Structure Theorem for abelian groups (general case, finite or not)

Eli Halylaurin

17 septembre 2016

Abstract

In this document, you will find an attempt to demonstrate a general structure theorem for abelian groups (finite or not). Such a theorem already exists in the finite case, but the infinite case does not seem to have been deeply study. This is what it is proposed to do in this document. To achieve this task, Zorn Lemma will be used. We will try to prove each abelian group can be written, modulo isomorphism, as a direct product of groups that we will called elementary, because they can be representate upon a circle or a line. Thus this work may be very valuable for every mathematiciens who like to better understand the structure of groups.

This document is french written. Though my english is not bad, it lacks of perfection, and so I have prefered to write it in my french language.

Partie 1: Les groupes élémentaires

Définition 1

On appellera groupe élémentaire tout groupe abélien qui est union croissante de groupes monogènes.
(Dans tout ce document on notera les groupes multiplicativement).

Théorème 2

A isomorphisme près, un groupe G élémentaire c'est:
(i) Soit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec n un entier naturel non-nul.
(ii) Soit $\mathbb{Z}$.
(iii) Soit $\mathbb{Q}$.
(iv) Soit $C = \{e^{2i\pi\theta}, \theta \in \mathbb{Q}\}$.

En effet

Nous n'entrerons pas dans les détails ici car ce n'est pas le plus important, mais nous allons quand même donner le plan de la démonstration.
On note $a \neq 1$ dans G, qu'on se fixe.
On considère maintenant $b \in G$.
$a \in H_1$ et $b \in H_2$, où H_1 et H_2 tous deux monogènes dans l'union donnant G.
Comme l'union est totalement ordonnée, on peut noter H_3 le plus grand des deux.
Ainsi a et b sont tous deux dans $H_3 =< c >$ qui est monogène.
En conséquence, on peut noter u et v plus petit tels que $a = c^u$ et b=c^v.
Ceci pour b quelconque dans G.
Premier cas: a est d'ordre infini.
On définit $\varphi : G \to \mathbb{Q}$ par $\varphi(b) = \frac{v}{u}$.
On vérifie que c'est bien un morphisme injectif.
S'il y a des intervalles dans l'image avec rien dedans, on vérifie que l'image est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
Sinon l'image est $\mathbb{Q}$ tout entier.
Deuxième cas: a est d'ordre fini m.

On définit $\varphi : G \to C$ par $\varphi(b) = e^{2i\pi v/(mu)}$
On vérifie que c'est bien un morphisme injectif.
S'il deux éléments dans l'image peuvent se trouver à des distances aussi petites que voulues, on vérifie que l'image est C tout entier.
Sinon elle est isomorphe à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Remarque 3

Dans le cas (i) et (iv), le groupe se représente sur un cercle.
Dans le cas (ii) et (iii), il se représente sur une droite.
Le cercle et la droite étant des variétés de dimension 1, cela justifie que l'on appelle ces groupes élémentaires (élémentaires à cause de la dimension 1).
Pour le cas (i), G est fini, et pour les autres cas, G est infini.

Partie 2: Le théorème de structure des groupes abéliens

Théorème 1

Soit G groupe abélien, et H sous-groupe différent de G.
Alors il existe dans G un groupe I élémentaire maximal pour l'inclusion, tel que $I \cap H = \{1\}$.

En effet

On considère l'ensemble des sous-groupes I élémentaires dans G, d'intersection $\{1\}$ avec H, munis de la relation d'ordre définie par l'inclusion, et on souhaite appliquer le lemme de Zorn.
Vérifions que l'hypothèse du lemme de Zorn est vérifiée.
On considère donc une suite $(I_j)_{j\in J}$ de sous-groupes élémentaires, totalement ordonné pour l'inclusion, d'intersection $\{1\}$ avec H, et on veut montrer qu'ils ont un majorant.
Tout d'abord on peut supposer que deux I_j ne peuvent être égaux (sinon on les réunis par égalité, et par l'axiome du choix on choisira un I_j parmis chaque rassemblement de I_j égaux).
On peut supposer aussi qu'il n'y a pas de I_j maximal (sinon on prendra ce I_j qui est alors un majorant des autres et donc l'hypothèse du lemme de Zorn est dans ce cas vérifiée).
Maintenant chaque I_j est une union croissante de groupes monogènes $(K_{jr})_{r\in R}$.
Dans I_j on trouve forcément un K_{jr_0} plus grand que tous les I_{j_0} avec I_{j_0} strictement plus petit que I_j (sinon I_j serait plus petit qu'un I_{j_0} d'où une contradiction).
On le note G_j.
Ainsi les G_j sont monogènes et si $I_{j_1} \subset I_{j_2}$, alors $G_{j_1} \subset G_{j_2}$, et les G_j sont donc totalement ordonnées.
Considérons un I_j.
Il y a un I_{j_0} avec I_{j_0} strictement plus grand que I_j.
En conséquence G_{j_0} est plus grand que I_j.
Ceci pour j quelconque, et donc l'union des G_j est plus grand que l'union des I_j.
Les G_j étant monogènes et totalement ordonnés, leur union est une union croissante, et ainsi cette union est un groupe élémentaire plus grand que tous les I_j.
Ainsi les I_j ont un majorant dans l'ensemble des groupes élémentaires d'intersection $\{1\}$ avec H (c'est l'union des G_j).
Donc l'hypothèses du lemme de Zorn est vérifiée, ce qui permet bien de conclure en l'existence dans G d'un groupe élémentaire maximal, d'intersection $\{1\}$ avec H.

Définition 2

Ayant des sous-groupes H_i de G, on notera $\prod_{i\in I} H_i$ l'ensemble des produits d'un nombre fini d'éléments pris dans les H_i.
On notera aussi $\otimes_{i\in I} H_i$ le produit directe des H_i.
Dans le cas où I infini, on définira le produit direct de sorte que les éléments de ce produit direct n'ont

qu'un nombre fini de coordonnées différentes de 1.

Théorème 3

Soit G groupe abélien, et $H = \prod_{j \in J} H_j$ un sous-groupe formés de H_j tous maximaux élémentaires.

Alors si $H \neq G$, il existe un groupe I monogène non-réduit à $\{1\}$, tel que $I \cap H = \{1\}$.

En effet

On note $a \in G \setminus H$.

Prenons le cas où $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \in H$.

On note alors n plus petit tel qu'on ait un tel $a \in G \setminus H$ avec $a^n \in H$.

(n est donc premier).

Comme chaque H_j est élémentaire, a^n est égal à un h^m où $< h >$ un des groupes monogènes dans l'union formant un des H_j.

Premier sous-cas: si $n \mid m$,

on obtient que $(a.h^{-m/n})^n = 1$, ainsi $a.h^{-m/n}$ engendre un groupe monogène d'intersection $\{1\}$ avec H, et dans ce cas on a donc gagné.

Deuxième sous-cas: si $n \nmid m$, comme n est premier, n et m sont donc premiers entre eux, et le théorème de Bézout assure que $n.u + m.v = 1$ (avec u et v entiers relatifs).

Ainsi $(a^v.h^u)^n = h^{m.v+n.u} = h$ et $(a^v.h^u)^m = a^{v.m+n.u} = a$,

Du coup $(a^v.h^u)$ engrendre un groupe monogène qui contient h et a.

En conséquence, si dans l'union donnant H_j on remplace le groupe $< h >$ par $< a^v.h^u >$, on obtient un groupe monogène plus grand que $< h >$.

Pour tous les groupes $< h_i >$ monogènes plus grand que $< h >$ dans l'union donnant H_j, on fait la même chose (on écrit une puissance de a égal à une puissance de h_i et par théorème de Bézout, on remplace le groupe $< h_i >$ par un groupe monogène égal à $< h_i, a >$).

Ainsi on a obtenu une union de groupes monogènes strictement plus grande que H_j (puisqu'elle contient a en plus).

Cela contredit la maximalité de H_j et ce dernier cas ne peut donc se produire.

Prenons maintenant le cas où a^n n'est jamais dans H (pour $n > 0$).

Dans ce cas $< a >$ forme bien un groupe monogène d'intersection $\{1\}$ avec H.

Dans tous les cas, on a donc bien l'existance du nouveau groupe monogène recherché.

Théorème 4

Soit G un groupe abélien, et $\prod_{i \in I} H_i$ un produit de sous-groupes, où I est munis d'un ordre total, tel que le produit est égal à G (i.e. l'ensemble des produits finis parmis les éléments des H_i parcourt tout G), tel que tout H_i est d'intersection réduites à $\{1\}$ avec le produit des H_j qui le précède dans l'ordre total sur I.

Alors G est isomorphe au produit direct (à ne pas confondre avec le produit) des H_i.

En effet

On défini $\varphi : \otimes_{i \in I} H_i \to G$ par $\varphi((h_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} h_i$

(où seul un nombre fini de h_i sont différent du neutre).

C'est évidemment un morphisme.

La condition $G = \prod_{i \in I} H_i$ assure la surjectivité et la condition des intersections réduites à $\{1\}$ assure l'injectivité.

C'est donc un morphisme bijectif, et c'est donc un isomorphisme.

Le théorème est donc bien vrai.

Théorème 5

Soit G groupe abélien (fini ou infini).

Sous cette seule hypothèse, G est produit $\prod_{i \in I} H_i$, où I est muni d'un ordre total,

tels que tous les H_i sont élémentaires maximaux, et tels que chaque H_i est d'intersection réduite à $\{1\}$ avec le produit des H_j qui le précède dans l'ordre total sur I.

En effet

On munit les produits $\prod_{i\in I} H_i$, où les I sont munis d'un ordre total, et où les H_i sont élémentaires maximaux dans G et d'intersection réduite à $\{1\}$ avec les H_j qui lui sont inférieur dans l'ordre sur I, de la relation d'ordre:

$\prod_{i\in I} H_i \leq \prod_{j\in J} R_j$ si et seulement si

($I \subset J$ avec J ne contenant que des éléments plus grands que ceux de I, et $\forall i \in I$, $H_i = R_i$).

(on définit un produit infini comme l'ensemble des produits parmis un nombre fini d'éléments dans les sous-groupes formant le produit).

L'hypothèse du lemme de Zorn est facile à vérifier ce qui permet de dire qu'il y a un produit maximal. On le note $\prod_{i\in I} H_i$.

Si ce produit n'était G tout entier, le théorème 2 assure l'existence d'un groupe R monogène tel que R est d'intersection $\{1\}$ avec le produit, avec R non réduit à $\{1\}$.

Le théorème 1 nous dit alors qu'on peut en trouver un maximal (on le note R).

Du coup $R.\prod_{i\in I} H_i$ est un produit strictement plus grand que le précédent pour la relation d'ordre définie.

Cela contredit la maximalité de ce dernier, et on conclut donc qu'on fait le produit $\prod_{i\in I} H_i$ est bien G tout entier.

Théorème 6 (de structure)

Soit G groupe abélien (fini ou infini).

Alors sous cette seule hypothèse, G est produit direct de groupes H_i élémentaires.

En effet

C'est la conséquence immédiate des théorèmes 4 et 5.

Partie 3: Qui suis-je

Je possède un Master de Mathématiques générales, obtenu en France où je suis né et habite.

Eli Halylaurin n'est pas mon vrai nom. C'est un nom de plûme que j'utilise pour me protéger vis à vis d'éventuelles attaques que mes documents pourraient soulevées.

Pour moi, les lieux de publication devraient ouvrir la possibilité de partager les idées, de soumettre des démonstrations, sans avoir peur d'être jugé.

Malheureusement, j'ai vécu suffisamment pour me rendre compte que c'est souvent devenu un lieu où les personnes sont injustement critiquées et psychologiquement persécutées.

Je ne nie pas l'éventualité que j'ai pu faire une erreur dans ce document. Mais, si tel était le cas, je ne l'aurais pas voulu et qu'on me critique pour cela ou pour une autre raison serait injuste, d'où la raison pour laquelle je ne divulguerai mon vrai nom que si nécéssaire.

Toutefois, le lecteur désireux de me contacter, si la raison n'est pas malintentionnée, pourra utiliser l'adresse mail ci-dessous.

If you need to contact me: eli.halylaurin@sfr.fr