diferencial para o observador O.

Para fazer o inverso substituiremos em 8.13 as fórmulas dos quadros 6, 7, 9 e 1.18, e considerando u'x' constante, obtemos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right] \frac{E'_{x'}}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v' u' x'}{c^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{E'_{y'}}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'}{c^2} \right) + \frac{v' B'_{z'}}{\sqrt{K'}} \right] + \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{E'_{z'}}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'}{c^2} \right) - \frac{v' B'_{y'}}{\sqrt{K'}} \right] = \frac{\rho' \sqrt{K'}}{\epsilon_0}$$

fazendo os produtos, somando e subtraindo o termo $\frac{v'^2}{c^2} \frac{\partial E'_{x'}}{\partial x'}$, obtemos

$$\frac{\partial E' x'}{\partial x'} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial E' x'}{\partial t'} + \frac{v' u' x'}{c^2} \frac{\partial E' x'}{\partial x'} - \frac{v'^2 u' x'}{c^4} \frac{\partial E' x'}{\partial t'} + \frac{\partial E' y'}{\partial y'} + \frac{v'^2}{c^2} \frac{\partial E' y'}{\partial y'} + \frac{v' u' x'}{c^2} \frac{\partial E' y'}{\partial y'} +$$

$$+ \frac{v' \partial B' z'}{\partial y'} + \frac{\partial E' z'}{\partial z'} + \frac{v'^2}{c^2} \frac{\partial E' z'}{\partial z'} + \frac{v' u' x'}{c^2} \frac{\partial E' z'}{\partial z'} - \frac{v' \partial B' y'}{\partial z'} + \frac{v'^2}{c^2} \frac{\partial E' x'}{\partial x'} - \frac{v'^2}{c^2} \frac{\partial E' x'}{\partial x'} = \frac{\rho' K'}{\epsilon_o}$$

que reordenando resulta em

$$- \frac{v'^2}{c^2} \left(\frac{\partial E' x'}{\partial x'} + \frac{u' x'}{c^2} \frac{\partial E' x'}{\partial t'} \right) + v' \left(\frac{\partial B' z'}{\partial y'} - \frac{\partial B' y'}{\partial z'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E' x'}{\partial t'} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial E' x'}{\partial x'} + \frac{\partial E' y'}{\partial y'} + \frac{\partial E' z'}{\partial z'} \right) \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'}{c^2} \right) = \frac{\rho' K'}{\epsilon_o}$$

onde o primeiro parêntese é 8.5 e por isso igual a zero o segundo parêntese é igual a

$$v' (\mu_o J' x') = v' \mu_o \rho' u' x' = \frac{v' \rho' u' x'}{\epsilon_o c^2} \text{ obtido de 8.26 e 8.45 resultando então em}$$

$$\left(\frac{\partial E' x'}{\partial x'} + \frac{\partial E' y'}{\partial y'} + \frac{\partial E' z'}{\partial z'} \right) \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'}{c^2} \right) = \frac{\rho'}{\epsilon_o} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'}{c^2} \right) + \frac{\rho}{\epsilon_o} \frac{v' u' x'}{c^2} - \frac{\rho'}{\epsilon_o} \frac{v' u' x'}{c^2}$$

de onde obtemos $\frac{\partial E' x'}{\partial x'} + \frac{\partial E' y'}{\partial y'} + \frac{\partial E' z'}{\partial z'} = \frac{\rho'}{\epsilon_o}$ que é a lei de Gauss na forma diferencial para o

observador O'.

Procedendo desta forma podemos provar a invariância de forma para todas as demais equações de Maxwell.

§9 Explicando o Efeito Sagnac com a Relatividade Ondulatória

Transformemos o movimento retilíneo dos observadores O e O' utilizado na dedução da Relatividade Ondulatória em um movimento circular plano de raio constante. Imaginemos que o observador O vê o observador O' girar com velocidade tangencial v no sentido horário(C) (igual ao sentido positivo do eixo x da RO) e que o observador O' vê o observador O girar com velocidade tangencial v' no sentido anti-horário (U) (igual ao sentido negativo do eixo x da RO).

No instante t = t' = zero o observador O emitirá dois raios de luz a partir da origem comum aos dois observadores, um no sentido anti-horário de arco ct_U e outro no sentido horário de arco ct_C, portanto ct_U = ct_C e t_U = t_C, porque c é a velocidade da luz constante, t_U e t_C o tempo. No instante t = t' = zero também o observador O' emitirá dois raios de luz a partir da origem comum aos dois observadores, um no sentido anti-horário (inútil) de arco ct'_U e outro no sentido horário de arco ct'_C, portanto ct'_U = ct'_C e t'_U = t'_C porque c é a velocidade da luz constante, t'_U e t'_C o tempo.

Reescrevamos as equações 1.15 e 1.20 da Relatividade Ondulatória (RO):

$$\frac{|v|}{|v'|} = \frac{t'}{t} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}. \quad 1.15$$

$$\frac{|v'|}{|v|} = \frac{t}{t'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}. \quad 1.20$$

Fazendo ux = u'x' = c (raio de luz projetado ao longo do eixo x positivo) e desmembrando as equações obtemos:

$$t' = t \left(1 - \frac{v}{c} \right) \quad 9.1 \quad t = t' \left(1 + \frac{v'}{c} \right) \quad 9.2$$

$$v' = \frac{v}{\left(1 - \frac{v}{c} \right)} \quad 9.3 \quad v = \frac{v'}{\left(1 + \frac{v'}{c} \right)} \quad 9.4$$

Quando a origem do observador O' detectar o raio anti-horário do observador O, estará a distância $vt_C = v't'_U$ do observador O e simultaneamente detectará o seu raio horário no mesmo ponto que o raio horário do observador O, em uma posição simétrica ao diâmetro que passa pelo observador O porque $ct_U = ct_C \Rightarrow t_U = t_C$ e $ct'_U = ct'_C \Rightarrow t'_U = t'_C$, obedecendo as quatro equações acima, encontramos:

$$ct_U + vt_C = 2\pi R \Rightarrow t_C = \frac{2\pi R}{c+v} \quad 9.5$$

$$ct'_C + 2v't'_U = 2\pi R \Rightarrow t'_C = \frac{2\pi R}{c+2v'} \quad 9.6$$

Quando a origem do observador O' detectar o raio horário do observador O, simultaneamente detectará seu próprio raio horário e estará a distância $vt_{2C} = v't'_{2U}$ do observador O, então obedecendo a equações 1,2,3 e 4 acima, teremos:

$$ct_{2C} = 2\pi R + vt_{2C} \Rightarrow t_{2C} = \frac{2\pi R}{c-v} \quad 9.7$$

$$ct'_{2C} = 2\pi R \Rightarrow t'_{2C} = \frac{2\pi R}{c} \quad 9.8$$

A diferença de tempo para o observador O é:

$$\Delta t = t_{2C} - t_C = \frac{2\pi R}{c-v} - \frac{2\pi R}{c+v} = \frac{4\pi Rv}{c^2 - v^2} \quad 9.9$$

A diferença de tempo para o observador O' é:

$$\Delta t' = t'_{2C} - t'_C = \frac{2\pi R}{c} - \frac{2\pi R}{c+2v'} = \frac{4\pi Rv'}{(c+2v')c} \quad 9.10$$

Substituindo as equações 5 a 10 em 1 a 4 comprovamos que elas cumprem as transformações da Relatividade Ondulatória.

§10 Explicando a experiência de Ives-Stilwell com a Relatividade Ondulatória

Reescrevamos as equações (2.21) para o comprimento de onda na Relatividade Ondulatória (RO):

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}} \text{ e } \lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}}, \quad 2.21$$

Fazendo $ux = u'x' = c$ (raio de luz projetado ao longo do eixo x positivo), obtemos as equações:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \text{ e } \lambda = \frac{\lambda'}{\left(1 + \frac{v'}{c}\right)}, \quad 10.1$$

Se o observador O, que vê o observador O' se distanciando com velocidade v no sentido positivo do eixo x , emite ondas, provenientes de uma fonte estacionada em sua origem com velocidade c e comprimento de onda λ_F no sentido positivo do eixo x , então de acordo com 10.1 o observador O' medirá as ondas com velocidade c e comprimento de onda λ'_D de acordo com as fórmulas:

$$\lambda'_{D'} = \frac{\lambda_F}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \text{ e } \lambda_F = \frac{\lambda'_{D'}}{\left(1 + \frac{v'}{c}\right)}, \quad 10.2$$

Se o observador O', que vê o observador O se aproximando com velocidade v' no sentido negativo do eixo x , emite ondas, provenientes de uma fonte estacionada em sua origem com velocidade c e comprimento de onda λ'_F no sentido positivo do eixo x , então de acordo com 10.1 o observador O medirá as ondas com velocidade c e comprimento de onda λ_A de acordo com as fórmulas:

$$\lambda'_F = \frac{\lambda_A}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \text{ e } \lambda_A = \frac{\lambda'_F}{\left(1 + \frac{v'}{c}\right)}, \quad 10.3$$

As fontes estacionadas nas origens dos Observadores O e O' são idênticas portanto $\lambda_F = \lambda'_F$.

Achemos o comprimento de onda médio $\bar{\lambda}$ das ondas medidas (λ_A, λ'_D) utilizando as fórmulas 10.2 e 10.3, lado esquerdo:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda'_D + \lambda_A}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_F}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} + \lambda'_F \left(1 - \frac{v}{c}\right) \right] \Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{\lambda'_D + \lambda_A}{2} = \frac{\lambda_F}{2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)} \left[1 + \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 \right]$$

Achemos a diferença entre o comprimento de onda médio $\bar{\lambda}$ e o comprimento de onda emitido pelas fontes $\Delta\bar{\lambda} = \bar{\lambda} - \lambda_F$:

$$\Delta\bar{\lambda} = \bar{\lambda} - \lambda_F = \frac{\lambda_F}{2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)} \left[1 + \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 \right] - \lambda_F$$

$$\Delta\bar{\lambda} = \frac{\lambda_F}{2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)} \left[1 + \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 \right] - \lambda_F \frac{2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)}{2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)}$$

$$\Delta\bar{\lambda} = \frac{\lambda_F}{2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)} \left[1 + \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 - 2 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \right]$$

$$\Delta\bar{\lambda} = \frac{\lambda_F}{2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)} \left[1 + 1 - 2 \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2} - 2 + 2 \frac{v}{c} \right]$$

$$\Delta\bar{\lambda} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \frac{\lambda_F v^2}{2 c^2} \quad 10.4$$

<http://www.wbabin.net/physics/faraj7.htm>

§10 Ives-Stilwell (continuação)

O efeito Doppler transversal para a Relatividade Ondulatória foi obtido no §2 do seguinte modo:

Se o observador O', que vê o observador O se deslocar com velocidade $-v'$ no sentido negativo do eixo x' , emite ondas de frequência y' e velocidade c , então o observador O de acordo com 2.22 e $u' x' = -v'$ medirá ondas de frequência y e velocidade c em um plano perpendicular ao deslocamento de O' dadas por

$$y = y' \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \quad 2.25$$

Para $u'x' = -v'$ teremos $ux = \text{zero}$ e $\sqrt{I - \frac{v'^2}{c^2}} \sqrt{I + \frac{v^2}{c^2}} = I$ com isso podemos escrever a relação entre a frequência transversal $y = y_t$ e a frequência da fonte $y' = y'_F$ na forma

$$y_t = \frac{y'_F}{\sqrt{I + \frac{v^2}{c^2}}} \quad 10.5$$

Com $c = y_t \lambda_t = y'_F \lambda'_F$ obtemos a relação entre o comprimento de onda transversal λ_t e o comprimento de onda da fonte λ'_F

$$\lambda_t = \lambda'_F \sqrt{I + \frac{v^2}{c^2}} \quad 10.6$$

A variação do comprimento de onda transversal em relação ao comprimento de onda da fonte é:

$$\Delta \lambda_t = \lambda_t - \lambda'_F = \lambda'_F \sqrt{I + \frac{v^2}{c^2}} - \lambda'_F = \lambda'_F \left(\sqrt{I + \frac{v^2}{c^2}} - I \right) \cong \lambda'_F \left(I + \frac{v^2}{2c^2} - I \right) \cong \frac{\lambda'_F v^2}{2c^2} \quad 10.7$$

que é o mesmo valor obtido na Teoria Especial da Relatividade.

Aplicando 10.7 em 10.4 obtemos

$$\Delta \bar{\lambda} = \frac{\Delta \lambda_t}{\left(I - \frac{v}{c} \right)} \quad 10.8$$

Com as equações 10.2 e 10.3 podemos obter as relações 10.9, 10.10, e 10.11 a seguir descritas

$$\lambda_A = \lambda'_D \left(I - \frac{v}{c} \right)^2 \quad 10.9$$

$$\text{E desta obtemos a fórmula da velocidade } \frac{v}{c} = I - \sqrt{\frac{\lambda_A}{\lambda'_D}} \quad 10.10$$

$$\lambda_F = \lambda'_F = \sqrt{\lambda_A \lambda'_D} \quad 10.11$$

Aplicando 10.10 e 10.11 em 10.6 obtemos

$$\lambda_t = \sqrt{\lambda_A \lambda'_D} \sqrt{I + \left(I - \sqrt{\frac{\lambda_A}{\lambda'_D}} \right)^2} \quad 10.12$$

$$\text{De 10.8 e 10.12 concluímos que } \lambda_A \leq \lambda_F \leq \lambda_t \leq \bar{\lambda} \leq \lambda'_D. \quad 10.13$$

Assim com os valores de λ_A e λ'_D obtidos da experiência de Ives-Stiwell poderemos avaliar λ_t , λ_F , $\frac{v}{c}$ e concluir se existe ou não a deformação espacial prevista na Teoria Especial Da Relatividade.

§11 Transformação entre dois referenciais da potencia dos raios luminosos de uma fonte na Teoria da Relatividade Especial

A relação entre dois referenciais da potencia desenvolvida por uma força é escrita na Teoria Especial da Relatividade na seguinte forma:

$$\vec{F}' \cdot \vec{u}' = \frac{\vec{F} \cdot \vec{u} - v F_x}{\left(I - ux \frac{v}{c^2} \right)} \quad 11.1$$

A definição da componente da força ao longo do eixo x é:

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{d(mu_x)}{dt} = \frac{dm}{dt}u_x + m \frac{du_x}{dt} \quad 11.2$$

Para um raio luminoso o princípio da constância da velocidade da luz, garante que a componente u_x da velocidade da luz, também é constante ao longo do eixo x , por isso:

$$\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} = u_x = \text{constante, demonstrando que em dois } \frac{du_x}{dt} = \text{zero e } F_x = \frac{dm}{dt}u_x \quad 11.3$$

A fórmula de energia é $E = mc^2$ de onde obtemos $\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt}$ 11.4

Da definição de energia temos $\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$ que aplicando em 11.4 e 11.3 obtemos $F_x = \vec{F} \cdot \vec{u} \frac{u_x}{c^2}$ 11.5

Aplicando 11.5 em 11.1 temos:

$$\vec{F}' \cdot \vec{u}' = \frac{\vec{F} \cdot \vec{u} - v \left(\vec{F} \cdot \vec{u} \right) \frac{u_x}{c^2}}{\left(1 - u_x \frac{v}{c^2} \right)}$$

De onde encontramos que $\vec{F}' \cdot \vec{u}' = \vec{F} \cdot \vec{u}$ ou $\frac{dE'}{dt'} = \frac{dE}{dt}$ 11.6

Resultado igual a 5.3 da Relatividade Ondulatória que pode ser comprovado experimentalmente, considerando o Sol como fonte.

§12 Linearidade

A Teoria da Relatividade Ondulatória tem como axioma fundamental à exigência de que os referenciais inerciais sejam denominados exclusivamente como aqueles em que um raio de luz emitido em qualquer direção a partir da sua origem propague em linha reta, o que matematicamente é descrito pelas formulas (1.13, 1.18, 8.6 e 8.7) da Relatividade Ondulatória:

$$\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} = ux, \frac{y}{t} = \frac{dy}{dt} = uy, \frac{z}{t} = \frac{dz}{dt} = uz \quad 1.13$$

$$\frac{x'}{t'} = \frac{dx'}{dt'} = u' x', \frac{y'}{t'} = \frac{dy'}{dt'} = u' y', \frac{z'}{t'} = \frac{dz'}{dt'} = u' z' \quad 1.18$$

Woldemar Voigt em 1.887 escreveu a transformação linear entre os referenciais dos observadores O e O' na forma seguinte:

$$x = Ax' + Bt' \quad 12.1$$

$$t = Ex' + Ft' \quad 12.2$$

Com as respectivas equações inversas:

$$x' = \frac{F}{AF - BE} x + \frac{-B}{AF - BE} t \quad 12.3$$

$$t' = \frac{-E}{AF - BE} x + \frac{A}{AF - BE} t \quad 12.4$$

Onde A, B, E e F são constantes e devido á simetria não consideramos os termos com y, z e y', z' .

Sabemos que x e x' são as projeções de dois raios luminosos ct e ct' que propagam com velocidade constante c (devido o princípio da constância da velocidade da luz), emitidos em qualquer direção a partir

da origem dos respectivos referenciais inerciais no instante em que as origens são coincidentes e no momento em que:

$$t = t' = \text{zero} \quad 12.5$$

por isso na equação 12.2 no instante em que $t' = \text{zero}$ devemos ter $E = \text{zero}$ para termos também $t = \text{zero}$, não podemos exigir que quando $t' = \text{zero}$, seja também $x' = \text{zero}$, porque no caso da propagação ocorrer no plano $y'z'$ teremos $x' = \text{zero}$ mais $t' \neq \text{zero}$.

Reescrevamos as equações corrigidas ($E = \text{zero}$):

$$x = Ax' + Bt' \quad 12.6$$

$$t = Ft' \quad 12.7$$

Com as respectivas equações inversas:

$$x' = \frac{x}{A} - \frac{Bt}{AF} \quad 12.8$$

$$t' = \frac{t}{F} \quad 12.9$$

Para o caso da propagação ocorrer no plano $y'z'$ temos $x' = \text{zero}$ e dividindo 12.6 por 12.7 temos:

$$\frac{x}{t} = \frac{B}{F} = v \quad 12.10$$

onde v é o módulo da velocidade que o observador O vê o referencial do observador O' se deslocar ao longo do eixo x no sentido positivo porque o sinal da equação é positivo.

Para o caso da propagação ocorrer no plano y e z teremos $x = \text{zero}$ e dividindo 12.8 por 12.9 temos:

$$\frac{x'}{t'} = -\frac{B}{A} = -v' \quad \text{ou} \quad \frac{B}{A} = v' \quad 12.11$$

onde v' é o módulo da velocidade que o observador O' vê o referencial do observador O se deslocar ao longo do eixo x' no sentido negativo porque o sinal da equação é negativo.

A equação 1.6 descreve o princípio da constância da velocidade da luz, que deve ser atendido pelas equações 12.6 a 12.9:

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 \quad 1.6$$

Aplicando 12.6 e 12.7 em 1.6 temos:

$$(Ax' + Bt')^2 - c^2 F^2 t'^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

De onde obtemos:

$$(A^2 x'^2) - c^2 t'^2 \left[F^2 - \frac{B^2}{c^2} - \frac{2ABx'}{c^2 t'} \right] = x'^2 - c^2 t'^2$$

onde fazendo $A^2 = 1$ no parêntese em arco e $\left[F^2 - \frac{B^2}{c^2} - \frac{2ABx'}{c^2 t'} \right] = 1$ no parêntese quadrado obtemos a igualdade entre ambos os lados do sinal de igual da equação.

$$\text{Aplicando } A = 1 \text{ em } \left[F^2 - \frac{B^2}{c^2} - \frac{2ABx'}{c^2 t'} \right] = 1 \text{ temos } F^2 = 1 + \frac{B^2}{c^2} + \frac{2Bx'}{c^2 t'} \quad 12.12$$

$$\text{Aplicando } A = 1 \text{ em 12.11 temos } \frac{B}{A} = \frac{B}{1} = B = v' \quad 12.11$$

Que aplicada em 12.12 fornece:

$$F = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2 t'}} = F(x', t') \quad 12.12$$

sendo $F(x', t')$ igual à função F dependente das variáveis x' e t' .

Aplicando 12.8 e 12.9 em 1.6 temos:

$$x^2 - c^2 t^2 = \left(\frac{x}{A} - \frac{Bt}{AF} \right)^2 - c^2 \frac{t^2}{F^2}$$

De onde obtemos:

$$x^2 - c^2 t^2 = \left(\frac{x^2}{A^2} \right) - c^2 t^2 \left[\frac{1}{F^2} - \frac{B^2}{A^2 c^2 F^2} + \frac{2Bx}{A^2 c^2 Ft} \right]$$

onde fazendo $A^2 = 1$ no parêntese em arco e $\left[\frac{1}{F^2} - \frac{B^2}{A^2 c^2 F^2} + \frac{2Bx}{A^2 c^2 Ft} \right] = 1$ no parêntese quadrado obtemos a igualdade entre ambos os lados do sinal de igual da equação.

$$\text{Aplicando } A = 1 \text{ e 12.10 em } \left[\frac{1}{F^2} - \frac{B^2}{A^2 c^2 F^2} + \frac{2Bx}{A^2 c^2 Ft} \right] = 1 \text{ obtemos:}$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}}} = F(x, t) \quad 12.13$$

sendo $F(x, t)$ igual a função F dependente das variáveis x e t .

Façamos as seguintes denominações de acordo com 2.5 e 2.6:

$$K' = 1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2 t'} \Rightarrow F = \sqrt{K'} \quad 12.14$$

$$K = 1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t} \Rightarrow F = \frac{1}{\sqrt{K}} \quad 12.15$$

Como a equação para $F(x', t')$ de 12.12 e $F(x, t)$ de 12.13 devem ser iguais temos:

$$F = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2 t'}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}}} \quad 12.16$$

Então:

$$\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}} \cdot \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2 t'}} = 1 \text{ ou } \sqrt{K} \cdot \sqrt{K'} = 1 \quad 12.17$$

Exatamente igual a 1.10.

Reescrevendo as equações 12.6, 12.7, 12.8 e 12.9 em função de v , v' e F temos:

$$x = x' + v' t' \quad 12.6$$

$$t = F t' \quad 12.7$$

Com as respectivas equações inversas:

$$x' = x - vt \quad 12.8$$

$$t' = \frac{t}{F} \quad 12.9$$

Obteremos as equações 12.6, 12.7, 12.8 e 12.9 finais substituindo F pelas formulas correspondentes:

$$x = x' + v' t' \quad 12.6$$

$$t = t' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2 t'}} \quad 12.7$$

Com as respectivas equações inversas:

$$x' = x - vt \quad 12.8$$

$$t' = t \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}} \quad 12.9$$

Que são exatamente as equações do quadro I.

$$\text{Como } v = \frac{B}{F} \text{ e } v' = B \text{ então a relação entre } v \text{ e } v' \text{ são } v = \frac{v'}{F} \text{ ou } v' = v.F \quad 12.18$$

Vamos transformar F (12.12) função dos elementos v' , x' , e t' para F (12.13) função dos elementos v , x e t substituindo em 12.12 as equações 12.8, 12.9 e 12.18:

$$F = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2 t'}} = \sqrt{1 + \frac{(vF)^2}{c^2} + \frac{2vF(x-vt)}{c^2 \frac{t}{F}}}$$

$$F = \sqrt{1 + \frac{v^2 F^2}{c^2} + \frac{2vx F^2}{c^2 t} - \frac{2v^2 F^2}{c^2}} = \sqrt{1 + \frac{2vx F^2}{c^2 t} - \frac{v^2 F^2}{c^2}}$$

$$F^2 = 1 + \frac{2vx F^2}{c^2 t} - \frac{v^2 F^2}{c^2} \Rightarrow F^2 + \frac{v^2 F^2}{c^2} - \frac{2vx F^2}{c^2 t} = 1 \Rightarrow F = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}}}$$

Que é exatamente a equação 12.13.

Vamos transformar F (12.13) função dos elementos v , x , e t para F (12.12) função dos elementos v' , x' e t' substituindo em 12.13 as equações 12.6, 12.7 e 12.18:

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2 t}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v'}{F}\right)^2 - \frac{2v'(x'+v't')}{c^2 F F t'}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2 F^2} - \frac{2v'x'}{c^2 t' F^2} - \frac{2v'^2}{c^2 F^2}}}$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2 F'^2} - \frac{2v'x'}{c^2 t' F'^2}}} \Rightarrow F^2 \left(1 - \frac{v'^2}{c^2 F'^2} - \frac{2v'x'}{c^2 t' F'^2} \right) = 1 \Rightarrow F = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2 t'}}$$

Que é exatamente a equação 12.12.

Calculemos o diferencial total de $F(x', t')$ (12.12):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x'} dx' + \frac{\partial F}{\partial t'} dt'$$

como:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{K'}} \frac{v'}{c^2 t'} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial t'} = -\frac{1}{\sqrt{K'}} \frac{v'}{c^2 t'} \frac{x'}{t'} \quad 12.19$$

temos:

$$dF = \frac{1}{\sqrt{K'}} \frac{v'}{c^2 t'} dx' - \frac{1}{\sqrt{K'}} \frac{v'}{c^2 t'} \frac{x'}{t'} dt' \quad 12.20$$

onde aplicando 1.18 encontramos:

$$dF = \frac{1}{\sqrt{K'}} \frac{v'}{c^2 t'} dx' - \frac{1}{\sqrt{K'}} \frac{v'}{c^2 t'} \frac{dx'}{dt'} dt' = 0$$

De onde concluímos que F função de x' e t' é uma constante.

Calculemos o diferencial total de $F(x, t)$ (12.13):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

como:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}} \frac{v}{c^2 t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{K^{\frac{3}{2}}} \frac{v}{c^2 t} \frac{x}{t} \quad 12.21$$

temos:

$$dF = \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}} \frac{v}{c^2 t} dx - \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}} \frac{v}{c^2 t} \frac{x}{t} dt \quad 12.22$$

onde aplicando 1.13 encontramos:

$$dF = \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}} \frac{v}{c^2 t} dx - \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}} \frac{v}{c^2 t} \frac{dx}{dt} dt = 0$$

De onde concluímos que F função de x e t é uma constante.

As equações 1.13 e 1.18 representam para os observadores O e O' o princípio da constância da velocidade da luz, validas do infinitamente pequeno ao infinitamente grande e significam que na Relatividade Ondulatória o espaço e o tempo são simultaneamente medidos. Não devem ser interpretadas como uma dependência entre espaço e tempo.

O tempo tem uma interpretação própria que pode ser compreendida se analisarmos para um determinado observador a emissão de dois raios de luz a partir do instante $t = \text{zero}$. Se somarmos os tempos obtidos, para cada raio de luz obtemos um resultado sem qualquer utilidade para a física.

Se no instante $t = t' = \text{zero}$ o observador O' emite dois raios de luz, um ao longo do eixo x e outro ao longo do eixo y , transcorrido o intervalo de tempo t' os raios atingem para o observador O' simultaneamente, os pontos A_x e A_y à distância ct' da origem, no entanto para o observador O os pontos não serão atingidos simultaneamente. Para que ambos os raios de luz sejam simultâneo aos observadores eles deverão atingir os pontos que possuam o mesmo raio em relação ao eixo x e que forneça os mesmos tempos para ambos os observadores ($t_1 = t_2$ e $t'_1 = t'_2$), o que significa que realmente somente um raio de luz é necessário para aferir o tempo entre os referenciais.

Conforme o § 1, ambos os referenciais dos observadores O e O' são inercial, sendo assim neles a luz propaga em linha reta conforme exige o axioma fundamental da Relatividade Ondulatória § 12, por isso a diferença entre as velocidades v e v' é devida somente a diferença de tempo entre os referenciais.

$$v = \frac{x-x'}{t} \quad 1.2 \qquad v' = \frac{x-x'}{t'} \quad 1.4$$

Também podemos relacionar um referencial inercial para o qual a luz propaga em linha reta conforme exige o axioma fundamental da Relatividade Ondulatória, com um referencial em movimento acelerado para o qual a luz propaga em linha curva, sendo que neste caso a diferença entre v e v' não é devida somente a diferença de tempo entre os referenciais.

Conforme o § 1, se o observador O no instante $t = t' = \text{zero}$ emite um raio de luz a partir da origem do seu referencial, depois de transcorrido o intervalo de tempo t_1 o raio de luz atinge o ponto A_1 de coordenadas (x_1, y_1, z_1, t_1) à distância ct_1 da origem do observador O , então temos:

$$t'_1 = t_1 \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx_1}{c^2 t_1}}$$

Após atingir o ponto A_1 o raio de luz continua a propagar na mesma direção e no mesmo sentido, tendo transcorrido o intervalo de tempo t_2 o raio de luz atinge o ponto A_2 de coordenadas $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$ à distância ct_2 do ponto A_1 , então temos:

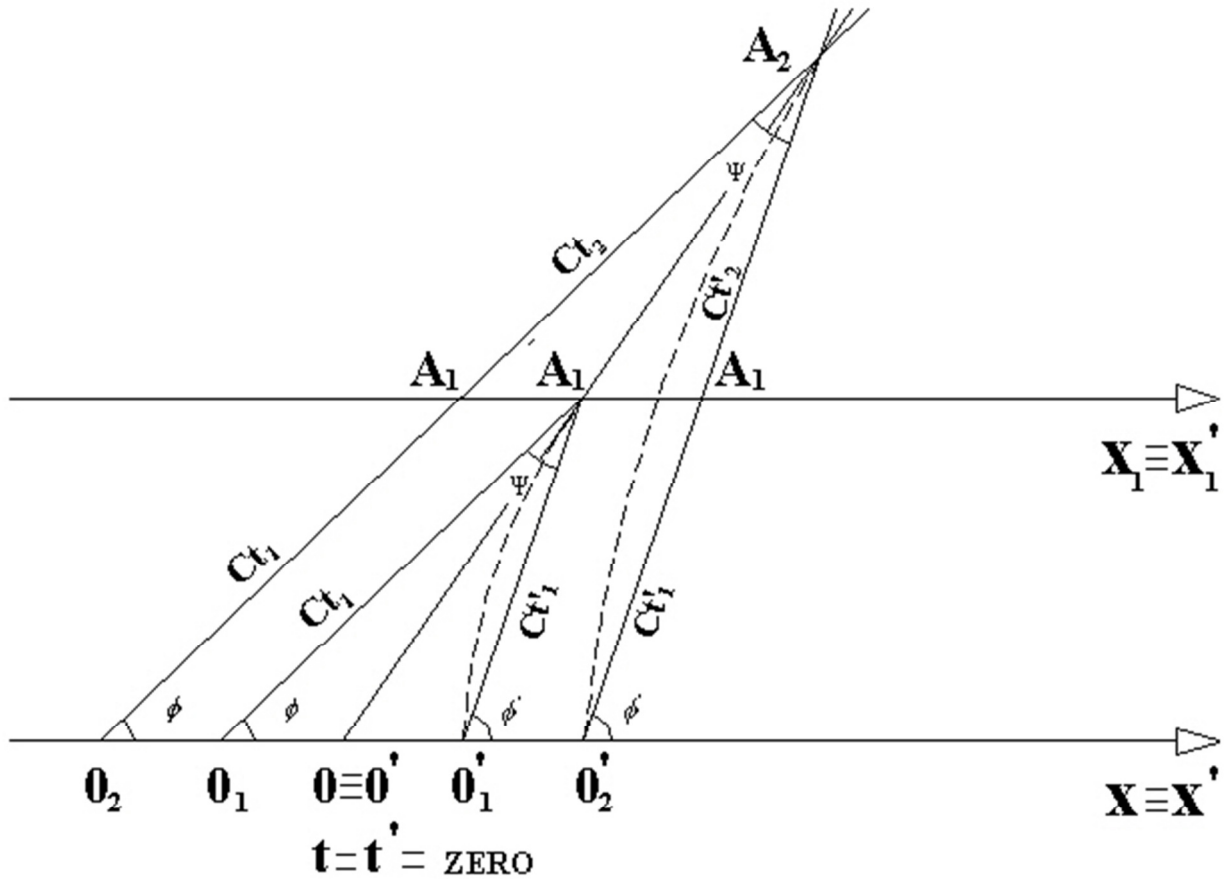
$$\frac{x}{t} = \frac{dx}{dt} = ux \Rightarrow \frac{x_1}{t_1} = \frac{x_2}{t_2} = ux \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx_1}{c^2 t_1}} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx_2}{c^2 t_2}} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}$$

e com isso obtemos:

$$t'_2 = t_2 \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx_2}{c^2 t_2}} = t_2 \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}$$

$$t'_1 + t'_2 = t_1 \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx_1}{c^2 t_1}} + t_2 \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}} = (t_1 + t_2) \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}} = (t_1 + t_2) \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2v(x_1 + x_2)}{c^2(t_1 + t_2)}}$$

A geometria do espaço e tempo da Relatividade Ondulatória está resumida na figura abaixo que pode ser expandida para A_n pontos e vários observadores.



Na figura os ângulos têm a relação $\psi = \phi' - \phi$ e são iguais os seguintes segmentos:

O_1 a $O \equiv O'$ é igual a $O \equiv O'$ a O'_1 ($O_1 \leftrightarrow O'_1 = vt_1 = v't'_1$)

O_2 a O_1 é igual a O'_1 a O'_2 ($O_2 \leftrightarrow O'_2 = v(t_1 + t_2) = v'(t'_1 + t'_2) \rightarrow vt_2 = v't'_2 = O_2 \leftrightarrow O_1 + O'_1 \leftrightarrow O'_2$)

E são paralelos os seguintes seguimentos:

O_2 a A_2 é paralelo a O_1 a A_1

O'_2 a A_2 é paralelo a O'_1 a A_1

$X \equiv X'$ é paralelo a $X_1 \equiv X'_1$

O cosseno dos ângulos ϕ e ϕ' de inclinação dos raios para os observadores O e O' de acordo com 2.3 e 2.4 são:

$$u'x' = \frac{ux - v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}} \Rightarrow \frac{u'x'}{c} = \frac{\frac{ux}{c} - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}}} \Rightarrow \cos\phi' = \frac{\cos\phi - v/c}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2v}{c}\cos\phi}}$$

$$\cos\phi' = \frac{\cos\phi - v/c}{\sqrt{K}} \quad 12.23$$

E com isso temos: $\sin\phi' = \frac{\sin\phi}{\sqrt{K}}$ 12.24

$$ux = \frac{u'x' + v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}} \Rightarrow \frac{ux}{c} = \frac{\frac{u'x'}{c} + \frac{v'}{c}}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'}{c^2}}} \Rightarrow \cos\phi = \frac{\cos\phi' + v'/c}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'}{c}\cos\phi'}}$$

$$\cos\phi = \frac{\cos\phi' + v'/c}{\sqrt{K'}} \quad 12.25$$

E com isso temos: $\text{sen}\phi = \frac{\text{sen}\phi'}{\sqrt{K'}}$ 12.26

O cosseno do ângulo ψ de interseção dos raios é igual a:

$$\cos\psi = \frac{1 - \frac{vux}{c^2}}{\sqrt{K}} = \frac{1 + \frac{v'u'x'}{c^2}}{\sqrt{K'}} = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{K}} = \frac{1 + \frac{v'}{c}\cos\phi'}{\sqrt{K'}} \quad 12.27$$

E com isso temos: $\text{sen}\psi = \frac{v}{c} \frac{\text{sen}\phi}{\sqrt{K}} = \frac{v'}{c} \frac{\text{sen}\phi'}{\sqrt{K'}}$ 12.28

A invariância do $\cos\psi$ demonstra a harmonia de todas as hipóteses adotadas para o espaço e tempo na Relatividade Ondulatória.

O $\cos\psi$ é igual ao Jacobiano da transformação para o espaço e tempo do quadro I, onde os radicais

$$\sqrt{K} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx}{c^2t}} \quad \text{e} \quad \sqrt{K'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'}{c^2t'}} \quad \text{são considerados variáveis e por isso derivados.}$$

$$\cos\psi = J = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial(x', y', z', t')}{\partial(x, y, z, t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v/c^2 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{vx}{c^2t}\right) \end{vmatrix} = \frac{1 - \frac{vx}{c^2t}}{\sqrt{K}} = \frac{1 - \frac{vux}{c^2}}{\sqrt{K}} \quad 8.8$$

$$\cos\psi = J' = \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial(x', y', z', t')} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & v' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v'/c^2 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v'x'}{c^2t'}\right) \end{vmatrix} = \frac{1 + \frac{v'x'}{c^2t'}}{\sqrt{K'}} = \frac{1 + \frac{v'u'x'}{c^2}}{\sqrt{K'}} \quad 8.8$$

§13 Richard C. Tolman

O §4 Transformações dos Momentos da Relatividade Ondulatória, foi desenvolvido baseado na experiência idealizada por Lewis e Tolman, conforme referência [3]. Onde a colisão de duas esferas preservando o princípio de conservação da energia e o princípio de conservação dos momentos demonstra que a massa é função da própria velocidade de acordo com:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}}$$

onde m_0 é a massa da esfera quando em repouso e $u = |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\vec{u}}$ o módulo da sua velocidade.

Analisemos a colisão entre duas esferas idênticas quando em repouso relativo, que para o observador O' se denominam S'₁ e S'₂ e se deslocam ao longo do eixo x' em sentido contrário com as seguintes velocidades antes da colisão:

Tabela 1

Esfera S' ₁	Esfera S' ₂
$u'x'_1 = v'$	$u'x'_2 = -v'$
$u'y'_1 = \text{zero}$	$u'y'_2 = \text{zero}$
$u'z'_1 = \text{zero}$	$u'z'_2 = \text{zero}$

Para o observador O as mesmas esferas se denominam S_1 e S_2 e têm as velocidades ($ux_1, ux_2, uy_i = uz_i = zero$) antes da colisão calculadas de acordo com o Quadro 2 da seguinte forma:

A velocidade ux_1 da esfera S_1 é igual a:

$$ux_1 = \frac{u'x'_1 + v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'_1}{c^2}}} = \frac{v' + v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'v'}{c^2}}} = \frac{2v'}{\sqrt{1 + \frac{3v'^2}{c^2}}}$$

A transformação de v' para v de acordo com 1.20 do Quadro 2 é:

$$v = \frac{v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'_1}{c^2}}} = \frac{v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'v'}{c^2}}} = \frac{v'}{\sqrt{1 + \frac{3v'^2}{c^2}}}$$

Que aplicada em ux_1 fornece:

$$ux_1 = 2 \left(\frac{v'}{\sqrt{1 + \frac{3v'^2}{c^2}}} \right) = 2v$$

A velocidade ux_2 da esfera S_2 é igual a:

$$ux_2 = \frac{u'x'_2 + v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'_2}{c^2}}} = \frac{-v' + v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'(-v')}{c^2}}} = zero$$

Tabela 2

Esfera S_1	Esfera S_2
$ux_1 = \frac{2v'}{\sqrt{1 + \frac{3v'^2}{c^2}}} = 2v$	$ux_2 = zero$
$uy_1 = zero$	$uy_2 = zero$
$uz_1 = zero$	$uz_2 = zero$

Para os observadores O e O' as duas esferas possuem a mesma massa quando em repouso relativo. Sendo que para o observador O' as duas esferas colidem com velocidades de módulo igual e sentido oposto por isso os momentos ($p'_1 = p'_2$) se anulam durante a colisão formando por um instante ($\Delta t'$) um único corpo de massa $m_0 = m'_1 + m'_2$.

De acordo com o princípio de conservação dos momentos para o observador O teremos que impor que os momentos antes da colisão são iguais aos momentos após a colisão, portanto:

$$m_1 ux_1 + m_2 ux_2 = (m_1 + m_2)w$$

Onde para o observador O, w é a velocidade arbitrária que supostamente por um instante (Δt) também verá as massas unidas ($m = m_1 + m_2$) se deslocando. Como as massas m_i possuem velocidades diferentes e as massas variam de acordo com as próprias velocidades esta equação não pode ser simplificada algebricamente, sendo as variações das massas da seguinte forma:

Para o lado esquerdo do sinal de igual da equação temos:

$$u = ux_1 = 2v$$

$$m_1 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(ux_1)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(2v)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{4v^2}{c^2}}}$$

$$u = ux_2 = \text{zero}$$

$$m_2 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(ux_2)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(\text{zero})^2}{c^2}}} = m_o$$

Para o lado direito do sinal de igual da equação temos:

$$u = w$$

$$m_1 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(w)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

$$m_2 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{(w)^2}{c^2}}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

Aplicando na equação de conservação dos momentos temos:

$$m_1 ux_1 + m_2 ux_2 = (m_1 + m_2)w = m_1 w + m_2 w$$

$$\frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{4v^2}{c^2}}} 2v + m_o \cdot 0 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} w + \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} w$$

De onde obtemos:

$$\frac{2m_o v}{\sqrt{1 - \frac{4v^2}{c^2}}} = \frac{2m_o w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{4v^2}{c^2}}} = \frac{w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

$$w = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{3v^2}{c^2}}}$$

Como $w \neq v$ para o observador O as massas unidas ($m = m_1 + m_2$) não se deslocariam momentaneamente solidárias ao observador O' o que é concebível se considerarmos que são diferentes os instantes $\Delta t \neq \Delta t'$ que supostamente as massas ficariam em repouso do ponto de vista de cada observador e que a massa incidente com velocidade $2v$ é maior do que a massa em repouso.

Se operássemos com as variáveis com linha teríamos:

$$m_1 ux_1 + m_2 ux_2 = (m_1 + m_2)w = m_1 w + m_2 w$$

$$\frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{2v'}{\sqrt{1 + \frac{3v'}{c^2}}} \right)^2}} \frac{2v'}{\sqrt{1 + \frac{3v'}{c^2}}} + m_o \cdot 0 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} w + \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} w = \frac{2m_o w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

$$\frac{2m_0 v'}{\sqrt{\left(1 + \frac{3v'}{c^2}\right) \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{4v'^2}{\left(1 + \frac{3v'}{c^2}\right)}\right)\right)}} = \frac{2m_0 w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

$$\frac{2m_0 v'}{\sqrt{1 + \frac{3v'}{c^2} - \frac{4v'^2}{c^2}}} = \frac{2m_0 w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

$$\frac{2m_0 v'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{2m_0 w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

De onde concluímos que $w = v'$ o qual deve ser igual ao valor anterior de w ou seja:

$$w = v' = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{3v^2}{c^2}}}$$

Relação entre v e v' que se obtém do Quadro 2 quando $ux_j = 2v$ que corresponde para o observador O a velocidade da esfera incidente sobre a esfera em repouso.

§14 Composição de velocidades

Referência – Millennium Relativity

URL: http://www.mrelativity.net/MBriefs/VComp_Sci_Estab_Way.htm

Escrevamos as transformações de Hendrik A. Lorentz para espaço e tempo da Teoria Especial da Relatividade:

$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	14.1a	$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	14.3a
$y' = y$	14.1b	$y = y'$	14.3b
$z' = z$	14.1c	$z = z'$	14.3c
$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	14.2	$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	14.4

Destas obtemos as equações de transformação de velocidade:

$u'x' = \frac{ux - v}{1 - \frac{vux}{c^2}}$	14.5a	$ux = \frac{u'x' + v}{1 + \frac{vu'x'}{c^2}}$	14.6a
$u'y' = \frac{uy \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vux}{c^2}}$	14.5b	$uy = \frac{u'y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'x'}{c^2}}$	14.6b
$u'z' = \frac{uz \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vux}{c^2}}$	14.5c	$uz = \frac{u'z' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'x'}{c^2}}$	14.6c

Consideremos que em relação ao observador O' um objeto se move com velocidade:

$$u'x' = 1,5 \cdot 10^5 \text{ km/s} (=0,50c).$$

E que a velocidade do observador O' em relação ao observador O é:

$$v = 1,5 \cdot 10^5 \text{ km/s} (=0,50c).$$

A velocidade ux do objeto em relação ao observador O deve ser calculada pela fórmula 14.6a:

$$ux = \frac{u'x' + v}{1 + \frac{vu'x'}{c^2}} = \frac{1,5 \cdot 10^5 + 1,5 \cdot 10^5}{1 + \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \cdot 10^5}{(3,0 \cdot 10^5)^2}} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ km/s} (=0,80c).$$

Onde usamos $c = 3,0 \cdot 10^5 \text{ km/s} (=1,00c)$.

Considerando que o objeto se movimentou durante um segundo em relação ao observador O ($t = 1,00\text{s}$) podemos então com 14.2 calcular o tempo transcorrido para o observador O':

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t \left(1 - \frac{vux}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1,00 \left(1 - \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 2,4 \cdot 10^5}{(3,0 \cdot 10^5)^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{(1,5 \cdot 10^5)^2}{(3,0 \cdot 10^5)^2}}} = \frac{0,60}{\sqrt{0,75}} \Rightarrow t' = 0,693\text{s}.$$

Para o observador O o observador O' está à distância d dada pela fórmula:

$$d = vt = 1,5 \cdot 10^5 \cdot 1,00 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Para o observador O' o observador O está à distância d' dada pela fórmula:

$$d' = vt' = 1,5 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,60}{\sqrt{0,75}} = 1,03923 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

À distância do objeto (d_o , d'_o) em relação aos observadores O e O' é dada pelas fórmulas:

$$d_o = uxt = 2,4 \cdot 10^5 \cdot 1,00 = 2,4 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

$$d_o = uxt = \frac{(u'x' + v)t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(1,5 \cdot 10^5 + 1,5 \cdot 10^5) \cdot 0,60}{\sqrt{1 - \frac{(1,5 \cdot 10^5)^2}{(3,0 \cdot 10^5)^2}} \cdot \sqrt{0,75}} = 2,40 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

$$d'_o = u'x't' = 1,5 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,60}{\sqrt{0,75}} = 1,03923 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

$$d'_o = u'x't' = \frac{(ux - v)t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(2,4 \cdot 10^5 - 1,5 \cdot 10^5) \cdot 1,00}{\sqrt{1 - \frac{(1,5 \cdot 10^5)^2}{(3,0 \cdot 10^5)^2}}} = 1,03923 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Para o observador O a distância entre o objeto e o Observador O' é dada pela fórmula:

$$\Delta d = d_o - d = 2,4 \cdot 10^5 - 1,5 \cdot 10^5 = 0,90 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Para o observador O a velocidade do objeto em relação ao observador O' é dada por:

$$\frac{\Delta d}{t} = \frac{0,90 \cdot 10^5 \text{ km}}{1,00 \text{ s}} = 0,90 \cdot 10^5 \text{ km/s} (=0,30c).$$

Relacionar os tempos t e t' utilizando a fórmula $t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ só é possível única e exclusivamente quando $ux = v$ e $u'x' = \text{zero}$ o que não é o caso acima, para entendermos isso escreva as equações 14.2 e 14.4 na forma abaixo:

$t' = \frac{t \left(1 - \frac{v}{c} \cos \phi\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	14.2	$t = \frac{t' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \phi'\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	14.4
--	------	---	------

Onde $\cos \phi = \frac{x}{ct}$ e $\cos \phi' = \frac{x'}{ct'}$.

As equações acima podem ser escritas como:

$$t' = f(t, \phi) \text{ e } t = f'(t', \phi') \tag{14.7}$$

Em cada referencial dos observadores O e O' a propagação da luz gera uma esfera de raio ct e ct' que se interceptam formando uma circunferência que propaga com velocidade c . Os raio ct e ct' e o sentido positivo dos eixos x e x' formam os ângulos ϕ e ϕ' constantes entre os referenciais. Se para o mesmo par de referencial os ângulos fossem variáveis os tempos seriam aleatórios e se tornaria inútil para a física. Na equação $t' = f(t, \phi)$ temos t' função igualmente de t e ϕ , se nesta tivermos ϕ constante e t' variar devido a t obtemos a relação comum entre os tempos t e t' entre dois referenciais, entretanto se tivermos t constante e t' variar devido a ϕ teremos para cada valor de ϕ um valor de t' e t entre dois diferentes referenciais, esta análise também vale para $t = f'(t', \phi')$.

Dividindo 14.5a por c obtemos:

$$\frac{u'x'}{c} = \frac{\frac{ux}{c} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{vux}{c^2}} \Rightarrow \cos \phi' = \frac{\cos \phi - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \phi} \tag{14.8}$$

Onde $\cos \phi = \frac{x}{ct} = \frac{ux}{c}$ e $\cos \phi' = \frac{x'}{ct'} = \frac{u'x'}{c}$.

Isolando a velocidade obtemos:

$$\frac{v}{c} = \frac{(\cos \phi - \cos \phi')}{(1 - \cos \phi \cos \phi')} \quad \text{ou} \quad v = \frac{ux - u'x'}{1 - \frac{uxu'x'}{c^2}} \tag{14.9}$$

De onde concluímos que devemos ter os ângulos ϕ e ϕ' constantes para obtermos a mesma velocidade entre os referenciais.

A exigência dos ângulos constantes entre os referenciais deve resolver as controvérsias de Herbert Dingle.

§15 Invariância

As transformações para o espaço e tempo do quadro I, conjunto 1.2 mais 1.7, na forma matricial se escreve:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \tag{15.1}$$

Que escritas na forma abaixo representam as mesmas transformações de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} \quad 15.2$$

Que denominaremos como:

$$x' = x'^i = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ cx'^4 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix}, \quad x = x^j = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ cx^4 \end{bmatrix} \quad 15.3$$

Que são as funções $x'^i = x'^i(x^j) = x'^i(x^1, x^2, x^3, cx^4) = x'^i(x, y, z, ct)$ 15.4

Que na forma simbólica se escreve:

$$x' = \alpha \cdot x \text{ ou na forma indexada } x'^i = \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} x^j \Rightarrow x'^i = \alpha_{ij} x^j \quad 15.5$$

Onde utilizamos a convenção da soma de Einstein.

As transformações para o espaço e tempo do quadro I, conjunto 1.4 mais 1.8, na forma matricial se escreve:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} \quad 15.6$$

Que escritas na forma abaixo representam as mesmas transformações de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} \quad 15.7$$

Que denominaremos como:

$$x = x^k = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ cx^4 \end{bmatrix}, \quad \alpha' = \alpha'_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix}, \quad x' = x'^l = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ cx'^4 \end{bmatrix} \quad 15.8$$

Que são as funções $x^k = x^k(x'^l) = x^k(x'^1, x'^2, x'^3, cx'^4) = x^k(x', y', z', ct')$ 15.9

Que na forma simbólica se escreve:

$$x = \alpha' \cdot x' \text{ ou na forma indexada } x^k = \sum_{l=1}^4 \alpha'_{kl} x'^l \Rightarrow x^k = \alpha'_{kl} x'^l \quad 15.10$$

Sendo $\sqrt{K} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vx^1}{c^2 x^4}}$ (1.7), $\sqrt{K'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'x'^1}{c^2 x'^4}}$ (1.8) e $\sqrt{K} \cdot \sqrt{K'} = 1$ (1.10).

As matrizes de transformação $\alpha = \alpha_{ij}$ e $\alpha' = \alpha'_{kl}$ têm as propriedades:

$$\alpha \cdot \alpha' = \alpha_{ij} \alpha'_{kl} = \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} \alpha'_{jl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I = \delta_l^i \quad 15.11$$

$$\alpha' \alpha^t = \alpha'_{ji} \alpha^t_{ik} = \sum_{i=1}^4 \alpha'_{ji} \alpha^t_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v/c & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v'/c & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I = \delta^j_k \quad 15.12$$

Onde $\alpha^t = \alpha'_{ji}$ é a matriz transposta de $\alpha = \alpha_{ij}$ e $\alpha'^t = \alpha'_{lk}$ é a matriz transposta de $\alpha' = \alpha'_{kl}$ e δ é o Delta de Kronecker.

$$\alpha' \alpha = \alpha'_{kl} \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^4 \alpha'_{kl} \alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I = \delta^k_j \quad 15.13$$

$$\alpha'^t \alpha^t = \alpha'_{lk} \alpha_{ji} = \sum_{k=1}^4 \alpha'_{lk} \alpha_{ji} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v'/c & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v/c & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I = \delta^i_j \quad 15.14$$

Onde $\alpha'^t = \alpha'_{lk}$ é a matriz transposta de $\alpha' = \alpha'_{kl}$ e $\alpha^t = \alpha_{ji}$ é a matriz transposta de $\alpha = \alpha_{ij}$ e δ é o Delta de Kronecker.

Observação as matrizes α_{ij} e α'_{kl} são inversas uma da outra, mas não são ortogonais, ou seja: $\alpha_{ji} \neq \alpha'_{kl}$ e $\alpha_{ij} \neq \alpha'_{lk}$.

As derivadas parciais $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$ do diferencial total $dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j$ das componentes das coordenadas que se relacionam de acordo com $x'^i = x'^i(x^j)$, onde na matriz de transformação $\alpha = \alpha_{ij}$ o radical \sqrt{K} é considerado constante é igual a:

Quadro 10, derivadas parciais das componentes das coordenadas:

$\frac{\partial x'^1}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^1}{\partial x^j} =$	$\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = 1$	$\frac{\partial x'^1}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial x'^1}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial x'^1}{\partial x^4} = -\frac{v}{c}$
$\frac{\partial x'^2}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^2}{\partial x^j} =$	$\frac{\partial x'^2}{\partial x^1} = 0$	$\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} = 1$	$\frac{\partial x'^2}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial x'^2}{\partial x^4} = 0$
$\frac{\partial x'^3}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^3}{\partial x^j} =$	$\frac{\partial x'^3}{\partial x^1} = 0$	$\frac{\partial x'^3}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial x'^3}{\partial x^3} = 1$	$\frac{\partial x'^3}{\partial x^4} = 0$
$\frac{\partial x'^4}{\partial x^j} = \frac{\partial x'^4}{\partial x^j} =$	$\frac{\partial x'^4}{\partial x^1} = 0$	$\frac{\partial x'^4}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial x'^4}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial x'^4}{\partial x^4} = \sqrt{K}$

O diferencial total das coordenadas na forma de matriz é igual a:

$$\begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \quad 15.15$$

Que denominaremos como:

$$dx' = dx'^i = \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix}, \quad A = A_j^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix}, \quad dx = dx^j = \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \quad 15.16$$

$$\text{Então temos } dx' = A dx \Rightarrow dx'^i = \sum_{j=1}^4 A_j^i dx^j \Rightarrow dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \quad 15.17$$

As derivadas parciais $\frac{\partial x^k}{\partial x'^l}$ do diferencial total $dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} dx'^l$ das componentes das coordenadas que se relacionam de acordo com $x^k = x^k(x'^l)$, onde na matriz de transformação $\alpha' = \alpha'_{kl}$ o radical $\sqrt{K'}$ é considerado constante é igual a:

Quadro 11 derivadas parciais das componentes das coordenadas:

$\frac{\partial x^k}{\partial x'^1} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} = 1$	$\frac{\partial x^1}{\partial x'^2} = 0$	$\frac{\partial x^1}{\partial x'^3} = 0$	$\frac{\partial x^1}{\partial x'^4} = \frac{v'}{c}$
$\frac{\partial x^k}{\partial x'^2} = \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} = 1$	$\frac{\partial x^2}{\partial x'^3} = 0$	$\frac{\partial x^2}{\partial x'^4} = 0$	
$\frac{\partial x^k}{\partial x'^3} = \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} = 1$	$\frac{\partial x^3}{\partial x'^4} = 0$		
$\frac{\partial x^k}{\partial x'^4} = \frac{\partial x^4}{\partial x'^4} = \sqrt{K'}$			

O diferencial total das coordenadas na forma de matriz é igual a:

$$\begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \quad 15.18$$

Que denominaremos como:

$$dx = dx^k = \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix}, \quad A' = A'^k_l = \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix}, \quad dx' = dx'^l = \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \quad 15.19$$

$$\text{Então temos: } dx = A' dx' \Rightarrow dx^k = \sum_{l=1}^4 A'^k_l dx'^l \Rightarrow dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} dx'^l \quad 15.20$$

Os Jacobianos das transformações 15.15 e 15.18 são:

$$J = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4)}{\partial(x^1, x^2, x^3, x^4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{vmatrix} = \sqrt{K} \quad 15.21$$

$$J' = \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3, x^4)}{\partial(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{vmatrix} = \sqrt{K'} \quad 15.22$$

$$\text{Onde } \sqrt{K} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux^1}{c^2}} \quad (2.5), \quad \sqrt{K'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'u'x'^1}{c^2}} \quad (2.6) \text{ e } \sqrt{K} \cdot \sqrt{K'} = 1 \quad (1.23).$$

As matrizes de transformação A e A' também possuem as propriedades 15.11, 15.12, 15.13 e 15.14 das matrizes α e α' .

Da função $\phi = \phi(x^k) = \phi' = \phi'[x^k(x'^l)]$ onde as coordenadas se relacionam na forma $x^k = x^k(x'^l)$ temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^l} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} \text{ descrito como:}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x'^1} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^1} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} + \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} + \frac{\partial \phi}{\partial x^4} \frac{\partial x^4}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x'^2} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^2} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^4} \frac{\partial x^4}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial x'^3} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^3} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} + \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} + \frac{\partial \phi}{\partial x^4} \frac{\partial x^4}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x'^4} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^4} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x'^4} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x'^4} + \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial x'^4} + \frac{\partial \phi'}{\partial x^4} \frac{\partial x^4}{\partial x'^4}\end{aligned}$$

Que na forma matricial e sem apresentar a função ϕ se torna:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{\partial x'^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^4}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^4}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v'}{c^2 \sqrt{K'}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'^1}{c^2} \right) \end{bmatrix}$$

Onde substituindo os itens abaixo:

$$\frac{\partial x^4}{\partial x'^1} = \frac{v'}{c^2 \sqrt{K'}} = \frac{v}{c^2}$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial x'^4} = v' = \frac{v}{\sqrt{K}}$$

$$\frac{\partial x^4}{\partial x'^4} = \frac{1}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'^1}{c^2} \right) = \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} = \frac{1}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{v u x^1}{c^2} \right)$$

Observação: está ultima relação demonstra que o tempo varia de forma igual entre os referenciais.

Obtemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{\partial x'^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^4}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^4} \\ \frac{\partial x^4}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^4}{\partial x'^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{K}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{c^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{v u x^1}{c^2} \right) \end{bmatrix}$$

Que é o conjunto 8.1 mais 8.3 do quadro 9, operadores diferenciais, na forma de matriz.

Da função $\phi' = \phi'(x'^i) = \phi = \phi[x'^i(x^j)]$ onde as coordenadas se relacionam na forma $x'^i = x'^i(x^j)$ temos:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x^j} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \text{ descrito como:}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi'}{\partial x^1} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^1} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^3} \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^4} \frac{\partial x'^4}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial x^2} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^3} \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^4} \frac{\partial x'^4}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial x^3} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^3} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^3} \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^4} \frac{\partial x'^4}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial x^4} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^4} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^4} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^2}{\partial x^4} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^3} \frac{\partial x'^3}{\partial x^4} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'^4} \frac{\partial x'^4}{\partial x^4}\end{aligned}$$

Que na forma matricial e sem apresentar a função ϕ se torna:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x^j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{\partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^4}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^4}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{c^2 \sqrt{K}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{v u x^1}{c^2} \right) \end{bmatrix}$$

Onde substituindo os itens abaixo:

$$\frac{\partial x'^1}{\partial x^4} = -v = \frac{-v'}{\sqrt{K'}}$$

$$\frac{\partial x'^4}{\partial x^1} = \frac{-v}{c^2 \sqrt{K}} = \frac{-v'}{c^2}$$

$$\frac{\partial x'^4}{\partial x^4} = \frac{1}{\sqrt{K}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{v u x^1}{c^2} \right) = \frac{\partial x^4}{\partial x'^4} = \frac{1}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'^1}{c^2} \right)$$

Observação: está ultima relação demonstra que o tempo varia de forma igual entre os referenciais.

Obtemos:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x^j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{\partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^4}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^4} \\ \frac{\partial x'^4}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{v'}{\sqrt{K'}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v'}{c^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{K'}} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{v' u' x'^1}{c^2} \right) \end{bmatrix}$$

Que é o conjunto 8.2 mais 8.4 do quadro 9, operadores diferenciais, na forma de matriz.

Aplicando 8.5 em 8.3 e em 8.4 simplificamos estas equações na forma seguinte:

Quadro 9B, operadores diferenciais com as equações 8.3 e 8.4 simplificadas:

$\frac{\partial}{\partial x'^1} = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4}$	8.1	$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x'^1} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4}$	8.2
$\frac{\partial}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}$	8.1.1	$\frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x'^2}$	8.2.1
$\frac{\partial}{\partial x'^3} = \frac{\partial}{\partial x^3}$	8.1.2	$\frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x'^3}$	8.2.2
$\frac{-\partial}{c\partial x'^4} = \sqrt{K} \frac{-\partial}{c\partial x^4}$	8.3B	$\frac{-\partial}{c\partial x^4} = \sqrt{K'} \frac{-\partial}{c\partial x'^4}$	8.4B
$\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{ux^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} = zero$	8.5	$\frac{\partial}{\partial x'^1} + \frac{u'x'^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} = zero$	8.5

O quadro 9B, na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{-\partial}{c\partial x'^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{-\partial}{c\partial x^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 00 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 01 & 0 \\ -v/c & 00 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \quad 15.23$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{-\partial}{c\partial x^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{-\partial}{c\partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 00 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 01 & 0 \\ v'/c & 00 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \quad 15.24$$

As matrizes quadradas das transformações acima são as transpostas das matrizes A e A'.

Invariância do Diferencial Total

No referencial do observador O o diferencial total de uma função $\phi(x^k)$ é igual a:

$$d\phi(x^k) = \frac{\partial\phi}{\partial x^k} dx^k = \frac{\partial\phi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial\phi}{\partial x^4} dx^4 = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x^1} & \frac{\partial\phi}{\partial x^2} & \frac{\partial\phi}{\partial x^3} & \frac{\partial\phi}{\partial x^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \quad 15.25$$

Onde as coordenadas se relacionam com as do referencial do observador O' de acordo com $x^k = x^k(x'^l)$, substituindo as transformações 15.24 e 15.18 e sem apresentar a função ϕ obtemos:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^k} dx^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{\partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 00 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 01 & 0 \\ -v'/c & 00 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & v'/c \\ 010 & 0 \\ 001 & 0 \\ 000 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \quad 15.26$$

O produto das matrizes do meio fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 00 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 01 & 0 \\ -v'/c & 00 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & v'/c \\ 010 & 0 \\ 001 & 0 \\ 000 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 00 & v'/c \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 01 & 0 \\ -v'/c & 00 & 1 + \frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} \end{bmatrix} \quad 15.27$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 00 & v'/c \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 01 & 0 \\ -v'/c & 00 & 1 + \frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 010 & 0 \\ 001 & 0 \\ 000 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 00 & v'/c \\ 0 & 00 & 0 \\ 0 & 00 & 0 \\ -v'/c & 00 & \frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} \end{bmatrix} \quad 15.28$$

Que aplicadas no diferencial total fornece:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^k} dx^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{\partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v'/c & 0 & 0 & \frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \quad 15.29$$

Efetuada as operações do segundo termo encontramos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{\partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v'/c & 0 & 0 & \frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} = -\frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} dx'^1 + v' \frac{\partial}{\partial x'^1} dx'^4 + \frac{2v'dx'^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} dx'^4$$

Onde aplicando 8.5 obtemos:

$$-\frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} dx'^1 + v' \left(-\frac{1}{c^2} \frac{dx'^1}{dx'^4} \frac{\partial}{\partial x'^4} \right) dx'^4 + \frac{2v'dx'^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} dx'^4 = zero$$

Então temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{\partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v'/c & 0 & 0 & \frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} = zero \quad 15.30$$

Com esse resultado obtemos em 15.29 a invariância do diferencial total:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^k} dx^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{\partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'^i} dx'^i = d\phi' \quad 15.31$$

No referencial do observador O' o diferencial total de uma função $\phi(x^i)$ é igual a:

$$d\phi'(x^i) = \frac{\partial\phi'}{\partial x'^i} dx'^i = \frac{\partial\phi'}{\partial x'^1} dx'^1 + \frac{\partial\phi'}{\partial x'^2} dx'^2 + \frac{\partial\phi'}{\partial x'^3} dx'^3 + \frac{\partial\phi'}{\partial x'^4} dx'^4 = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi'}{\partial x'^1} & \frac{\partial\phi'}{\partial x'^2} & \frac{\partial\phi'}{\partial x'^3} & \frac{\partial\phi'}{\partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \quad 15.32$$

Onde as coordenadas se relacionam com as do referencial do observador O de acordo com $x^i = x'^i(x^j)$,

Substituindo as transformações 15.23 e 15.15 e sem apresentar a função ϕ obtemos:

$$d\phi' = \frac{\partial\phi'}{\partial x'^i} dx'^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{\partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \quad 15.33$$

O produto das matrizes do meio fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & 1 - \frac{2vdx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \quad 15.34$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & 1 - \frac{2vdx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & -\frac{2vdx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \quad 15.35$$

Que aplicadas no diferencial total fornece:

$$d\phi' = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^i} dx'^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial ct} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & -\frac{2v dx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ c dx^4 \end{bmatrix} \quad 15.36$$

Efetuada as operações do segundo termo encontramos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial ct} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & -\frac{2v dx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ c dx^4 \end{bmatrix} = \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} dx^1 - v \frac{\partial}{\partial x^1} dx^4 - \frac{2v dx^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} dx^4$$

Onde aplicando 8.5 obtemos:

$$\frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} dx^1 - v \left(-\frac{1}{c^2} \frac{dx^1}{dx^4} \frac{\partial}{\partial x^4} \right) dx^4 - \frac{2v dx^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} dx^4 = zero$$

Então temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial ct} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & -\frac{2v dx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ c dx^4 \end{bmatrix} = zero \quad 15.37$$

Com esse resultado obtemos em 15.36 a invariância do diferencial total:

$$d\phi' = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^i} dx'^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial ct} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ c dx^4 \end{bmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} dx^j = d\phi \quad 15.38$$

Invariância da Equação de Onda

A equação de onda para o observador O é igual a:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (x^4)^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (x^3)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (x^4)^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial ct} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial ct} \end{bmatrix} = 0 \quad 15.39$$

Onde aplicando 15.24 e a transposta de 15.24 temos:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (x^4)^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{\partial ct'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v'/c & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial}{\partial ct'} \end{bmatrix} = 0 \quad 15.40$$

O produto das três matrizes do meio fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v'}{c} & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{v'}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{v'}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v'}{c} & 0 & 0 & -1 - \frac{2v'u'x^1}{c^2} \end{bmatrix} \quad 15.41$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{v'}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v'}{c} & 0 & 0 & -1 - \frac{2v'u'x^1}{c^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v'}{c} & 0 & 0 & -\frac{2v'u'x^1}{c^2} \end{bmatrix} \quad 15.42$$

Que aplicadas na equação de onda fornece:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (x^4)^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v'}{c} & 0 & 0 & -\frac{2v'u'x^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} = 0 \quad 15.43$$

Efetuada as operações do segundo termo encontramos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v'}{c} & 0 & 0 & -\frac{2v'u'x^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} = -\frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{2v'u'x^1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial (x^4)^2}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{2v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{2v'u'x^1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial (x^4)^2}$$

Onde aplicando 8.5 temos:

$$\frac{2v'}{c^2} \left(\frac{u'x^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} \right) \frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{2v'u'x^1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial (x^4)^2} = zero$$

Então temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v'}{c} & 0 & 0 & -\frac{2v'u'x^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} = zero \quad 15.44$$

Com esse resultado obtemos em 15.43 a invariância da equação de onda:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (x^4)^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{c \partial x^4} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{c \partial x^4} \end{bmatrix} = \nabla^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (x'^4)^2} = 0 \quad 15.45$$

A equação de onda para o observador O' é igual a:

$$\nabla^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (x'^4)^2} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (x'^1)^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (x'^2)^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (x'^3)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (x'^4)^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x'^1} \frac{\partial}{\partial x'^2} \frac{\partial}{\partial x'^3} \frac{\partial}{c \partial x'^4} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial}{c \partial x'^4} \end{bmatrix} = 0 \quad 15.46$$

Onde aplicando 15.23 e a transposta de 15.23 temos:

$$\nabla^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (x'^4)^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{c \partial x^4} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{c} & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{c \partial x^4} \end{bmatrix} = 0 \quad 15.47$$

O produto das três matrizes do meio fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{c} & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{c} & 0 & 0 & -1 + \frac{2vux^1}{c^2} \end{bmatrix} \quad 15.48$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{c} & 0 & 0 & -1 + \frac{2vux^1}{c^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{c} & 0 & 0 & \frac{2vux^1}{c^2} \end{bmatrix} \quad 15.49$$

Que aplicadas na equação de onda fornece:

$$\nabla^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (x'^4)^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{c \partial x^4} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{c} & 0 & 0 & \frac{2vux^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{c \partial x^4} \end{bmatrix} = 0 \quad 15.50$$

Efetuando as operações do segundo termo encontramos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{c} & 0 & 0 & \frac{2vux^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} = \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{2vux^1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial (x^4)^2}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{2v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{2vux^1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial (x^4)^2}$$

Onde aplicando 8.5 temos:

$$\frac{2v}{c^2} \left(\frac{-ux^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} \right) \frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{2vux^1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial (x^4)^2} = zero$$

Então temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{c} & 0 & 0 & \frac{2vux^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} = zero$$

15.51

Então em 15.50 temos a invariância da equação de onda:

$$\nabla^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (x^4)^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} = \nabla^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (x^4)^2} = 0$$

15.52

Invariância das equações 8.5 de propagação linear

Substituindo 2.4, 8.2, 8.4B em 8.5 obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{ux^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x'^1} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} + \frac{1}{c^2} \frac{(u'x'^1 + v')}{\sqrt{K'}} \sqrt{K'} \frac{\partial}{\partial x'^4} = zero$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{ux^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x'^1} - \frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} + \frac{u'x'^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} + \frac{v'}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} = zero$$

Que simplificada fornece a invariância da equação 8.5:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{ux^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x'^1} + \frac{u'x'^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} = zero$$

Substituindo 2.3, 8.1, 8.3B em 8.5 obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x'^1} + \frac{u'x'^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2} \frac{(ux^1 - v)}{\sqrt{K}} \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial x^4} = zero$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x'^1} + \frac{u'x'^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{ux^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} = zero$$

Que simplificada fornece a invariância da equação 8.5:

$$\frac{\partial}{\partial x'^1} + \frac{u'x'^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{ux^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^4} = zero$$

O quadro 4 em forma de matrizes se torna:

$$\begin{bmatrix} px'^1 \\ px'^2 \\ px'^3 \\ E'/c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} px^1 \\ px^2 \\ px^3 \\ E/c \end{bmatrix} \quad 15.53$$

$$\begin{bmatrix} px^1 \\ px^2 \\ px^3 \\ E/c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} px'^1 \\ px'^2 \\ px'^3 \\ E'/c \end{bmatrix} \quad 15.54$$

O quadro 6 em forma de matrizes se torna:

$$\begin{bmatrix} J'x'^1 \\ J'x'^2 \\ J'x'^3 \\ c\rho' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Jx^1 \\ Jx^2 \\ Jx^3 \\ c\rho \end{bmatrix} \quad 15.55$$

$$\begin{bmatrix} Jx^1 \\ Jx^2 \\ Jx^3 \\ c\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J'x'^1 \\ J'x'^2 \\ J'x'^3 \\ c\rho' \end{bmatrix} \quad 15.56$$

Invariância da Equação de continuidade

A equação de continuidade para o observador O é igual a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial x^4} = \frac{\partial Jx^1}{\partial x^1} + \frac{\partial Jx^2}{\partial x^2} + \frac{\partial Jx^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \rho}{\partial x^4} = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \quad \frac{\partial}{\partial x^2} \quad \frac{\partial}{\partial x^3} \quad \frac{\partial}{\partial x^4} \right] \begin{bmatrix} Jx^1 \\ Jx^2 \\ Jx^3 \\ c\rho \end{bmatrix} = zero \quad 15.57$$

Onde substituindo 15.24 e 15.56 obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial x^4} = \left[\frac{\partial}{\partial x'^1} \quad \frac{\partial}{\partial x'^2} \quad \frac{\partial}{\partial x'^3} \quad \frac{\partial}{\partial x'^4} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v'/c & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J'x'^1 \\ J'x'^2 \\ J'x'^3 \\ c\rho' \end{bmatrix} = zero \quad 15.58$$

O produto das matrizes de transformação já foi obtido em 15.27 e 15.28 com isso:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial x^4} = \left[\frac{\partial}{\partial x'^1} \quad \frac{\partial}{\partial x'^2} \quad \frac{\partial}{\partial x'^3} \quad \frac{\partial}{\partial x'^4} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v'/c & 0 & 0 & \frac{2v'u'x'^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J'x'^1 \\ J'x'^2 \\ J'x'^3 \\ c\rho' \end{bmatrix} \quad 15.59$$

Efetuada as operações do segundo termo obtemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c \partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v'/c & 0 & 0 & \frac{2v'u'x'^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J'x'^1 \\ J'x'^2 \\ J'x'^3 \\ c\rho' \end{bmatrix} = -\frac{v'}{c^2} \frac{\partial Jx'^1}{\partial x'^4} + \frac{v'}{\partial x'^1} \rho' + \frac{2v'u'x'^1}{c^2} \frac{\partial \rho'}{\partial x'^4}$$

Aonde substituindo $Jx'^1 = \rho'u'x'^1$ e 8.5 obtemos:

$$-\frac{v'u'x'^1}{c^2} \frac{\partial \rho'}{\partial x'^4} + v' \left(-\frac{u'x'^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} \right) \rho' + \frac{2v'u'x'^1}{c^2} \frac{\partial \rho'}{\partial x'^4} = zero$$

Então temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c \partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v'/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v'/c & 0 & 0 & \frac{2v'u'x'^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J'x'^1 \\ J'x'^2 \\ J'x'^3 \\ c\rho' \end{bmatrix} = zero \quad 15.60$$

Com esse resultado obtemos em 15.59 a invariância da equação de continuidade:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{J}' + \frac{\partial \rho'}{\partial x'^4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c \partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J'x'^1 \\ J'x'^2 \\ J'x'^3 \\ c\rho' \end{bmatrix} = \bar{\nabla} \cdot \bar{J}' + \frac{\partial \rho'}{\partial x'^4} \quad 15.61$$

A equação de continuidade para o observador O' é igual a:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{J}' + \frac{\partial \rho'}{\partial x'^4} = \frac{\partial J'x'^1}{\partial x'^1} + \frac{\partial J'x'^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial J'x'^3}{\partial x'^3} + \frac{\partial \rho'}{\partial x'^4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c \partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J'x'^1 \\ J'x'^2 \\ J'x'^3 \\ c\rho' \end{bmatrix} = zero \quad 15.62$$

Onde substituindo 15.23 e 15.55 temos:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{J}' + \frac{\partial \rho'}{\partial x'^4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c \partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Jx^1 \\ Jx^2 \\ Jx^3 \\ c\rho \end{bmatrix} = zero \quad 15.63$$

O produto das matrizes de transformação já foi obtido em 15.34 e 15.35 por isso temos:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{J}' + \frac{\partial \rho'}{\partial x'^4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c \partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & -\frac{2vux^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Jx^1 \\ Jx^2 \\ Jx^3 \\ c\rho \end{bmatrix} \quad 15.64$$

Efetando as operações do segundo termo obtemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} & \frac{\partial}{c \partial x'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & -\frac{2vux^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Jx^1 \\ Jx^2 \\ Jx^3 \\ c\rho \end{bmatrix} = \frac{v}{c^2} \frac{\partial Jx^1}{\partial x'^4} - \frac{v \partial \rho}{\partial x'^1} - \frac{2vux^1}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial x'^4}$$

Aonde substituindo $Jx^1 = \rho ux^1$ e 8.5 obtemos:

$$\frac{vux^1}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial x'^4} - v \left(-\frac{ux^1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'^4} \right) \rho - \frac{2vux^1}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial x'^4} = zero$$

Então temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v/c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/c & 0 & 0 & -\frac{2vux^1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Jx^1 \\ Jx^2 \\ Jx^3 \\ c\rho \end{bmatrix} = zero \quad 15.65$$

Com esse resultado obtemos em 15.64 a invariância da equação de continuidade:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{J}' + \frac{\partial \rho'}{\partial x'^4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Jx^1 \\ Jx^2 \\ Jx^3 \\ c\rho \end{bmatrix} = \bar{\nabla} \cdot \bar{J}' + \frac{\partial \rho}{\partial x^4} \quad 15.66$$

Invariância do elemento diferencial de linha:

Que para o observador O se escreve como:

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (cdx^4)^2 = \begin{bmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 & cdx^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \quad 15.67$$

Onde substituindo 15.18 e a transposta de 15.18 temos:

$$(ds)^2 = \begin{bmatrix} dx^1 & dx'^2 & dx'^3 & cdx'^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \quad 15.68$$

O produto das três matrizes central fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & -1 - \frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} \end{bmatrix} \quad 15.69$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & -1 - \frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & -\frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} \end{bmatrix} \quad 15.70$$

Que aplicadas no elemento diferencial de linha fornece:

$$(ds)^2 = \begin{bmatrix} dx^1 & dx'^2 & dx'^3 & cdx'^4 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & -\frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \quad 15.71$$

Efetando as operações do segundo termo encontramos:

$$\begin{bmatrix} dx^1 & dx'^2 & dx'^3 & cdx'^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & -\frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} = \frac{v'dx'^1 cdx'^4}{c} + cdx'^4 \left(\frac{v'}{c} dx'^1 - \frac{2v'dx'^1}{c^2 dx'^4} cdx'^4 \right) = zero$$

$$\text{Então temos: } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{v'}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v'}{c} & 0 & 0 & -\frac{2v'}{c^2} \frac{dx^1}{dx^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} = \text{zero} \quad 15.72$$

Com esse resultado obtemos em 15.71 a invariância do elemento diferencial de linha:

$$(ds)^2 = \begin{bmatrix} dx'^1 & dx'^2 & dx'^3 & cdx'^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} = (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2 - (cdx'^4)^2 = (ds')^2 \quad 15.73$$

Para o observador O' o elemento diferencial de linha se escreve como:

$$(ds')^2 = (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2 - (cdx'^4)^2 = \begin{bmatrix} dx'^1 & dx'^2 & dx'^3 & cdx'^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ cdx'^4 \end{bmatrix} \quad 15.74$$

Onde substituindo 15.15 e a transposta de 15.15 temos:

$$(ds')^2 = \begin{bmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 & cdx^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \quad 15.75$$

O produto das três matrizes central fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & -1 + \frac{2v dx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \quad 15.76$$

Resultado que pode ser dividido em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & -1 + \frac{2v dx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & \frac{2v dx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \quad 15.77$$

Que aplicadas no elemento diferencial de linha fornece:

$$(ds')^2 = \begin{bmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 & cdx^4 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & \frac{2v dx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} \quad 15.78$$

Efetuada as operações do segundo termo encontramos:

$$\begin{bmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 & cdx^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v}{c} & 0 & 0 & \frac{2v dx^1}{c^2 dx^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ cdx^4 \end{bmatrix} = \frac{-v dx^1 cdx^4}{c} + cdx^4 \left(\frac{-v}{c} dx^1 + \frac{2v dx^1}{c^2 dx^4} cdx^4 \right) = \text{zero}$$

Então temos:

$$\begin{bmatrix} dx^1 dx^2 dx^3 c dx^4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{v}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c} & 0 & 0 & \frac{2v}{c^2} \frac{dx^1}{dx^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ c dx^4 \end{bmatrix} = \text{zero} \quad 15.79$$

Com esse resultado obtemos em 15.78 a invariância do elemento diferencial de linha:

$$(ds')^2 = \begin{bmatrix} dx^1 dx^2 dx^3 c dx^4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ c dx^4 \end{bmatrix} = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (c dx^4)^2 = (ds)^2 \quad 15.80$$

No §7 como consequência de 5.3 obtivemos a invariância de $\vec{E} \cdot \vec{u} = \vec{E}' \cdot \vec{u}'$ onde agora aplicando 7.3.1, 7.3.2, 7.4.1, 7.4.2 e as fórmulas de transformação de velocidade do quadro 2 obtemos novas relações entre E_x e $E' x'$ distintas de 7.3 e 7.4 e com elas reescrevemos o quadro 7 na forma abaixo:

Quadro 7B

$E' x' = \frac{E_x \sqrt{K}}{\left(1 - \frac{v}{ux}\right)}$	7.3B	$E_x = \frac{E' x' \sqrt{K'}}{\left(1 + \frac{v'}{u' x'}\right)}$	7.4B
$E' y' = E_y \sqrt{K}$	7.3.1	$E_y = E' y' \sqrt{K'}$	7.4.1
$E' z' = E_z \sqrt{K}$	7.3.2	$E_z = E' z' \sqrt{K'}$	7.4.2
$B' x' = B_x$	7.5	$B_x = B' x'$	7.6
$B' y' = B_y + \frac{v}{c^2} E_z$	7.5.1	$B_y = B' y' - \frac{v'}{c^2} E' z'$	7.6.1
$B' z' = B_z - \frac{v}{c^2} E_y$	7.5.2	$B_z = B' z' + \frac{v'}{c^2} E' y'$	7.6.2
$B_y = -\frac{ux}{c^2} E_z$	7.9	$B' y' = -\frac{u' x'}{c^2} E' z'$	7.10
$B_z = \frac{ux}{c^2} E_y$	7.9.1	$B' z' = \frac{u' x'}{c^2} E' y'$	7.10.1
$\left(1 - \frac{v}{ux}\right) \left(1 + \frac{v'}{u' x'}\right) = 1$			

Com os quadros 7B e 9B podemos obter a invariância de todas as equações de Maxwell.

Invariância da lei de Gauss para o campo elétrico:

$$\frac{\partial E' x'}{\partial x'} + \frac{\partial E' y'}{\partial y'} + \frac{\partial E' z'}{\partial z'} = \frac{\rho'}{\epsilon_0} \quad 8.14$$

Onde aplicando os quadros 6, 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{E_x \sqrt{K}}{\left(1 - v/ux\right)} + \frac{\partial E_y \sqrt{K}}{\partial y} + \frac{E_z \sqrt{K}}{\partial z} = \frac{\rho \sqrt{K}}{\epsilon_0}$$

Onde simplificando e substituindo 8.5 obtemos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + v \left(\frac{-1}{ux} \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \frac{E_x}{\left(1 - v/ux\right)} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Que reordenada fornece:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{v}{ux} \right) \right] \frac{Ex}{(1 - v/ux)} + \frac{\partial Ey}{\partial y} + \frac{Ez}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Que simplificada fornece a invariância da lei de Gauss para o campo elétrico.

Invariância da lei de Gauss para o campo magnético:

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = \text{zero} \quad 8.16$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) B_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) = 0$$

Que reordenada fornece:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) = 0$$

Onde o termo entre parêntese é a lei de Faraday – Henry (8.19) que é igual a zero por isso obtemos a invariância da lei de Gauss para o campo magnético.

Invariância da lei de Faraday - Henry:

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} = - \frac{\partial B'_z}{\partial t'} \quad 8.18$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_y \sqrt{K} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_x \sqrt{K}}{(1 - v/ux)} = -\sqrt{K} \frac{\partial}{\partial t} \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right)$$

Que simplificada e multiplicada por $(1 - v/ux)$ obtemos:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \left(1 - \frac{v}{ux} \right) - \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \left(1 - \frac{v}{ux} \right)$$

Onde fazendo os produtos e substituindo 7.9.1 obtemos:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{v}{ux} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{ux}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Faraday – Henry.

Invariância da lei de Faraday - Henry:

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = - \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \quad 8.20$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \sqrt{K} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \sqrt{K} = -\sqrt{K} \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

Que simplificada fornece a invariância da lei de Faraday – Henry.

Invariância da lei de Faraday - Henry:

$$\frac{\partial E' x'}{\partial z'} - \frac{\partial E' z'}{\partial x'} = -\frac{\partial B' y'}{\partial t'} \quad 8.22$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{Ex\sqrt{K}}{(1-v/ux)} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) Ez\sqrt{K} = -\sqrt{K} \frac{\partial}{\partial t} \left(By + \frac{v}{c^2} Ez \right)$$

Que simplificada e multiplicada por $(1-v/ux)$ obtemos:

$$\frac{\partial Ex}{\partial z} - \frac{\partial Ez}{\partial x} \left(1 - \frac{v}{ux} \right) - \frac{v}{c^2} \frac{\partial Ez}{\partial t} \left(1 - \frac{v}{ux} \right) = -\frac{\partial By}{\partial t} \left(1 - \frac{v}{ux} \right) - \frac{v}{c^2} \frac{\partial Ez}{\partial t} \left(1 - \frac{v}{ux} \right)$$

Que simplificando e fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial Ex}{\partial z} - \frac{\partial Ez}{\partial x} = -\frac{\partial By}{\partial t} - \frac{v}{ux} \left(\frac{\partial Ez}{\partial x} - \frac{\partial By}{\partial t} \right)$$

Onde aplicando 7.9 obtemos:

$$\frac{\partial Ex}{\partial z} - \frac{\partial Ez}{\partial x} = -\frac{\partial By}{\partial t} - \frac{v}{ux} \left(\frac{\partial Ez}{\partial x} + \frac{ux}{c^2} \frac{\partial Ez}{\partial t} \right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Faraday - Henry.

Invariância da lei de Ampère - Maxwell:

$$\frac{\partial B' y'}{\partial x'} - \frac{\partial B' x'}{\partial y'} = \mu_0 J' z' + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E' z'}{\partial t'} \quad 8.24$$

Onde aplicando os quadros 6, 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(By + \frac{v}{c^2} Ez \right) - \frac{\partial Bx}{\partial y} = \mu_0 Jz + \epsilon_0 \mu_0 \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial t} Ez\sqrt{K}$$

Que simplificando e fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial By}{\partial x} - \frac{\partial Bx}{\partial y} = \mu_0 Jz + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial Ez}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial Ez}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial Ez}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial Ez}{\partial x} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial By}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial Ez}{\partial t}$$

Onde simplificando e aplicando 7.9 obtemos:

$$\frac{\partial By}{\partial x} - \frac{\partial Bx}{\partial y} = \mu_0 Jz + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial Ez}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial Ez}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial Ez}{\partial x} - \frac{v}{c^2} \left(\frac{-ux}{c^2} \frac{\partial Ez}{\partial t} \right)$$

Que reordenada fornece

$$\frac{\partial By}{\partial x} - \frac{\partial Bx}{\partial y} = \mu_0 Jz + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial Ez}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \left(\frac{ux}{c^2} \frac{\partial Ez}{\partial t} + \frac{\partial Ez}{\partial x} \right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère - Maxwell:

Invariância da lei de Ampère - Maxwell:

$$\frac{\partial B' z'}{\partial y'} - \frac{\partial B' y'}{\partial z'} = \mu_0 J' x' + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E' x'}{\partial t'}$$

8.26

Onde aplicando os quadros 6, 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) = \mu_0 (J_x - \rho v) + \epsilon_0 \mu_0 \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E_x \sqrt{K}}{(1 - v/ux)}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} - \mu_0 c^2 \rho \right) + \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2} \right) \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{1}{(1 - v/ux)}$$

Substituindo no primeiro parêntese a lei Gauss e multiplicando por $\left(1 - \frac{v}{ux} \right)$ obtemos:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{v}{ux} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \mu_0 J_x \right) - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{1}{ux} \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Onde substituindo $J_x = \rho ux$, 7.9.1, 7.9 e 8.5 obtemos:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{v}{ux} \left(\frac{ux}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{ux}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial z} - \mu_0 \rho ux \right) - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{-1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Que simplificada fornece:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} - \mu_0 c^2 \rho \right) - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Substituindo no primeiro parêntese a lei Gauss obtemos:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Que reordenada fica:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{2v}{c^2} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{ux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère - Maxwell:

Invariância da lei de Ampère - Maxwell:

$$\frac{\partial B' x'}{\partial z'} - \frac{\partial B' z'}{\partial x'} = \mu_0 J' y' + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E' y'}{\partial t'}$$

8.28

Onde aplicando os quadros 6, 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) = \mu_0 J_y + \epsilon_0 \mu_0 \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial t} E_y \sqrt{K}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 J_y + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Onde simplificando e aplicando 7.9.1 obtemos:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 J_y + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \left(\frac{ux}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$

Que reordenada fica:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 J_y + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \left(\frac{ux}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère - Maxwell:

Invariância da lei de Gauss para o campo elétrico sem carga elétrica:

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} = zero \quad 8.30$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{Ex\sqrt{K}}{(1-v/ux)} + \frac{\partial Ey\sqrt{K}}{\partial y} + \frac{Ez\sqrt{K}}{\partial z} = zero$$

Onde simplificando e substituindo 8.5 obtemos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + v \left(\frac{-1}{ux} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \frac{Ex}{(1-v/ux)} + \frac{\partial Ey}{\partial y} + \frac{Ez}{\partial z} = zero$$

Que reordenada fornece:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{v}{ux} \right) \right] \frac{Ex}{(1-v/ux)} + \frac{\partial Ey}{\partial y} + \frac{Ez}{\partial z} = zero .$$

Que simplificada fornece a lei de Gauss para o campo elétrico sem carga elétrica.

Invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

$$\frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'_z}{\partial t'} \quad 8.40$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(By + \frac{v}{c^2} Ez \right) - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \epsilon_0 \mu_0 \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial t} Ez\sqrt{K}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Onde simplificando e aplicando 7.9 obtemos:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{v}{c^2} \left(\frac{-ux}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \right)$$

Que reordenada fica:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \left(\frac{ux}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

Invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'_x}{\partial t'} \quad 8.42$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) = \epsilon_0 \mu_0 \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial t} \frac{E_x \sqrt{K}}{(1-v/ux)}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2} \right) \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{1}{(1-v/ux)}$$

Substituindo no primeiro parêntese a lei Gauss sem carga elétrica e multiplicando por $(1-v/ux)$ obtemos:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{v}{ux} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{1}{ux} \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Onde substituindo 7.9, 7.9.1 e 8.5 obtemos:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{v}{ux} \left(\frac{ux}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{ux}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{-1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Que simplificada fornece:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Substituindo no primeiro parêntese a lei Gauss sem carga elétrica obtemos:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Que reordenada fica:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{2v}{c^2} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{ux}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

Invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

$$\frac{\partial B' x'}{\partial z'} - \frac{\partial B' z'}{\partial x'} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E' y'}{\partial t'} \quad 8.44$$

Onde aplicando os quadros 7B e 9B obtemos:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(Bz - \frac{v}{c^2} Ey \right) = \epsilon_0 \mu_0 \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial t} Ey \sqrt{K}$$

Fazendo as operações obtemos:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z} - \frac{\partial Bz}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial Ey}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial Ey}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial Ey}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial Ey}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial Bz}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial Ey}{\partial t}$$

Onde simplificando e aplicando 7.9.1 obtemos:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z} - \frac{\partial Bz}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial Ey}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{2vux}{c^2} \frac{\partial Ey}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial Ey}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \left(\frac{ux}{c^2} \frac{\partial Ey}{\partial t} \right)$$

Que reordenada fica:

$$\frac{\partial Bx}{\partial z} - \frac{\partial Bz}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial Ey}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \left(\frac{ux}{c^2} \frac{\partial Ey}{\partial t} + \frac{\partial Ey}{\partial x} \right)$$

Como o termo dentro do parêntese é a equação 8.5 que é igual a zero então obtemos a invariância da lei de Ampère – Maxwell sem carga elétrica:

§15 Invariância (continuação)

Uma função $f(\theta) = f(kr - wt)$ 2.19

Onde a fase é igual a $\theta = (kr - wt)$ 15.81

Para representar um movimento ondulatório que propaga em uma direção arbitrária deve satisfazer a equação de onda por isso temos:

$$\frac{k}{r^2} \left[3r - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{r} \right] \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{k^2}{r^2} (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta^2} - k^2 \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta^2} = zero \quad 15.82$$

Que não atende a equação de onda porque os dois últimos termos se anulam mais o primeiro não.

Para contornar este problema reformulemos a fase θ da função da forma seguinte.

Um vetor unitário como

$$\vec{n} = \cos \phi \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} + \cos \beta \vec{k} \quad 15.83$$

onde $\cos \phi = \frac{x}{r} = \frac{x}{ct}$, $\cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{ct}$, $\cos \beta = \frac{z}{r} = \frac{z}{ct}$ 15.84

tem o módulo igual a $n = |\vec{n}| = \sqrt{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \sqrt{\cos^2 \phi + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} = 1$. 15.85

Fazendo o produto

$$\vec{n} \cdot \vec{R} = (\cos\phi\vec{i} + \cos\alpha\vec{j} + \cos\beta\vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \cos\phi x + \cos\alpha y + \cos\beta z = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = \frac{r^2}{r} = r \quad 15.86$$

obtemos $r = \vec{n} \cdot \vec{R} = \cos\phi x + \cos\alpha y + \cos\beta z$ que aplicado na fase θ fornece uma nova fase

$$\Phi = (kr - wt) = (k\vec{n} \cdot \vec{R} - wt) = (k \cos\phi x + k \cos\alpha y + k \cos\beta z - wt) \quad 15.87$$

com o mesmo significado da fase anterior $\theta = \Phi$.

Substituindo $r = \vec{n} \cdot \vec{R} = \cos\phi x + \cos\alpha y + \cos\beta z$ e $k = \frac{w}{c}$ na fase θ multiplicada por -1 obtemos também uma outra fase na forma

$$\Phi = (-1)(kr - wt) = (wt - kr) = \left[w \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \left[w \left(t - \frac{\cos\phi x + \cos\alpha y + \cos\beta z}{c} \right) \right] \quad 15.88$$

com o mesmo significado da fase anterior $(-1)\theta = \Phi$.

E assim podemos escrever uma nova função como:

$$f(\Phi) = f \left[w \left(t - \frac{\cos\phi x + \cos\alpha y + \cos\beta z}{c} \right) \right] \quad 15.89$$

Que substituída na equação de onda com os co-senos diretores considerados constantes fornece:

$$\frac{\partial^2 f(\Phi)}{\partial \Phi^2} \frac{w^2}{c^2} \cos^2 \phi + \frac{\partial^2 f(\Phi)}{\partial \Phi^2} \frac{w^2}{c^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 f(\Phi)}{\partial \Phi^2} \frac{w^2}{c^2} \cos^2 \beta - \frac{\partial^2 f(\Phi)}{\partial \Phi^2} \frac{w^2}{c^2} = \text{zero} \quad 15.90$$

que simplificada atende a equação de onda.

O resultado positivo da fase Φ na equação de onda é consequência exclusiva dos co-senos diretores serem constantes nas derivadas parciais, demonstrando que a equação de onda exige que a propagação tenha uma direção fixa no espaço (onda plana).

Para o observador O uma fonte situada na origem do seu referencial, produz em um ponto A aleatório situado à distância $r = ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ da origem, um campo elétrico \vec{E} descrito por:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} \quad 15.91$$

Onde as componentes são descritas como:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x_0} \cdot f(\Phi) \\ E_y &= E_{y_0} \cdot f(\Phi) \\ E_z &= E_{z_0} \cdot f(\Phi) \end{aligned} \quad 15.92$$

Que aplicadas em \vec{E} fornece:

$$\vec{E} = E_{x_0} f(\Phi) \vec{i} + E_{y_0} f(\Phi) \vec{j} + E_{z_0} f(\Phi) \vec{k} = [E_{x_0} \vec{i} + E_{y_0} \vec{j} + E_{z_0} \vec{k}] f(\Phi) = \vec{E}_o f(\Phi). \quad 15.93$$

$$\text{com módulo igual a } E = \sqrt{(E_{x_0})^2 + (E_{y_0})^2 + (E_{z_0})^2} \cdot f(\Phi) \Rightarrow E = E_o \cdot f(\Phi) \quad 15.94$$

$$\text{Sendo } \vec{E}_o = E_{x_0} \vec{i} + E_{y_0} \vec{j} + E_{z_0} \vec{k} \quad 15.95$$

$$\text{o vetor amplitude máxima constante de componentes } E_{x_0}, E_{y_0}, E_{z_0} \quad 15.96$$

$$\text{e módulo } E_o = \sqrt{(E_{x_o})^2 + (E_{y_o})^2 + (E_{z_o})^2} \quad 15.97$$

Sendo $f(\Phi)$ uma função com a fase Φ igual a 15.87 ou 15.88.

Derivando a componente E_x em relação à x e t obtemos:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = E_{x_o} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = E_{x_o} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi} \frac{\partial (kr - wt)}{\partial x} = E_{x_o} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi} \frac{kx}{r} = E_{x_o} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi} \frac{kx}{ct} \quad 15.98$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = E_{x_o} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = E_{x_o} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi} \frac{\partial (kr - wt)}{\partial t} = E_{x_o} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi} (-w) \quad 15.99$$

que aplicadas em 8.5 fornece

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \text{zero} \Rightarrow E_{x_o} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} E_{x_o} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{zero} \Rightarrow E_{x_o} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \text{zero}$$

$$E_{x_o} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \text{zero} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{zero} \quad 15.100$$

demonstrando que é a fase Φ que deve atender a 8.5.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{zero} \Rightarrow \frac{\partial (kr - wt)}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial (kr - wt)}{\partial t} = \text{zero} \Rightarrow \frac{kx}{ct} + \frac{x/t}{c^2} (-w) = \text{zero} \Rightarrow \frac{x}{ct} \left(k - \frac{w}{c} \right) = \text{zero}$$

como $k = \frac{w}{c}$ então E_x atende a 8.5.

Como a fase é a mesma para as componentes E_y e E_z então elas também atendem a 8.5.

Como as fase para os observador O e O' são iguais $(kr - wt) = (k'r' - w't')$ então as componentes do observador O' também atendem a 8.5.

$$\frac{\partial (kr - wt)}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial (kr - wt)}{\partial t} = \frac{\partial (k'r' - w't')}{\partial x'} + \frac{x'/t'}{c^2} \frac{\partial (k'r' - w't')}{\partial t'} = \text{zero} \quad 15.101$$

As componentes relativas ao observador O do campo elétrico se transformam para o referencial do observador O' de acordo com os quadros 7, 7B e 8.

Uma função na forma:

$$\Psi = e^{i(kx - wt)} = e^{i\Phi} = \cos(kx - wt) + i \sin(kx - wt) = \cos \Phi + i \sin \Phi \quad 15.102$$

onde $i = \sqrt{-1}$

Tem as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -k \sin \Phi + ki \cos \Phi \text{ e } \frac{\partial \Psi}{\partial t} = w \sin \Phi - wi \cos \Phi \quad 15.103$$

$$\text{ou } \frac{\partial \Psi}{\partial x} = ke^{i\Phi} \text{ e } \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -we^{i\Phi} \quad 15.104$$

Que aplicadas em 8.5 fornece:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = zero \Rightarrow (-k \operatorname{sen} \Phi + ki \cos \Phi) + \frac{x/t}{c^2} (w \operatorname{sen} \Phi - wi \cos \Phi) = zero$$

que simplificada fica igual a:

$$\left(-k + \frac{xw}{c^2 t}\right) \operatorname{sen} \Phi + \left(ki - \frac{xwi}{c^2 t}\right) \cos \Phi = zero$$

$$\text{ou } \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{x/t}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = zero \Rightarrow (ke^{i\Phi}) + \frac{x/t}{c^2} (-we^{i\Phi}) = zero$$

para obtermos uma identidade devemos ter os coeficientes iguais a zero por isso:

$$-k + \frac{xw}{c^2 t} = zero \Rightarrow k = \frac{xw}{c^2 t}$$

$$ki - \frac{xwi}{c^2 t} = zero \Rightarrow k = \frac{xw}{c^2 t}$$

$$(ke^{i\Phi}) + \frac{x/t}{c^2} (-we^{i\Phi}) = zero \Rightarrow k = \frac{xw}{c^2 t}$$

onde aplicando $w = ck$ obtemos:

$$k = \frac{xcck}{c^2 t} \Rightarrow \frac{x}{t} = c$$

Então para atendermos a equação 8.5 devemos ter uma propagação ao longo do eixo x à velocidade c.

Se aplicarmos $w = uk$ e $v = \frac{x}{t}$ obtemos:

$$k = \frac{xw}{c^2 t} = \frac{vuk}{c^2} \Rightarrow u = \frac{c^2}{v}$$

Resultado também obtido da equação de onda de Louis de Broglie.

§16 Tempo e Frequência

Elevemos o efeito Doppler a categoria de uma lei da física.

Podemos definir relógio como qualquer aparelho que produza uma frequência de eventos idênticos em série que possam ser enumerados e somados, de tal forma que um evento aleatório n de um aparelho, seja exatamente igual, a qualquer evento da série de eventos produzidos por outra réplica desse aparelho quando os eventos são comparados em repouso relativo.

O movimento cíclico do ponteiro de um relógio em repouso no referencial do observador O marca o tempo neste referencial e o movimento cíclico do ponteiro de um relógio em repouso no referencial do observador O' marca o tempo neste referencial. As fórmulas de transformação de tempo 1.7 e 1.8 relacionam os tempos entre os referenciais em movimento relativo, ou seja, relacionam movimentos em movimento relativo.

O movimento relativo entre os referenciais inerciais produz o efeito Doppler que prova que a frequência varia com a velocidade e como a frequência pode ser interpretada como a frequência do movimento cíclico do ponteiro de um relógio, então o tempo varia na mesma proporção que varia a frequência com o movimento relativo, isto é, basta substituir o tempo t e t' nas fórmulas 1.7 e 1.8 pelas frequências y e y' para obtermos as fórmulas de transformação de frequência, assim:

$$t' = t\sqrt{K} \Rightarrow y' = y\sqrt{K}$$

1.7 se transforma em 2.22

$$t = t' \sqrt{K'} \Rightarrow y = y' \sqrt{K'}$$

1.8 se transforma em 2.22

A transformação de Galileu $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$ de velocidades entre dois referenciais inerciais possui intrinsecamente três defeitos assim descritos:

a) A transformação de Galileu de velocidade para o eixo x é $u' x' = ux - v$. Nesta se tivermos $ux = c$ então $u' x' = c - v$ e se tivermos $u' x' = c$ então $ux = c + v$. Como ambos os resultados simultaneamente não são permitidos ou teremos $ux = c$ ou $u' x' = c$ então a transformação não permitiu que um raio de luz seja simultaneamente observado pelos observadores O e O' o que demonstra o privilégio de um observador em relação ao outro porque cada observador só pode observar o raio propagando em seu próprio referencial (defeito intrínseco a análise clássica do efeito de Sagnac).

b) Também não atende a primeira lei de Newton a lei da inércia porque um raio de luz emitido paralelo ao eixo x a partir da origem dos respectivos referenciais inerciais no instante em que as origens são coincidentes e no momento em que $t = t' = \text{zero}$ terá pela transformação de Galileu a velocidade c da luz alterada por $\pm v$ para os referenciais, contrariando a lei da inércia, que não permitiria que houvesse variação na velocidade porque não existe nenhuma ação externa atuando sobre o raio de luz e por isso ambos os observadores deveriam observar o raio de luz com velocidade c .

c) Como considera o tempo constante entre os referenciais não produz a variação temporal entre os referenciais em movimento como exigido pelo efeito Doppler.

O princípio da constância da velocidade da luz nada mais é do que uma exigência da primeira lei de Newton a lei da inércia.

A primeira lei de Newton a lei da inércia é introduzida na transformação de Galileu, quando o princípio da constância da velocidade da luz é aplicado na transformação de Galileu obtendo as equações dos Quadros 1 e 2 da Relatividade Ondulatória que não possuem os três defeitos descritos.

As equações para o tempo e a velocidade dos quadros 1 e 2 podem ser escritas como:

$$t' = t \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2v}{c} \cos \phi} \quad 1.7$$

$$v' = \frac{v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2v}{c} \cos \phi}} \quad 1.15$$

$$t = t' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'}{c} \cos \phi'} \quad 1.8$$

$$v = \frac{v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2v'}{c} \cos \phi'}} \quad 1.20$$

À distância d entre os referenciais é igual ao produto da velocidade pelo tempo assim:

$$d = vt = v' t' \quad 1.9$$

Que não depende do ângulo de propagação do raio de luz, sendo exclusivamente função da velocidade e do tempo, ou seja, o ângulo de propagação do raio de luz só altera entre os referenciais inercial a proporção entre o tempo e a velocidade mantendo constante a distância em cada instante para qualquer ângulo de propagação,

As equações acima na forma de função se escrevem como:

$$d = e(v, t) = e'(v', t') \quad 1.9$$

$$t' = f(v, t, \phi) \quad 1.7$$

$$v' = g(v, \phi) \quad 1.15$$

$$t = f'(v', t', \phi') \quad 1.8$$

$$v = g'(v', \phi') \quad 1.20$$

Então temos que a distância é função de duas variáveis o tempo função de três variáveis e a velocidade função de duas variáveis.

Da definição de momento 4.1 e energia 4.6 obtemos:

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{u} \quad 16.1$$

Que elevada ao quadrado fornece:

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{c^2}{E^2} p^2 \quad 16.2$$

Elevando ao quadrado a fórmula da energia obtemos:

$$E^2 = \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)^2 \Rightarrow E^2 - E^2 \frac{u^2}{c^2} = m_0^2 c^4$$

Onde aplicando 16.2 obtemos:

$$E^2 - E^2 \frac{u^2}{c^2} = m_0^2 c^4 \Rightarrow E^2 - E^2 \frac{c^2}{E^2} p^2 = m_0^2 c^4 \Rightarrow E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad 4.8$$

De onde concluímos que se a massa de repouso de uma partícula é nula $m_0 = zero$ a energia da partícula é igual a $E = c p$. 16.3

Que aplicada em 16.2 fornece:

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{c^2}{E^2} p^2 \Rightarrow \frac{u^2}{c^2} = \frac{c^2}{(cp)^2} p^2 \Rightarrow u = c \quad 16.4$$

De onde concluímos que o movimento de uma partícula com massa de repouso nula $m_0 = zero$ será sempre á velocidade da luz $u = c$.

Aplicando em $E = c p$ as relações $E = yh$ e $c = y\lambda$ obtemos:

$$yh = y\lambda p \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} \text{ e da mesma forma } p' = \frac{h}{\lambda'} \quad 16.5$$

Equação que relaciona o momento de uma partícula de massa de repouso nula com seu comprimento de onda.

Elevando ao quadrado a fórmula de transformação de momento (4.9) obtemos:

$$\vec{p}' = \vec{p} - \frac{E}{c^2} \vec{v} \Rightarrow p'^2 = p^2 + \frac{E^2}{c^4} v^2 - 2 \frac{E}{c^2} v p_x$$

Onde aplicando $E = cp$ e $px = p \cos \phi = p \frac{ux}{c}$ encontramos:

$$p'^2 = p^2 + \frac{(cp)^2}{c^4} v^2 - 2 \frac{cp}{c^2} vp \frac{ux}{c} \Rightarrow p' = p \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2vux}{c^2}} \Rightarrow p' = p \sqrt{K} \quad 16.6$$

Onde aplicando 16.5 resulta em:

$$p' = p \sqrt{K} \Rightarrow \frac{h}{\lambda'} = \frac{h}{\lambda} \sqrt{K} \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{K}} \text{ ou invertida } \lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{K'}} \quad 2.21$$

Onde aplicando $c = y\lambda$ e $c = y'\lambda'$ obtemos:

$$y' = y \sqrt{K'} \text{ ou invertida } y = y' \sqrt{K} \quad 2.22$$

No § 2 obtemos as equações 2.21 e 2.22 aplicando o princípio da relatividade à fase da onda.

§17 Transformação de H. Lorentz

Para dois observadores em movimento relativo a equação que representa o princípio da constância da velocidade da luz para um ponto aleatório A é:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad 17.01$$

Nesta cancelando os termos simétricos obtemos:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 \quad 17.02$$

Que podemos escrever na forma:

$$(x' - ct')(x' + ct') = (x - ct)(x + ct) \quad 17.03$$

Se nesta definirmos os fatores de proporção η e μ como:

$$\begin{cases} (x' - ct') = \eta(x - ct) & A \\ (x' + ct') = \mu(x + ct) & B \end{cases} \quad 17.04$$

onde teremos que ter $\eta \cdot \mu = 1$ para atendermos a 17.03.

As equações 17.04 foram obtidas originalmente por Albert Einstein.

Quando para o observador O' um raio de luz propaga no plano y'z' teremos x' = zero e x = vt condições que aplicadas na equação 17.02 fornece:

$$0 - c^2 t'^2 = (vt)^2 - c^2 t^2 \Rightarrow t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad 17.05$$

Resultado que as equações A e B do conjunto 17.04 sob as mesmas condições também devem fornecer:

$$\begin{cases} \left(0 - ct \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \eta(vt - ct) & A \\ \left(0 + ct \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \mu(vt + ct) & B \end{cases} \quad 17.06$$

Destas obtemos:

$$\eta = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \text{ e } \mu = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad 17.07$$

Onde comprovamos que $\eta \cdot \mu = 1$.

Do conjunto 17.04 obtemos as Transformações de H. Lorentz:

$$x' = \frac{(\eta + \mu)}{2}x + \frac{(\mu - \eta)}{2}ct \quad 17.08$$

$$ct' = \frac{(\mu - \eta)}{2}x + \frac{(\eta + \mu)}{2}ct \quad 17.09$$

$$x = \frac{(\eta + \mu)}{2}x' + \frac{(\eta - \mu)}{2}ct' \quad 17.10$$

$$ct = \frac{(\eta - \mu)}{2}x' + \frac{(\eta + \mu)}{2}ct' \quad 17.11$$

Calculo dos coeficientes $\frac{\eta + \mu}{2}$, $\frac{\mu - \eta}{2}$ e $\frac{\eta - \mu}{2}$:

$$\eta + \mu = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} + \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = \frac{1 + \frac{v}{c} + 1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}\sqrt{1 + \frac{v}{c}}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{\eta + \mu}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 17.12$$

$$\mu - \eta = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} - \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = \frac{1 - \frac{v}{c} - 1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} = \frac{-2\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{\mu - \eta}{2} = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 17.13$$

$$\eta - \mu = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = \frac{1 + \frac{v}{c} - 1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}\sqrt{1 + \frac{v}{c}}} = \frac{2\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{\eta - \mu}{2} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 17.14$$

Efeito de Sagnac

No instante em que as origens dos dois observadores coincidem o tempo é zerado ($t = t' = \text{zero}$) em ambos os referenciais e dois raios de luz são emitidos a partir da origem comum, um no sentido positivo (horário índice c) dos eixos x e x' com frente de onda A_c e outro no sentido negativo (anti-horário índice u) dos eixos x e x' com frente de onda A_u .

As condições de propagação acima aplicada nas equações de Lorentz fornecem os quadros A e B abaixo:

Quadro A

Equação	Raio horário (c)	Equação	Raio anti-horário (u)	Soma dos raios
	Resultado		Resultado	
Condição	$x_c = ct_c$	Condição	$x_u = -ct_u$	
17.08	$x'_c = \mu ct_c$	17.08	$x'_u = -\eta ct_u$	
	$x'_c = \mu x_c$		$x'_u = \eta x_u$	$x'_c + x'_u = \mu x_c + \eta x_u$
17.09	$ct'_c = \mu ct_c$	17.09	$ct'_u = \eta ct_u$	$ct'_c + ct'_u = \mu ct_c + \eta ct_u$
	$x'_c = ct'_c$		$x'_u = -ct'_u$	

Quadro B

Equação	Raio horário (c)	Equação	Raio anti-horário (u)	Soma dos raios
	Resultado		Resultado	
Condição	$x'_c = ct'_c$	Condição	$x'_u = -ct'_u$	
17.10	$x_c = \eta ct'_c$	17.10	$x_u = -\mu ct'_u$	
	$x_c = \eta x'_c$		$x_u = \mu x'_u$	$x_c + x_u = \eta x'_c + \mu x'_u$
17.11	$ct_c = \eta ct'_c$	17.11	$ct_u = \mu ct'_u$	$ct_c + ct_u = \eta ct'_c + \mu ct'_u$
	$x_c = ct_c$		$x_u = -ct_u$	

Observemos que os quadros A e B são inversos um do outro.

Formemos o conjunto das equações de soma dos raios dos quadros A e B:

$$\begin{cases} D' = ct'_c + ct'_u = \mu ct_c + \eta ct_u & A \\ D = ct_c + ct_u = \eta ct'_c + \mu ct'_u & B \end{cases} \quad 17.15$$

Onde para o observador O' $D' = A_u \leftrightarrow A_c$ é a distância entre as frentes de onda A_u e A_c e onde para o observador O $D = A_u \leftrightarrow A_c$ é a distância entre as frentes de onda A_u e A_c .

Nas equações acima 17.15 devido à isotropia do espaço e tempo e as frentes de onda $A_u \leftrightarrow A_c$ dos dois raios de luz ser as mesmas para ambos os observadores, a soma dos raios de luz e dos tempos deve ser invariável entre os observadores o que expressamos por:

$$D' = D \Rightarrow ct'_c + ct'_u = ct_c + ct_u \Rightarrow \sum t' = \sum t \quad 17.16$$

Este resultado que equaciona a isotropia do espaço e tempo pode ser denominado como o princípio de conservação do espaço e do tempo.

As três hipóteses de propagações definidas a seguir serão aplicadas em 17.15 e testadas para ver se cumpre o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 17.16:

Hipótese A:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos e não existi nenhum movimento privilegiado de qualquer um dos observadores sobre o outro no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$|ct_c| = |ct'_u| \text{ e } |ct_u| = |ct'_c| \quad 17.17$$

Hipótese que aplicada na equação A ou B do conjunto 17.15 atende o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 17.16.

A hipótese 17.17 aplicada nos quadros A e B resulta em:

$$\begin{aligned} \text{Quadro A} & \begin{cases} ct'_c = \mu ct'_u & A \\ ct'_u = \eta ct'_c & B \end{cases} \\ \text{Quadro B} & \begin{cases} ct_c = \eta ct_u & C \\ ct_u = \mu ct_c & D \end{cases} \end{aligned} \quad 17.18$$

Hipótese B:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos porem o observador O está em repouso absoluto no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$|ct_c| = |ct_u| = |ct| \quad 17.19$$

Que aplicada no quadro A e B resulta em:

$$\begin{aligned} \text{Quadro A} & \begin{cases} ct'_c = \mu ct & A \\ ct'_u = \eta ct & B \end{cases} \\ \text{Quadro B} & \begin{cases} ct = \eta ct'_c & C \\ ct = \mu ct'_u & D \end{cases} \end{aligned} \quad 17.20$$

$$\begin{cases} ct'_c = \mu^2 ct'_u & A \\ ct'_u = \eta^2 ct'_c & B \end{cases} \quad 17.21$$

Somando A e B em 17.20 obtemos:

$$ct'_c + ct'_u = 2ct \left(\frac{\eta + \mu}{2} \right) \Rightarrow D' = D \left(\frac{\eta + \mu}{2} \right) \Rightarrow D' = \frac{D}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Sigma t' = \frac{\Sigma t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 17.22$$

Resultado que não concorda como o princípio de conservação do espaço e do tempo dado por 17.16 e como $D' \neq D$ é como se existissem quatro raios de luz, dois para cada observador, cada raio com sua respectiva frente de onda independente dos outros.

Hipótese C:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos porem o observador O' está em repouso absoluto no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$|ct'_c| = |ct'_u| = |ct'| \quad 17.23$$

Que aplicadas nos quadros A e B resulta em:

$$\begin{aligned} \text{Quadro A} & \begin{cases} ct' = \mu ct_c & A \\ ct' = \eta ct_u & B \end{cases} \\ \text{Quadro B} & \begin{cases} ct_c = \eta ct' & C \\ ct_u = \mu ct' & D \end{cases} \end{aligned} \quad 17.24$$

$$\begin{cases} ct_c = \eta^2 ct_u & A \\ ct_u = \mu^2 ct_c & B \end{cases} \quad 17.25$$

Somando C e D em 17.24 obtemos:

$$ct_c + ct_u = 2ct' \left(\frac{\eta + \mu}{2} \right) \Rightarrow D = D' \left(\frac{\eta + \mu}{2} \right) \Rightarrow D = \frac{D'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Sigma t = \frac{\Sigma t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 17.26$$

Resultado que exatamente como na hipótese B não concorda como o princípio de conservação do espaço e do tempo dado por 17.16 e como $D' \neq D$ é como se existissem quatro raios de luz, dois para cada observador, com cada raio com sua respectiva frente de onda independente dos outros.

Conclusão

As hipóteses A, B e C são completamente compatíveis com a exigência de isotropia do espaço e tempo como se pode concluir da geometria das propagações.

O resultado da hipótese A contradiz o resultado das hipóteses B e C apesar do movimento relativo dos observadores não alterar o movimento da frente de onda A_u relativo à frente de onda A_c porque as frentes de onda têm movimento independente uma da outra e dos observadores.

A hipótese A aplicada nas transformações de H. Lorentz atende o princípio de conservação do espaço e do tempo dado por 17.16 demonstrando a compatibilidade das transformações de H. Lorentz com a hipótese A. A aplicação das hipóteses B e C nas transformações de H. Lorentz fornece as deformações do espaço e do tempo dadas por 17.22 e 17.26 porque as transformações de H. Lorentz não são compatíveis com as hipóteses B e C.

Para obtermos o efeito de Sagnac consideremos que o observador O' está em repouso absoluto, hipótese C acima e que o percurso dos raios seja de $2\pi R$:

$$ct'_c = ct'_u = ct' = 2\pi R \quad 17.27$$

Para o observador O o efeito de Sagnac é dado pela diferença de tempo entre o raio horário e anti-horário $\Delta t = t_c - t_u$ que pode ser obtido utilizando 17.24 (C-D), 17.27 e 17.14:

$$\Delta t = t_c - t_u = t'(\eta - \mu) = \frac{2\pi R}{c} \left(\frac{2\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{4\pi R v}{c\sqrt{c^2 - v^2}} \quad 17.28$$

§9 O Efeito de Sagnac (continuação)

No instante em que as origens coincidem o tempo é zerado ($t = t' = \text{zero}$) em ambos os referenciais e dois raios de luz são emitidos a partir da origem comum, um no sentido positivo (horário índice c) dos eixos x e x' com frente de onda A_c e outro no sentido negativo (anti-horário índice u) dos eixos x e x' com frente de onda A_u .

O raio projetado no sentido positivo (horário índice c) dos eixos x e x' é equacionado por $x_c = ct_c$ e $x'_c = ct'_c$ que aplicadas no Quadro I fornece:

$$ct'_c = ct_c \left(1 - \frac{v_c}{c} \right) \Rightarrow ct'_c = ct_c K_c \quad (1.7) \quad ct_c = ct'_c \left(1 + \frac{v'_c}{c} \right) \Rightarrow ct_c = ct'_c K'_c \quad (1.8) \quad 9.11$$

$$v'_c = \frac{v_c}{\left(1 - \frac{v_c}{c} \right)} \Rightarrow v'_c = \frac{v_c}{K_c} \quad (1.15) \quad v_c = \frac{v'_c}{\left(1 + \frac{v'_c}{c} \right)} \Rightarrow v_c = \frac{v'_c}{K'_c} \quad (1.20) \quad 9.12$$

Destas deduzimos que a distância entre os observadores é dada por:

$$d_c = v_c t_c = v'_c t'_c \quad 9.13$$

Onde temos:

$$\left(1 - \frac{v_c}{c} \right) \left(1 + \frac{v'_c}{c} \right) = K_c K'_c = 1 \quad 9.14$$

O raio projetado no sentido negativo (anti-horário índice u) dos eixos x e x' é equacionado por $x_u = -ct_u$ e $x'_u = -ct'_u$: que aplicadas no Quadro I fornece:

$$ct'_u = ct_u \left(I + \frac{v_u}{c} \right) \Rightarrow ct'_u = ct_u K_u \quad (1.7) \quad ct_u = ct'_u \left(I - \frac{v'_u}{c} \right) \Rightarrow ct_u = ct'_u K'_u \quad (1.8) \quad 9.15$$

$$v'_u = \frac{v_u}{\left(I + \frac{v_u}{c} \right)} \Rightarrow v'_u = \frac{v_u}{K_u} \quad (1.15) \quad v_u = \frac{v'_u}{\left(I - \frac{v'_u}{c} \right)} \Rightarrow v_u = \frac{v'_u}{K'_u} \quad (1.20) \quad 9.16$$

Destas deduzimos que a distância entre os observadores é dada por:

$$d_u = v_u t_u = v'_u t'_u \quad 9.17$$

Onde temos:

$$\left(I + \frac{v_u}{c} \right) \left(I - \frac{v'_u}{c} \right) = K_u K'_u = I \quad 9.18$$

Devemos observar que a princípio não existe nenhuma relação entre as equações 9.11 a 9.14 com as equações 9.15 a 9.18.

Com as condições de propagação descritas formamos os quadros A e B seguintes:

Quadro A

Equação	Raio horário (c)	Equação	Raio anti-horário (u)	Soma dos raios
	Resultado		Resultado	
Condição	$x_c = ct_c$	Condição	$x_u = -ct_u$	
1.2	$x'_c = ct_c K_c$	1.2	$x'_u = -ct_u K_u$	
	$x'_c = x_c K_c$		$x'_u = x_u K_u$	$x'_c + x'_u = x_c K_c + x_u K_u$
1.7	$ct'_c = ct_c K_c$	1.7	$ct'_u = ct_u K_u$	$ct'_c + ct'_u = ct_c K_c + ct_u K_u$
	$x'_c = ct'_c$		$x'_u = -ct'_u$	

Quadro B

Equação	Raio horário (c)	Equação	Raio anti-horário (u)	Soma dos raios
	Resultado		Resultado	
Condição	$x'_c = ct'_c$	Condição	$x'_u = -ct'_u$	
1.4	$x_c = ct'_c K'_c$	1.4	$x_u = -ct'_u K'_u$	
	$x_c = x'_c K'_c$		$x_u = x'_u K'_u$	$x_c + x_u = x'_c K'_c + x'_u K'_u$
1.8	$ct_c = ct'_c K'_c$	1.8	$ct_u = ct'_u K'_u$	$ct_c + ct_u = ct'_c K'_c + ct'_u K'_u$
	$x_c = ct_c$		$x_u = -ct_u$	

Observemos que para os raios de mesmo sentido os quadros A e B são inversos um do outro.

Formemos o conjunto das equações de soma dos raios dos quadros A e B:

$$\begin{cases} D' = ct'_c + ct'_u = ct_c K_c + ct_u K_u & A \\ D = ct_c + ct_u = ct'_c K'_c + ct'_u K'_u & B \end{cases} \quad 9.19$$

Onde para o observador O' $D' = A_u \leftrightarrow A_c$ é a distância entre as frentes de onda A_u e A_c e onde para o observador O $D = A_u \leftrightarrow A_c$ é a distância entre as frentes de onda A_u e A_c .

Nas equações acima 9.19 devido à isotropia do espaço e tempo e as frentes de onda $A_u \leftrightarrow A_c$ dos dois raios de luz ser as mesmas para ambos os observadores, a soma dos raios de luz e dos tempos deve ser invariável entre os observadores o que se expressa por:

$$D' = D \Rightarrow ct'_c + ct'_u = ct_c + ct_u \Rightarrow \sum t' = \sum t \quad 9.20$$

Este resultado que equaciona a isotropia do espaço e tempo pode ser denominado como o princípio de conservação do espaço e do tempo.

As três hipóteses de propagações definidas a seguir serão aplicadas em 9.19 e testadas para ver se cumpre o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 9.20. Com estas hipóteses criaremos vínculos entre as equações 9.11 a 9.14 com as equações 9.15 a 9.18.

Hipótese A:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos e não existi nenhum movimento privilegiado de qualquer um dos dois observadores sobre o outro no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$\begin{cases} ct_c = ct'_u \Rightarrow t_c = t'_u \Rightarrow v_c = v'_u \Rightarrow K_c = K'_u & A \\ ct_u = ct'_c \Rightarrow t_u = t'_c \Rightarrow v_u = v'_c \Rightarrow K_u = K'_c & B \end{cases} \quad 9.21$$

Com estas deduzimos que à distância entre os observadores é dada por:

$$d_c = d_u = v_c t_c = v'_c t'_c = v_u t_u = v'_u t'_u \quad 9.22$$

Resultados que aplicados nas equações A ou B do conjunto 9.19 atende o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 9.20. Demonstrando que o efeito Doppler nos raios horário e anti-horário se compensam nos referenciais.

Hipótese B:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos porem o observador O está em repouso absoluto no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$\begin{cases} ct_c = ct_u = ct & A \\ v_c = v_u = v & B \\ v_c t_c = v_u t_u = vt & C \end{cases} \quad 9.23$$

Com estas deduzimos que à distância entre os observadores é dada por:

$$d_c = d_u = vt = v'_c t'_c = v'_u t'_u \quad 9.24$$

Resultados que aplicados nas equações A ou B do conjunto 9.19 atende o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 9.20. Demonstrando que o efeito Doppler nos raios horário e anti-horário se compensam nos referenciais.

Hipótese C:

Se o espaço e o tempo são isotrópicos porem o observador O' está em repouso absoluto no espaço vazio, então a geometria de propagação dos raios luminosos se equaciona por:

$$\begin{cases} ct'_c = ct'_u = ct' & A \\ v'_c = v'_u = v' & B \\ v'_c t'_c = v'_u t'_u = v' t' & C \end{cases} \quad 9.25$$

Com estas deduzimos que à distância entre os observadores é dada por:

$$d_c = d_u = v't' = v_c t_c = v_u t_u \quad 9.26$$

Resultados que aplicados nas equações A ou B do conjunto 9.19 atende o princípio de conservação do espaço e tempo dado por 9.20. Demonstrando que os efeitos Doppler nos raios horário e anti-horário se compensam nos referenciais.

Para obtermos o efeito de Sagnac consideremos que o observador O' está em repouso absoluto, hipótese C acima e que o percurso dos raios seja de $2\pi R$:

$$ct'_c = ct'_u = ct' = 2\pi R \quad 9.27$$

Aplicando a hipótese C em 9.11 e 9.15 obtemos:

$$t_c = t'_c K'_c \Rightarrow t_c = t' \left(1 + \frac{v'}{c} \right) \quad 9.28$$

$$t_u = t'_u K'_u \Rightarrow t_u = t' \left(1 - \frac{v'}{c} \right) \quad 9.29$$

Para o observador O o efeito de Sagnac é dado pela diferença de tempo entre o percurso do raio horário e percurso do raio anti-horário $\Delta t = t_c - t_u$ que pode ser obtido fazendo (9.28 – 9.29) e aplicando 9.27 obtendo:

$$\Delta t = t_c - t_u = t' \left(1 + \frac{v'}{c} \right) - t' \left(1 - \frac{v'}{c} \right) = \frac{2v't'}{c} = \frac{4\pi R v'}{c^2} \quad 9.30$$

A equação $\Delta t = \frac{2v't'}{c} = \frac{2v_c t_c}{c} = \frac{2v_u t_u}{c}$ é exatamente o resultado que se obtém da análise da geometria de propagação dois raios horário e anti-horário em uma circunferência demonstrando a coerência das hipóteses adotadas na Relatividade Ondulatória.

Em 9.30 aplicando 9.12 e 9.16 obtemos o resultado final em função de v_c e v_u :

$$\Delta t = t_c - t_u = \frac{2v't'}{c} = \frac{4\pi R v'}{c^2} = \frac{4\pi R v_c}{c^2 - c v_c} = \frac{4\pi R v_u}{c^2 + c v_u} \quad 9.31$$

A fórmula clássica do efeito de Sagnac é escrita como:

$$\Delta t = t_c - t_u = \frac{4\pi R v}{c^2 - v^2} \quad 9.32$$

Da geometria de propagação temos obrigatoriamente que:

$$\Delta t = \frac{2vt}{c} \quad 9.33$$

Os tempos clássicos seriam dados por:

$$t = \frac{2\pi R}{c} \quad 9.34$$

$$t_c = \frac{2\pi R}{c - v} \quad 9.35$$

$$t_u = \frac{2\pi R}{c + v} \quad 9.36$$

Aplicando 9.34, 9.35 e 9.36 em 9.33 obtemos:

$$\Delta t = \frac{2v}{c} \frac{2\pi R}{c} = \frac{4\pi Rv}{c^2} \quad 9.37$$

$$\Delta t_c = \frac{2v}{c} \frac{2\pi R}{(c-v)} = \frac{4\pi Rv}{c^2 - cv} \quad 9.38$$

$$\Delta t_u = \frac{2v}{c} \frac{2\pi R}{(c+v)} = \frac{4\pi Rv}{c^2 + cv} \quad 9.39$$

Os resultados 9.37, 9.38 e 9.39 são completamente diferentes de 9.32.

§18 A Experiência de Michelson & Morley

A análise tradicional que fornece a solução para o resultado nulo desta experiência considera em repouso no referencial do observador O' um aparelho que emite dois raios de luz um horizontal na direção x' (horário índice c) e outro vertical na direção y'. O raio horizontal (horário índice c) propaga até um espelho colocado em x' = L neste o raio reflete (anti-horário índice u) e retorna a origem do referencial onde x' = zero. O raio vertical propaga até um espelho colocado em y' = L reflete e retorna a origem do referencial onde y' = zero.

Na análise tradicional de acordo com o princípio de constância da velocidade da luz para o observador O' o percurso dois raios é dado por:

$$ct'_c = ct'_u = L \quad 18.01$$

Para o observador O' a soma dos tempos de percurso dois raios ao longo do eixo x' é:

$$\sum t'_{x'} = t'_c + t'_u = \frac{L}{c} + \frac{L}{c} = \frac{2L}{c} \quad 18.02$$

Na análise tradicional para o observador O' a soma dos tempos de percurso dois raios ao longo do eixo y' é:

$$\sum t'_{y'} = t'_+ + t'_- = \frac{L}{c} + \frac{L}{c} = \frac{2L}{c} \quad 18.03$$

Como temos $\sum t'_{x'} = \sum t'_{y'} = \frac{2L}{c}$ não existe franja de interferência e está explicado o resultado nulo da experiência de Michelson & Morley.

Nesta análise tradicional o percurso idêntico dos raios horários e anti-horários contido na equação 18.01 que da origem ao resultado nulo da experiência de Michelson & Morley contraria o efeito de Sagnac que é exatamente a diferença de tempo existente entre o percurso do raio horário e o percurso do raio anti-horário.

Com base na Relatividade Ondulatória fazemos uma análise mais profunda da experiência de Michelson & Morley obtendo um resultado que está completamente de acordo com o efeito de Sagnac.

Observemos que a equação 18.01 corresponde à hipótese C do parágrafo §9.

Aplicando 18.01 em 9.19 obtemos:

$$\begin{cases} D' = ct'_c + ct'_u = ct_c K_c + ct_u K_u \Rightarrow D' = L + L = ct_c K_c + ct_u K_u & A \\ D = ct_c + ct_u = ct'_c K'_c + ct'_u K'_u \Rightarrow D = ct_c + ct_u = LK'_c + LK'_u = L(K'_c + K'_u) & B \end{cases} \quad 18.04$$

De 18.04 A obtemos:

$$D' = 2L = ct_c \left(1 - \frac{v_c}{c}\right) + ct_u \left(1 + \frac{v_u}{c}\right) \Rightarrow D' = 2L = ct_c - v_c t_c + ct_u + v_u t_u \quad 18.05$$

Onde aplicando 9.26 obtemos:

$$D' = 2L = ct_c + ct_u \Rightarrow \sum t_x = t_c + t_u = \frac{2L}{c} \quad 18.06$$

Em 18.04 B temos:

$$D = ct_c + ct_u = L \left[\left(1 + \frac{v'_c}{c} \right) + \left(1 - \frac{v'_u}{c} \right) \right] \quad 18.07$$

Onde aplicando 9.25 B obtemos:

$$D = ct_c + ct_u = 2L \Rightarrow \sum t_x = t_c + t_u = \frac{2L}{c} \quad 18.08$$

As equações 18.06 e 18.08 demonstram que o efeito Doppler nos raios horário e anti-horário se compensa no referencial do observado O resultando em:

$$\sum t'_{y'} = \sum t'_{x'} = \sum t_x = \frac{2L}{c} \quad 18.09$$

Por isso de acordo com a Relatividade Ondulatória na experiência de Michelson & Morley podemos supor que o raio de luz horário tem percurso diferente do raio de luz anti-horário de acordo com a fórmula 18.08 obtendo também resultado nulo para a experiência e concordando então com o efeito de Sagnac. Esta suposição não pode ser feita com base na Relatividade Especial porque conforme 17.26 temos:

$$\sum t'_{x'} \neq \sum t_x \quad 18.10$$

§19 Retrocesso do periélio de Mercúrio de -7,13”

Imaginemos o Sol situado no foco de uma elipse que coincide com a origem de um sistema de coordenadas (x,y,z) imóvel em relação às denominadas estrelas fixas e que o planeta Mercúrio em um movimento governado pela força de atração gravitacional com o Sol descreve uma órbita elíptica no plano (x,y) de acordo com as leis de Kepler e de acordo com a fórmula da lei da atração gravitacional de Newton:

$$\vec{F} = \frac{-GM_o m_o}{r^2} \hat{r} = \frac{-(6,67.10^{-11})(1,98.10^{30})(3,28.10^{23})}{r^2} \hat{r} = \frac{-k}{r^2} \hat{r} \quad 19.01$$

O sub índice “o” indicando massa em repouso relativo ao observador.

Para descrever o movimento utilizaremos as fórmulas conhecidas:

$$\vec{r} = r \hat{r} \quad 19.02$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \quad 19.03$$

$$u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\hat{r}}{dt} \right)^2 \quad 19.04$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2(r\hat{r})}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\hat{r}}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{r}}{dt} + r \frac{d^2\hat{r}}{dt^2} \right] \hat{\phi} \quad 19.05$$

A fórmula da força relativista é dada por:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_o \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \vec{a} + \frac{m_o}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{u}{c^2} \frac{du}{dt} \vec{u} = \frac{m_o}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \vec{a} + \left(\vec{u} \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \frac{\vec{u}}{c^2} \right] \quad 19.06$$

Nesta o primeiro termo corresponde à variação da massa com a velocidade e o segundo como logo veremos em 19.22 corresponde à variação da energia com o tempo.

Com esta e as fórmulas anteriores obtemos:

$$\vec{F} = \frac{m_o}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\hat{r}}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{r}}{dt} + r \frac{d^2\hat{r}}{dt^2} \right) \hat{\phi} + \left[\frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\hat{r}}{dt} \right)^2 \right] + r \frac{d\hat{r}}{dt} \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{r}}{dt} + r \frac{d^2\hat{r}}{dt^2} \right) \right] \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \hat{\phi} \right) \right\} \quad 19.07$$

$$\vec{F} = \frac{m_o}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left\{ \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\hat{r}}{dt} \right)^2 \right] + \left[\frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\hat{r}}{dt} \right)^2 \right] + r \frac{d\hat{r}}{dt} \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{r}}{dt} + r \frac{d^2\hat{r}}{dt^2} \right) \right] \frac{1}{c^2} \frac{dr}{dt} \right] \hat{r} + \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{r}}{dt} + r \frac{d^2\hat{r}}{dt^2} \right) + \left[\frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\hat{r}}{dt} \right)^2 \right] + r \frac{d\hat{r}}{dt} \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{r}}{dt} + r \frac{d^2\hat{r}}{dt^2} \right) \right] \frac{r}{c^2} \frac{d\hat{r}}{dt} \right] \hat{\phi} \right\} \quad 19.08$$

Nesta temos a componente transversal $\vec{F}_{\hat{\phi}}$ e radial $\vec{F}_{\hat{r}}$ dadas por:

$$\vec{F}_{\hat{r}} = \frac{m_o}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + \left[\frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + r \frac{d\phi}{dt} \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right) \right] \frac{1}{c^2} \frac{dr}{dt} \right\} \hat{r} \quad 19.09$$

$$\vec{F}_{\hat{\phi}} = \frac{m_o}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right) + \left[\frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + r \frac{d\phi}{dt} \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right) \right] \frac{r}{c^2} \frac{d\phi}{dt} \right\} \hat{\phi} \quad 19.10$$

Como a força gravitacional é central devemos ter a componente transversal nula $\vec{F}_{\hat{\phi}} = \text{zero}$ assim temos:

$$\vec{F}_{\hat{\phi}} = \frac{m_o}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right) + \left[\frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + r \frac{d\phi}{dt} \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right) \right] \frac{r}{c^2} \frac{d\phi}{dt} \right\} \hat{\phi} = \text{zero} \quad 19.11$$

Desta obtemos:

$$\frac{\left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right)}{\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]} = \frac{-r \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt}}{c^2 \frac{dr}{dt}} = \frac{\left(2r \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r^2 \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right)}{r^2 \frac{d\phi}{dt}} = \frac{-1}{c^2} \frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]}{\left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]} \quad 19.12$$

Da componente radial $\vec{F}_{\hat{r}}$ obtemos:

$$\vec{F}_{\hat{r}} = \frac{m_o}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + \frac{dr}{dt} + \frac{r \frac{d\phi}{dt} \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right)}{\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]} \right\} \frac{1}{c^2} \frac{dr}{dt} \hat{r} \quad 19.13$$

Nesta aplicando 19.12 temos:

$$\vec{F}_{\hat{r}} = \frac{m_o}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + \frac{dr}{dt} - \frac{r \frac{d\phi}{dt} \left(r \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \right)}{\left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]} \right\} \frac{1}{c^2} \frac{dr}{dt} \hat{r} \quad 19.14$$

Que simplificada resulta em:

$$\vec{F}_{\hat{r}} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]}{\left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]} \hat{r} \quad 19.15$$

Esta igualada à força gravitacional de Newton resulta na força gravitacional relativística:

$$\vec{F}_{\hat{r}} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]}{\left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]} \hat{r} = \frac{-GM_o m_o}{r^2} \hat{r} = \frac{-k}{r^2} \hat{r} \quad 19.16$$

Como a força gravitacional é central deve atender a teoria de conservação da energia (E) que é escrita como:

$$E = E_k + E_p = \text{constante.} \quad 19.17$$

Onde a energia cinética (E_k) é dada por:

$$E_k = mc^2 - m_o c^2 = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad 19.18$$

E a energia potencial (E_p) gravitacional por:

$$E_p = \frac{-GM_o m_o}{r} = \frac{-k}{r} \quad 19.19$$

Resultando em:

$$E = m_o c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right] - \frac{k}{r} = \text{constante.} \quad 19.20$$

Como a energia total (E) é constante devemos ter:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_k}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = \text{zero.} \quad 19.21$$

Então temos:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{m_o u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{dt} \quad 19.22$$

$$\frac{dE_p}{dt} = \frac{k}{r^2} \frac{dr}{dt} \quad 19.23$$

Resultando em:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_k}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = \text{zero} \Rightarrow \frac{m_o u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{dt} + \frac{k}{r^2} \frac{dr}{dt} = \text{zero} \Rightarrow \frac{m_o u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{dt} = \frac{-k}{r^2} \frac{dr}{dt} \quad 19.24$$

Esta aplicada na força relativista 19.06 e igualada a força gravitacional 19.01 resulta em:

$$\vec{F} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \vec{a} - \frac{1}{c^2} \frac{k}{r^2} \frac{dr}{dt} \vec{u} = \frac{-k}{r^2} \hat{r} \quad 19.25$$

Nesta substituindo as variáveis anteriores obtemos:

$$\vec{F} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \left\{ \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right) \hat{\phi} \right\} - \frac{1}{c^2} \frac{k}{r^2} \frac{dr}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} \right) = \frac{-k}{r^2} \hat{r} \quad 19.26$$

Desta obtemos a componente radial $\vec{F}_{\hat{r}}$ igual a:

$$\vec{F}_{\hat{r}} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{c^2} \frac{k}{r^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{-k}{r^2} \quad 19.27$$

Que facilmente se transforma na força gravitacional relativista 19.16.

De 19.26 obtemos a componente transversal $\vec{F}_{\hat{\phi}}$ igual a:

$$\vec{F}_{\hat{\phi}} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{k}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} = zero \quad 19.28$$

Desta última obtemos:

$$\frac{2r \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r^2 \frac{d^2 \phi}{dt^2}}{r^2 \frac{d\phi}{dt}} = \frac{1}{m_o} \frac{k}{c^2 r^2} \frac{dr}{dt} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \quad 19.29$$

Como a força gravitacional é central também deve atender a teoria de conservação do momento angular que é escrito como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{constante.} \quad 19.30$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \frac{m_o \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = r \hat{r} \times \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \left(\frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} \right) = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} r^2 \frac{d\phi}{dt} (\hat{r} \times \hat{\phi}) = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} r^2 \frac{d\phi}{dt} \hat{k} \quad 19.31$$

$$\vec{L} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} r^2 \frac{d\phi}{dt} \hat{k} = L \hat{k} = \text{constante.} \quad 19.32$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(L\hat{k})}{dt} = \frac{d(L)\hat{k}}{dt} + L \frac{d(\hat{k})}{dt} = \frac{d(L)\hat{k}}{dt} = zero \Rightarrow \frac{d(L)}{dt} = zero \quad 19.33$$

Resulta então que L é constante.

Em 19.33 fizemos $\frac{d\hat{k}}{dt} = zero$ porque o movimento é no plano (x,y).

Derivando L encontramos:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} r^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{m_0 u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{dt} r^2 \frac{d\phi}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \left(2r \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} \right) = \text{zero} \quad 19.34$$

Desta obtemos:

$$\frac{\left(2r \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} \right)}{r^2 \frac{d\phi}{dt}} = \frac{-u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} \frac{du}{dt} \frac{1}{c^2} \quad 19.35$$

Igualando 19.12 proveniente da teoria da força central com 19.29 proveniente da teoria de conservação da energia e 19.35 proveniente da teoria de conservação do momento angular obtemos:

$$\frac{\left(2r \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} \right)}{r^2 \frac{d\phi}{dt}} = \frac{-1}{c^2} \frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]}{\left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]} = \frac{k}{m_0 c^2 r^2} \frac{dr}{dt} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{-u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} \frac{du}{dt} \frac{1}{c^2} \quad 19.36$$

Das duas últimas igualdade obtemos 19.24 e das duas do meio obtemos 19.16.

Para solução das equações diferenciais utilizaremos o mesmo método utilizado na teoria Newtoniana.

$$\text{Façamos } w = \frac{1}{r} \quad 19.37$$

$$\text{O diferencial total desta é } dw = \frac{\partial w}{\partial r} dr \Rightarrow dw = \frac{-1}{r^2} dr \quad 19.38$$

$$\text{Desta obtemos } \frac{dw}{d\phi} = \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \text{ e } \frac{dw}{dt} = \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{dt} \quad 19.39$$

$$\text{Do módulo do momento angular temos } \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{m_0 r^2} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \quad 19.40$$

$$\text{Desta obtemos } \frac{dr}{dt} = \frac{L}{m_0 r^2} \frac{dr}{d\phi} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \quad 19.41$$

$$\text{Nesta aplicando 19.39 obtemos } \frac{dr}{dt} = \frac{-L}{m_0} \frac{dw}{d\phi} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \quad 19.42$$

$$\text{Que derivada fornece } \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\phi} \frac{d}{dt} \left(\frac{-L}{m_0} \frac{dw}{d\phi} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \right) \quad 19.43$$

Onde aplicando 19.40 e derivando obtemos:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L}{m_o r^2} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{-L dw}{m_o d\phi} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \right) = \frac{-L^2}{m_o^2 r^2} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \left[\frac{d^2 w}{d\phi^2} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} + \frac{dw}{d\phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \right) \right] \quad 19.44$$

Nesta com 19.36 a derivada do radical é assim obtida:

$$\frac{d}{dt} \left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \right) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{u}{c^2} \frac{du}{dt} = \frac{k}{m_o c^2 r^2} \frac{dr}{dt} \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right) = \frac{-k}{m_o c^2} \frac{dw}{dt} \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right) \quad 19.45$$

$$\frac{d}{d\phi} \left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \right) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{u}{c^2} \frac{du}{d\phi} = \frac{k}{m_o c^2 r^2} \frac{dr}{d\phi} \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right) = \frac{-k}{m_o c^2} \frac{dw}{d\phi} \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right) \quad 19.46$$

Que aplicada em 19.44 fornece:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{-L^2}{m_o^2 r^2} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \left[\frac{d^2 w}{d\phi^2} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{k}{m_o c^2} \left(\frac{dw}{d\phi} \right)^2 \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right) \right] \quad 19.47$$

Simplificada resulta:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L^2 k}{m_o^3 c^2 r^2} \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{dw}{d\phi} \right)^2 - \frac{L^2}{m_o^2 r^2} \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right) \frac{d^2 w}{d\phi^2} \quad 19.48$$

Encontremos a derivada segunda do ângulo derivando 19.40:

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{m_o r^2} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \right) = \frac{-2L}{m_o r^3} \frac{dr}{dt} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} + \frac{L}{m_o r^2} \frac{d}{dt} \left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \right) \quad 19.49$$

Nesta aplicando 19.42 e 19.45 e simplificando obtemos:

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{2L^2}{m_o^2 r^3} \frac{dw}{d\phi} \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right) - \frac{L^2 k}{m_o^3 c^2 r^4} \frac{dw}{d\phi} \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad 19.50$$

Aplicando em 19.04 as equações 19.40 e 19.42 e simplificando obtemos:

$$u^2 = \frac{L^2}{m_o^2} \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right) \left[\left(\frac{dw}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] \quad 19.51$$

A equação da força gravitacional relativística 19.16 remodelada fica:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \frac{-k}{m_o r^2} \quad 19.52$$

Nesta aplicando as fórmulas acima obtemos:

$$\frac{L^2 k}{m_o^3 c^2 r^2} \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{dw}{d\phi} \right)^2 - \frac{L^2}{m_o^2 r^2} \left(1-\frac{u^2}{c^2} \right) \frac{d^2 w}{d\phi^2} - r \left(\frac{L}{m_o r^2} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \right)^2 = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{-L dw}{m_o d\phi} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \right)^2 \right] \frac{-k}{m_o r^2}$$

$$\frac{L^2 k}{m_o^3 c^2 r^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 - \frac{L^2}{m_o^2 r^2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{d^2 w}{d\phi^2} - \frac{L^2}{m_o^2 r^3} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{-L dw}{m_o d\phi} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)^2\right] \frac{-k}{m_o r^2}$$

$$\frac{L^2 k}{m_o^3 c^2 r^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 - \frac{L^2}{m_o^2 r^2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{d^2 w}{d\phi^2} - \frac{L^2}{m_o^2 r^3} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{-k}{m_o r^2} + \frac{L^2 k}{m_o^3 r^2 c^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2$$

$$-\frac{L^2}{m_o^2 r^2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{d^2 w}{d\phi^2} - \frac{L^2}{m_o^2 r^3} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{-k}{m_o r^2}$$

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} + \frac{1}{r} = \frac{m_o k}{L^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} + \frac{1}{r} = \frac{m_o k}{\left(\frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} r^2 \frac{d\phi}{dt}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} + \frac{1}{r} = \frac{m_o k \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{m_o^2 r^4 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}$$

$$\left(\frac{d^2 w}{d\phi^2} + \frac{1}{r}\right)^2 = \left[\frac{k \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{m_o r^4 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}\right]^2$$

$$\left(\frac{d^2 w}{d\phi^2}\right)^2 + \frac{2 d^2 w}{r d\phi^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{k^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}$$

$$\left(\frac{d^2 w}{d\phi^2}\right)^2 + \frac{2 d^2 w}{r d\phi^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4} - \frac{\frac{k^2}{c^2} u^2}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}$$

$$\left(\frac{d^2 w}{d\phi^2}\right)^2 + \frac{2 d^2 w}{r d\phi^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4} - \frac{\frac{k^2}{c^2} \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2 + \frac{2d^2w}{r d\phi^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4} - \frac{\frac{k^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{c^2}}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4} - \frac{\frac{k^2 \left(r \frac{d\phi}{dt}\right)^2}{c^2}}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2 + \frac{2d^2w}{r d\phi^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4} - \frac{\frac{k^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{c^2}}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} - \frac{k^2}{m_o^2 c^2 r^6 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2 + \frac{2d^2w}{r d\phi^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4} - \frac{\frac{k^2 \left(-r^2 \frac{dw}{d\phi}\right)^2}{c^2}}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} - \frac{k^2}{m_o^2 c^2 r^6 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2 + \frac{2d^2w}{r d\phi^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{m_o^2 r^8 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^4} - \frac{\frac{k^2 \left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2}{c^2}}{m_o^2 r^4 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} - \frac{k^2}{m_o^2 c^2 r^6 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}$$

Nesta consideraremos constante o momento angular Newtoniano na forma:

$$L = r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad 19.53$$

Que é realmente o momento angular teórico conhecido.

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2 + \frac{2d^2w}{r d\phi^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{m_o^2 L^4} - \frac{k^2}{m_o^2 c^2 L^2} \left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 - \frac{k^2}{m_o^2 c^2 r^2 L^2}$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2 + 2\frac{d^2w}{d\phi^2} w + w^2 = \frac{k^2}{m_o^2 L^4} - \frac{k^2}{m_o^2 c^2 L^2} \left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 - \frac{k^2}{m_o^2 c^2 L^2} w^2$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2 + 2\frac{d^2w}{d\phi^2} w + w^2 = B - A \left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 - A w^2$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}\right)^2 + 2\frac{d^2w}{d\phi^2} w + A \left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 + (A+1)w^2 - B = \text{zero} \quad 19.54$$

Onde temos:

$$A = \frac{k^2}{m_o^2 c^2 L^2} \quad 19.55$$

$$B = \frac{k^2}{m_o^2 L^4} \quad 19.56$$

A equação 19.54 tem como solução:

$$w = \frac{I}{\varepsilon D} [I - \varepsilon \cos(\phi \sqrt{I+A} + \phi_0)] \Rightarrow w = \frac{I}{\varepsilon D} [I - \varepsilon \cos(\phi Q)] \quad 19.57$$

Onde consideramos $\phi_0 = \text{zero}$.

$$\text{Está denominado em 19.57 } Q^2 = I + A. \quad 19.58$$

A equação 19.58 é função somente de A demonstrando a união intrínseca entre a variação da massa com a variação da energia no tempo, pois ambas como já descrito participam da força relativística 19.06 nisto está a essencial diferença entre a massa e a carga elétrica que é invariável e indivisível na teoria eletromagnética.

De 19.57 obtemos o raio de uma cônica:

$$r = \frac{I}{w} = \frac{\varepsilon D}{I - \varepsilon \cos(\phi \sqrt{I+A})} \Rightarrow r = \frac{\varepsilon D}{I - \varepsilon \cos(\phi Q)} \quad 19.59$$

Onde ε é a excentricidade e D a distância do foco a diretriz.

$$\text{Derivando 19.57 obtemos } \frac{dw}{d\phi} = \frac{Q \sin(\phi Q)}{D} \quad 19.60$$

$$\text{Que derivada resulta em } \frac{d^2w}{d\phi^2} = \frac{Q^2 \cos(\phi Q)}{D} \quad 19.61$$

Aplicando em 19.54 as variáveis obtemos:

$$\left(\frac{d^2w}{d\phi^2} \right)^2 + 2 \frac{d^2w}{d\phi^2} w + A \left(\frac{dw}{d\phi} \right)^2 + (A+I)w^2 - B = \text{zero}.$$

$$\frac{Q^4 \cos^2(\phi Q)}{D^2} + 2 \frac{Q^2 \cos(\phi Q)}{D} \left[\frac{I - \varepsilon \cos(\phi Q)}{\varepsilon D} \right] + A \frac{Q^2 \sin^2(\phi Q)}{D^2} + (A+I) \left[\frac{I - \varepsilon \cos(\phi Q)}{\varepsilon D} \right]^2 - B = \text{zero} \quad 19.62$$

$$\frac{Q^4 \cos^2(\phi Q)}{D^2} + 2 \frac{Q^2 \cos(\phi Q)}{\varepsilon D^2} - 2 \frac{Q^2 \cos^2(\phi Q)}{D^2} + A \frac{Q^2}{D^2} - A \frac{Q^2 \cos^2(\phi Q)}{D^2} + (A+I) \left[\frac{I - \varepsilon \cos(\phi Q)}{\varepsilon D} \right]^2 - B = \text{zero}$$

$$\frac{Q^4 \cos^2(\phi Q)}{D^2} + 2 \frac{Q^2 \cos(\phi Q)}{\varepsilon D^2} - 2 \frac{Q^2 \cos^2(\phi Q)}{D^2} + A \frac{Q^2}{D^2} - A \frac{Q^2 \cos^2(\phi Q)}{D^2} + \frac{(A+I)}{\varepsilon^2 D^2} - 2 \frac{(A+I) \cos(\phi Q)}{\varepsilon D^2} + \frac{(A+I) \cos^2(\phi Q)}{D^2} - B = \text{zero}$$

$$\left(Q^4 - 2Q^2 - AQ^2 + A+I \right) \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + \left(\frac{2Q^2}{\varepsilon D} - \frac{2A}{\varepsilon D} - \frac{2}{\varepsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{AQ^2}{D^2} + \frac{(A+I)}{\varepsilon^2 D^2} - B = \text{zero} \quad 19.63$$

Nesta aplicando no primeiro parêntese $Q^2 = I + A$ obtemos:

$$\left(Q^4 - 2Q^2 - AQ^2 + A+I \right) = \left[(I+A)^2 - 2(I+A) - A(I+A) + A+I \right] = (I+2A+A^2 - 2 - 2A - A - A^2 + A+I) = \text{zero}$$

Em 19.63 aplicando no segundo parêntese $Q^2=I+A$ obtemos:

$$\left(\frac{2Q^2}{\varepsilon D} - \frac{2A}{\varepsilon D} - \frac{2}{\varepsilon D}\right) = \left[\frac{2(I+A)}{\varepsilon D} - \frac{2A}{\varepsilon D} - \frac{2}{\varepsilon D}\right] = zero$$

O resto da equação 19.63 é portanto:

$$\frac{AQ^2}{D^2} + \frac{(A+I)}{\varepsilon^2 D^2} - B = zero \quad 19.64$$

Os dados da órbita elíptica do planeta Mercúrio são [3]:

Excentricidade da órbita $\varepsilon=0,206$.

Semi-eixo maior = $a = 5,79 \cdot 10^{10}m$.

Semi-eixo menor $b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}=5,79 \cdot 10^{10}\sqrt{1-0,206^2}=56.658.160.305,80m$.

$\varepsilon D=a(1-\varepsilon^2)=5,79 \cdot 10^{10}(1-0,206^2)=55.442.955.600,00m$.

$D=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon}=\frac{5,79 \cdot 10^{10}(1-0,206^2)}{0,206}=269.140.561.165,00m$.

O período orbital da Terra (PT) e Mercúrio (PM) em torno do Sol em segundos são:

$PT=3,16 \cdot 10^7 s$.

$PM=7,60 \cdot 10^6 s$.

O número de voltas que Mercúrio (m_o) dá em torno do Sol (M_o) em um século é, portanto:

$$N=100 \frac{3,16 \cdot 10^7}{7,60 \cdot 10^6} = 415,79 \quad 19.65$$

Momento angular teórico de Mercúrio:

$$L^2 = \left(r^2 \frac{d\phi}{dt}\right)^2 = GM_o a (1-\varepsilon^2) = 6,67 \cdot 10^{-11} 1,98 \cdot 10^{30} 5,79 \cdot 10^{10} (1-0,206^2) = 7,32212937427 \cdot 10^{30} \quad 19.66$$

$$A = \frac{(GM_o m_o)^2}{m_o^2 c^2 L^2} = \frac{(GM_o)^2}{c^2 L^2} = \frac{(6,67 \cdot 10^{-11})^2 (1,98 \cdot 10^{30})^2}{(3,0 \cdot 10^8)^2 (7,32 \cdot 10^{30})^2} = 2,65 \cdot 10^{-8} \quad 19.67$$

$$B = \frac{(GM_o m_o)^2}{m_o^2 L^4} = \frac{(GM_o)^2}{L^4} = \frac{(6,67 \cdot 10^{-11})^2 (1,98 \cdot 10^{30})^2}{(7,32 \cdot 10^{30})^2} = 3,25 \cdot 10^{-22} \quad 19.68$$

$$Q = \sqrt{I+A} = \sqrt{I+2,63 \cdot 10^{-8}} = 1,000.000.013.23 \quad 19.69$$

Aplicando os dados numéricos com várias casas decimais ao resto da equação 19.63 obtemos:

$$\frac{AQ^2}{D^2} + \frac{(A+I)}{\varepsilon^2 D^2} - B = \frac{2,65 \cdot 10^{-8} (1,000.000.013.23)^2}{(269.140.561.165,00)^2} + \frac{2,65 \cdot 10^{-8} + I}{(55.442.955.600,00)^2} - 3,25 \cdot 10^{-22} = 8,976 \cdot 10^{-30} \quad 19.70$$

Resultado que podemos considerar nulo.

Vamos obter o momento angular relativístico do resto da equação 19.63 nesta aplicando as variáveis obtemos:

$$\frac{AQ^2}{D^2} + \frac{(A+I)}{\varepsilon^2 D^2} - B = \frac{(GM_0)^2}{c^2 L^2 D^2} \left[I + \frac{(GM_0)^2}{c^2 L^2} \right] + \frac{I}{\varepsilon^2 D^2} \left[I + \frac{(GM_0)^2}{c^2 L^2} \right] - \frac{(GM_0)^2}{L^4} = zero \quad 19.71$$

$$\varepsilon^2 L^2 (GM_0)^2 \left[I + \frac{(GM_0)^2}{c^2 L^2} \right] + L^4 c^2 \left[I + \frac{(GM_0)^2}{c^2 L^2} \right] - c^2 \varepsilon^2 D^2 (GM_0)^2 = zero$$

$$\varepsilon^2 L^2 (GM_0)^2 + \varepsilon^2 L^2 (GM_0)^2 \frac{(GM_0)^2}{c^2 L^2} + L^4 c^2 + L^4 c^2 \frac{(GM_0)^2}{c^2 L^2} - c^2 \varepsilon^2 D^2 (GM_0)^2 = zero$$

$$\varepsilon^2 L^2 (GM_0)^2 + \varepsilon^2 \frac{(GM_0)^4}{c^2} + L^4 c^2 + L^2 (GM_0)^2 - c^2 \varepsilon^2 D^2 (GM_0)^2 = zero$$

$$c^2 L^4 + (I + \varepsilon^2) (GM_0)^2 L^2 + \varepsilon^2 \frac{(GM_0)^4}{c^2} - c^2 \varepsilon^2 D^2 (GM_0)^2 = zero \quad 19.72$$

$$L^2 = \frac{-(I + \varepsilon^2) (GM_0)^2 \pm \sqrt{[(I + \varepsilon^2) (GM_0)^2]^2 - 4c^2 \left[\varepsilon^2 \frac{(GM_0)^4}{c^2} - c^2 \varepsilon^2 D^2 (GM_0)^2 \right]}}{2c^2}$$

$$L^2 = \frac{-(I + \varepsilon^2) (GM_0)^2 \pm \sqrt{(I + \varepsilon^2)^2 (GM_0)^4 - 4\varepsilon^2 (GM_0)^4 + 4c^4 \varepsilon^2 D^2 (GM_0)^2}}{2c^2}$$

$$L^2 = \frac{-(I + \varepsilon^2) (GM_0)^2 \pm \sqrt{(I + 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4) (GM_0)^4 - 4\varepsilon^2 (GM_0)^4 + 4c^4 \varepsilon^2 D^2 (GM_0)^2}}{2c^2}$$

$$L^2 = \frac{-(I + \varepsilon^2) (GM_0)^2 \pm \sqrt{(GM_0)^4 + 2\varepsilon^2 (GM_0)^4 + \varepsilon^4 (GM_0)^4 - 4\varepsilon^2 (GM_0)^4 + 4c^4 \varepsilon^2 D^2 (GM_0)^2}}{2c^2}$$

$$L^2 = \frac{-(I + \varepsilon^2) (GM_0)^2 \pm \sqrt{(GM_0)^4 + \varepsilon^4 (GM_0)^4 - 2\varepsilon^2 (GM_0)^4 + 4c^4 \varepsilon^2 D^2 (GM_0)^2}}{2c^2}$$

$$L^2 = \frac{-(I + \varepsilon^2) (GM_0)^2 + \sqrt{(I - \varepsilon^2)^2 (GM_0)^4 + 4c^4 \varepsilon^2 D^2 (GM_0)^2}}{2c^2} = 7,32212927328 \cdot 10^{30} \quad 19.73$$

Esta última equação tem a exclusiva propriedade de relacionar a velocidade c ao denominado momento angular relativístico que é menor que o momento angular teórico 19.66.

A variação do momento angular relativístico em relação ao momento angular teórico é muito pequena e dada por:

$$\Delta L = \frac{7,32212927328 \cdot 10^{30} - 7,32212937427 \cdot 10^{30}}{7,32212937427 \cdot 10^{30}} = -1,38 \cdot 10^{-8} = \frac{-I}{72.503.509,00} \quad 19.74$$

O que demonstra a exatidão do princípio de constância da velocidade da luz.

Na realidade a fórmula 19.06 prevê um retrocesso secular do periélio de Mercúrio que é dado por:

$$\Delta\phi = 2\pi 415,79 \left(\frac{1}{Q} - 1 \right) = 2\pi 415,79 (-0,000.000.013.23) = -3,46.10^{-5} \text{ rad.} \quad 19.75$$

Convertendo para segundo obtemos:

$$\Delta\phi = \frac{-3,46.10^{-5} . 180,00 . 3.600,00}{\pi} = -7,13'' . \quad 19.76$$

Este retrocesso não previsto na teoria Newtoniana é devido à variação relativística da massa e energia e está encoberto pela precessão total observada de 5599".

§§19 Avanço do periélio de Mercúrio de 42,79”

Escrevamos a fórmula para energia relativística E_R gravitacional contendo os termos para a energia cinética, a energia potencial E_p e a energia de repouso:

$$E_R = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) + E_p + m_o c^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + E_p . \quad 19.77$$

Sendo a força gravitacional conservativa sua energia é constante. Supondo então que em 19.77 quando o raio tende ao infinito a velocidade e a energia potencial tende a zero, resulta então:

$$E_R = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + E_p = m_o c^2 \quad 19.78$$

Escrevamos a fórmula para energia E_N gravitacional Newtoniana contendo os termos Newtonianos correspondentes a 19.77:

$$E_N = \frac{m_o u^2}{2} - \frac{k}{r} + m_o c^2 = m_o c^2 \quad 19.79$$

Onde $\frac{m_o u^2}{2}$ é a energia cinética, $\frac{-k}{r}$ a energia potencial e $m_o c^2$ a energia de repouso ou melhor dizendo energia inercial.

Desta 19.79 obtemos:

$$\frac{m_o u^2}{2} - \frac{k}{r} + m_o c^2 = m_o c^2 \Rightarrow \frac{m_o u^2}{2} = \frac{k}{r} \Rightarrow u^2 = \frac{2k}{m_o r} = \frac{2GM_o m_o}{m_o r} \Rightarrow u^2 = \frac{2GM_o}{r} \quad 19.80$$

Derivando 19.79 obtemos:

$$\frac{dE_N}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_o u^2}{2} - \frac{k}{r} + m_o c^2 \right) = \text{zero}$$

$$\frac{m_o 2u}{2} \frac{du}{dt} + \frac{k}{r^2} \frac{dr}{dt} = \text{zero}$$

$$u \frac{du}{dt} = \frac{-k}{m_o r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{-GM_o}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

$$u \frac{du}{dt} = \frac{-GM_o}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

$$u \frac{du}{dr} = \frac{-GM_o}{r^2} \quad 19.81$$

Igualando a energia relativística 19.78 a energia Newtoniana 19.79 obtemos:

$$E_R = E_N \Rightarrow \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + E_p = \frac{m_o u^2}{2} - \frac{k}{r} + m_o c^2 \quad 19.82$$

$$\frac{m_o c^2}{m_o \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{E_p}{m_o} = \frac{m_o u^2}{m_o 2} - \frac{GM_o m_o}{m_o r} + \frac{m_o c^2}{m_o} \quad 19.83$$

Nesta denominando o potencial relativístico (ϕ) como:

$$\phi = \frac{E_p}{m_o} \quad 19.84$$

Obtemos:

$$\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \phi = \frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2$$

$$\phi = \frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2 - \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad 19.85$$

Nesta substituindo a aproximação:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{u^2}{2c^2} \quad 19.86$$

Temos:

$$\phi = \frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2 - c^2 \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} \right)$$

Que simplificada resulta no potencial Newtoniano:

$$\phi = \frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2 - c^2 - \frac{u^2}{2} = \frac{-GM_o}{r} \quad 19.87$$

Substituindo 19.84 e o potencial relativístico 19.85 na energia relativística 19.78:

$$E_R = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + m_o \left(\frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2 - \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \quad 19.88$$

Obtemos a energia Newtoniana 19.79:

$$E_N = \frac{m_o u^2}{2} - \frac{GM_o m_o}{r} + m_o c^2$$

Derivando o potencial relativístico 19.85 obtemos o módulo da aceleração gravitacional relativística exatamente como na teoria newtoniana:

$$a = \frac{-d\phi}{dr}$$

$$a = \frac{-d\phi}{dr} = \frac{-d}{dr} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2 - \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)$$

$$a = \frac{-d}{dr} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2 \right) - \frac{d}{dr} \left(- \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)$$

Onde temos:

$$\frac{-d}{dr} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2 \right) = \frac{-d}{dr} \left(\frac{E_N}{m_o} \right) = \text{zero.}$$

Porque o termo a derivar é a energia Newtoniana dividida por m_o ou seja $\frac{E_N}{m_o} = \frac{u^2}{2} - \frac{GM_o}{r} + c^2$ que é constante, resulta então:

$$a = - \frac{d}{dr} \left(- \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)$$

$$a = - \left[- \frac{u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{dr} \right]$$

Nesta aplicando 19.81 obtemos:

$$a = \frac{-1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{GM_o}{r^2} \quad 19.89$$

A aceleração vetorial e dada por 19.05:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right] \hat{\phi}$$

O módulo da aceleração gravitacional relativística 19.89 é igual a componente do raio vetor (\hat{r}) por isso temos:

$$a = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] = \frac{-1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{GM_o}{r^2} \quad 19.90$$

Sendo nula a aceleração transversal temos:

$$\left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right] \hat{\phi} = \text{zero} \quad 19.91$$

$$2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \text{zero}$$

Que é igual à derivada do momento angular constante $L = r^2 \frac{d\phi}{dt}$ 19.92

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r^2 \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \text{zero} \quad 19.93$$

Reescrevendo algumas equações já descritas temos:

$$w = \frac{1}{r}$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial r} dr \Rightarrow dw = -\frac{1}{r^2} dr$$

$$\frac{dw}{d\phi} = \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{d\phi} = -r^2 \frac{dw}{d\phi} \quad \text{e} \quad \frac{dw}{dt} = \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dr}{d\phi} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = \frac{-L}{r^2} r^2 \frac{dw}{d\phi} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -L \frac{dw}{d\phi}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} \left(-L \frac{dw}{d\phi} \right) = \frac{L}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left(-L \frac{dw}{d\phi} \right) = \frac{-L^2}{r^2} \frac{d^2 w}{d\phi^2} \quad 19.94$$

De 19.90 obtemos:

$$\left(1 - \frac{3u^2}{2c^2} \right) \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] = \frac{-GM_o}{r^2}$$

Nesta com 19.94 a velocidade de 19.80 e o momento angular obtemos:

$$\left[1 - \frac{3}{2c^2} \left(\frac{2GM_o}{r} \right) \right] \left[\frac{-L^2}{r^2} \frac{d^2 w}{d\phi^2} - r \left(\frac{L}{r^2} \right)^2 \right] = -\frac{GM_o}{r^2}$$

$$\left(1 - \frac{3GM_o}{c^2} \frac{1}{r} \right) \left(\frac{d^2 w}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right) = \frac{GM_o}{L^2}$$

$$\left(1 - \frac{3GM_o}{c^2} \frac{1}{r}\right) \frac{d^2 w}{d\phi^2} + \left(1 - \frac{3GM_o}{c^2} \frac{1}{r}\right) \frac{1}{r} = \frac{GM_o}{L^2}$$

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} - \frac{3GM_o}{c^2} \frac{d^2 w}{d\phi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{3GM_o}{c^2} \frac{1}{r^2} - \frac{GM_o}{L^2} = \text{zero}$$

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} - A \frac{d^2 w}{d\phi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - A \frac{1}{r^2} - B = \text{zero}$$

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} - A \frac{d^2 w}{d\phi^2} w + w - Aw^2 - B = \text{zero}$$

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} - A \frac{d^2 w}{d\phi^2} w - Aw^2 + w - B = \text{zero} \quad 19.95$$

Onde temos:

$$A = \frac{3GM_o}{c^2} \quad B = \frac{GM_o}{L^2} \quad 19.96$$

A solução da equação diferencial 19.95 é:

$$w = \frac{1}{\epsilon D} [1 - \epsilon \cos(\phi_Q + \phi_o)] \Rightarrow w = \frac{1}{\epsilon D} [1 - \epsilon \cos(\phi_Q)] \quad 19.97$$

Onde consideramos $\phi_o = \text{zero}$

Portanto o raio é dado por:

$$r = \frac{1}{w} = \frac{\epsilon D}{1 - \epsilon \cos(\phi_Q)} \Rightarrow r = \frac{\epsilon D}{1 - \epsilon \cos(\phi_Q)} \quad 19.98$$

Onde ϵ é a excentricidade e D a distância do foco a diretriz.

$$\text{Derivando 19.97 obtemos } \frac{dw}{d\phi} = \frac{Q \sin(\phi_Q)}{D} \quad \text{e} \quad \frac{d^2 w}{d\phi^2} = \frac{Q^2 \cos(\phi_Q)}{D} \quad 19.99$$

Aplicando as derivadas em 19.95 obtemos:

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} - A \frac{d^2 w}{d\phi^2} w - Aw^2 + w - B = \text{zero}$$

$$\frac{Q^2 \cos(\phi_Q)}{D} - \frac{AQ^2 \cos(\phi_Q)}{D} \frac{1}{\epsilon D} [1 - \epsilon \cos(\phi_Q)] - \frac{A}{\epsilon^2 D^2} [1 - \epsilon \cos(\phi_Q)]^2 + \frac{1}{\epsilon D} [1 - \epsilon \cos(\phi_Q)] - B = \text{zero}$$

$$\frac{Q^2 \cos(\phi_Q)}{D} - \frac{AQ^2 \cos(\phi_Q)}{\epsilon D^2} [1 - \epsilon \cos(\phi_Q)] - \frac{A}{\epsilon^2 D^2} [1 - 2\epsilon \cos(\phi_Q) + \epsilon^2 \cos^2(\phi_Q)] + \left[\frac{1}{\epsilon D} - \frac{1}{\epsilon D} \epsilon \cos(\phi_Q) \right] - B = \text{zero}$$

$$\frac{Q^2 \cos(\phi_Q)}{D} - \frac{AQ^2 \cos(\phi_Q)}{\epsilon D^2} + \frac{AQ^2 \cos(\phi_Q)}{\epsilon D^2} \epsilon \cos(\phi_Q) -$$

$$- \frac{A}{\epsilon^2 D^2} + \frac{A}{\epsilon^2 D^2} 2\epsilon \cos(\phi_Q) - \frac{A}{\epsilon^2 D^2} \epsilon^2 \cos^2(\phi_Q) + \frac{1}{\epsilon D} - \frac{1}{\epsilon D} \epsilon \cos(\phi_Q) - B = \text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D} \left(Q^2 - \frac{AQ^2}{\epsilon D} + \frac{2A}{\epsilon D} - 1 \right) + \frac{AQ^2 \cos^2(\phi Q)}{D^2} - \frac{A \cos^2(\phi Q)}{D^2} - \frac{A}{\epsilon^2 D^2} + \frac{1}{\epsilon D} - B = \text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{AD} \left(Q^2 - \frac{AQ^2}{\epsilon D} + \frac{2A}{\epsilon D} - 1 \right) + \frac{AQ^2 \cos^2(\phi Q)}{AD^2} - \frac{A \cos^2(\phi Q)}{AD^2} - \frac{A}{A \epsilon^2 D^2} + \frac{1}{A \epsilon D} - \frac{B}{A} = \text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D} \left(\frac{Q^2}{A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} - \frac{1}{A} \right) + \frac{Q^2 \cos^2(\phi Q)}{D^2} - \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} - \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{1}{A \epsilon D} - \frac{B}{A} = \text{zero}$$

$$\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} (Q^2 - 1) + \frac{\cos(\phi Q)}{D} \left(\frac{Q^2}{A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} - \frac{1}{A} \right) - \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{1}{A \epsilon D} - \frac{B}{A} = \text{zero} \quad 19.100$$

O coeficiente do co-seno ao quadrado, pode ser considerado nulo porque $Q \approx 1$ e D^2 é um número muito grande:

$$\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} (Q^2 - 1) = \text{zero} \quad 19.101$$

Resultando da equação 19.100:

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D} \left(\frac{Q^2}{A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} - \frac{1}{A} \right) - \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{1}{A \epsilon D} - \frac{B}{A} = \text{zero} \quad 19.102$$

Devido à unicidade desta equação 19.102 devemos ter uma única solução que anule simultaneamente o parêntese e o resto da equação, ou seja, devemos ter uma solução única para ambas às equações seguintes:

$$\frac{Q^2}{A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} - \frac{1}{A} = \text{zero} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{1}{A \epsilon D} - \frac{B}{A} = \text{zero} \quad 19.103$$

Estas equações podem ser escritas como:

$$[a = b] \Rightarrow \frac{1}{A} - \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{\epsilon D} \right) \quad 19.104$$

$$[a = c] \Rightarrow \frac{1}{A} - \frac{1}{\epsilon D} = \frac{\epsilon DB}{A} \quad 19.105$$

Nestas o termo comum $a = \frac{1}{A} - \frac{1}{\epsilon D}$ deve ter uma única solução por isso temos:

$$[b = c] \Rightarrow \frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{\epsilon D} \right) = \frac{\epsilon DB}{A} \quad 19.106$$

Com 19.96 e o momento teórico obtemos:

$$A = \frac{3GM_o}{c^2} \quad B = \frac{GM_o}{L^2} \quad L^2 = \epsilon DGM_o \quad \epsilon DB = \frac{\epsilon DGM_o}{L^2} = 1 \quad 19.107$$

Está aplicada em 19.105 e 19.106 resulta em:

$$[a = c] \Rightarrow \frac{1}{A} - \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{A} \quad 19.108$$

$$[b = c] \Rightarrow \frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{\epsilon D} \right) = \frac{1}{A} \quad 19.109$$

De 19.108 obtemos o erro cometido em 19.105:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{A} \Rightarrow -\frac{1}{\epsilon D} \approx \text{zero} \quad 19.110$$

$$-\frac{1}{\epsilon D} = \frac{-1}{55.442.955.600,00} = -1,80 \cdot 10^{-11} \approx \text{zero} \quad 19.111$$

De 19.109 obtemos Q:

$$\frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{\epsilon D} \right) = \frac{1}{A} \Rightarrow Q^2 = 1 - \frac{2A}{\epsilon D} \Rightarrow Q^2 = 1 - \frac{2}{\epsilon D} \frac{3GM_{\odot}}{c^2} \quad 19.112$$

Está aplicada em 19.104 resulta em 19.110:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{\epsilon D} \right) \Rightarrow \frac{1}{A} - \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2A}{\epsilon D}\right)} \left(\frac{1}{A} - \frac{2}{\epsilon D} \right) \Rightarrow \frac{1}{A} - \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{A} \Rightarrow -\frac{1}{\epsilon D} \approx \text{zero}$$

De 19.112 temos:

$$Q = \sqrt{1 - \frac{6GM_{\odot}}{\epsilon D c^2}} = \sqrt{1 - \frac{6(6,67 \cdot 10^{-11})(1,98 \cdot 10^{30})}{(55.442.955.600,00)(3 \cdot 10^8)^2}} = 0,999.999.920.599 \quad 19.113$$

Que corresponde a um avanço do periélio de Mercúrio em um século de:

$$\sum \Delta\phi = \Delta\phi \cdot 415,79 = \left(\frac{1}{Q} - 1 \right) \cdot 1.296.000,00 \cdot 415,79 = 42,79'' \quad 19.114$$

Calculado dessa forma:

Em uma volta trigonométrica temos $360 \times 60 \times 60 = 1.296.000,00''$ segundos.

O ângulo ϕ em segundos percorrido pelo planeta em uma volta trigonométrica é dado por:

$$\phi Q = 1.296.000,00 \Rightarrow \phi = \frac{1.296.000,00}{Q}$$

Se $Q > 1,00$ temos retrocesso. $\phi < 1.296.000,00$.

Se $Q < 1,00$ temos avanço. $\phi > 1.296.000,00$.

A variação angular em segundos em uma volta é dada por:

$$\Delta\phi = \frac{1 \cdot 296 \cdot 000,00}{Q} - 1 \cdot 296 \cdot 000,00 = \left(\frac{1}{Q} - 1 \right) 1 \cdot 296 \cdot 000,00.$$

Se $\Delta\phi < zero$ temos retrocesso.

Se $\Delta\phi > zero$ temos avanço.

Em um século temos 415,79 voltas que fornecem uma variação angular total de:

$$\sum \Delta\phi = \Delta\phi \cdot 415,79 = \left(\frac{1}{Q} - 1 \right) \cdot 1 \cdot 296 \cdot 000,00 \cdot 415,79 = 42,79''$$

Se $\sum \Delta\phi < zero$ temos retrocesso.

Se $\sum \Delta\phi > zero$ temos avanço.

§20 Inércia

Imagine em um universo totalmente vazio, um ponto O' que seja a origem do referencial do observador O' . Na hipótese de o referencial estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme as ondas eletromagnéticas esféricas emitidas com velocidade c por uma fonte situada em O' será observada por O' devido à lei de inércia exatamente esférica e com velocidade c portanto, o movimento retilíneo uniforme e o repouso são indistinguível um do outro permanecendo em ambos os casos válida a lei de inércia. Para o observador O' as equações da teoria eletromagnética descreverão a propagação exatamente como uma onda esférica. A imagem de um objeto situado em O' será sempre centrada no próprio objeto e um raio de luz emitido de O' permanecerá sempre retilíneo e perpendicular às ondas esféricas.

Imagine agora um outro ponto O que seja a origem do referencial do observador O que possui todas as propriedades inerciais descritas para o observador O' .

Obviamente dois pontos imaginários sem nenhuma forma de interação entre eles permanecerão individualmente e no conjunto atendendo perfeitamente a lei de inércia mesmo existindo um movimento retilíneo uniforme entre eles, só observável, devido à presença de ambos os referenciais que individualmente se observarão em repouso estando em movimento o outro referencial.

As propriedades destes dois observadores são descritas pelas equações de transformações relativísticas.

Observação: um universo infinito é aquele em que qualquer ponto pode ser considerado o ponto central deste universo.

§21 Avanço do Periélio de Mercúrio de 42,79" calculado com a Relatividade Ondulatória

Supondo $ux=v$

$$(2.3) u'x' = \frac{ux-v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}} = \frac{v-v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vv}{c^2}}} \Rightarrow u'x'=zero$$

$$ux=v \qquad u'x'=zero \qquad 21.01$$

$$(1.17) dt' = dt \sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}} = dt \sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vv}{c^2}} \Rightarrow dt' = dt \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$(1.22) dt = dt' \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}} = dt' \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'(0)}{c^2}} \Rightarrow dt = dt' \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}$$

$$dt' = dt \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad dt = dt' \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} \qquad 21.02$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = 1 \qquad 21.03$$

$$v = \frac{v'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad v' = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad 21.04$$

$$dt > dt' \qquad v < v' \qquad vdt = v'dt' \qquad 21.05$$

$$(1.33) \vec{v} = \frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'u'x'}{c^2}}} = \frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}+\frac{2v'(0)}{c^2}}} \Rightarrow \vec{v} = \frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}$$

$$(1.34) \vec{v}' = \frac{-\vec{v}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vux}{c^2}}} = \frac{-\vec{v}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}-\frac{2vv}{c^2}}} \Rightarrow \vec{v}' = \frac{-\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{v} = \frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad -\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad 21.06$$

$$\vec{r} = r\hat{r} = -\vec{r}' \qquad \vec{r}' = -r\hat{r} = -\vec{r} \qquad |\vec{r}| = |\vec{r}'| = r \qquad 21.07$$

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\hat{r} = -d\vec{r}' \qquad d\vec{r}' = -dr\hat{r} - r d\hat{r} = -d\vec{r} \qquad 21.08$$

$$\hat{r} d\vec{r} = dr\hat{r}\hat{r} + r\hat{r} d\hat{r} = dr \qquad \hat{r} d\vec{r}' = -dr\hat{r}\hat{r} - r\hat{r} d\hat{r} = -dr \qquad 21.09$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \hat{\phi} \qquad v^2 = \vec{v}\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\hat{r}}{dt}\right)^2 \qquad 21.10$$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d(-r\hat{r})}{dt'} = -\left(\frac{dr}{dt'}\hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt'} \hat{\phi}\right) \qquad v'^2 = \vec{v}'\vec{v}' = \left(\frac{dr}{dt'}\right)^2 + \left(r \frac{d\hat{r}}{dt'}\right)^2 \qquad 21.11$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2(r\hat{r})}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2\phi}{dt^2} \right) \hat{\phi} \quad 21.12$$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2(-r\hat{r})}{dt'^2} = - \left[\frac{d^2r}{dt'^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt'} \right)^2 \right] \hat{r} - \left(2 \frac{dr}{dt'} \frac{d\phi}{dt'} + r \frac{d^2\phi}{dt'^2} \right) \hat{\phi} \quad 21.13$$

$$-\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 21.06$$

$$-\vec{a}' = \frac{d(-\vec{v}')}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad 21.14$$

$$-\vec{a}' = -\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v} \frac{d}{dt} \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \right]$$

$$-\vec{a}' = -\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{-1}{2}} \left(\frac{-2v}{c^2} \frac{dv}{dt} \right) \right]$$

$$-\vec{a}' = -\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \frac{dv}{dt} \frac{\vec{v}}{c^2} \right)$$

$$-\vec{a}' = -\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \frac{dv}{dt} \frac{\vec{v}}{c^2} \right)$$

$$-\vec{a}' = -\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{d\vec{v}}{dt} + v \frac{dv}{dt} \frac{\vec{v}}{c^2} \right]$$

$$-m' \vec{a}' = \frac{-m_0 \vec{a}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{-m_0}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{d\vec{v}}{dt} + v \frac{dv}{dt} \frac{\vec{v}}{c^2} \right]$$

$$\vec{F}' = -m' \vec{a}' = \frac{-m_0 \vec{a}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{-m_0}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}'}{dt'} \quad 21.15$$

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{d\vec{v}}{dt} + v \frac{dv}{dt} \frac{\vec{v}}{c^2} \right] \quad (=19.06) \quad 21.16$$

$$\vec{F}' = -m' \vec{a}' = \frac{-m_0 \vec{a}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{-m_0}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \vec{F} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{d\vec{v}}{dt} + v \frac{dv}{dt} \frac{\vec{v}}{c^2} \right] \quad 21.17$$

$$E_k = \int \vec{F}' \cdot (-d\vec{r}') = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \frac{-k}{r^2} \hat{r} d\vec{r} \quad 21.18$$

$$E_k = \int \vec{F}' \cdot (-d\vec{r}') = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \frac{-m_0}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}'}{dt'} \cdot (-d\vec{r}') = \int \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{d\vec{v}}{dt} + v \frac{dv}{dt} \frac{\vec{v}}{c^2} \right] d\vec{r} = \int \frac{-k}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \quad 21.19$$

$$E_k = \int \frac{m_0}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} d\vec{v}' \cdot d\vec{r}' = \int \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) d\vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} + v dv \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{\vec{v}}{c^2} \right] = \int \frac{-k}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r}$$

$$E_k = \int \frac{m_0 d\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = \int \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) d\vec{v} \vec{v} + v dv \frac{\vec{v} \vec{v}}{c^2} \right] = \int \frac{-k}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r}$$

$$E_k = \int \frac{m_0 v' dv'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = \int \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) v dv + v dv \frac{v^2}{c^2} \right] = \int \frac{-k}{r^2} dr$$

$$E_k = \int \frac{m_0 v' dv'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = \int \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = \int \frac{-k}{r^2} dr$$

$$E_k = \int \frac{m_0 v' dv'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = \int \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-k}{r^2} dr \quad dE_k = \frac{m_0 v' dv'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-k}{r^2} dr \quad 21.20$$

$$E_k = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{k}{r} + \text{constante} \quad 21.21$$

$$E_R = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} - \frac{k}{r} = \text{constante} \quad E_R = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{k}{r} = \text{constante} \quad 21.22$$

$$E_R = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{k}{r} = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} - \frac{k}{r} \quad E_R = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{(0)^2}{c^2}}} - \frac{k}{\infty} = m_0 c^2 \quad 21.23$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_R}{m_0 c^2} + \frac{k}{m_0 c^2 r} \quad H = \frac{E_R}{m_0 c^2} \quad A = \frac{k}{m_0 c^2} = \frac{GM_0 m_0}{m_0 c^2} = \frac{GM_0}{c^2} \quad 21.24$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = H + A \frac{1}{r} \quad \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(H + A \frac{1}{r}\right)^3 \quad 21.25$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} = r \hat{r} \times \left(\frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} \right) = r^2 \frac{d\phi}{dt} (\hat{r} \times \hat{\phi}) = r^2 \frac{d\phi}{dt} \hat{k} \quad 21.26$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = r \hat{r} \times \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \left[\left(-\frac{dr}{dt'} \hat{r} + r \frac{d\phi}{dt'} \hat{\phi} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} r^2 \frac{d\phi}{dt'} (\hat{r} \times \hat{\phi}) = r^2 \frac{d\phi}{dt} \hat{k} \quad 21.26$$

$$\vec{L} = r^2 \frac{d\phi}{dt} \hat{k} = L \hat{k} = \text{constante} \quad L = r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad 21.27$$

$$dE_k = \frac{m_0 v' dv'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-k}{r^2} dr = \frac{-k}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \quad 21.20$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{-k}{r^2} \hat{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{-k}{r^2} \hat{r} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{m_0 \vec{a}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-k}{r^2} \hat{r} \quad 21.28$$

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right) \hat{\phi} \right\} = \frac{-k}{r^2} \hat{r} \quad 21.29$$

$$\vec{F}_{\hat{\phi}} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right) \hat{\phi} = \text{zero} \quad 21.30$$

$$\vec{F}_{\hat{r}} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} = \frac{-k}{r^2} \hat{r} \quad 21.31$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{r^2} \quad \frac{dr}{dt} = -L \frac{dw}{d\phi} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L^2}{r^2} \frac{d^2w}{d\phi^2} \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{2L^2}{r^3} \frac{dw}{d\phi} \quad 21.32$$

$$\vec{F}_{\hat{r}} = \frac{m_o}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{-L^2}{r^2} \frac{d^2w}{d\phi^2} - r \left(\frac{L}{r^2}\right)^2 \right] \hat{r} = \frac{-k}{r^2} \hat{r} \quad 21.33$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{-L^2}{r^2} \frac{d^2w}{d\phi^2} - \frac{L^2}{r^3} \right) = \frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{d^2w}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{-L^2}{r^2} \right) = \frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{d^2w}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right) = \frac{GM_o}{L^2} \quad 21.34$$

$$\left(H + A \frac{1}{r} \right) \left(\frac{d^2w}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right) = \frac{GM_o}{L^2} \quad 21.35$$

$$\left(H + 3A \frac{1}{r} \right) \left(\frac{d^2w}{d\phi^2} + \frac{1}{r} \right) = \frac{GM_o}{L^2}$$

$$H \frac{d^2w}{d\phi^2} + H \frac{1}{r} + 3A \frac{d^2w}{d\phi^2} \frac{1}{r} + 3A \frac{1}{r^2} = \frac{GM_o}{L^2}$$

$$H \frac{d^2w}{d\phi^2} + Hw + 3A \frac{d^2w}{d\phi^2} w + 3Aw^2 - \frac{GM_o}{L^2} = \text{zero}$$

$$H = \frac{E_R}{m_o c^2} \quad A = \frac{k}{m_o c^2} = \frac{GM_o m_o}{m_o c^2} = \frac{GM_o}{c^2} \quad B = \frac{GM_o}{L^2} \quad 21.36$$

$$H \frac{d^2w}{d\phi^2} + Hw + 3A \frac{d^2w}{d\phi^2} w + 3Aw^2 - B = \text{zero} \quad 21.37$$

$$w = \frac{1}{r} = \frac{1}{\epsilon D} [1 + \epsilon \cos(\phi Q)] \quad \frac{dw}{d\phi} = \frac{-Q \sin(\phi Q)}{D} \quad \frac{d^2w}{d\phi^2} = \frac{-Q^2 \cos(\phi Q)}{D} \quad 21.38$$

$$H \frac{-Q^2 \cos(\phi Q)}{D} + H \frac{1}{\epsilon D} [1 + \epsilon \cos(\phi Q)] + 3A \frac{-Q^2 \cos(\phi Q)}{D} \frac{1}{\epsilon D} [1 + \epsilon \cos(\phi Q)] + 3A \left\{ \frac{1}{\epsilon D} [1 + \epsilon \cos(\phi Q)] \right\}^2 - B = \text{zero} \quad 21.39$$

$$-Q^2 H \frac{\cos(\phi Q)}{D} + H \frac{1}{\epsilon D} + H \frac{1}{\epsilon D} \epsilon \cos(\phi Q) - \frac{3Q^2 A \cos(\phi Q)}{\epsilon D} \frac{1}{D} [1 + \epsilon \cos(\phi Q)] + \frac{3A}{\epsilon^2 D^2} [1 + 2\epsilon \cos(\phi Q) + \epsilon^2 \cos^2(\phi Q)] - B = \text{zero}$$

$$-Q^2H \frac{\cos(\phi Q)}{D} + H \frac{1}{\epsilon D} + H \frac{\cos(\phi Q)}{D} - \frac{3Q^2A \cos(\phi Q)}{\epsilon D} - \frac{3Q^2A \cos(\phi Q)}{D} \epsilon \cos(\phi Q) +$$

$$+ \frac{3A}{\epsilon^2 D^2} + \frac{3A}{\epsilon^2 D^2} 2\epsilon \cos(\phi Q) + \frac{3A}{\epsilon^2 D^2} \epsilon^2 \cos^2(\phi Q) - B = \text{zero}$$

$$-Q^2H \frac{\cos(\phi Q)}{D} + H \frac{1}{\epsilon D} + H \frac{\cos(\phi Q)}{D} - \frac{3Q^2A \cos(\phi Q)}{\epsilon D} - 3Q^2A \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} +$$

$$+ \frac{3A}{\epsilon^2 D^2} + \frac{6A \cos(\phi Q)}{\epsilon D} + 3A \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} - B = \text{zero}$$

$$-Q^2H \frac{\cos(\phi Q)}{D} + H \frac{\cos(\phi Q)}{D} - \frac{3Q^2A \cos(\phi Q)}{\epsilon D} + \frac{6A \cos(\phi Q)}{\epsilon D} -$$

$$- 3Q^2A \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + 3A \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + H \frac{1}{\epsilon D} + \frac{3A}{\epsilon^2 D^2} - B = \text{zero}$$

$$\left(-Q^2H + H - \frac{3Q^2A}{\epsilon D} + \frac{6A}{\epsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \left(-3Q^2A + 3A \right) \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + H \frac{1}{\epsilon D} + \frac{3A}{\epsilon^2 D^2} - B = \text{zero}$$

$$\left(-3Q^2A + 3A \right) \frac{\cos^2(\phi Q)}{3AD^2} + \left(-Q^2H + H - \frac{3Q^2A}{\epsilon D} + \frac{6A}{\epsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{3AD} + H \frac{1}{3A\epsilon D} + \frac{3A}{3A\epsilon^2 D^2} - \frac{B}{3A} = \text{zero}$$

$$(1-Q^2) \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + \left(\frac{-Q^2H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} - \frac{B}{3A} = \text{zero} \quad 21.40$$

$$Q^2 \approx 1 \quad \left(1-Q^2 \right) \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} = \text{zero} \quad 21.41$$

$$\left(\frac{-Q^2H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} - \frac{B}{3A} = \text{zero} \quad 21.42$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D} = \text{zero} \Rightarrow \frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} - \frac{B}{3A} = \text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D} \neq \text{zero} \Rightarrow \frac{-Q^2H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} = \text{zero}$$

$$\frac{-Q^2H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} = zero \qquad \frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} - \frac{B}{3A} = zero \qquad 21.43$$

$$[a=b] \Rightarrow \frac{H}{3A} + \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{Q^2} \left(\frac{H}{3A} + \frac{2}{\epsilon D} \right) \qquad [a=c] \Rightarrow \frac{H}{3A} + \frac{1}{\epsilon D} = \frac{\epsilon DB}{3A} \qquad 21.44$$

$$Q^2 = 1 \qquad H = \frac{E_R}{m_0 c^2} = \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2} = 1 \qquad \epsilon DB = \frac{\epsilon DGM_o}{L^2} = \frac{\epsilon DGM_o}{\epsilon DGM_o} = 1$$

$$[a=b] \Rightarrow \frac{H}{3A} + \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{1} \left(\frac{H}{3A} + \frac{2}{\epsilon D} \right) \Rightarrow \frac{1}{\epsilon D} = zero \qquad [a=c] \Rightarrow \frac{1}{3A} + \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{3A} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon D} = zero$$

$$[b=c] \Rightarrow \frac{1}{Q^2} \left(\frac{H}{3A} + \frac{2}{\epsilon D} \right) = \frac{\epsilon DB}{3A} \qquad 21.45$$

$$\epsilon DB = \frac{\epsilon DGM_o}{L^2} = \frac{\epsilon DGM_o}{\epsilon DGM_o} = 1 \qquad 21.46$$

$$[b=c] \Rightarrow \frac{1}{Q^2} \left(\frac{H}{3A} + \frac{2}{\epsilon D} \right) = \frac{1}{3A} \qquad Q^2 = H + \frac{6A}{\epsilon D} \qquad 21.47$$

$Q = Q(H)$ O retrocesso é função da energia positiva que governa o movimento.

$$H = \frac{E_R}{m_0 c^2} = \frac{m_0 c^2}{m_0 c^2} = 1 \qquad Q^2 = 1 + \frac{6A}{\epsilon D} \text{ Retrocesso} \qquad 21.48$$

$$[a=b] \Rightarrow \frac{1}{3A} + \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{\left(1 + \frac{6A}{\epsilon D}\right)} \left(\frac{1}{3A} + \frac{2}{\epsilon D} \right) \Rightarrow \frac{1}{\epsilon D} = zero \qquad 21.49$$

$$3A\epsilon D \left(\frac{-Q^2H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} \right) = zero \qquad 3A\epsilon^2 D^2 \left(\frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} - \frac{B}{3A} \right) = zero \qquad 21.43$$

$$H = \frac{E_R}{m_0 c^2} \qquad A = \frac{GM_o}{c^2} \qquad B = \frac{GM_o}{L^2}$$

$$-Q^2H\epsilon D + H\epsilon D - Q^2 3A + 6A = zero \qquad H\epsilon D + 3A - \epsilon D(\epsilon DB) = zero$$

$$-Q^2(-3A + \epsilon D) - 3A + \epsilon D - Q^2 3A + 6A = zero \qquad H\epsilon D = -3A + \epsilon D$$

$$Q^2 3A - Q^2 \epsilon D + \epsilon D - Q^2 3A + 3A = zero$$

$$-Q^2 \epsilon D + \epsilon D + 3A = zero \qquad Q^2 = 1 + \frac{3A}{\epsilon D}$$

Este retrocesso não é governado pela energia positiva.

$$\vec{v} = \frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}$$

21.06

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \right) = \frac{dt'}{dt} \frac{d}{dt'} \left(\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \right) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d}{dt'} \left(\frac{-\vec{v}'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \right)$$

21.50

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{-1}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)} \left[\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \frac{d\vec{v}'}{dt'} - \vec{v}' \frac{d}{dt'} \left(\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \right) \right]$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{-1}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)} \left[\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \frac{d\vec{v}'}{dt'} - \vec{v}' \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{1}{2}} \left(\frac{2v'}{c^2} \frac{dv'}{dt'} \right) \right]$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{-1}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)} \left(\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \frac{d\vec{v}'}{dt'} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} v' \frac{dv'}{dt'} \frac{\vec{v}'}{c^2} \right)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{-1}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \frac{d\vec{v}'}{dt'} \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} v' \frac{dv'}{dt'} \frac{\vec{v}'}{c^2} \right)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{-1}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right) \frac{d\vec{v}'}{dt'} - v' \frac{dv'}{dt'} \frac{\vec{v}'}{c^2} \right]$$

$$m\vec{a} = \frac{m_0 \vec{a}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{-m_0}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right) \frac{d\vec{v}'}{dt'} - v' \frac{dv'}{dt'} \frac{\vec{v}'}{c^2} \right]$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{m_0 \vec{a}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

21.51

$$\vec{F}' = \frac{-m_0}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right) \frac{d\vec{v}'}{dt'} - v' \frac{dv'}{dt'} \frac{\vec{v}'}{c^2} \right]$$

21.52

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{m_0 \vec{a}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}' = \frac{-m_0}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right) \frac{d\vec{v}'}{dt'} - v' \frac{dv'}{dt'} \frac{\vec{v}'}{c^2} \right]$$

21.53

$$E_k = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}' \cdot (-d\vec{r}') = \int \frac{-k}{r^2} \hat{r}(-d\vec{r}') \quad 21.54$$

$$E_k = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}' \cdot (-d\vec{r}') = \int \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \int \frac{-m_0}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right) \frac{d\vec{v}'}{dt'} - v' \frac{dv'}{dt'} \frac{\vec{v}'}{c^2} \right] (-d\vec{r}') = \int \frac{-k}{r^2} \hat{r}(-d\vec{r}') \quad 21.55$$

$$E_k = \int \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} d\vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = \int \frac{m_0}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right) d\vec{v}' \frac{d\vec{r}'}{dt'} - v' dv' \frac{d\vec{r}' \cdot \vec{v}'}{c^2} \right] = \int \frac{k}{r^2} \hat{r} d\vec{r}'$$

$$E_k = \int \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} d\vec{v} \vec{v} = \int \frac{m_0}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right) d\vec{v}' \vec{v}' - v' dv' \frac{\vec{v}' \vec{v}'}{c^2} \right] = \int \frac{-k}{r^2} dr$$

$$E_k = \int \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \int \frac{m_0}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right) d\vec{v}' \vec{v}' - v' dv' \frac{v'^2}{c^2} \right] = \int \frac{-k}{r^2} dr$$

$$E_k = \int \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \int \frac{m_0 v' dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(1+\frac{v'^2}{c^2} - \frac{v'^2}{c^2}\right) = \int \frac{-k}{r^2} dr$$

$$E_k = \int \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \int \frac{m_0 v' dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-k}{r^2} dr \quad dE_k = \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v' dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-k}{r^2} dr \quad 21.56$$

$$E_k = -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{-m_0 c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{k}{r} + \text{constante} \quad 21.57$$

$$E_R = -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{k}{r} = \text{constante} \quad E_R = \frac{-m_0 c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} - \frac{k}{r} = \text{constante} \quad 21.58$$

$$E_R = \frac{-m_0 c^2}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} - \frac{k}{r} = -m_0 c^2 + \frac{m_0 v'^2}{2} - \frac{k}{r} \quad E_R = \frac{-m_0 c^2}{\sqrt{1+\frac{(0)^2}{c^2}}} - \frac{k}{\infty} = -m_0 c^2 \quad 21.59$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{E_R}{m_0 c^2} + \frac{k}{m_0 c^2 r} \quad 21.60$$

$$H = \frac{E_R}{m_0 c^2} \quad A = \frac{k}{m_0 c^2} = \frac{GM_o m_0}{m_0 c^2} = \frac{GM_o}{c^2} \quad 21.61$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}=H+A\frac{1}{r} \qquad \frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3 \quad 21.62$$

$$\vec{L}'=\vec{r}'\times\vec{v}'=-r\hat{r}\times\left[-\left(\frac{dr}{dt'}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt'}\hat{\phi}\right)\right]=r^2\frac{d\phi}{dt'}(\hat{r}\times\hat{\phi})=r^2\frac{d\phi}{dt'}\hat{k} \quad 21.63$$

$$\vec{L}'=\vec{r}'\times\vec{v}'=-\vec{r}\times\frac{-\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=r\hat{r}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\left(\frac{dr}{dt}\hat{r}+r\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}r^2\frac{d\phi}{dt}(\hat{r}\times\hat{\phi})=r^2\frac{d\phi}{dt'}\hat{k} \quad 21.63$$

$$\vec{L}'=r^2\frac{d\phi}{dt'}\hat{k}=L'\hat{k} \qquad L'=r^2\frac{d\phi}{dt'} \quad 21.64$$

$$dE_k=\frac{m_0v dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0v'dv'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-k}{r^2}dr=\frac{k}{r^2}\hat{r}d\vec{r}' \quad 21.56$$

$$\frac{dE_k}{dt'}=\vec{F}'\cdot\vec{v}'=\frac{m_0}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}v'\frac{dv'}{dt'}=\frac{k}{r^2}\hat{r}\frac{d\vec{r}'}{dt'}=\frac{k}{r^2}\hat{r}\vec{v}'$$

$$\vec{F}'=\frac{m_0\vec{a}'}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{r^2}\hat{r} \quad 21.65$$

$$\vec{F}'=\frac{m_0}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{-\left[\frac{d^2r}{dt'^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt'}\right)^2\right]\hat{r}-\left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\phi}{dt'}+r\frac{d^2\phi}{dt'^2}\right)\hat{\phi}\right\}=\frac{k}{r^2}\hat{r} \quad 21.66$$

$$\vec{F}'_{\hat{\phi}}=\frac{-m_0}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(2\frac{dr}{dt'}\frac{d\phi}{dt'}+r\frac{d^2\phi}{dt'^2}\right)\hat{\phi}=\text{zero} \quad 21.67$$

$$\vec{F}'_{\hat{r}}=\frac{-m_0}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2r}{dt'^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt'}\right)^2\right]\hat{r}=\frac{k}{r^2}\hat{r} \quad 21.68$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2r}{dt'^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt'}\right)^2\right]\hat{r}=\frac{-GM_o}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{d\phi}{dt'}=\frac{L'}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt'}=-L'\frac{dw}{d\phi} \qquad \frac{d^2r}{dt'^2}=\frac{-L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2} \qquad \frac{d^2\phi}{dt'^2}=\frac{2L'^2}{r^3}\frac{dw}{d\phi} \quad 21.69$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{-L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2}-r\left(\frac{L'}{r^2}\right)^2\right]=\frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{-L'^2}{r^2}\frac{d^2w}{d\phi^2}-\frac{L'^2}{r^3}\right)=\frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{-L'^2}{r^2}\right)=\frac{-GM_o}{r^2}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L'^2} \quad 21.70$$

$$-\left(H+A\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{GM_o}{L'^2} \quad 21.71$$

$$\left(H+3A\frac{1}{r}\right)\left(\frac{d^2w}{d\phi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{-GM_o}{L'^2}$$

$$H\frac{d^2w}{d\phi^2}+H\frac{1}{r}+3A\frac{d^2w}{d\phi^2}\frac{1}{r}+3A\frac{1}{r^2}=\frac{-GM_o}{L'^2}$$

$$H\frac{d^2w}{d\phi^2}+Hw+3A\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3Aw^2+\frac{GM_o}{L'^2}=\text{zero}$$

$$H=\frac{E_R}{m_0c^2} \quad A=\frac{GM_o}{c^2} \quad B=\frac{GM_o}{L'^2} \quad 21.72$$

$$H\frac{d^2w}{d\phi^2}+Hw+3A\frac{d^2w}{d\phi^2}w+3Aw^2+B=\text{zero} \quad 21.73$$

$$w=\frac{1}{r}=\frac{1}{\epsilon D}[1+\epsilon\cos(\phi Q)] \quad \frac{dw}{d\phi}=\frac{-Q\sin(\phi Q)}{D} \quad \frac{d^2w}{d\phi^2}=\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D} \quad 21.38$$

$$H\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{1}{\epsilon D}[1+\epsilon\cos(\phi Q)]+3A\frac{-Q^2\cos(\phi Q)}{D}\frac{1}{\epsilon D}[1+\epsilon\cos(\phi Q)]+3A\left\{\frac{1}{\epsilon D}[1+\epsilon\cos(\phi Q)]\right\}^2+B=\text{zero} \quad 21.74$$

$$-Q^2H\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{1}{\epsilon D}+H\frac{1}{\epsilon D}\epsilon\cos(\phi Q)-\frac{3Q^2A\cos(\phi Q)}{\epsilon D}\frac{1}{D}[1+\epsilon\cos(\phi Q)]+\frac{3A}{\epsilon^2D^2}[1+2\epsilon\cos(\phi Q)+\epsilon^2\cos^2(\phi Q)]+B=\text{zero}$$

$$-Q^2H\frac{\cos(\phi Q)}{D}+H\frac{1}{\epsilon D}+H\frac{\cos(\phi Q)}{D}-\frac{3Q^2A\cos(\phi Q)}{\epsilon D}\frac{1}{D}-\frac{3Q^2A\cos(\phi Q)}{\epsilon D}\frac{\epsilon\cos(\phi Q)}{D}+$$

$$+\frac{3A}{\epsilon^2D^2}+\frac{3A}{\epsilon^2D^2}2\epsilon\cos(\phi Q)+\frac{3A}{\epsilon^2D^2}\epsilon^2\cos^2(\phi Q)+B=\text{zero}$$

$$-Q^2H \frac{\cos(\phi Q)}{D} + H \frac{1}{\epsilon D} + H \frac{\cos(\phi Q)}{D} - \frac{3Q^2A \cos(\phi Q)}{\epsilon D} - \frac{3Q^2A \cos^2(\phi Q)}{D^2} +$$

$$+ \frac{3A}{\epsilon^2 D^2} + \frac{6A \cos(\phi Q)}{\epsilon D} + \frac{3A \cos^2(\phi Q)}{D^2} + B = \text{zero}$$

$$-Q^2H \frac{\cos(\phi Q)}{D} + H \frac{\cos(\phi Q)}{D} - \frac{3Q^2A \cos(\phi Q)}{\epsilon D} + \frac{6A \cos(\phi Q)}{\epsilon D} -$$

$$- \frac{3Q^2A \cos^2(\phi Q)}{D^2} + \frac{3A \cos^2(\phi Q)}{D^2} + H \frac{1}{\epsilon D} + \frac{3A}{\epsilon^2 D^2} + B = \text{zero}$$

$$\left(-Q^2H + H - \frac{3Q^2A}{\epsilon D} + \frac{6A}{\epsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \left(-3Q^2A + 3A \right) \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + H \frac{1}{\epsilon D} + \frac{3A}{\epsilon^2 D^2} + B = \text{zero}$$

$$\left(-3Q^2A + 3A \right) \frac{\cos^2(\phi Q)}{3AD^2} + \left(-Q^2H + H - \frac{3Q^2A}{\epsilon D} + \frac{6A}{\epsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{3AD} + H \frac{1}{3A\epsilon D} + \frac{3A}{3A\epsilon^2 D^2} + \frac{B}{3A} = \text{zero}$$

$$(1-Q^2) \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + \left(\frac{-Q^2H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{B}{3A} = \text{zero} \quad 21.75$$

$$Q^2 \approx 1 \quad \left(1-Q^2 \right) \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} = \text{zero} \quad 21.76$$

$$\left(\frac{-Q^2H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{B}{3A} = \text{zero} \quad 21.77$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D} = \text{zero} \Rightarrow \frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{B}{3A} = \text{zero}$$

$$\frac{\cos(\phi Q)}{D} \neq \text{zero} \Rightarrow \frac{-Q^2H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} = \text{zero}$$

$$\frac{-Q^2H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} = \text{zero} \quad \frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{B}{3A} = \text{zero} \quad 21.78$$

$$[a=b] \Rightarrow \frac{H}{3A} + \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{Q^2} \left(\frac{H}{3A} + \frac{2}{\epsilon D} \right) \quad [a=c] \Rightarrow \frac{H}{3A} + \frac{1}{\epsilon D} = -\frac{\epsilon DB}{3A} \quad 21.79$$

$$Q^2 = 1 \quad H = \frac{E_R}{m_0 c^2} = \frac{-m_0 c^2}{m_0 c^2} = -1 \quad \epsilon DB = \frac{\epsilon DGM_0}{L^2} = \frac{\epsilon DGM_0}{\epsilon DGM_0} = 1$$

$$[a=b] \Rightarrow \frac{H}{3A} + \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{1} \left(\frac{H}{3A} + \frac{2}{\epsilon D} \right) \Rightarrow \frac{1}{\epsilon D} = \text{zero} \quad [a=c] \Rightarrow \frac{-1}{3A} + \frac{1}{\epsilon D} = -\frac{1}{3A} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon D} = \text{zero}$$

$$[b=c] \Rightarrow \frac{1}{Q^2} \left(\frac{H}{3A} + \frac{2}{\epsilon D} \right) = -\frac{\epsilon DB}{3A} \quad 21.80$$

$$\epsilon DB = \frac{\epsilon DGM_0}{L^2} = \frac{\epsilon DGM_0}{\epsilon DGM_0} = 1 \quad 21.81$$

$$[b=c] \Rightarrow \frac{1}{Q^2} \left(\frac{H}{3A} + \frac{2}{\epsilon D} \right) = -\frac{1}{3A} \quad Q^2 = -H - \frac{6A}{\epsilon D} \quad 21.82$$

$Q=Q(H)$ O avanço é função da energia negativa que governa o movimento.

$$H = \frac{E_R}{m_0 c^2} = \frac{-m_0 c^2}{m_0 c^2} = -1 \quad Q^2 = -(-1) - \frac{6A}{\epsilon D} \Rightarrow Q^2 = 1 - \frac{6A}{\epsilon D} \text{ Avanço} \quad 21.83$$

$$[a=b] \Rightarrow \frac{-1}{3A} + \frac{1}{\epsilon D} = \frac{1}{\left(1 - \frac{6A}{\epsilon D}\right)} \left(\frac{-1}{3A} + \frac{2}{\epsilon D}\right) \Rightarrow \frac{1}{\epsilon D} = \text{zero} \quad 21.84$$

$$H = \frac{E_R}{m_0 c^2} \quad A = \frac{GM_o}{c^2} \quad B = \frac{GM_o}{L^2}$$

$$\frac{-Q^2 H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} = \text{zero} \quad \frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{B}{3A} = \text{zero} \quad 21.78$$

$$3A\epsilon D \left(\frac{-Q^2 H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} \right) = \text{zero} \quad 3A\epsilon^2 D^2 \left(\frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{B}{3A} \right) = \text{zero}$$

$$-Q^2 H \epsilon D + H \epsilon D - Q^2 3A + 6A = \text{zero} \quad H \epsilon D + 3A + \epsilon D (\epsilon D B) = \text{zero} \quad 21.85$$

$$\epsilon D B = \frac{\epsilon D G M_o}{L^2} = \frac{\epsilon D G M_o}{\epsilon D G M_o} = 1 \quad H \epsilon D = -3A - \epsilon D \quad 21.86$$

$$-Q^2(-3A - \epsilon D) - 3A - \epsilon D - Q^2 3A + 6A = \text{zero} \quad 21.87$$

$$Q^2 3A + Q^2 \epsilon D - \epsilon D - Q^2 3A + 3A = \text{zero}$$

$$Q^2 \epsilon D - \epsilon D + 3A = \text{zero} \quad Q^2 = 1 - \frac{3A}{\epsilon D} \quad 21.88$$

Este avanço não é governado pela energia negativa.

$$-Q^2 H \epsilon D + H \epsilon D - Q^2 3A + 6A = \text{zero} \quad 21.85$$

$$-Q^2(-3A - \epsilon D) + H \epsilon D - Q^2 3A + 6A = \text{zero} \quad 21.89$$

$$Q^2 3A + Q^2 \epsilon D + H \epsilon D - Q^2 3A + 6A = \text{zero}$$

$$Q^2 \epsilon D + H \epsilon D + 6A = \text{zero} \quad Q^2 = -H - \frac{6A}{\epsilon D} \quad 21.90$$

$$\left(\frac{-Q^2 H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{B}{3A} = \text{zero} \quad 21.77$$

$$3A\epsilon^2 D^2 \left[\left(\frac{-Q^2 H}{3A} + \frac{H}{3A} - \frac{Q^2}{\epsilon D} + \frac{2}{\epsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{H}{3A\epsilon D} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{B}{3A} \right] = \text{zero}$$

$$\epsilon D \left(\frac{-Q^2 H 3A \epsilon D}{3A} + \frac{H 3A \epsilon D}{3A} - \frac{Q^2 3A \epsilon D}{\epsilon D} + \frac{2 \cdot 3A \epsilon D}{\epsilon D} \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{H 3A \epsilon^2 D^2}{3A \epsilon D} + \frac{3A \epsilon^2 D^2}{\epsilon^2 D^2} + \frac{B 3A \epsilon^2 D^2}{3A} = \text{zero}$$

$$\epsilon D (-Q^2 H \epsilon D + H \epsilon D - Q^2 3A + 6A) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + H \epsilon D + 3A + \epsilon D (\epsilon D B) = \text{zero}$$

$$\epsilon_{DB} = \frac{\epsilon DGM_o}{L^2} = \frac{\epsilon DGM_o}{\epsilon DGM_o} = 1 \quad H = \frac{E_R}{m_o c^2} = \frac{-m_o c^2}{m_o c^2} = -1$$

$$\epsilon D(-Q^2 H \epsilon D + H \epsilon D - Q^2 3A + 6A) \frac{\cos(\phi Q)}{D} - \epsilon D + 3A + \epsilon D = zero$$

$$(-Q^2 H \epsilon D + H \epsilon D - Q^2 3A + 6A) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero \quad 21.91$$

$$Q^2 = 1 - \frac{3A}{\epsilon D}$$

$$\left[-\left(1 - \frac{3A}{\epsilon D}\right) H \epsilon D + H \epsilon D - \left(1 - \frac{3A}{\epsilon D}\right) 3A + 6A \right] \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero$$

$$\left(-H \epsilon D + H \epsilon D \frac{3A}{\epsilon D} + H \epsilon D - 3A + 3A \frac{3A}{\epsilon D} + 6A \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero$$

$$\left(-H \epsilon D + H 3A + H \epsilon D - 3A + \frac{9A^2}{\epsilon D} + 6A \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero$$

$$\left(H 3A + \frac{9A^2}{\epsilon D} + 3A \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero$$

$$H = \frac{E_R}{m_o c^2} = \frac{-m_o c^2}{m_o c^2} = -1$$

$$\left(-3A + \frac{9A^2}{\epsilon D} + 3A \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero$$

$$\frac{9A^2 \cos(\phi Q)}{\epsilon D D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero \quad \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{1}{3A} = zero \quad 21.92$$

$$(-Q^2 H \epsilon D + H \epsilon D - Q^2 3A + 6A) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero \quad 21.91$$

$$Q^2 = 1 - \frac{6A}{\epsilon D}$$

$$\left[-\left(1 - \frac{6A}{\epsilon D}\right) H \epsilon D + H \epsilon D - \left(1 - \frac{6A}{\epsilon D}\right) 3A + 6A \right] \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero$$

$$\left(-H \epsilon D + H \epsilon D \frac{6A}{\epsilon D} + H \epsilon D - 3A + 3A \frac{6A}{\epsilon D} + 6A \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero$$

$$\left(-H \epsilon D + H 6A + H \epsilon D - 3A + \frac{18A^2}{\epsilon D} + 6A \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero$$

$$\left(H 6A + \frac{18A^2}{\epsilon D} + 3A \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = zero$$

$$H = \frac{E_R}{m_0 c^2} = \frac{-m_0 c^2}{m_0 c^2} = -1$$

$$\left(-6A + \frac{18A^2}{\epsilon D} + 3A\right) \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = \text{zero}$$

$$\frac{1}{3A} \left[\left(-3A + \frac{18A^2}{\epsilon D}\right) \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} \right] = \text{zero}$$

$$\left(-1 + \frac{6A}{\epsilon D}\right) \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{1}{\epsilon D} = \text{zero}$$

$$-\left(1 - \frac{6A}{\epsilon D}\right) \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{1}{\epsilon D} = \text{zero} \qquad -Q^2 \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{1}{\epsilon D} = \text{zero} \qquad 21.93$$

$$\left(-Q^2 H \epsilon D + H \epsilon D - Q^2 3A + 6A\right) \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = \text{zero} \qquad 21.91$$

$$Q^2 = 1 \qquad H = \frac{E_R}{m_0 c^2} = \frac{-m_0 c^2}{m_0 c^2} = -1$$

$$\left(\epsilon D - \epsilon D - 3A + 6A\right) \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = \text{zero}$$

$$\left(3A\right) \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{3A}{\epsilon D} = \text{zero} \qquad \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{1}{\epsilon D} = \text{zero} \qquad 21.94$$

$$Q^2 = 1 - \frac{6A}{\epsilon D} \qquad Q^2 = 1 \qquad Q^2 = 1 - \frac{3A}{\epsilon D}$$

$$\left| -Q^2 \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{1}{\epsilon D} \right| \ll \left| \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{1}{\epsilon D} \right| \ll \ll \ll \ll \left| \frac{\cos(\phi_Q)}{D} + \frac{1}{3A} \right| \qquad 21.95$$

Energia Newtoniana (E_N)

$$E_N = \frac{m_o u^2}{2} - \frac{k}{r}$$

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2}$$

$$E_N = \frac{m_o}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \right] - \frac{k}{r}$$

$$\frac{2E_N}{m_o} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2k}{m_o r}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2k}{m_o r} - \frac{2E_N}{m_o} = \text{zero}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{r^2} \quad \frac{dr}{dt} = -L \frac{dw}{d\phi} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-L^2}{r^2} \frac{d^2w}{d\phi^2} \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{2L^2}{r^3} \frac{dw}{d\phi}$$

$$\left(-L \frac{dw}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2k}{m_o r} - \frac{2E_N}{m_o} = \text{zero}$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2k}{m_o L^2 r} - \frac{2E_N}{m_o L^2} = \text{zero}$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2k}{m_o L^2 r} - \frac{2E_N}{m_o L^2} = \text{zero}$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 + w^2 - \frac{2k}{m_o L^2} w - \frac{2E_N}{m_o L^2} = \text{zero}$$

$$x = \frac{2k}{m_o L^2} \quad y = \frac{2E_N}{m_o L^2}$$

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 + w^2 - xw - y = \text{zero}$$

$$w = \frac{1}{r} = \frac{1}{\epsilon D} [1 + \epsilon \cos(\phi Q)]$$

$$\frac{dw}{d\phi} = \frac{-Q \sin(\phi Q)}{D}$$

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} = \frac{-Q^2 \cos(\phi Q)}{D}$$

$$\left[\frac{-Q \sin(\phi Q)}{D}\right]^2 + \left\{\frac{1}{\epsilon D} [1 + \epsilon \cos(\phi Q)]\right\}^2 - x \frac{1}{\epsilon D} [1 + \epsilon \cos(\phi Q)] - y = \text{zero}$$

$$\frac{Q^2}{D^2} [1 - \cos^2(\phi Q)] + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} [1 + 2\epsilon \cos(\phi Q) + \epsilon^2 \cos^2(\phi Q)] - x \frac{1}{\epsilon D} - x \frac{1}{\epsilon D} \epsilon \cos(\phi Q) - y = \text{zero}$$

$$\frac{Q^2}{D^2} - \frac{Q^2}{D^2} \cos^2(\phi Q) + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} 2\epsilon \cos(\phi Q) + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} \epsilon^2 \cos^2(\phi Q) - \frac{x}{\epsilon D} - x \frac{\cos(\phi Q)}{D} - y = \text{zero}$$

$$\frac{Q^2}{D^2} - Q^2 \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} + \frac{2 \cos(\phi Q)}{\epsilon D} + \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} - \frac{x}{\epsilon D} - x \frac{\cos(\phi Q)}{D} - y = \text{zero}$$

$$\frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} - Q^2 \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + \frac{2 \cos(\phi Q)}{\epsilon D} - x \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{Q^2}{D^2} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} - \frac{x}{\epsilon D} - y = \text{zero}$$

$$(1-Q^2) \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} + \left(\frac{2}{\epsilon D} - x \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{Q^2}{D^2} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} - \frac{x}{\epsilon D} - y = \text{zero}$$

$$Q^2 \approx 1 \quad (1-Q^2) \frac{\cos^2(\phi Q)}{D^2} = \text{zero}$$

$$\left(\frac{2}{\epsilon D} - x \right) \frac{\cos(\phi Q)}{D} + \frac{1}{D^2} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} - \frac{x}{\epsilon D} - y = \text{zero}$$

$$\left(\frac{2}{\epsilon D} - x \right) = \text{zero} \quad \frac{1}{D^2} + \frac{1}{\epsilon^2 D^2} - \frac{x}{\epsilon D} - y = \text{zero}$$

$$x = \frac{2k}{m_o L^2} \quad y = \frac{2E_N}{m_o L^2}$$

$$\frac{2}{\epsilon D} - x = \text{zero} \Rightarrow x = \frac{2}{\epsilon D} = \frac{2k}{m_o L^2} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon D} = \frac{GM_o m_o}{m_o L^2} \Rightarrow L^2 = \epsilon D GM_o$$

$$\frac{\epsilon^2 D^2}{D^2} + \frac{\epsilon^2 D^2}{\epsilon^2 D^2} - \frac{\epsilon^2 D^2 x}{\epsilon D} - \epsilon^2 D^2 y = \text{zero}$$

$$\epsilon^2 + 1 - \epsilon D x - \epsilon^2 D^2 y = \text{zero}$$

$$\epsilon D x = \epsilon D \frac{2}{\epsilon D} \Rightarrow \epsilon D x = 2 \quad \epsilon^2 D^2 y = \epsilon^2 D^2 \frac{2E_N}{m_o L^2} = \epsilon^2 D^2 \frac{2E_N}{m_o \epsilon D GM_o} = \frac{2\epsilon D E_N}{k}$$

$$\epsilon^2 + 1 - 2 - \frac{2\epsilon D E_N}{k} = \text{zero} \quad E_N = \frac{k}{2\epsilon D} (\epsilon^2 - 1)$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\epsilon D} (1 - \epsilon^2) \quad E_N = \frac{-k}{2a}$$

§22 Deformação espacial

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t > t'$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad t' = \frac{2L'}{c}$$

$$t = \frac{2L}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2L'}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow L = L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad L' > L$$

Que é a deformação espacial.

Sendo o comprimento L' em repouso no referencial de O' maior que o comprimento L que está em movimento com velocidade v em relação ao referencial de O .

Agora calculemos para o Observador O' a distancia $d' = vt'$ entre $O \leftrightarrow O'$:

$$d' = vt' = v \frac{2L'}{c}$$

Desta obtemos a velocidade v : $d' = v \frac{2L'}{c} \Rightarrow v = \frac{cd'}{2L'}$.

Agora calculemos para o Observador O a distancia $d = vt$ entre $O \leftrightarrow O'$:

$$d = vt = v(t_1 + t_2) = v \frac{2L}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Desta obtemos a velocidade v : $d = v \frac{2L}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \Rightarrow v = \frac{cd}{2L} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$.

A velocidade v é a mesma para ambos os observadores por isso temos:

$$v = \frac{cd'}{2L'} = \frac{cd}{2L} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Onde aplicando a relação $L = L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ obtemos:

$$\frac{cd'}{2L'} = \frac{cd}{2L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow d' = d \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad d > d'$$

Onde as distâncias d e d' variam de forma inversa as distancias L e L' .

No geral teremos de 14.2 e 14.4:

$$d' = \frac{d \left(1 - \frac{vux}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{ou} \quad d = \frac{d' \left(1 + \frac{vu'x'}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u'x' = \text{zero} \quad d = \frac{d' \left[1 + \frac{v(0)}{c^2} \right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad d = \frac{d'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u'x' = c \quad d = \frac{d' \left(1 + \frac{vc}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad d = d' \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

$$u'x' = -v \quad d = \frac{d' \left[1 + \frac{v(-v)}{c^2} \right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad d = d' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$ux = v \quad d' = \frac{d \left[1 - \frac{v(v)}{c^2} \right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad d' = d \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$ux = c \quad d' = \frac{d \left(1 - \frac{vc}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad d' = d \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

$$ux = \text{zero} \quad d' = \frac{d \left[1 - \frac{v(0)}{c^2} \right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad d' = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

§23 Curvatura do Espaço e Tempo

As variáveis com linha t', v', x', y', \vec{r}' , etc... São as utilizadas no §21.

Geometria do espaço e tempo no plano $xy \rightarrow y \perp x$.

$$y = f(x)$$

$$x = ct'$$

$$y = \int ds' = \int \sqrt{d\vec{r}' \cdot d\vec{r}'}$$

$$\int ds' = f(ct')$$

$$dx = c dt'$$

$$dy = ds' = \sqrt{d\vec{r}' \cdot d\vec{r}'}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = ct'\hat{i} + \int ds'\hat{j}$$

$$\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} = c dt'\hat{i} + ds'\hat{j}$$

$$d\vec{r}' = dx'\hat{i} + dy'\hat{j}$$

$$dr = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r} = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt'} = \frac{dx}{dt'}\hat{i} + \frac{dy}{dt'}\hat{j} = \frac{c dt'}{dt'}\hat{i} + \frac{ds'}{dt'}\hat{j} = c\hat{i} + v'\hat{j}$$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{dx'}{dt'}\hat{i} + \frac{dy'}{dt'}\hat{j}$$

$$\frac{dx}{dt'} = c$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{ds'}{dt'} = v'$$

$$c = v \cos \varphi$$

$$v' = v \sin \varphi$$

$$t g \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt'}}{\frac{dx}{dt'}} = \frac{\frac{ds'}{dt'}}{c} = \frac{1}{c} \frac{ds'}{dt'}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c} \frac{ds'}{dt'} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 s'}{dt'^2}$$

$$\vec{v} = \vec{c} + \vec{v}'$$

$$\vec{c} = c\hat{i}$$

$$\vec{v}' = v'\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt'} = \frac{d\vec{c}}{dt'} + \frac{d\vec{v}'}{dt'}$$

$$\frac{d\vec{c}}{dt'} = \text{zero}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt'} = \frac{d\vec{v}'}{dt'} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}'$$

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx\hat{i} + dy\hat{j})(dx\hat{i} + dy\hat{j}) = (c dt'\hat{i} + ds'\hat{j})(c dt'\hat{i} + ds'\hat{j}) = dx^2 + dy^2 = c^2 dt'^2 + ds'^2$$

$$ds = \sqrt{c^2 dt'^2 + ds'^2}$$

$$ds' = \sqrt{ds^2 - c^2 dt'^2}$$

$$v = \frac{ds}{dt'} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{ds'}{dt'} \right)^2} = \sqrt{c^2 + v'^2} > c$$

$$v' = \frac{ds'}{dt'} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dt'} \right)^2 - c^2} = \sqrt{v^2 - c^2}$$

$$K = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| \rightarrow \varphi \equiv \angle \quad \text{curvatura teórica}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} \quad \varphi = \arctg \frac{dy}{dx} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{1}{c^2} \frac{d^2s'}{dt'^2}}{1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2}$$

$$K = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{\frac{1}{c^2} \frac{d^2s'}{dt'^2}}{1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{c^2} \frac{d^2s'}{dt'^2}}{\left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ds'}{dt'} K = \frac{ds'}{dt'} \frac{d\varphi}{ds} = v' K = v' \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{1}{c^2} \frac{ds'}{dt'} \frac{d^2s'}{dt'^2}}{\left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{ds'}{dt'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{c^2} \vec{v}' \frac{d\vec{v}'}{dt'}}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{v}' \vec{K} = \vec{v}' \frac{d\vec{\varphi}}{ds} = \frac{\frac{1}{c^2} \vec{v}' \frac{d\vec{v}'}{dt'}}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \vec{K} = \frac{d\vec{\varphi}}{ds} = \frac{\frac{1}{c^2} \frac{d\vec{v}'}{dt'}}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dE_k = \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v' dv'}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k}{r^2} dr = \frac{k}{r^2} \hat{r} d\vec{r}'$$

21.56

$$\frac{dE_k}{dt'} = \vec{F}' \cdot \vec{v}' = \frac{m_0 \frac{c^2}{c^2} \vec{v}' \frac{d\vec{v}'}{dt'}}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{r^2} \hat{r} \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{k}{r^2} \hat{r} \vec{v}'$$

$$\frac{dE_k}{dt'} = \vec{F}' \cdot \vec{v}' = m_0 c^2 \vec{v}' \frac{d\vec{\varphi}}{ds} = \frac{k}{r^2} \hat{r} \vec{v}'$$

$$\vec{F}' = m_0 c^2 \frac{d\vec{\varphi}}{ds} = \frac{k}{r^2} \hat{r} \quad \vec{K} = \frac{d\vec{\varphi}}{ds} = \frac{k}{m_0 c^2 r^2} \hat{r}$$

§ 24 Princípio Variacional

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{k}{r} + \text{constante} \quad 21.21$$

$$E_k = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{k}{r} + \text{constante}$$

$$\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{k}{r} \right) = m_0 c^2 \quad p = \frac{d}{dv} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{k}{r} \text{ Lagrangeana.}$$

$$\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - L = m_0 c^2 \text{ Que é a energia inercial da partícula de massa } m_0.$$

$$pv - L = m_0 c^2 \quad L = pv - m_0 c^2 = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{k}{r}$$

Princípio Variacional

$$A\grave{c}\tilde{a}o = S = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = u_x \text{ Esta é a componente da velocidade no eixo } x.$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt = \text{zero} \text{ Variação nula da ação ao longo do eixo } x.$$

Construindo a variável $x' = x + \epsilon \eta$ no intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ nesta vemos que quando $\epsilon \rightarrow \text{zero} \Rightarrow x' = x$ e quando $\epsilon \neq \text{zero}$ teremos as condições:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{d\epsilon}{dt} = \text{zero} & \eta = \eta(t) & \eta(t_1) = \text{zero} & \eta(t_2) = \text{zero} & \frac{d\eta}{d\epsilon} = \text{zero} & \dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt} \\ x' = x + \epsilon \eta & \dot{x}' = \dot{x} + \epsilon \dot{\eta} & \frac{dx'}{d\epsilon} = \eta & \frac{d\dot{x}'}{d\epsilon} = \dot{\eta} & \frac{dx}{d\epsilon} = \text{zero} & \frac{d\dot{x}}{d\epsilon} = \text{zero} \end{array}$$

Temos então uma nova função $I(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} G(x + \epsilon \eta, \dot{x} + \epsilon \dot{\eta}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} F(x', \dot{x}', t) dt$ onde quando

$$\epsilon = \text{zero} \rightarrow x' = x \rightarrow \dot{x}' = \dot{x} \rightarrow F = L \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F(x', \dot{x}', t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt$$

$$\varepsilon \neq \text{zero} \rightarrow x' \neq x \rightarrow \dot{x}' \neq \dot{x} \rightarrow F \neq L \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F(x', \dot{x}', t) dt \neq \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt$$

Assim $I(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F[x'(\varepsilon), \dot{x}'(\varepsilon), t] dt$ que derivada fornece:

$$\frac{\delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F(x', \dot{x}', t) dx'}{\partial x'} \frac{d\dot{x}'}{d\varepsilon} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F(x', \dot{x}', t) d\dot{x}'}{\partial \dot{x}'} \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x'} \eta dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \dot{\eta} dt = \text{zero}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \eta \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \right) \eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \frac{d\eta}{dt} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \dot{\eta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \eta \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \right) \eta$$

$$\frac{\delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x'} \eta dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \dot{\eta} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x'} \eta dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \eta \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \right) \eta \right] dt = \text{zero}$$

$$\frac{\delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x'} \eta dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \eta \right) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \right) \eta dt = \text{zero}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \eta \right) = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \eta \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \eta(t_2) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \eta(t_1) = \text{zero}$$

$$\frac{\delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x'} \eta dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \right) \eta dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \right) \right] \eta dt = \text{zero}$$

$$\frac{\delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \right) \right] \eta dt = \text{zero} \Rightarrow \eta \neq \text{zero} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}'} \right) = \text{zero}$$

$$\varepsilon = \text{zero} \rightarrow x' = x \rightarrow \dot{x}' = \dot{x} \rightarrow F = L \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \text{zero}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \text{ Esta é a componente do eixo } x \quad L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{k}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{k}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{k}{r} \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \text{zero} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{k}{r} \right) = \text{zero} \quad v = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \right] \text{ Esta é a componente do eixo } x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{k}}{r} \right) = \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial x} (r^{-1}) = \mathbf{k} (-1) r^{-2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\mathbf{k} \frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = -\mathbf{k} \frac{x}{r^3} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = -m_0 c^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}-1} \left(-\frac{2v}{c^2} \frac{dv}{dx} \right) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}-1} 2\dot{x} \right] = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \left[\frac{d\dot{x}}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \right] = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \left[\frac{d\dot{x}}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \dot{x} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}-1} \left(-\frac{2v}{c^2} \frac{dv}{dt} \right) \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \left[\frac{d\dot{x}}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \right) \right] = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \left[\frac{d\dot{x}}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \right) \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \left[\frac{d\dot{x}}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \right) \right] = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{d\dot{x}}{dt} + v \frac{dv}{dt} \frac{\dot{x}}{c^2} \right]$$

$$-\mathbf{k} \frac{x}{r^3} \hat{\mathbf{i}} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \ddot{x} + v \frac{dv}{dt} \frac{\dot{x}}{c^2} \right] \hat{\mathbf{i}} \quad \text{Eixo } x$$

$$-\mathbf{k} \frac{y}{r^3} \hat{\mathbf{j}} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \ddot{y} + v \frac{dv}{dt} \frac{\dot{y}}{c^2} \right] \hat{\mathbf{j}} \quad \text{Eixo } y$$

$$-\mathbf{k} \frac{z}{r^3} \hat{\mathbf{k}} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \ddot{z} + v \frac{dv}{dt} \frac{\dot{z}}{c^2} \right] \hat{\mathbf{k}} \quad \text{Eixo } z$$

$$-\mathbf{k} \frac{x}{r^3} \hat{\mathbf{i}} - \mathbf{k} \frac{y}{r^3} \hat{\mathbf{j}} - \mathbf{k} \frac{z}{r^3} \hat{\mathbf{k}} = \frac{-\mathbf{k}}{r^3} (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = \frac{-\mathbf{k}}{r^3} \vec{\mathbf{r}} = \frac{-\mathbf{k}}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \ddot{x} + v \frac{dv}{dt} \frac{\dot{x}}{c^2} \right] \hat{\mathbf{i}} + \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \ddot{y} + v \frac{dv}{dt} \frac{\dot{y}}{c^2} \right] \hat{\mathbf{j}} + \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \ddot{z} + v \frac{dv}{dt} \frac{\dot{z}}{c^2} \right] \hat{\mathbf{k}} = \frac{-\mathbf{k}}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \ddot{x} + v \frac{dv}{dt} \frac{\dot{x}}{c^2} \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \ddot{y} + v \frac{dv}{dt} \frac{\dot{y}}{c^2} \right] \hat{\mathbf{j}} + \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \ddot{z} + v \frac{dv}{dt} \frac{\dot{z}}{c^2} \right] \hat{\mathbf{k}} \right\} = \frac{-\mathbf{k}}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{x}\hat{i}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{x}}{c^2}\hat{i}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{y}\hat{j}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{y}}{c^2}\hat{j}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ddot{z}\hat{k}+v\frac{dv}{dt}\frac{\dot{z}}{c^2}\hat{k}\right]=\frac{-k}{r^2}\hat{r}$$

$$\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k})+\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}(\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k})\right]=\frac{-k}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{a}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k}=\frac{d}{dt}(\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k})=\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vec{v}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{F}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt}+v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right]=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \quad = 21.16$$

$$\vec{F}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\vec{v}}{dt}+v\frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}\right]=\frac{-k}{r^2}\hat{r} \quad = 21.19$$

**“Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo,
qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim”
(Chico Xavier)**

Referências

- [1] Alonso & Finn, Vol. I e II, Ed. Edgard Blücher LTDA, 1972.
 - [2] Robert Resnik, Introdução à Relatividade Especial, Ed. Univ. de S. Paulo e Ed. Polígono S.A., 1971.
 - [3] E. Terradas Y R. Ortiz, Relatividade, Cia. Ed. Espasa-Calpe Argentina S. A., 1952.
 - [4] Abraham Pais, “Sutil é o Senhor...” A ciência e a vida de Albert Einstein, Ed. Nova Fronteira, 1995.
 - [5] Marcel Rouault, Física Atômica, Ao Livro Técnico LTDA, 1959.
 - [6] H. A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowisk, O Princípio da Relatividade, edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 1989.
 - [7] L. Landau e E. Lifchitz, Teoria do Campo, Hemus – Livraria Editora LTDA.
 - [8] Robert Martin Eisberg, Fundamentos da Física Moderna, Ed. Guanabara Dois S.A., 1979.
 - [9] Max Born, Física Atômica, edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 1986.
- <http://www.wbabin.net/physics/faraj7.htm>