

Естественные гёделевы определения неполноты

Ватолин Дм.

Даны определения «полноты» и «неполноты» для математических теорий, отличные от гёделевых. Исключены противоречия гёделевых доводов. Найдены теоремы, расставляющие всё на свои места.

Пусть «Д ψ » означает «доказуема формула ψ ». Для произвольной ψ формулу « $\psi \Leftrightarrow \neg \text{Д}\psi$ » назовём «гёделевым отношением».

Заметим, если α и β – формулы, то формула « $\neg(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ » равносильна формуле « $\alpha \Leftrightarrow \neg\beta$ ». Действительно, « $\alpha \Leftrightarrow \beta$ » равносильно « $(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ ». Формула « $\neg(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ » равносильна формуле « $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\alpha \vee \beta)$ », т.е. « $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\neg\beta \vee \alpha)$ », т.е. « $(\alpha \Rightarrow \neg\beta) \wedge (\neg\beta \Rightarrow \alpha)$ », т.е. « $\alpha \Leftrightarrow \neg\beta$ ».

Когда S – теория, «требованием гёделевой полноты» для S назовём следующее естественное требование: «истинность каждой формулы теории S равносильна доказуемости такой формулы», т.е. « $\forall \psi \in S (\psi \Leftrightarrow \text{Д}\psi)$ ». Принадлежность формулы к теории предполагается определяемой подходящим способом. Отрицание «требования гёделевой полноты» назовём «требованием гёделевой неполноты». По замечанию, последнее требование эквивалентно формуле « $\exists \psi \in S (\psi \Leftrightarrow \neg \text{Д}\psi)$ ». Иными словами, «гёделева неполнота» теории S равносильна существованию в этой теории формулы, для которой верно гёделёво отношение.

Определение именно гёделевым способом той формулы ϕ , для которой верно гёделёво отношение, влечёт противоречие, т.к. тогда формула « $\phi \Leftrightarrow \neg \text{Д}\phi$ » выводима в такой «гёделевой арифметике», обозначенной здесь GA , где можно говорить о доказуемости собственных формул. В гёделевых доводах недопустимо смешаны «гёделева метатеория» и «гёделева арифметика», трактуемая средствами метатеории, см. [1]. При каких обстоятельствах в $S = GA$ можно говорить о доказуемости формул $\in S$, и выводить средствами S их доказуемость или недоказуемость? Найдётся ли «очевидно пропущенное для простых смертных» место гёделевых рассуждений, влекущее невозможность вывода гёделёва отношения в S ?

Пусть $Y(m, n)$ – гёделев номер для такой формулы α , которая получена подстановкой натурального числа m вместо свободной переменной формулы β , когда β зависит от одной свободной переменной и имеет гёделев номер n . «Гёделев номер формулы ψ » для произвольной $\psi \in S$ обозначим « $\Gamma(\psi)$ ». Если функция Y – элемент теории S , то функция Γ должна быть элементом S , поскольку Y говорит о гёделевых номерах. Подстановки, использованные для

построения формулы ϕ и вывода формулы « $\phi \Leftrightarrow \neg D\phi$ », тогда проводимы в теории S . Действительно, пусть « $\Delta(m)$ » означает «доказуема формула с гёделевым номером m ». Тогда « $\Delta(\Gamma(\psi))$ » равносильно « $D(\psi)$ ». Определим

$$\phi \Leftrightarrow \neg \Delta(Y(L, L)), \text{ где } L = \Gamma(\neg \Delta(Y(t, t))).$$

Тогда,

$$\Gamma(\neg \Delta(Y(L, L))) = Y(L, L) = \Gamma(\phi).$$

Отсюда верно « $\phi \Leftrightarrow \neg D\phi$ », т.к.

$$\neg \phi \Leftrightarrow \Delta(Y(L, L)) \Leftrightarrow D\phi.$$

Если формула « $\phi \Leftrightarrow \neg D\phi$ » выведена в S , то она противоречит доказуемой в S теореме «если доказано, то истинно». Для того, чтобы формула « $\phi \Leftrightarrow \neg D\phi$ » была невыводимой в S и выводимой вне S , необходимо исключить функции Y и Γ из элементов $\in S$. Тогда, переменное значение $Y(t, t)$ подставлено вместо переменной m в формулу « $\neg \Delta(m)$ » средствами метатеории, но не средствами S . И тогда, если повторить приведённый вывод, формуле « $\neg \Delta(Y(t, t))$ » снова приписана принадлежность к S , хотя бы из-за того, что формуле приписан гёделев номер, и только формулы теории S имеют гёделевы номера. Итак допустим, подстановкой, не входящей в средства $\in S$, получаема формула, которой по неявному допущению Гёделя приписана принадлежность к S . На каком основании даётся предписание? Для примера, можно найти такую функцию $f \notin S$, что если ψ – формула $\in S$ от одной свободной переменной, то формула $\psi(f(t))$ не принадлежит S , т.к. истинностные значения $\psi(f(t))$ при конкретных t не совпадут с истинностными значениями какой бы то ни было формулы $\chi(t) \in S$, выстраиваемой по обычным логическим правилам. Но для вывода $\psi(f(t)) \notin S$ уже достаточно того, что $\psi(f(t))$ получена не по правилам построения формул в S – не через подстановки теории S , не через другие средства $\in S$. В итоге, правильного вывода формулы « $\phi \Leftrightarrow \neg D\phi$ » средствами метатеории у Гёделя нет.

Заметим и другой факт, из которого видна бессмысленность «гёделева доказательства»: В арифметике, «построенной канонически», отсутствуют утверждения о доказуемости (и поэтому, о недоказуемости) формул. Если S , наряду с обычными арифметическими формулами, содержит утверждение χ о недоказуемости своей формулы, то χ заведомо не входит в каноническую арифметику. Т.е. напрямую доказуемо, что в канонической арифметике нет формулы, говорящей о собственной недоказуемости. Но тогда,

недоказуемость средствами S формулы χ не влечёт неполноту канонической арифметики, даже если χ построена удачно.

Неужели в произвольной теории S , где можно утверждать или отрицать доказуемость формул, нельзя непротиворечиво доказывать недоказуемость утверждений S ? «Гёделев парадокс» будто бы «доказывает» неустранимость противоречий. На самом же деле противоречия исчезают при правильном понимании порядка доказывания формул.

По одной известной конструктивистской идее, «истинные» суждения тождественны доказуемым суждениям, «ложные» – отрицаниям доказуемых суждений. Суждение не «истинно» и не «ложно», если оно и его отрицание не доказуемы. Нет никаких заведомых критериев, кроме средств теории S , по которым суждению $U \in S$ приписывается «истинность». Можно при помощи средств другой теории T уточнить смысл утверждений из теории S так, что недоказуемое в S утверждение U станет доказуемым в T , но нет гарантии, что не найдётся другое уточнение, где доказуемо $\neg U$. Подобное имеет место в физике. Если не определен способ измерения, по которому выносится суждение U , то U не может быть «истинным» или «ложным». Мало того, суждение U или $\neg U$ «об одном и том же физическом предмете» зависит от способа измерения (от субъекта). К примеру, суждение об «одновременности событий» зависит от способа измерения.

В конструктивной трактовке формула $D(\alpha \vee \beta)$ выражает тот факт, что суждение $\alpha \vee \beta$ «истинно», но каждое из суждений α и β может быть ни «истинным», ни «ложным», т.е. могут отсутствовать доказательства формул α и β (Сравните с суждениями квантовой механики о пролёте частицы через щель α или β).

Если требование « $\forall \psi \in S (D\psi \Rightarrow \psi)$ » верно для теории S (доказуемое средствами или самой S , или средствами более сильной, чем S , теории), то S назовём «непатологичной». Если непатологичность теории S доказуема в самой S , то S назовём «последовательной».

«Требованием тривиальной полноты» назовём условие: « $\forall \psi \in S (\psi \Rightarrow D\psi)$ », или иначе, « $\forall \psi \in S (\neg \psi \vee D\psi)$ ». Отрицание требования тривиальной полноты, формулу « $\exists \psi \in S (\psi \wedge \neg D\psi)$ », назовём «требованием тривиальной неполноты». Т.е. последнее означает, что «в теории найдётся истинная и недоказуемая формула». Доказать в последовательной и непротиворечивой теории в отношении конкретной формулы ψ такой теории требование « $\psi \wedge$

$\neg D\psi$ » невозможно, так как предположение о доказуемости формулы $\langle \psi \wedge \neg D\psi \rangle$, т.е. о верности $\langle D(\psi \wedge \neg D\psi) \rangle$, немедленно ведёт к противоречию.

Пусть мы надеемся средствами последовательной теории S доказать неполноту S через предъявление подходящей формулы. Т.е. надеемся найти какой-нибудь способ, входящий в средства S , который определит формулу $\in S$, удовлетворяющую гёделеву отношению. Если бы такой способ существовал, из него можно было бы извлечь так же противоречие. Действительно, требование гёделевой полноты для S эквивалентно формуле $\langle \forall \psi \in S ((D\psi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow D\psi)) \rangle$. Гёделева полнота теории S , поэтому, эквивалентна тривиальной полноте и непатологичности S . Тогда, гёделева неполнота S эквивалентна тому, что S тривиально неполна или патологична. Решительно не будем пользоваться патологичными теориями. Если теория S непатологична, гёделева неполнота S эквивалентна тривиальной неполноте S . Для конкретной же формулы $\psi \in S$ формула $\langle \psi \wedge \neg D\psi \rangle$ тогда эквивалентна гёделеву отношению. В итоге, средствами какой бы то ни было последовательной и непротиворечивой теории S , включающей все утверждения о доказуемости собственных формул, через построение подходящей формулы, невозможно доказать «гёделеву неполноту» теории S , т.е. ни для какой формулы $\in S$ невозможно доказать средствами S гёделево отношение.

Заметим, во-первых, в нашем выводе ψ – произвольная рядовая формула теории, т.е. не «гёделева формула», для которой требуется патологичное определение, гёделева нумерация и т.п. Во-вторых, именно средствами S доказуемо, что какова бы ни была $\psi \in S$, формула $\langle \psi \wedge \neg D\psi \rangle$ недоказуема в S . В третьих, даже если метод, входящий в средства S , именуем «гёделевым», он не может построить конкретную истинную и недоказуемую формулу $\phi \in S$. Найти же истинную и недоказуемую формулу $\in S$ даже средствами метатеории, так же трудно, как найти истинность гёделевого отношения для такой формулы. В четвёртых, наше утверждение верно для всех теорий, вне зависимости от того, включают ли они арифметику или нет. Подобное утверждение тем более верно для непатологичных теорий.

Ошибка в предыдущем формулировании найденной теоремы состояла в не различении «неконструктивного» ($D\exists\psi \dots$) и «конструктивного» ($\exists\psi D \dots$) доказательства «гёделевой неполноты», т.е. в последнем случае, через предъявление подходящей и конкретной формулы.

Вместе с тем, уже сам перевод мысли «об интуитивной неполноте» в конкретное изречение «о гёделевой неполноте», вербализация такой мысли, приводит к тому, что «интуитивная неполнота» не совпадает с «гёделевой». Чтобы обосновать последнее, потребуем «тривиальной конструктивной полноты» формулой « $\forall \psi \in S (D\neg\psi \vee D\psi)$ ». Формула « $\forall \psi \in S (\neg D\psi \vee \neg D\neg\psi)$ » пусть говорит о «тривиальной конструктивной непротиворечивости» теории. Утверждение « $\forall \psi \in S (D\psi \Leftrightarrow \neg D\neg\psi)$ » подобно утверждению о «гёделевой полноте» и равносильно формуле «теория S тривиально конструктивно полна и непротиворечива». Отрицание тривиальной конструктивной полноты – формула « $\exists \psi \in S (\neg D\neg\psi \wedge \neg D\psi)$ » – определяет «тривиальную конструктивную неполноту» S . Требование « $\exists \psi \in S (D\psi \Leftrightarrow D\neg\psi)$ » подобно «требованию гёделевой неполноты» и равносильно формуле « S тривиально конструктивно неполна или противоречива». Формула « $D\psi \Leftrightarrow D\neg\psi$ » влечёт недоказуемость формул ψ и $\neg\psi$ в последовательной и непротиворечивой теории.

Найденная теорема «о невозможности доказать гёделеву неполноту через предъявление формулы» не налагает «фатальных ограничений» на доказательства полноты или неполноты теории S средствами самой S . В самом деле, если в S найдено доказательство формулы « $\neg D\neg\chi \wedge \neg D\chi$ » в отношении конкретной χ , и тем самым доказана «конструктивная неполнота» S , то прямое противоречие отсутствует, поскольку, остаются недоказанными формулы « $\chi \wedge \neg D\chi$ » и « $\neg\chi \wedge \neg D\neg\chi$ » (т.е. остаётся верным найденный в S вывод о недоказуемости в S всякой такой формулы). Т.е. по-прежнему не известно, не доказуемо в S , для какой из двух формул χ или $\neg\chi$ оказывается верным гёделевое отношение. Вместо самой формулы χ тогда доказана всего лишь недоказуемость χ и недоказуемость $\neg\chi$.

Отметим, средствами S всё же можно доказать «гёделеву неполноту» теории S , но без нахождения формулы, подходящей под требование «быть истинной и недоказуемой». Поскольку по заключениям двузначной логики доказуемо, что одна из двух недоказуемых формул должна быть верна, но не известно какая.

Пусть гипотетическая теория S содержит все утверждения о доказуемости и недоказуемости собственных формул, и для произвольной формулы $\psi \in S$ выполнена аксиома (аналог закона исключённого третьего):

$$D\psi \vee D\neg\psi \vee (D\neg D\psi \wedge D\neg D\neg\psi)$$

Для такой теории усилим конструктивные критерии полноты-неполноты:

«требованием доказуемой неполноты»: $D(\exists \psi \in S D(\neg D\neg\psi \wedge \neg D\psi))$

«требованием доказуемой полноты»: $D(\forall \psi \in S (D\neg\psi \vee D\psi))$

В последовательной теории формула $D(D\alpha \vee D\beta)$ эквивалентна формуле $D\alpha \vee D\beta$, поскольку, если верна последняя, то найдётся доказательство либо для α , либо для β , а значит найдётся доказательство для формулы $D\alpha \vee D\beta$, т.е. формула $D\alpha \vee D\beta$ не может быть не доказуемой, если доказуема α или доказуема β . Подобное правило для квантора существования действует, когда такой интерпретируется как бесконечная дизъюнкция. Тем самым, в требованиях возможно снятие символа доказуемости перед квантором существования.

Из-за определений, отличных от гёделевых, можно снова поставить гильбертов вопрос: Найдётся ли эффективный метод проверки наличия или отсутствия противоречия в теории, выводимой из конечного списка аксиом? Неужели нельзя обнаружить непротиворечивость или противоречивость формулы, составленной из конечного множества знаков и заключающей всю сложность теории? Нахождение метода – достойная задача для дерзких умов.

Интересные аргументы выдвинул Бессонов, см. [2], заметив, что «гёделева непротиворечивость» произвольной теории S изначально была определена формулой «существует недоказуемая формула $\in S$ ». Это гёделево определение обозначим η . Для каждой формулы $\lambda \in S$, для которой $\neg\lambda$ доказуема в S , в последовательной S «методом от противного» выводимо, что « λ недоказуема». В ином случае, S нелепа. Получив вывод о недоказуемости λ , мы находим формулу, требуемую гёделевым определением η , но не получаем ни грамма знания о действительной непротиворечивости теории. Т.е. гёделево определение для достаточно развитой теории S и бесполезно, и противоречит, так называемой, «второй теореме о неполноте» – доказав в S недоказуемость заведомо ложной формулы λ , мы «доказали» в самой S «непротиворечивость» S . Если S – теория первого порядка, то допущение, что утверждение о доказуемости может войти только в теорию высшего порядка, влечёт, что формула η не может быть средством $\in S$. Тогда «вторая теорема о неполноте» становится тривиальной, т.к. невозможно доказать формулу, отсутствующую в теории. Но η есть именно использованное в «гёделево теореме» средство $\in S$. Из другого известного определения, где «гёделева непротиворечивость» приравнена к «недоказуемости тождественно ложной формулы $\in S$ », извлекаем подобное же. В итоге, в последовательной теории

доказуемо отрицание «второй теоремы о неполноте» в отношении именно гёделевых определений «непротиворечивости».

Непротиворечивость теории всегда неявно предположена, когда в рассуждении применено правило необходимого, но и неконструктивного перехода от « $D\psi$ » к « $\neg D\neg\psi$ ». Формула « $\neg D\neg\psi$ » по-настоящему, безусловно (без предположений о непротиворечивости S) будет доказана только тогда, когда конструктивно, детально, безусловно проверено отсутствие цепочек вывода формулы $\neg\psi$. Т.е. для заключения « $\neg D\neg\psi$ » не достаточно вывода только формулы ψ . Возможно, что метод проверки непротиворечивости выведет за рамки всего лишь привычной схемы дедукции.

Не менее интересен и другой взгляд на конструктивистский постулат об отождествлении истинности и доказуемости формул. Получаем, что постулат можно выразить в точности формулой « $\forall\psi \in S (\psi \Leftrightarrow D\psi)$ », которая приобретает теперь иную трактовку, не связанную с полнотой. При каких условиях, какой ценой постулат « $\forall\psi \in S (\psi \Leftrightarrow D\psi)$ » может быть верен в неполной теории? По-видимому, только при отказе от двузначной логики.

Какие ещё формулы, о которых мы думаем, что они «в точности выражают нашу мысль», могут быть подвергнуты естественной трактовке так, что они отразят «другую мысль»? Могут ли быть разрешены трудные задачи и сняты парадоксы только потому, что формулы, отражающие наши прежние мысли, будут заменены на другие формулы? В логических и в других исследованиях, по-видимому, необходим не только вопрос «откуда взят вывод?», но и вопрос «что вывод значит?». Полезно смотреть на предмет исследования с разных точек зрения, добиваясь всестороннего взгляда.

Литература

1. Gödel. K. «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme», *Monatsh für Math. U. Phys.*, XXXVIII (1931), 173-198.
2. Бессонов А.В. «О двух неверных догмах, связанных со второй теоремой Гёделя о неполноте арифметики», *журн. «Философия Науки», №4(63), 2014, 12-31.*