

Branislav
Pavlović

GRAVITOELEKTROMAGNETIZAM



Gravitoelektromagnetizam

Branislav Pavlović

Gravitoelektromagnetizam

Copyright©2016, Branislav Pavlović

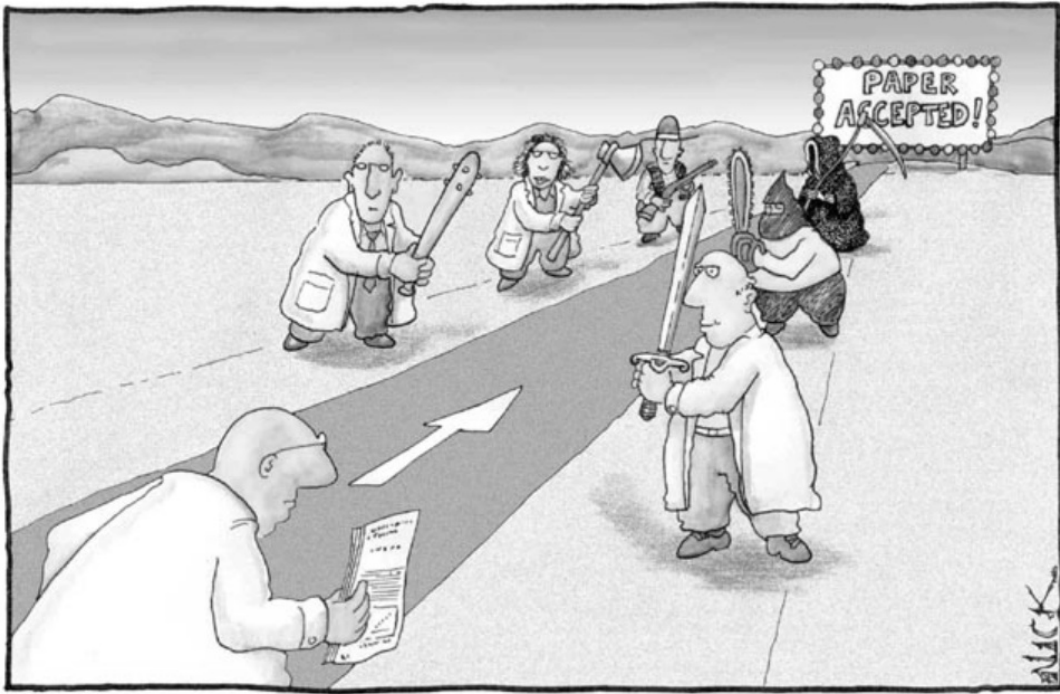
First Edition, August 2016

ISBN: 978-1-365-33550-1

All rights reserved

This work is under Standard Copyright Licence

Published by Lulu.com



Naziv grafike:

Srdačan prijem "akademske" zajednice za nove ideje

SADRŽAJ

1. Nastanak i razvoj elektrodinamike. Maksvelove jednačine.....	6
2. Jednačine gravitoelektromagnetizma. Osnovne teoreme.....	9
3. Dinamika veštačkih Zemljinih satelita. Gravitomagnetno polje ravnomerno rotirajuće lopte....	34
4. Efekti retardacije za slučaj kretanje tela po kružnim (eliptičnim) orbitama.....	49
5. Tomsonova precesija.....	62
6. Jednačina dinamike veštačkih Zemljinih satelita sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Keplerovi orbitalni elementi.....	70
7. Keplerov problem.....	92
8. Precesija perihela Merkura.....	101
9. Eksperiment Gravity Probe B.....	126
10. Problem dva tela.....	147
11. Gravitacioni talasi.....	166
12. Povećanje astronomske jedinice.....	322
<i>Prilog 1 – Potvrda da je autorsko delo Gravitoelektromagnetizam deponovano i uneto u evidenciju deponovanih autorskih dela i predmeta srodnih prava u Zavodu za intelektualnu svojinu (Beograd, Srbija), dana 26.07.2016. godine</i>	<i>337</i>
<i>Literatura.....</i>	<i>338</i>

1. Nastanak i razvoj elektrodinamike. Maksvelove jednačine

Gravitoelektromagnetizam je teorija gravitacije koja se u delu dinamičkih efekata uglavnom zasniva na formalnoj analogiji sa elektrodinamikom. Elektrodinamika je oblast teorijske fizike koja proučava elektromagnetne pojave. To je konzistentna teorija koja obezbeđuje kompletan opis elektromagnetnih pojava. U granicama svoje primenljivosti daje izuzetnu preciznost. Elektrodinamika ima veliku praktičnu primenu. Ona predstavlja teorijsku osnovu elektrotehnike i savremenih električnih i komunikacionih tehnologija.

Elektrodinamika se postepeno razvijala. Još u antičko doba bile su poznate neke elektrostatičke pojave. Generacije naučnika i inženjera uložile su velike napore da se ovlada tajnama elektriciteta i magnetizma. Ovom prilikom ja ne mogu da prezentujem celokupni istorijski razvoj elektrodinamike, jer bi to zahtevalo posebnu studiju. Teorija elektromagnetizma je dobila svoju završnu formu u drugoj polovini 19 veka, kada je Maksvel (James Clerk Maxwell) objavio svoje radove. On je izvršio sistematizaciju dotadašnjeg znanja o elektromagnetizmu, ali je dao i matematički opis elektromagnetnih pojava. Pojave elektriciteta i magnetizma smatrane su međusobno nepovezanim, i proučavane su kao posebne oblasti. Električne i magnetne pojave Maksvel je povezo u jedinstvenu neraskidivu celinu. Medjutim unifikacija fizičkih pojava tu nije bila završena, jer je uspeo da elektromagnetizam poveže sa optikom u jednu konzistentnu teoriju. Maksvelova teorija se smatra prvom unifikacijom u fizici. Maksvel je na osnovu svoje teorije predvideo postojanje elektromagnetnih talasa, i izračunao konkretnu vrednost brzine propagacije tih talasa. Ova teorijski određena vrednost praktično se nije razlikovala od eksperimentalno određene brzine svetlosti u vakuumu. Maksvel je smatrao da ova podudarnost nije slučajna, odnosno da svetlost mora biti elektromagnetni talas. Optika je postala deo elektrodinamike.

U svojim radovima Maksvel je koristio predhodno stečena znanja, ali i radove svojih savremenika. Elektromagnetizam je postao predmet interesovanja mnogih eminentnih naučnika devetnaestog stoleća. Ovde ću prvenstveno istaći naučnike čiji su radovi i otkrića direktno uticali na Maksvelov rad.

U oblasti elektrostatike i magnetostatike moramo spomenute radove Kulona (Charles-Augustin de Coulomb), Poasona (Siméon Denis Poisson) i Gausa (Carl Friedrich Gauss). Kulon je koristio svoju torzionu vagu i dokazao da je elektrostatička sila proporcionalna $1/r^2$.

Nagli progres u istraživanjima magnetostatike je započeo kada su proizvedeni prvi uredjaji koji su mogli da u dužem vremenskom intervalu obezbeđuju konstantan napon, odnosno konstantnu struju. Ersted (Hans Christian Ørsted) je otkrio delovanje električne struje na magnetnu iglu kompasa. Njegovo otkriće se brzo proširilo po Evropi i izazvalo je slična istraživanja. Dalji napredak u toj oblasti uradio je Amper (André-Marie Ampère). Moramo spomenuti i istraživanja koja su nezavisno jedan od drugog izvršili naučnici Bio (Jean-Baptiste Biot) i Savar (Félix Savart).

Veliki uticaj na Maksvela imali su eksperimentalni rezultati i ideje Majkla Faradeja (Michael Faraday). Faradej je otkrio pojavu elektromagnetne indukcije. Od njega potiče koncept polja i linije sile polja. Da bi smo ilustrovali te koncepte zamislimo jedno tačkasto naelektrisanje. U prostoru oko njega postoji električno polje. Ako bi u to polje uneli neko naelektrisano telo (tzv. probno telo) ono bi osetilo dejstvo elektrostatičke sile. Za opisivanje tog polja koristi se vektorska veličina – jačina električnog polja \vec{E} . U svakoj tački polja možemo uvesti vektor \vec{E} , i na taj način mi smo kvantitativno opisali električno polje.

Uvedene su i linije sile električnog polja, i one nam mogu poslužiti za vizuelizaciju polja. Odaberimo jednu tačku u električnom polju. Toj tački možemo pridružiti vektor jačine električnog polja. Kroz tu tačku neka prolazi i jedna linija sile električnog polja. Između ova dva pojma može se

uspostaviti veza i to na sledeći način. Tangenta na liniju sile polja poklapa se sa pravcem vektora jačine električnog polja.

Možemo uzeti u razmatranje i električni dipol. To je sistem koji se sastoji od dva naelektrisana tela koja se nalaze na međusobnoj udaljenosti d . Jedno telo je pozitivno naelektrisano, a drugo negativno. Uzima se da su njihove količine naelektrisanja iste po apsolutnoj vrednosti. Linije sile polja počinju (izviru) iz pozitivnog naelektrisanja, a završavaju se (uviru) na negativnom naelektrisanju.

Naravno ovi koncepti se koriste i za opisivanje magnetnog polja, sa tom razlikom što su linije sile magnetnog polja zatvorene linije. U prostoru oko provodnika, kroz koji protiče struja konstantnog intenziteta formiraće se magnetno polje. Ja ću uzeti primer veoma dugog pravolinijskog provodnika. Za opisivanje magnetnog polja koristi se vektorska veličina – jačina magnetnog polja \vec{B} . U slučaju ovog pravolinijskog provodnika linije sile magnetnog polja su koncentrične kružnice. Centar tih kružnica se nalazi u provodniku, a kružnice pripadaju ravni koja je normalna na provodnik.

Faradejev koncept polja i linije sile polja imao je veliki uticaj na Maksvela. Maksvel je između ostalog postavio sebi zadatak da kreira matematički opis Faradejeve teorije. Prema Maksvelovom učenju naelektrisane čestice su izvor elektromagnetnog polja. Naelektrisane čestice se mogu okarakterisati gustinama naelektrisanja i struje ρ i \vec{j} koje su povezane jednačinom kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

Maksvel je prihvatio Faradejevu ideju o polju, i uveo je u svoje jednačine jačinu električnog polja \vec{E} i jačinu magnetnog polja \vec{B} . Elektromagnetno polje koje se opisuje veličinama \vec{E} i \vec{B} je generisano naelektrisanjem. Maksvelove jednačine imaju najjednostavniji oblik za elektromagnetno polje u vakuumu i one glase

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Veličina ϵ_0 naziva se dielektrična propustljivost vakuuma, a μ_0 je magnetna propustljivost vakuuma. Ove veličine povezane su sa brzinom svetlosti u vakuumu sledećom jednačinom

$$\epsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Posmatranjem sistema jednačina (1.1-4) može se zapaziti da prva jednačina postoji u elektrostatici, a druga u magnetostatici. Izvršena je generalizacija tih jednačina, odnosno te jednačine važe i za slučaj vremenski promenljivih polja.

Jednačina (1.1) predstavlja diferencijalnu formu Gausove teoreme iz elektrostatičke, a jednačina (1.2) predstavlja zakonitost magnetostatike u diferencijalnoj formi.

Matematička forma Faradejevog zakona elektromagnetne indukcije data je jednačinom (1.3).

U jednačini (1.4) zapažamo odstupanje od Amperove teoreme magnetostatike

$$\int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

, koja se može izraziti i u diferencijalnoj formi

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Maksvel je uveo dopunski član $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ koji je nazvao struja pomeraja. U vreme nastanka teorije nije bilo nikakvih eksperimentalnih dokaza koji bi potvrdili egzistenciju ove struje, i zbog toga je njegova teorija bila napadana. Bez obzira što pretpostavka o postojanju struje pomeraja u to vreme nije mogla biti neposredno proverena, Maksvel je smatrao da uvođenje struje pomeraja otklanja neke konkretne teorijske protivrečnosti u njegovoj teoriji. Uvođenje struje pomeraja se zasniva na njegovom uverenju da postoji potpuna simetričnost između električnih i magnetnih pojava.

Tu simetričnost možemo ilustrovati na sledeći način. U slučaju elektromagnetne indukcije imamo da usled promene magnetnog polja nastaje električno polje. Ako u takvo promenljivo magnetno polje unesemo provodnu (metalnu) konturu, na elektrone u provodniku delovaće električno polje, oni će početi da se usmereno kreću, i mi registrujemo električnu struju. Promenljivo magnetno polje je izazvalo nastanak električnog polja, koje postoji nezavisno od konture. Kontura nam je samo omogućila da indirektno preko postojanja električne struje konstatujemo da postoji električno polje.

Istakao sam da je Maksvel verovao u simetričnost između električnih i magnetnih pojava. U skladu sa tim treba očekivati da promenljivo električno polje stvara magnetno polje. Po Maksvelu magnetno polje može nastati ne samo usled kretanja naelektrisanih čestica (električne struje), već i usled promena električnog polja.

U vreme nastanka Maksvelove teorije nije bilo nikakvih eksperimentalnih dokaza koji bi potvrdili egzistenciju struje pomeraja. Takav eksperimentalni dokaz došao je tek kasnije. Korišćeno je kolo naizmenične struje u kojem se nalazio kondenzator. Između pločica kondenzatora nema nosioca naelektrisanja. Gustina provodne (kondukcione) struje je jednaka nuli, pa jednačina (1.4) dobija formu

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

U prostoru između pločica kondenzatora postoji električno polje čiji se intenzitet i smer periodično menjaju, jer se stalno ponavlja proces punjenja i pražnjenja kondenzatora. U prostoru oko kondenzatora postoji magnetno polje čije su linije sile kružnice u ravnima normalnim na pravac linija sile električnog polja. U ovom slučaju magnetno polje nije izazvano kondukcijom strujom, već strujom pomeraja.

Za opisivanje elektromagnetnog polja koristi se skup jednačina (1.1-4), kome dodajemo izraz za Lorencovu silu

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.5)$$

, q je naelektrisanje čestice, a \vec{v} je njena brzina.

Sistem jednačina (1.1-4) nosi naziv po Maksvelu, međutim ovde treba napraviti jednu digresiju. Originalni skup Maksvelovih jednačina sastojao se od dvadeset jednačina. Zahvaljujući prvenstveno radovima Olivera Hevisajda (Oliver Heaviside) i Henrika Herca (Heinrich Rudolf Hertz) taj skup od dvadeset jednačina je pojednostavljen na četiri jednačine koje mi i danas koristimo. Maksvelove originalne jednačine su uključivale i jačine polja i potencijale, ali ih je Hevisajd prestrukturirao na takav način da u njima figurišu samo jačine električnog i magnetnog polja. On je razvio posebnu matematičku disciplinu koju je primenjivao na jednačine.

Herc je takođe izveo pojednostavljenu verziju Maksvelovih jednačina. Dao je veliki doprinos Maksvelovoj teoriji i sa eksperimentalnog stanovišta. On je uspeo da proizvede i proučava radio talase koristeći relativno jednostavne električne uređaje. Utvrdio je da ti novootkriveni elektromagnetni talasi mogu da se reflektuju. Takođe je demonstrirao efekte difrakcije i interferencije, a stvorio je i stojeće talase. Hercovi eksperimenti potvrdili su zaključke i predstave o elektromagnetnim talasima, do kojih je Maksvel došao na osnovu svoje teorije.

2. Jednačine gravitoelektromagnetizma. Osnovne teoreme

Ideja da se formuliše teorija gravitacije koja će po svojoj formi odgovarati jednačinama elektromagnetizma nije nova. Takvu ideju su zastupali pojedini osnivači elektrodinamike. Zaista postoji formalna analogija između Njutnovog zakona gravitacije i Kulonovog zakona. Ispitivane su i druge sličnosti i težilo se ka sveobuhvatnoj teoriji gravitacije. Početni zamah tim istraživanjima dao je upravo Maksvel. On je pokušao da razvije teoriju gravitacije, ali zbog određenih problema oko energije gravitacionog polja, prekinuo je dalja istraživanja.

Hevisajd je nastavio Maksvelov rad i razvio je kompletan skup jednačina. Hevisajdove jednačine ukazivale su na postojanje gravitacionih talasa. Smatrao je da brzina gravitacionih talasa u vakuumu mora biti jednaka brzini svetlosti u vakuumu. Analizirao je i energetske odnose u gravitacionom polju, a uveo je Pointingov vektor za gravitaciono polje. Međutim on nije dalje unapredjivao svoju teoriju gravitacije. Mogući razlog za prestanak bavljenja tom oblašću je nedostatak eksperimentalnih dokaza u oblasti gravitacione fizike.

Formalna analogija između gravitacije i elektromagnetizma proučava se i u okviru opšte teorije relativnosti, odnosno u okviru tzv. linearizovane gravitacije. Linearizovana gravitacija je aproksimacija Ajnštajnovе opšte teorije relativnosti, i primenjuje se za slaba gravitaciona polja. Jednačine linearizovane gravitacije (jednačine linearizovanog polja) dobijene su na osnovu pretpostavke da se prostorno-vremenska metrika malo razlikuje od metrike u prostoru Minkovskog. Linearizovana gravitacija opisuje slabo gravitaciono polje, ali se ono može menjati u toku vremena. U okviru ove aproksimacije dozvoljena je mogućnost da se čestice u gravitacionom polju kreću relativističkim brzinama. Ova aproksimacija omogućuje da se pojednostave mnogi problemi u opštoj teoriji relativnosti. Veoma je značajna i u oblasti gravitacionog zračenja. U slučaju linearizovane gravitacije može se naći opšte rešenje jednačina linearizovanog polja.

Jednačine linearizovanog polja dobijaju se na osnovu Ajnštajnovе jednačine (jednačina (2.5)). Ja ovom prilikom neću prezentovati detaljno izvodjenje jednačina linearizovanog polja. Zadržaću se samo na pojedinim elementima tog izvodjenja. To izvodjenje je prezentovano u radu [1].

Istakao sam da ova aproksimacija važi za slučaj slabog gravitacionog polja. Metrički tenzor se može napisati u sledećem obliku

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Veličina $\eta_{\mu\nu}$ je metrički tenzor prostora Minkovskog. Komponente tenzora $h_{\mu\nu}$ su mnogo manje od jedinice

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.2)$$

Ovaj tenzor možemo smatrati perturbacijom koja je dodata na metrički tenzor prostora Minkovskog. Postoje takvi pristupi u okviru opšte teorije relativnosti, gde se osnovnom metričkom tenzoru dodaje neka perturbacija u tenzorskoj formi. U okviru Solarnog sistema uslov dat jednačinom (2.2) je zaista ispunjen jer važi sledeća relacija

$$|h_{\mu\nu}| \approx \left| \frac{\varphi}{c^2} \right| \leq 10^{-6}$$

Sa φ je označen Njutnov potencijal.

U tekstu je već spomenut metrički tenzor prostora Minkovskog. Matrična reprezentacija tog tenzora glasi

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prostor Minkovskog koristi se u specijalnoj teoriji relativnosti. To je četvorodimenzionalni prostor. Položaj neke tačke opisuje se kovarijantnim ili kontravarijantnim četvorovektorom položaja

$$x^\mu = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Metrički tenzor $\eta_{\mu\nu}$ se koristi za podizanje i spuštanje indeksa tenzora $h_{\mu\nu}$

$$h_\nu^\mu = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} \quad (2.3)$$

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

U jednačini (2.3) sumiranje se vrši po indeksu α , a u jednačini (2.4) po indeksima α i β .

Da bi prezentovali proces dobijanja jednačina linearizovanog polja moramo se podsetiti Ajnštajnovе jednačine

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi\gamma T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

Ričijev tenzor je označen sa $R_{\mu\nu}$, a Ričijev skalar sa R . Tenzor energije-impulsa je $T_{\mu\nu}$, a metrički tenzor je $g_{\mu\nu}$. Jednačina (2.5) može se napisati u obliku

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\gamma T_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

, gde je sa $G_{\mu\nu}$ označen Ajnštajnov tenzor.

U slučaju linearizovane gravitacije metrički tenzor ima formu

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

, a Ajnštajnova jednačina se transformiše i dobija oblik

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi\gamma}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

Ovo su tzv. linearizovane Ajnštajnovе jednačine polja. Operator \square je D'Alamberov operator

$$\square \equiv -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$$

poznat još iz elektrodinamike. Korišćenjem ovog operatora jednačina (2.7) može se napisati u obliku

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi\gamma}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

Postupak dobijanja jednačine (2.7) zove se linearizacija Ajnštajnovе jednačine. Istakao sam da su komponente tenzora $h_{\mu\nu}$ mnogo manje od jedinice. Prilikom procesa linearizacije dobijaju se kvadrati veličine $h_{\mu\nu}$, ili viši stepeni, ali se zbog uslova izraženog jednačinom (2.2) zanemaruju. Mogu se javiti i izvodi veličine $h_{\mu\nu}$. Medjutim njihov proizvod sa $h_{\mu\nu}$, ili sa višim stepenom veličine $h_{\mu\nu}$ takodje se zanemaruje. Ostaju samo linearni članovi, pa je to razlog zašto se ovaj postupak naziva linearizacija.

Prilikom postupka linearizacije pokazuje se da je korisno uvesti veličinu $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$$

Veličina h je trag tenzora $h_{\mu\nu}$ odnosno suma njegovih dijagonalnih elemenata.

Pri dobijanju jednačine (2.7) iskorišćeno je da veličina $\bar{h}_{\mu\nu}$ zadovoljava tzv. Lorencov gejdž (kalibracioni) uslov.

Jednačina (2.7) je jednostavnija za primenu od Ajnštajnovе jednačine. Tenzor $\bar{h}_{\mu\nu}$ je simetričan, odnosno ima deset nezavisnih komponenata. Zahvaljujući Lorencovom gejdž uslovu broj nezavisnih komponenata se od deset svodi na šest. Ako nam je poznat tenzor $T_{\mu\nu}$ rešavanjem jednačine (2.7) određujemo tih šest komponenata.

U slučaju kada supstanca nije prisutna, odnosno kada je ostvaren vakuum komponente tenzora energija-impuls su jednake nuli, pa jednačina (2.7) dobija oblik

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

Rešenje ove jednačine su gravitacioni talasi koji imaju formu ravanskih talasa.

Za moju analizu mnogo je bitniji slučaj kada se rešenja jednačina linearizovanog polja mogu prikazati u obliku koji podseća na Maksvelove jednačine. Da bi to ilustrovao prezentovaću jedan vrlo interesantan primer, koji ima i određene eksperimentalne potvrde. Razmatra se homogeno telo mase M u obliku lopte poluprečnika R koje rotira konstantnom ugaonom brzinom ω , oko ose koja prolazi kroz centar lopte. Koordinatni sistem je uveden tako da se njegova z osa poklapa sa pravcem vektora ugaone brzine. Ovo je ortogonalni sistem, a ose x i y nalaze se u ekvatorijalnoj ravni lopte. Treba napomenuti da je ovo nepokretan koordinatni sistem, odnosno lopta rotira u odnosu na njega. Masa lopte nije velika, formira se slabo gravitaciono polje, i primenjuju se linearizovane jednačine polja. Oko lopte kreće se telo mase m . Uzeću da je njegova masa mnogo manja od mase M . Potrebno je opisati gravitaciono polje van tela mase M , i odrediti silu koja deluje na telo mase m .

Najpre je potrebno napraviti digresiju koja se tiče elektrodinamike. Na osnovu Maksvelovih jednačina možemo odrediti jačinu električnog i magnetnog polja, ako nam je poznata gustina naelektrisanja i struje. Problem se matematički lakše rešava ako se uvedu u analizu skalarni i vektorski potencijal. Kada odredimo skalarni i vektorski potencijal, jačine električnog i magnetnog polja određuju se na osnovu jednačina

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (2.9)$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.10)$$

Prvo ću prezentovati neke formalne analogije linearizovane gravitacije sa elektrodinamikom, a kasnije biće prezentovana i konkretna matematička izračunavanja. Gravitaciono polje se tokom vremena ne menja, pa u skladu sa tim jednačina (2.8) dobija oblik

$$\Delta \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi\gamma}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

Rešavanjem ove jednačine za navedeni primer lopte koja rotira dobijaju se interesantni rezultati. Uveo sam da se oko tela mase M kreće telo mase m . Sila koja deluje na telo mase m sa stanovišta linearizovane gravitacije određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{F}_{otr} = -\frac{\gamma M m}{r^3} \vec{r} + m \vec{v} \times \vec{B}_{otr} \quad (2.12)$$

Korišćen je indeks otr da bi se naznačilo da je ovo rezultat iz opšte teorije relativnosti (linearizovane teorije gravitacije). Položaj i brzina tela mase m određeni su vektorima \vec{r} i \vec{v} .

Njutova komponenta sile određena je jednačinom

$$\vec{F} = -\frac{\gamma M m}{r^3} \vec{r}$$

Jačina gravitacionog polja u klasičnoj teoriji gravitacije definiše se na osnovu jednačine

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$$

, odnosno

$$\vec{G} = -\frac{\gamma M}{r^3} \vec{r} \quad (2.13)$$

Pored Njutnovog člana u jednačini (2.12) javlja se i dopunski član koji predstavlja potpuno novu silu. Takva sila ne postoji u Njutnovoju teoriji gravitacije. Veličinu \vec{B}_{otr} možemo nazvati jačinom gravitomagnetnog polja, i ona se određuje na osnovu jednačine

$$\vec{B}_{otr} = \frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\vec{L} - \frac{3}{r^2} (\vec{r} \cdot \vec{L}) \vec{r} \right] \quad (2.14)$$

Moment impulsa rotirajućeg lopte označen je sa \vec{L} .

Zamenom jednačine (2.14) u jednačinu (2.12) dobija se sila koja deluje na telo mase m sa stanovišta linearizovane gravitacije

$$\vec{F}_{otr} = -\frac{\gamma M m}{r^3} \vec{r} + m \vec{v} \times \frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\vec{L} - \frac{3}{r^2} (\vec{r} \cdot \vec{L}) \vec{r} \right]$$

Da bi smo pokazali formalnu sličnost ovih rezultata sa elektrodinamikom posmatrajmo loptu poluprečnika R koje rotira konstantnom ugaonom brzinom ω . Lopta je homogeno naelektrisana količinom naelektrisanja Q . U prostoru oko lopte formiraće se električno polje, ali pošto lopta rotira formiraće se i magnetno polje. Ako se u ovom elektromagnetnom polju kreće telo koje ima količinu naelektrisanja q na njega će delovati Lorencova sila

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.15)$$

Jačina električnog polja u prostoru van naelektrisane lopte određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{E} = -\frac{Q}{r^3} \vec{r} \quad (2.16)$$

Zamenom jednačine (2.16) u (2.15) dobijamo

$$\vec{F}_L = -\frac{qQ}{r^3} \vec{r} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.17)$$

Upoređivanjem jednačina (2.12) i (2.17) zaista se primećuje formalna analogija. Ova analogija dalje se proširuje tvrdnjom da kada se masa kreće ona u prostoru stvara tzv. gravitomagnetno polje.

Može se uvesti analogija i za električno polje. Upoređivanjem jednačina (2.13) i (2.16) možemo uvesti i tzv. gravitoelektrično polje. Jačina gravitoelektričnog polja određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{E}_{otr} = -\frac{\gamma M}{r^3} \vec{r} \quad (2.18)$$

Korišćenjem ove jednačine, jednačina (2.12) može se napisati u obliku

$$\vec{F}_{otr} = m\vec{E}_{otr} + m\vec{v} \times \vec{B}_{otr} \quad (2.19)$$

Analogija sa jednačinom (2.15) je više nego očigledna. Celokupna predhodna diskusija nas dovodi do zaključka da se po analogiji sa elektrodinamikom (gde se elektromagnetno polje opisuje vektorima \vec{E} i \vec{B}) gravitaciono polje može opisati jačinom gravitoelektričnog polja \vec{E}_{otr} , i jačinom gravitomagnetnog polja \vec{B}_{otr} .

Da ne bi ostali samo na nivou analogija vratimo se jednačini (2.11), i matematički je analizirajmo. Kao i u slučaju dobijanja jednačina linearizovane gravitacije ovom prilikom neću prezentovati celokupni postupak rešavanja jednačine (2.11). Postupak dobijanja rešenja jednačine (2.11) za navedeni primer rotirajuće lopte mase M može se naći u već citiranom radu [1], i radovima [2] i [3]. Zadržaću se samo na pojedinim elementima tog postupka.

Jednačina (2.11) važi za slučaj slabog gravitacionog polja. Pretpostavićemo da su brzine čestica male u odnosu na brzinu svetlosti u vakuumu. Ove pretpostavke dovode do toga da se mnoge komponente tenzora energija-impuls mogu zanemariti. Aproksimativne vrednosti komponentata tenzora $T_{\mu\nu}$ koje preostaju su sledeće

$$T_{00} \approx \rho c^2$$

$$T_{01} \approx -\rho c v_1$$

$$T_{02} \approx -\rho c v_2$$

$$T_{03} \approx -\rho c v_3$$

Veličina ρ je gustina tela mase M . Lopta rotira, a sa v_1 , v_2 i v_3 označene su komponente vektora brzine neke čestice lopte. Na osnovu nenultih komponenata tenzora $T_{\mu\nu}$ dobijene su sledeće jednačine

$$\Delta \bar{h}_{00} = \frac{16\pi\gamma}{c^2} \rho \quad (2.20)$$

$$\Delta \bar{h}_{oi} = -\frac{16\pi\gamma}{c^3} \rho v_i \quad (2.21)$$

Jednačina (2.20) može se napisati u obliku

$$\Delta \left(\frac{c^2 \bar{h}_{00}}{4} \right) = 4\pi\gamma\rho \quad (2.22)$$

U Njutnovoju teoriji gravitacije važi sledeća jednačina

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho \quad (2.23)$$

Veličina φ je skalarni potencijal. Telo mase M je sfernog oblika i potencijal u Njutnovoju teoriji gravitacije određuje se na osnovu jednačine

$$\varphi = -\frac{\gamma M}{r}$$

Upoređivanjem jednačina (2.22) i (2.23) sledi

$$\bar{h}_{00} = \frac{4\varphi}{c^2}$$

Određjena je jedna komponenta tenzora $\bar{h}_{\mu\nu}$.

Pošto je već uočena analogija gravitacije sa elektromagnetizmom uveden je skalarni potencijal

$$\varphi_{otr} = -\frac{\gamma M}{r}$$

U okviru linearizovane gravitacije pokazuje se da jednačina (2.21) omogućuje uvođenje vektorskog potencijala gravitomagnetnog polja

$$\vec{A}_{otr} = \frac{\gamma(\vec{L} \times \vec{r})}{cr^3}$$

Moment impulsa rotirajuće lopte mase M označen je sa \vec{L} .

Po analogiji sa elektrodinamikom određuju se jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja koje stvara telo mase M

$$\vec{E}_{otr} = -grad\varphi_{otr} - \frac{1}{2c} \frac{\partial \vec{A}_{otr}}{\partial t}$$

$$\vec{B}_{otr} = rot\vec{A}_{otr}$$

Potencijali su povezani Lorencovim gejdž uslovom

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_{otr}}{\partial t} + \frac{1}{2} div\vec{A}_{otr} = 0$$

U okviru linearizovane gravitacije može se izvesti kompletan skup jednačina koje podsećaju na Maksvelove jednačine

$$div\vec{E}_{otr} = -4\pi\gamma\rho$$

$$div\vec{B}_{otr} = 0$$

$$rot\vec{E}_{otr} = -\frac{1}{2c} \frac{\partial \vec{B}_{otr}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\left(\frac{1}{2}\vec{B}_{otr}\right) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_{otr}}{\partial t} - \frac{4\pi\gamma}{c} \vec{J}_{otr}$$

Ove jednačine opisuju gravitaciono polje koje stvara telo mase M .

U elektrodinamici postoji gustina struje. Ovde se uvodi masena gustina struje \vec{J}_{otr} i definiše se na sledeći način

$$\vec{J}_{otr} = \rho \vec{v}_l$$

Potrebno je napraviti određene digresije u vezi veličine \vec{v}_l . Lopta stvara gravitaciono polje i nalazi se u stanju kretanja. Uveo sam indeks l da bi naznačio da se vektor \vec{v}_l odnosi na brzinu kretanja masenih elemenata lopte. Ovo indeksiranje bilo je potrebno iz razloga jer sam vektor brzine tela mase m označio sa \vec{v} . Potrebna je još jedna digresija u vezi veličine \vec{v}_l . Lopta se sastoji od čestica. Da ne bi razmatrali pojedinačne čestice prilikom teorijske analize može se uvesti tzv. maseni element. To je izuzetno mala oblast prostora zapremine ΔV u kojoj se nalazi konačan broj čestica. Pošto je mali broj čestica u toj oblasti možemo uzeti da sve čestice imaju istu brzinu \vec{v}_l u toj oblasti. Ova brzina figuriše u izrazu za masenu gustinu struje \vec{J}_{otr} .

Čestica mase m kreće se u gravitacionom polju koje stvara telo mase M . Sa stanovišta opšte teorije relativnosti kretanje tela mase m opisuju se na osnovu geodezijske jednačine

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Primenom linearizovane gravitacije na ovaj konkretan primer pokazano je da jednačina kretanja tela mase m ima oblik

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{E}_{otr} + m \vec{v} \times \vec{B}_{otr}$$

Polazna osnova za dobijanje ove jednačine bila je upravo geodezijska jednačina. Sličnost ove jednačine sa odgovarajućom jednačinom iz elektrodinamike je više nego očigledna.

Nakon ovog uvoda počinjem sa izlaganjem moje teorije gravitacije. Ona se zove gravitoelektromagnetizam. Ja sam već istakao da je gravitoelektromagnetizam teorija gravitacije koja se u delu dinamičkih efekata uglavnom zasniva na formalnoj analogiji sa elektrodinamikom. Teorije zasnovane na takvoj analogiji već postoje, a upravo sam prezentovao jedan takav pristup u okviru opšte teorije relativnosti. Za teorije takvog tipa uglavnom se koristi naziv gravitomagnetizam. Ja svoju teoriju gravitacije zovem gravitoelektromagnetizam, a razlog za korišćenje takvog naziva je sledeći. Dobro je poznato da su elektricitet i magnetizam povezani u neraskidivu celinu, pa iz tog razloga koristim naziv gravitoelektromagnetizam umesto naziva gravitomagnetizam. U daljem tekstu povremeno ću upotrebljavati skraćenicu gem za pojam gravitoelektromagnetizam.

Elektromagnetno polje opisuje se veličinama \vec{E} i \vec{B} i ono je generisano naelektrisanjem. Naelektrisanje opisujemo dvema veličinama, i to gustinom naelektrisanja i gustinom struje, koje su međusobno povezane jednačinom kontinuiteta. Izvor gravitacionog polja je masa, ali smatram da treba uvesti novi kvalitet, a to je da masa koja se kreće stvara dodatno gravitaciono polje.

Kao ilustraciju toga uzmimo primer homogene lopte. Kada lopta miruje ona stvara gravitaciono polje koje se može opisati na osnovu Njutnovog zakona gravitacije. Kada lopta ravnomerno rotira ona pored gravitacionog polja opisanog Njutnovim zakonom gravitacije, stvara dodatno gravitaciono polje. To polje nazvaću gravitomagnetno polje. Takav naziv sugerise elektrodinamika. Ako je lopta naelektrisana i ravnomerno rotira ona pored električnog polja generise i stacionarno magnetno polje. Za opisivanje gravitomagnetnog polja uvešću fizičku veličinu koju ću nazvati jačina gravitomagnetnog polja, i obeležiću je sa \vec{B}_{gem} . Opet je uočljiva analogija sa elektrodinamikom, jer u elektrodinamici se za opisivanje magnetnog polja koristi jačina magnetnog polja \vec{B} .

Teba uvesti i gravitoelektrično polje. Kada lopta miruje ona u prostoru stvara gravitaciono polje koje se može opisati na osnovu Njutnovog zakona gravitacije. To polje možemo nazvati gravitoelektrično polje. Gravitomagnetno polje tada ne postoji. Kada lopta ravnomerno rotira

gravitoelektričnom polju dodajemo i gravitomagnetno polje. Fizička veličina koju ću koristiti za opisivanje gravitoelektričnog polja je jačina gravitoelektričnog polja i obeležiću je sa \vec{E}_{gem} .

U ovom primeru polja se ne menjaju tokom vremena. Smatram da trebamo ići korak dalje i dopustiti mogućnost da se jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja menjaju tokom vremena. U elektrodinamici postojanje promenljivih polja je dozvoljeno. Videli smo da promenljivo električno polje stvara magnetno polje i obratno. Potrebna nam je teorija gravitacije koja će opisati ne samo vremenski nepromenljiva gravitaciona polja (stacionarna), već i nestacionarna gravitaciona polja.

Maksvel je za opisivanje elektromagnetnog polja uveo dve veličine u svoje jednačine, i to jačinu električnog polja \vec{E} i jačinu magnetnog polja \vec{B} . Elektromagnetno polje je generisano naelektrisanjem. Ako nam je poznata gustina naelektrisanja i gustina struje na osnovu Maksvelovih jednačina možemo opisati elektromagnetno polje.

Ja koristim isti pristup u gravitoelektromagnetizmu. Izvor gravitacionog polja je masa. Medjutim pored gustine mase koju ću označiti sa ρ_m , treba uvesti veličinu koja će okarakterisati kretanje mase. U elektrodinamici uvedena je gustina struje. Ona karakteriše kretanje naelektrisanja jer u samoj definiciji gustine struje figuriše brzina naelektrisanja. U gravitoelektromagnetizmu uveću veličinu koja je slična gustini struje u elektrodinamici, i nazvaću je masena gustina struje. Tu veličinu označavam sa \vec{j}_m . U daljem tekstu daću precizne definicije za veličine ρ_m i \vec{j}_m .

Sada ću predstaviti sistem jednačina koje koristim za opisivanje gravitacionog polja. One čine suštinu teorije gravitoelektromagnetizma

$$\operatorname{div}\vec{E}_{gem} = -4\pi\gamma\rho_m \quad (2.24)$$

$$\operatorname{div}\vec{B}_{gem} = 0 \quad (2.25)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_{gem} = -\frac{\partial\vec{B}_{gem}}{\partial t} \quad (2.26)$$

$$\operatorname{rot}\vec{B}_{gem} = -\frac{16\pi\gamma\vec{j}_m}{c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}_{gem}}{\partial t} \quad (2.27)$$

Odmah se uočava izuzetna sličnost sa Maksvelovim jednačinama.

Ovaj sistem jednačina treba dopuniti jednačinom koja je slična jednačini za Lorencovu silu u elektrodinamici

$$\vec{F}_{gem} = m\vec{E}_{gem} + m\vec{v} \times \vec{B}_{gem} \quad (2.28)$$

Gravitaciono polje opisujem pomoću veličina \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} . Kada se čestica mase m kreće nerelativističkim brzinama jednačinu (2.28) možemo napisati u obliku

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{E}_{gem} + m\vec{v} \times \vec{B}_{gem} \quad (2.29)$$

Kada se čestica kreće relativistički njena jednačina kretanja glasi

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right] = m\vec{E}_{gem} + m\vec{v} \times \vec{B}_{gem} \quad (2.30)$$

Oblik jednačina (2.24) i (2.27) može se malo pojednostaviti. U elektrodinamici uvedene su veličine ϵ_0 i μ_0 . Po analogiji sa elektrodinamikom uveću veličinu ϵ_{gem} , i nazvaću je gravitaciona dielektrična propustljivost vakuuma. Nju definišem na sledeći način

$$\epsilon_{gem} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \quad (2.31)$$

U skladu sa ovom definicijom jednačina (2.24) dobija oblik

$$\operatorname{div} \vec{E}_{gem} = \frac{\rho_m}{\varepsilon_{gem}}$$

Uvodim i veličinu μ_{gem} na sledeći način

$$\mu_{gem} = -\frac{16\pi\gamma}{c^2} \quad (2.32)$$

Za ovu veličinu koristim naziv gravitaciona magnetna propustljivost vakuuma. Koristeći jednačinu (2.32) jednačina (2.27) dobija oblik

$$\operatorname{rot} \vec{B}_{gem} = \mu_{gem} \vec{J}_m + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t}$$

U elektrodinamici veličine ε_0 i μ_0 su povezane sa brzinom svetlosti u vakuumu jednačinom

$$\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Proizvod veličina ε_{gem} i μ_{gem} je

$$\varepsilon_{gem} \mu_{gem} = \frac{4}{c^2}$$

, odnosno

$$\varepsilon_{gem} \mu_{gem} = \frac{1}{\left(\frac{c}{2}\right)^2} \quad (2.33)$$

Brzina elektromagnetnih talasa u vakuumu iznosi c . Jedan od bitnih rezultata opšte teorije relativnosti je predviđanje gravitacionih talasa. Njihova brzina u vakuumu je c . Na osnovu moje teorije gravitacije dobio sam određene rezultate iz oblasti gravitacionih talasa. Jednačina (2.33) bi možda sugerisala da je brzina gravitacionih talasa u okviru gravitoelektromagnetizma $c/2$. Medjutim na osnovu moje teorije gravitacije dobijam da je brzina gravitacionih talasa u vakuumu jednaka c .

Koristeći jednačine (2.31) i (2.32) sistem jednačina (2.24-27) dobija formu

$$\operatorname{div} \vec{E}_{gem} = \frac{\rho_m}{\varepsilon_{gem}} \quad (2.34)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}_{gem} = 0 \quad (2.35)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{gem} = -\frac{\partial \vec{B}_{gem}}{\partial t} \quad (2.36)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}_{gem} = \mu_{gem} \vec{J}_m + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t} \quad (2.37)$$

Napomenuo sam da ću dati dopunska objašnjenja za veličine ρ_m i \vec{J}_m . Veličina ρ_m je gustina mase. Ona se može definisati na sledeći način

$$\rho_m(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Definisao sam gustinu mase u tački koja je određena radijus vektorom \vec{r} . Sa ΔV je označena mala zapremina koja obuhvata tu tačku.

Posmatrajmo neku oblast prostora zapremine V u kojoj se nalazi masa. Možemo uvesti skalarno polje gustine mase. Svakoju tački prostora (zapremine V) možemo pridružiti skalar ρ_m , i na taj način dobijamo skalarno polje. Možemo uvesti i da se skalarno polje gustine mase menja sa vremenom, odnosno

$$\rho_m = \rho_m(\vec{r}, t)$$

Definiciju gustine mase treba upotpuniti. Supstanca se sastoji od atoma i molekula. Ako je na primer reč o razredjenoj supstanci rastojanje izmedju atoma je mnogo veće od dimenzije samih atoma. U prostoru izmedju atoma gustina mase je jednaka nuli.

Posmatrajmo skup od N atoma u zapremini V . Masa i -tog atoma je m_i , a njegov položaj određen je radijus vektorom \vec{r}_i . Gustina supstance se u ovom slučaju definiše pomoću Dirakove delta funkcije δ

$$\rho_m(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.38)$$

Kada se radijus vektor \vec{r} poklopi sa radijus vektorom čestice \vec{r}_i , onda gustina mase saglasno osobini Dirakove delta funkcije postaje beskonačno velika.

Ako želimo da izračunamo kolika se masa nalazi u zapremini V koristimo jednačinu

$$m = \int_V \rho_m(\vec{r}) dV$$

U ovu jednačinu možemo zameniti jednačinu (2.38)

$$m = \sum_{i=1}^N m_i \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV$$

Koristeći fundamentalne osobine Dirakove funkcije dobijamo

$$m = \sum_{i=1}^N m_i$$

Masena gustina struje \vec{j}_m definiše se na sledeći način

$$\vec{j}_m = \rho_m \vec{v} \quad (2.39)$$

Uveo sam skalarno polje gustine mase. Svakoju tački prostora (zapremine V) pridružio sam skalar ρ_m . Ako se supstanca kreće svakoj tački prostora mogu pridružiti vektor brzine \vec{v} i na taj način dobijam vektorsko polje. Obzirom da je masena gustina struje \vec{j}_m vektorska veličina možemo definisati odgovarajuće vektorsko polje.

U elektrodinamici postoji jednačina kontinuiteta i ona glasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

Cilj nam je da dobijemo analognu jednačinu u gravitoelektromagnetizmu. Posmatrajmo neku oblast ograničenu površinom S u kojoj se nalaze čestice u kretanju. Zapremina te oblasti je V . U početnom trenutku van te oblasti ne postoje čestice. Radi jednostavnosti izvodjenja pretpostavićemo da je česticama jedino dozvoljeno da prilikom kretanja prolaze kroz površinu S i napuštaju tu oblast. Isključena je mogućnost da čestice koje su jednom prošle kroz površinu S ponovo prolaze kroz tu površinu S i vrate se u zapreminu V . Usled takvog kretanja čestica smanjiće se masa (gustina) supstance u zapremini V

$$\frac{\partial m}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_m dV \quad (2.40)$$

Smanjenje mase može se izraziti i preko fluksa vektora \vec{j}_m . Integracija se vrši preko zatvorene površine S

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \oiint_S \vec{j}_m d\vec{s}$$

Primenom Gausove teoreme ova jednačina se dalje transformiše

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \int_V \text{div} \vec{j}_m dV \quad (2.41)$$

Desne strane jednačina (2.40) i (2.41) možemo izjednačiti pa dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_m dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{j}_m dV$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m \right] dV = 0$$

odnosno

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0 \quad (2.42)$$

U elektrodinamici su uvedeni skalarni i vektorski potencijal. Kada se odrede skalarni i vektorski potencijal, jačine električnog i magnetnog polja određuju se na osnovu jednačina

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Sličan pristup je i u gravitoelektromagnetizmu. Uvodim najpre vektorski potencijal gravitacionog polja, i označiću ga sa \vec{A}_{gem} . Ako nam je poznat vektorski potencijal jačina gravitomagnetnog polja određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{B}_{gem} = \operatorname{rot} \vec{A}_{gem} \quad (2.43)$$

Zamenom jednačine (2.43) u (2.36) dobijam

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{gem} = - \frac{\partial (\operatorname{rot} \vec{A}_{gem})}{\partial t}$$

Ova jednačina se može napisati u obliku

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E}_{gem} + \frac{\partial \vec{A}_{gem}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.44)$$

Izraz u zagradi može se napisati preko gradijenta neke proizvoljne skalarne funkcije f

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$$

Pošto je izbor funkcije proizvoljan ja ću izabrati sledeću mogućnost

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(-\varphi_{gem})) = 0 \quad (2.45)$$

Veličina φ_{gem} je skalarni potencijal gravitacionog polja. Na osnovu jednačina (2.44) i (2.45) dobijam

$$\vec{E}_{gem} = -\operatorname{grad} \varphi_{gem} - \frac{\partial \vec{A}_{gem}}{\partial t} \quad (2.46)$$

Nakon diferenciranja jednačine (2.37) po vremenu dobijam

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}_{gem}}{\partial t} = \mu_{gem} \frac{\partial \vec{j}_m}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{gem}}{\partial t^2}$$

Leva strana ove jednačine se može dalje transformisati korišćenjem jednačine (2.36)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}_{gem}) = -\mu_{gem} \frac{\partial \vec{j}_m}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{gem}}{\partial t^2}$$

Primenom identiteta

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

dolazim do sledeće jednačine

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}_{gem}) - \Delta \vec{E}_{gem} = -\mu_{gem} \frac{\partial \vec{j}_m}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{gem}}{\partial t^2}$$

Prvi član u jednačini možemo transformisati korišćenjem jednačine (2.34)

$$\text{grad}\left(\frac{\rho_m}{\epsilon_{gem}}\right) - \Delta \vec{E}_{gem} = -\mu_{gem} \frac{\partial \vec{J}_m}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{gem}}{\partial t^2}$$

Nakon elementarnih algebarskih operacija dobijam jednačinu

$$\Delta \vec{E}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{gem}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_{gem}} \text{grad}(\rho_m) + \mu_{gem} \frac{\partial \vec{J}_m}{\partial t} \quad (2.47)$$

Slična jednačina postoji u elektrodinamici, i ona glasi

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad}(\rho) + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (2.48)$$

Kada se naelektrisane čestice kreću ubrzano one generišu elektromagnetne talase. U većini slučajeva čestice se kreću u maloj oblasti. Van te oblasti funkcije ρ i \vec{J} su jednake nuli i jednačina (2.48) dobija oblik

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.49)$$

Ovo je talasna jednačina i ona opisuje propagaciju elektromagnetnih talasa. Iz ove jednačine sledi da se elektromagnetski talasi u vakuumu prostiru brzinom c .

Slični zaključci važe i za jednačinu (2.47). Kada se masa kreće ubrzano ona generiše gravitacione talase. Masa je obično lokalizovana u maloj oblasti, a van te oblasti funkcije ρ_m i \vec{J}_m su jednake nuli i jednačina (2.47) dobija oblik

$$\Delta \vec{E}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{gem}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.50)$$

Ovo je talasna jednačina i ukazuje nam da je brzina gravitacionih talasa u vakuumu jednaka c . Ja sam se bavio problematikom gravitacionih talasa sa stanovišta moje teorije. Rezultati su prezentovani u posebnim poglavljima.

Sada ću pokazati da i jačina gravitomagnetnog polja zadovoljava talasnu jednačinu. Krenimo najpre od jednačine (2.37) i transformišimo je u sledeći oblik

$$\frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t} = c^2 \text{rot} \vec{B}_{gem} - c^2 \mu_{gem} \vec{J}_m$$

Potom delujmo operatorom rot na obe strane jednačine

$$\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t}\right) = c^2 \text{rot}(\text{rot} \vec{B}_{gem}) - c^2 \mu_{gem} \text{rot}(\vec{J}_m) \quad (2.51)$$

Korišćenjem vektorskog identiteta

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = \text{grad}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

dobijam

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{B}_{gem}) = \text{grad}(\text{div} \vec{B}_{gem}) - \Delta \vec{B}_{gem}$$

, a zatim primenjujem jednačinu (2.35) i dolazim do rezultata

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{B}_{gem}) = -\Delta \vec{B}_{gem}$$

Ovaj rezultat zamenjujem u jednačinu (2.51)

$$\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t}\right) = c^2(-\Delta \vec{B}_{gem}) - c^2 \mu_{gem} \text{rot}(\vec{J}_m) \quad (2.52)$$

Levu stranu ove jednačine možemo transformisati korišćenjem jednačine (2.36)

$$\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 \vec{B}_{gem}}{\partial t^2}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (2.52) i nakon elementarnih algebarskih operacija dobijam

$$\Delta \vec{B}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_{gem}}{\partial t^2} = -\mu_{gem} \text{rot}(\vec{J}_m) \quad (2.53)$$

Iz ove jednačine sledi talasna jednačina

$$\Delta \vec{B}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_{gem}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.54)$$

Sada ću izvesti odgovarajuće diferencijalne jednačine za potencijale. Podsetimo se najpre kako se jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja određuju ako su nam poznati potencijali gravitacionog polja

$$\vec{B}_{gem} = \text{rot} \vec{A}_{gem} \quad (2.55)$$

$$\vec{E}_{gem} = -\text{grad} \varphi_{gem} - \frac{\partial \vec{A}_{gem}}{\partial t} \quad (2.56)$$

Ove jednačine treba zameniti u jednačine (2.34) i (2.37). Zamenimo najpre jednačinu (2.56) u (2.34)

$$\text{div} \left(-\text{grad} \varphi_{gem} - \frac{\partial \vec{A}_{gem}}{\partial t} \right) = \frac{\rho_m}{\epsilon_{gem}}$$

Korišćenjem identiteta

$$\text{div}(\text{grad} \varphi_{gem}) = \Delta \varphi_{gem}$$

dobijam rezultat

$$\Delta \varphi_{gem} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}_{gem}) = -\frac{\rho_m}{\epsilon_{gem}} \quad (2.57)$$

Ovu jednačinu nisam u mogućnosti dalje da transformišem, ali ću zato zameniti jednačine (2.55) i (2.56) u jednačinu (2.37)

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}_{gem}) = \mu_{gem} \vec{J}_m + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad} \varphi_{gem} - \frac{\partial \vec{A}_{gem}}{\partial t} \right)$$

Nakon elementarnih transformacija dobijam

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}_{gem}) = \mu_{gem} \vec{J}_m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_{gem}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi_{gem}}{\partial t} \right) \quad (2.58)$$

Leva strana jednačine (2.58) može se transformisati na sledeći način

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}_{gem}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}_{gem}) - \Delta \vec{A}_{gem}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (2.58) sledi

$$\text{grad}(\text{div} \vec{A}_{gem}) - \Delta \vec{A}_{gem} = \mu_{gem} \vec{J}_m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_{gem}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi_{gem}}{\partial t} \right)$$

odnosno

$$\Delta \vec{A}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_{gem}}{\partial t^2} + \text{grad} \left(\text{div} \vec{A}_{gem} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_{gem}}{\partial t} \right) = -\mu_{gem} \vec{J}_m \quad (2.59)$$

U elektrodinamici postoji slična jednačina i ona glasi

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

Da bi se ova jednačina pojednostavila uveden je tzv. Lorencov kalibracioni uslov

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Po analogiji sa elektrodinamikom uvešću uslov

$$\text{div} \vec{A}_{gem} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_{gem}}{\partial t} = 0 \quad (2.60)$$

, i jednačina (2.59) dobija oblik

$$\Delta \vec{A}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_{gem}}{\partial t^2} = -\mu_{gem} \vec{J}_m \quad (2.61)$$

Ovo je diferencijalna jednačina za vektorski potencijal.

Diferencirajmo jednačinu (2.60) po vremenu

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}_{gem}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_{gem}}{\partial t^2} = 0$$

, i zamenimo ovaj rezultat u jednačinu (2.57)

$$\Delta \varphi_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_{gem}}{\partial t^2} = -\frac{\rho_m}{\varepsilon_{gem}} \quad (2.62)$$

Dobio sam diferencijalnu jednačinu za gravitacioni skalarni potencijal. Ovde mogu napomenuti da jednačine (2.61) i (2.62) imaju isti matematički oblik.

U slučaju kada se mase ne kreću ispunjeni su sledeći uslovi

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

$$\vec{J}_m = 0$$

, i sistem jednačina (2.34-37) dobija jednostavniju formu

$$\text{div} \vec{E}_{gem} = \frac{\rho_m}{\varepsilon_{gem}} \quad (2.63)$$

$$\text{div} \vec{B}_{gem} = 0$$

$$\text{rot} \vec{E}_{gem} = 0$$

$$\text{rot} \vec{B}_{gem} = 0$$

Takodje se pojednostavljuje i jednačina (2.46)

$$\vec{E}_{gem} = -\text{grad} \varphi_{gem}$$

Zamenom ove jednačine u (2.63) dobijam

$$\begin{aligned} \text{div}(-\text{grad} \varphi_{gem}) &= \frac{\rho_m}{\varepsilon_{gem}} \\ \Delta \varphi_{gem} &= -\frac{\rho_m}{\varepsilon_{gem}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Gravitaciona dielektrična propustljivost vakuuma je definisana jednačinom (2.31)

$$\varepsilon_{gem} = -\frac{1}{4\pi\gamma}$$

Zamenom ove vrednosti u (2.64) dobijam jednačinu koja je identična Poasonovoj jednačini u klasičnoj teoriji gravitacije

$$\Delta \varphi_{gem} = 4\pi\gamma\rho_m \quad (2.65)$$

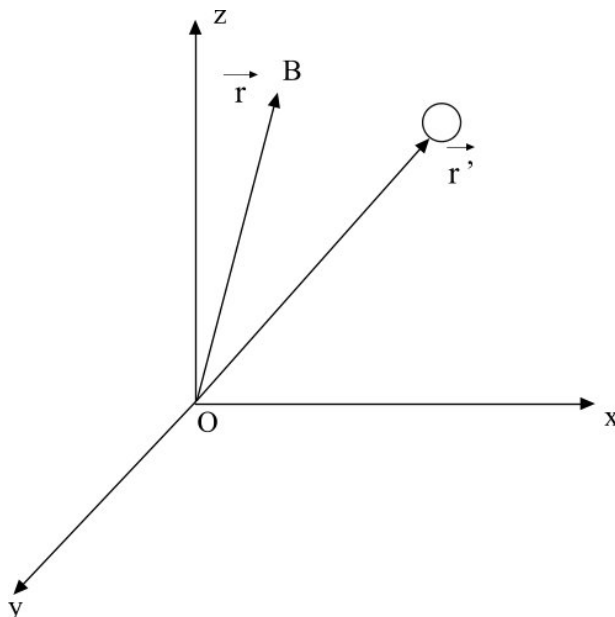
Na osnovu diferencijalne jednačine za gravitacioni skalarni potencijal (jednačina (2.62)) može se dobiti Poasonova jednačina. Obzirom da je ispunjen uslov

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

na osnovu jednačine (2.62) dobija se sledeći rezultat

$$\Delta \varphi_{gem} = -\frac{\rho_m}{\varepsilon_{gem}}$$

Neka se čestica mase m nalazi u tački određenoj radijus vektorom \vec{r}' . Odredimo kolika je jačina i potencijal gravitoelektričnog polja u proizvoljnoj izabranoj tački B. Položaj tačke B je određena radijus vektorom \vec{r} (slika 1)



Slika 1

Ove veličine određuju se na osnovu jednačina

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}) = \gamma m \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\varphi_{gem}(\vec{r}) = -\frac{\gamma m}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

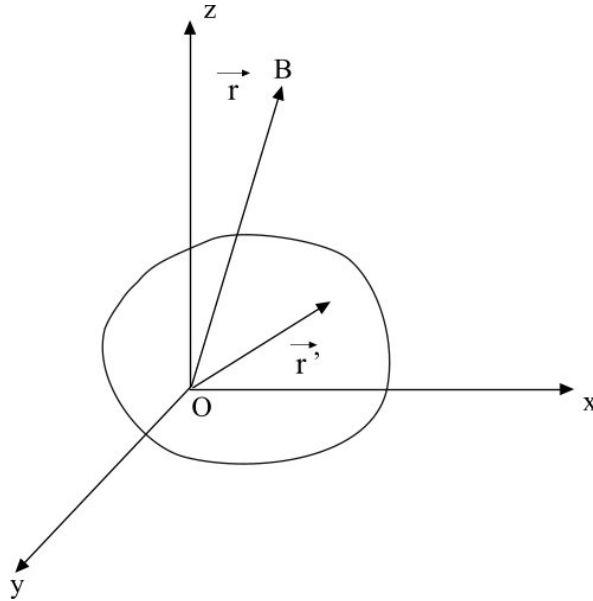
Naravno ovi rezultati su identični sa rezultatima iz klasične teorije gravitacije, i ne zahtevaju neku posebnu analizu.

Ovde smo analizirali slučaj jednog tela. Posmatrajmo sada skup od N tela. Masa i -tog tela je m_i , a radijus vektor \vec{r}_i . Jačina i potencijal gravitoelektričnog polja u tački B određuju se na osnovu jednačina

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}) = \gamma \sum_{i=1}^N m_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (2.66)$$

$$\varphi_{gem}(\vec{r}) = -\sum_{i=1}^N \frac{\gamma m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (2.67)$$

Potrebne su nam jednačine i za slučaj kontinualne raspodele mase. Uvedimo u razmatranje određenu oblast prostora. Zapreminu te oblasti prostora označiću sa V (slika 2). Masa se nalazi samo unutar te oblasti. Uzeću da je dato skalarno polje gustine mase, koje je opisano funkcijom $\rho_m(\vec{r}')$



Slika 2

Odgovarajuće jednačine glase

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}) = \gamma \int_{V'} \rho_m(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (2.68)$$

$$\varphi_{gem}(\vec{r}) = -\gamma \int_{V'} \frac{\rho_m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.69)$$

Vektor \vec{r}' opisuje samo tačke koje se nalaze unutar oblasti zapremine V' .

Razmatrana je oblast prostora zapremine V' , i dobijene su odgovarajuće jednačine za slučaj kada masa miruje. Sada ću razmotriti slučaj kada se masa kreću unutar te oblasti. Raspodela mase je kontinualna. Obzirom da se mase kreću pored skalarnog polja gustine mase, mora se uvesti i vektorsko polje masene gustine struje. Odredjujemo gravitomagnetno polje u proizvoljno izabranoj tački B. Položaj tačke B određen je radijus vektorom \vec{r} (slika 2).

Analiziraću poseban slučaj kada se kretanje mase vrši na takav način da je stvoreno stacionarno gravitaciono polje, odnosno gravitoelektrično i gravitomagnetno polje ne menjaju se tokom vremena

$$\frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}_{gem}}{\partial t} = 0$$

Jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja su povezane sa skalarnim i vektorskim potencijalom na osnovu jednačina (2.55) i (2.56). Pošto je kretanje stacionarno na osnovu tih jednačina sledi da ne postoje promene potencijala sa vremenom

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{A}_{gem}}{\partial t} = 0$$

Kretanje mase se vrši na takav način da ne postoji promena gustine mase i masene gustine struje sa vremenom

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{J}_m}{\partial t} = 0$$

Na osnovu ovih uslova sistem jednačina (2.34-37) dobija jednostavniju formu

$$\text{div} \vec{E}_{gem} = \frac{\rho_m}{\epsilon_{gem}}$$

$$\text{div} \vec{B}_{gem} = 0$$

$$\text{rot} \vec{E}_{gem} = 0$$

$$\text{rot} \vec{B}_{gem} = \mu_{gem} \vec{J}_m \quad (2.70)$$

Zamenom jednačine

$$\vec{B}_{gem} = \text{rot} \vec{A}_{gem}$$

u (2.70) dobijam

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}_{gem}) = \mu_{gem} \vec{J}_m$$

Ova jednačina se dalje pojednostavljuje korišćenjem vektorskog identiteta

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}_{gem}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}_{gem}) - \Delta \vec{A}_{gem}$$

, i dobija se jednačina

$$\text{grad}(\text{div} \vec{A}_{gem}) - \Delta \vec{A}_{gem} = \mu_{gem} \vec{J}_m \quad (2.71)$$

Uveo sam Lorencov kalibracioni uslov za gravitaciju

$$\text{div} \vec{A}_{gem} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{gem}}{\partial t} = 0$$

Obzirom da se masena gustina ne menja tokom vremena iz ove jednačine sledi

$$\text{div} \vec{A}_{gem} = 0$$

Zamenom ove vrednosti u (2.71) dobija se diferencijalna jednačina za određivanje vektorskog potencijala

$$\Delta \vec{A}_{gem} = -\mu_{gem} \vec{J}_m \quad (2.72)$$

Sada ću dobiti diferencijalnu jednačinu za određivanje jačine gravitomagnetnog polja. Delujem operatorom rot na jednačinu (2.70)

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{B}_{gem}) = \mu_{gem} \text{rot} \vec{J}_m$$

Ova jednačina se dalje transformiše korišćenjem vektorskog identiteta, i dobija se

$$\text{grad}(\text{div} \vec{B}_{gem}) - \Delta \vec{B}_{gem} = \mu_{gem} \text{rot} \vec{J}_m$$

Korišćenjem jednačine

$$\text{div} \vec{B}_{gem} = 0$$

sledi rezultat

$$\Delta \vec{B}_{gem} = -\mu_{gem} \text{rot} \vec{J}_m \quad (2.73)$$

Potrebno nam je opšte rešenje jednačine (2.72). Da bismo došli do tog rešenja opet se možemo koristiti analogijom sa elektrodinamikom. U slučaju magnetostatike važi sledeća jednačina

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (2.74)$$

Veličina \vec{A} je vektorski potencijal, a \vec{j} je gustina električne struje. Opšte rešenje jednačine (2.74) glasi

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV,$$

Naelektrisanje je lokalizovano u oblasti prostora zapremini V' . Vršiti se integracija po toj zapremini, a vektor \vec{r}' određuje položaje tačaka u toj zapremini.

Obzirom da postoji formalna analogija sa elektrodinamikom opšte rešenje jednačine (2.72) glasi

$$\vec{A}_{gem} = \frac{\mu_{gem}}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV, \quad (2.74)$$

Koristeći jednačinu (2.32) dobijam

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \int_V \frac{\vec{j}_m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV, \quad (2.75)$$

U predhodnoj analizi razmatrao sam dva slučaja. U prvom slučaju masa koja se nalazi u oblasti prostora zapremini V' je mirovala. U drugom slučaju masa se kretala unutar te oblasti, i stvoreno je stacionarno gravitaciono polje. Nije postojala promena gustine mase i masene gustine struje sa vremenom, odnosno ove veličine bile su samo funkcije položaja

$$\rho_m = \rho_m(\vec{r}')$$

$$\vec{j}_m = \vec{j}_m(\vec{r}')$$

Naravno gustina mase i masena gustine struje mogu se menjati tokom vremena, tako da treba i ovu vremensku zavisnost uključiti u analizu

$$\rho_m = \rho_m(\vec{r}', t) \quad (2.76)$$

$$\vec{j}_m = \vec{j}_m(\vec{r}', t) \quad (2.77)$$

To će imati za posledicu da se jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja menjaju tokom vremenom. Sada ne možemo koristiti pojednostavljeni sistem jednačina, već moramo uzeti sistem jednačina (2.34-37) u svom potpunom obliku.

Rešavanje ovih jednačina je pojednostavljeno uvodjenjem skalarnog i vektorskog potencijala. Kada se oni odrede, onda na osnovu jednačina (2.43) i (2.46) dobijamo jačinu gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja.

U dosadašnjem radu bile su izvedene sledeće jednačine

$$\Delta \vec{E}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{gem}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_{gem}} \text{grad}(\rho_m) + \mu_{gem} \frac{\partial \vec{j}_m}{\partial t} \quad (2.78)$$

$$\Delta \vec{B}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_{gem}}{\partial t^2} = -\mu_{gem} \text{rot}(\vec{j}_m) \quad (2.79)$$

$$\Delta \phi_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_{gem}}{\partial t^2} = -\frac{\rho_m}{\epsilon_{gem}} \quad (2.80)$$

$$\Delta \vec{A}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_{gem}}{\partial t^2} = -\mu_{gem} \vec{j}_m \quad (2.81)$$

Ovde se pojavljuju tri vektorske veličine i jedna skalarna funkcija ϕ_{gem} . Svaka od vektorskih veličina ima po tri komponentata. Postoji jedna zajednička karakteristika ovih jednačina, a to je da sve komponente vektora, i skalarna funkcija ϕ_{gem} zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu istog tipa

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \Phi \quad (2.82)$$

Ovakva parcijalna diferencijalna jednačina zove se D'Alamberova jednačina.

U pojedinim slučajevima moguće je da se na osnovu jednačina (2.78) i (2.79) direktno odrede veličine \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} . Medjutim obično se primenjuje pristup da se prvo odredi skalarni i vektorski potencijal, a onda na osnovu jednačina (2.43) i (2.46) određuje se jačina gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja.

Za rešavanje D'Alamberove jednačine razvijene su posebne matematičke metode. Nama je od interesa da nadjemo opšte rešenje jednačina (2.80) i (2.81). Da bi to postigao opet ću koristiti analogiju sa elektrodinamikom. U elektrodinamici postoje jednačine koje su slične jednačinama (2.80) i (2.81), i one glase

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Opšta rešenja diferencijalnih jednačina za skalarni i vektorski potencijal glase

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{(1-\alpha)}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t + \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\alpha\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{(1-\alpha)\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t + \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Veličina α je neki parametar. Fizički prihvatljiva rešenja se dobijaju za $\alpha = 1$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.83)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.84)$$

Ovo su takozvani retardovani potencijali.

Ja ovde ne mogu da pružim potpun matematički dokaz, ali uzeću da po analogiji sa elektrodinamikom opšta rešenja diferencijalnih jednačina (2.80) i (2.81) glase

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_{gem}} \int_V \frac{\rho_m(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{(1-\alpha)}{4\pi\epsilon_{gem}} \int_V \frac{\rho_m(\vec{r}', t + \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = \frac{\alpha\mu_{gem}}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{(1-\alpha)\mu_{gem}}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_m(\vec{r}', t + \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Fizički prihvatljiva rešenja se dobijaju za $\alpha = 1$

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_{gem}} \int_V \frac{\rho_m(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_{gem}}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV,$$

, i možemo ih nazvati retardovani potencijali gravitacionog polja.

Korišćenjem jednačina (2.31) i (2.32) oni dobijaju oblik

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\gamma \int_V \frac{\rho_m(\vec{r}', t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV, \quad (2.85)$$

$$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma}{c^2} \int_V \frac{\vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV. \quad (2.86)$$

Ovi potencijali imaju veliku primenu u daljem radu. Analiziraću ih za slučaj kada se jedna čestica kreće, ali i za slučaj kada se sistem čestica kreće unutar zapremine V .

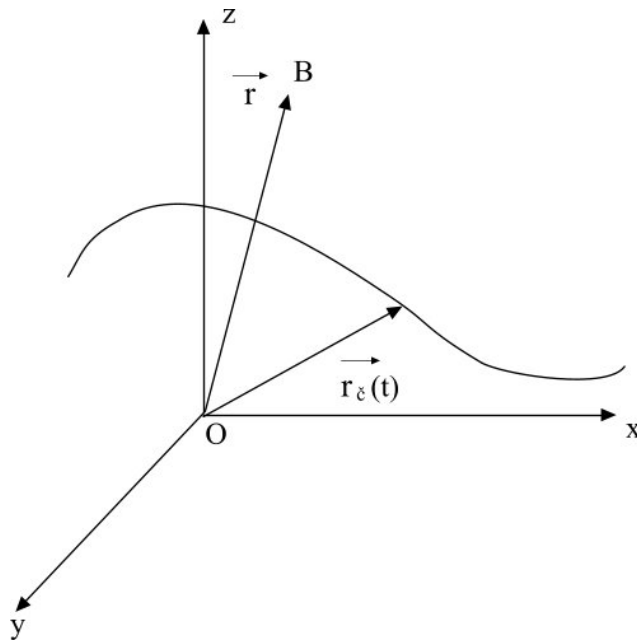
Kada se čestica mase m kreće ona u prostoru oko sebe stvara gravitoelektrično i gravitomagnetno polje. Cilj mi je da dobijem jačinu gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja, ali koristeći upravo retardovane potencijale gravitacionog polja.

Problem je prilično komplikovan sa matematičke tačke gledišta, pa sam prinudjen da koristim odgovarajuće jednačine iz elektrodinamike. Razmotrimo primer jedne naelektrisane čestice koja se kreće po nekoj fiksiranoj putanji. Položaj čestice nam je poznat u svakom trenutku, i opisan je radijus vektorom $\vec{r}_\xi(t)$. Brzina i ubrzanje čestice određuju se na osnovu sledećih jednačina

$$\vec{v}_\xi = \frac{d\vec{r}_\xi(t)}{dt}$$

$$\vec{a}_\xi = \frac{d\vec{v}_\xi(t)}{dt}$$

Želimo odrediti elektromagnetno polje u tački B, koja je određena radijus vektorom \vec{r} (slika 3).



Slika 3

Potrebno je uvesti i vektor $\vec{R}(t)$. On je definisan kao razlika vektora \vec{r} i $\vec{r}_\xi(t)$.

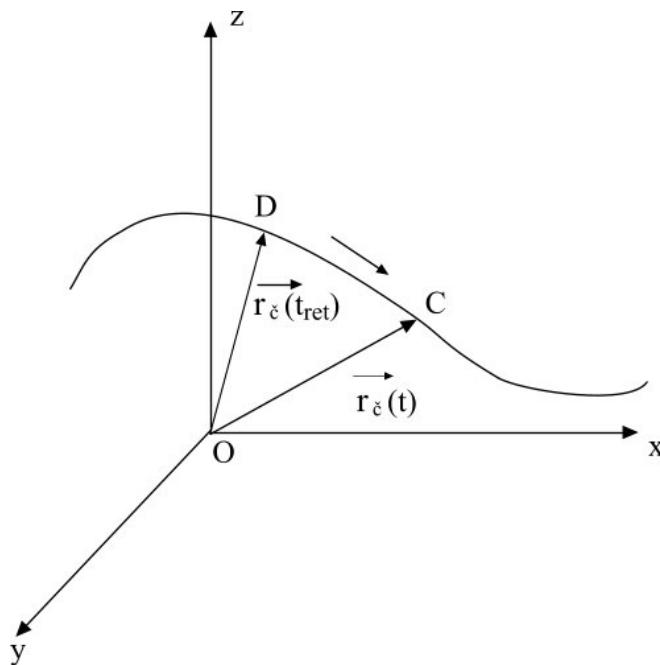
$$\vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{r}_\zeta(t) \quad (2.87)$$

Moduo vektora \vec{R} obeležiću sa R

Potrebno je nešto reći o tzv. retardovanom trenutku vremena. On se obeležava sa t_{ret} , i određuje se na osnovu jednačine

$$|\vec{r} - \vec{r}_\zeta(t_{ret})| = c(t - t_{ret}) \quad (2.88)$$

Čestica se kreće po fiksiranoj putanji. U trenutku t ona se nalazi u tački C , i njen položaj je opisan vektorom $\vec{r}_\zeta(t)$. Smer kretanja čestice je prikazan strelicom na slici 4.



Slika 4

Retardovani trenutak vremena je neki raniji trenutak vremena u odnosu na trenutak t . Čestica bi se u retardovanom trenutku vremena nalazila u tački D .

Kada sam detaljnije analizirao gustinu mase posmatrao sam skup od N atoma u zapremini V . Pretpostavio sam da je rastojanje izmedju atoma mnogo veće od dimenzije atoma. Gustina supstance se u ovom slučaju određuje se na osnovu jednačine (2.38)

$$\rho_m(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.89)$$

Ako umesto sistema čestica imamo samo jednu česticu čiji je položaj određen radijus vektorom $\vec{r}_\zeta(t)$, onda predhodna jednačina dobija formu

$$\rho_m(\vec{r}, t) = m \delta(\vec{r} - \vec{r}_\zeta(t)) \quad (2.90)$$

Ovde sam uveo da postoji i vremenska zavisnost jer se položaj čestice menja tokom vremena.

Ako je čestica naelektrisana količinom naelektrisanja q onda se gustina naelektrisanja određuje na osnovu jednačine

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_\zeta(t)) \quad (2.91)$$

U elektrodinamici se pokazuje da se gustina struje u slučaju kretanja naelektrisane čestice određuje na osnovu jednačine

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v}_\zeta(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_\zeta(t)) \quad (2.92)$$

Ako se jednačine (2.91) i (2.92) zamene u retardovane potencijale koji su dobijeni na osnovu elektrodinamike (jednačine (2.83) i (2.84)), i izvrše određeni matematički postupci dobijaju se tzv. Lenard-Vihertovi potencijali (Alfred-Marie Liénard, Emil Johann Wiechert)

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(R - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{c}\right)} \quad [t_{ret}] \quad (2.93)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v}_\xi}{\left(R - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{c}\right)} \quad [t_{ret}] \quad (2.94)$$

U ovim jednačinama uveo sam indeks $[t_{ret}]$. On nam ukazuje na jednu veoma bitnu stvar, a to je da sve veličine u jednačinama (2.93) i (2.94) ne smemo određivati za vremenski trenutak t nego za retardovani trenutak vremena t_{ret} .

Na osnovu ovih potencijala, i jednačina (2.9) i (2.10) dobijaju se jačina električnog i magnetnog polja koje generiše naelektrisana čestica u tački određenoj radius vektorom \vec{r} u trenutku t

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{cR}\right)^3} \left\{ \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{c}\right) \left(1 - \left(\frac{v_\xi}{c}\right)^2\right) + \vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{c}\right) \times \frac{\vec{a}_\xi}{c^2} \right] \right\} \quad [t_{ret}] \quad (2.95)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[-\frac{\vec{R} \times \vec{v}_\xi}{\left(R - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{c}\right)^3} \left(1 - \left(\frac{v_\xi}{c}\right)^2 + \frac{\vec{a}_\xi \cdot \vec{R}}{c^2}\right) - \frac{\vec{R} \times \vec{a}_\xi / c}{\left(R - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{c}\right)^2} \right] \quad [t_{ret}] \quad (2.96)$$

Cilj mi je dobiti odgovarajuće jednačine za gravitaciono polje. Ja nisam u mogućnosti da izvedem kompletan matematički proračun za slučaj gravitacije. Ali pošto se gravitoelektromagnetizam zasniva na formalnoj analogiji sa elektrodinamikom, ja ću izvršiti konverziju jednačina (2.93-96) na sledeći način. U prvom koraku količinu naelektrisanja q zameniću masom, a veličine ϵ_0 i μ_0 zameniću veličinama ϵ_{gem} i μ_{gem} respektivno. U drugom koraku koristiću jednačine (2.31) i (2.32). Na taj način dobijam sledeće jednačine

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\gamma m \frac{1}{\left(R - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{c}\right)} \quad [t_{ret}] \quad (2.97)$$

$$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{c^2} \frac{\vec{v}_\xi}{\left(R - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{c}\right)} \quad [t_{ret}] \quad (2.98)$$

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma m}{R^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{cR}\right)^3} \left\{ \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{c}\right) \left(1 - \left(\frac{v_\xi}{c}\right)^2\right) + \vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}_\xi \cdot \vec{R}}{c}\right) \times \frac{\vec{a}_\xi}{c^2} \right] \right\} \quad [t_{ret}] \quad (2.99)$$

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{c^2} \left[-\frac{\vec{R} \times \vec{v}_c}{\left(R - \frac{\vec{v}_c \cdot \vec{R}}{c}\right)^3} \left(1 - \left(\frac{v_c}{c}\right)^2 + \frac{\vec{a}_c \cdot \vec{R}}{c^2}\right) - \frac{\vec{R} \times \vec{a}_c/c}{\left(R - \frac{\vec{v}_c \cdot \vec{R}}{c}\right)^2} \right]_{[t_{ret}]} \quad (2.100)$$

Ovde kao i u slučaju elektrodinamike indeks $[t_{ret}]$ nam ukazuje da sve veličine u jednačinama (2.97-100) ne smemo određivati za vremenski trenutak t nego za retardovani trenutak vremena t_{ret} . Opet ću napomenuti da jednačine (2.97-100) nisu dobijene strogim matematičkim izvodjenjem, već korišćenjem formalne analogije između gravitoelektromagnetizma i elektrodinamike. Da bi se potvrdila (ili možda opovrgla) validnost ovih jednačina potrebno je strogo matematičko izvodjenje.

Jedna od karakteristika elektromagnetnog talasa je njegov intenzitet. Intenzitet talasa je povezan sa Pointingovim vektorom (John Henry Poynting). U narednim poglavljima biće reči o gravitacionim talasima. Da bi našao intenzitet gravitacionih talasa potrebno je da odredim analognu relaciju za Pointingov vektor sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Da bi to postigao najpre ću morati da ponovim izvodjenje Pointingove teoreme u elektrodinamici.

Posmatrajmo sistem naelektrisanih čestica koji se nalaze u elektromagnetnom polju. Sistem se sastoji od N čestica, a i -ta čestica ima naelektrisanje q_i i brzinu \vec{v}_i . Na nju deluje Lorencova sila

$$\vec{F}_i = q_i \vec{E} + q_i \vec{v}_i \times \vec{B}$$

Energiju te čestice označiću sa ε_i . Promenu energije čestice sa vremenom možemo izraziti na sledeći način

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

, odnosno

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = q_i \vec{E} \cdot \vec{v}_i$$

Sistem čestica se nalazi u oblasti prostora zapremine V . Ukupna energija sistema čestica jednaka je zbiru energija svih pojedinačnih čestica

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i$$

Ova energija se menja tokom vremena, i ta promena može se izraziti na sledeći način

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \sum_{i=1}^N q_i \vec{E} \cdot \vec{v}_i$$

, odnosno

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \left(\sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \right) \cdot \vec{E}$$

Ako predjemo sa diskretne na kontinualnu raspodelu naelektrisanja dobijamo sledeću jednačinu

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \int \rho \vec{v} \cdot \vec{E} dV = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV \quad (2.101)$$

Gustina struje može se izraziti na osnovu Maksvelove jednačine

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Podintegralni izraz dobija sledeću formu

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \text{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dalje se transformiše na sledeći način

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \text{rot} \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \text{rot} \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \text{rot} \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Potom primenjujemo Maksvelovu jednačinu

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

, i dobijamo

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \text{rot} \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \text{rot} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ovu jednačinu dalje transformišemo korišćenjem vektorskog identiteta

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ovaj izraz zamenjujemo u jednačinu (2.101) i dobijamo

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \epsilon_i = - \int \text{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) dV - \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) dV$$

Nakon elementarnih transformacija i primene Gausove teoreme dolazimo do Pointingove teoreme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{i=1}^N \epsilon_i + \int \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV \right] = - \iint_S \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) d\vec{s} \quad (2.102)$$

Iz ove jednačine možemo pročitati Pointingov vektor

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.103)$$

Sada treba primeniti sličnu proceduru i naći Pointingov vektor za slučaj gravitacionog polja. Sistem od N čestica nalazi se u gravitacionom polju koje je opisano veličinama \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} . Promena energije sistema čestica određuje se na osnovu jednačine

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \epsilon_i = \int \vec{j}_m \cdot \vec{E}_{gem} dV \quad (2.104)$$

Na osnovu jednačine (2.37) dobijam

$$\vec{j}_m = \frac{1}{\mu_{gem}} \text{rot} \vec{B}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem} c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t}$$

Podintegralni izraz dobija sledeću formu

$$\vec{j}_m \cdot \vec{E}_{gem} = \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{E}_{gem} \text{rot} \vec{B}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem} c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t} \cdot \vec{E}_{gem}$$

, koji se dalje transformiše na način

$$\vec{j}_m \cdot \vec{E}_{gem} = \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{E}_{gem} \text{rot} \vec{B}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem} \text{rot} \vec{E}_{gem} + \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem} \text{rot} \vec{E}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem} c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t} \cdot \vec{E}_{gem}$$

Sada primenjujem jednačinu (2.36)

$$\text{rot} \vec{E}_{gem} = -\frac{\partial \vec{B}_{gem}}{\partial t}$$

, i dobijam

$$\vec{j}_m \cdot \vec{E}_{gem} = \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{E}_{gem} \text{rot} \vec{B}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem} \text{rot} \vec{E}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem} \frac{\partial \vec{B}_{gem}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_{gem} c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t} \cdot \vec{E}_{gem}$$

Ovu jednačinu dalje transformišem korišćenjem vektorskog identiteta

$$\vec{J}_m \cdot \vec{E}_{gem} = -\frac{1}{\mu_{gem}} \operatorname{div}(\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem}) - \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem} \frac{\partial \vec{B}_{gem}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_{gem} c^2} \vec{E}_{gem} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t}$$

Zamenom ovog izraza u jednačinu (2.104) dobijam

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = - \int \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_{gem}} \vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem} \right) dV - \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2\mu_{gem}} B_{gem}^2 + \frac{1}{2\mu_{gem} c^2} E_{gem}^2 \right) dV$$

Nakon elementarnih transformacija i primene Gausove teoreme dobija se sledeća jednačina

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i + \int \left(\frac{1}{2\mu_{gem}} B_{gem}^2 + \frac{1}{2\mu_{gem} c^2} E_{gem}^2 \right) dV \right] = - \oiint_S \left(\frac{1}{\mu_{gem}} \vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem} \right) d\vec{s} \quad (2.105)$$

Iz ove jednačine možemo pročitati Pointingov vektor za gravitoelektromagnetizam

$$\vec{P}_{gem} = \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem}$$

, odnosno

$$\vec{P}_{gem} = -\frac{c^2}{16\pi\gamma} \vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem} \quad (2.106)$$

Ovaj rezultat korišću kada budem prezentovao moje rezultate iz oblasti gravitacionih talasa.

U ovom poglavlju prezentovane su jednačine gravitoelektromagnetizma i osnovne teoreme. Smatram da bi bilo adekvatno da najbitnije rezultate predstavim tabelarno. Tabela se sastoji od dve kolone. U prvoj koloni biće osnovni rezultati i teoreme iz elektrodinamike, a u drugoj koloni rezultati iz gravitoelektromagnetizma.

Ovaj tabelarni prikaz omogućuje nam brzu preglednost dobijenih rezultata.

Elektrodinamika	Gravitoelektromagnetizam
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E}_{gem} = \frac{\rho_m}{\varepsilon_{gem}}$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B}_{gem} = 0$
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \vec{E}_{gem} = -\frac{\partial \vec{B}_{gem}}{\partial t}$
$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \vec{B}_{gem} = \mu_{gem} \vec{j}_m + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t}$
$\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$	$\varepsilon_{gem} = -\frac{1}{4\pi\gamma}, \mu_{gem} = -\frac{16\pi\gamma}{c^2}$ $\varepsilon_{gem} \mu_{gem} = \frac{1}{(c/2)^2}$
$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$	$\vec{F}_{gem} = m\vec{E}_{gem} + m\vec{v} \times \vec{B}_{gem}$
$\vec{j} = \rho\vec{v}$	$\vec{j}_m = \rho_m\vec{v}$
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$	$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0$
$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$	$\vec{B}_{gem} = \operatorname{rot} \vec{A}_{gem}$
$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$	$\vec{E}_{gem} = -\operatorname{grad} \varphi_{gem} - \frac{\partial \vec{A}_{gem}}{\partial t}$

$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad}(\rho) + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$	$\Delta \vec{E}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{gem}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_{gem}} \text{grad}(\rho_m) + \mu_{gem} \frac{\partial \vec{J}_m}{\partial t}$
$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$	$\Delta \vec{E}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_{gem}}{\partial t^2} = 0$
$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \text{rot} \vec{j}$	$\Delta \vec{B}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_{gem}}{\partial t^2} = -\mu_{gem} \text{rot}(\vec{J}_m)$
$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$	$\Delta \vec{B}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_{gem}}{\partial t^2} = 0$
$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	$\text{div} \vec{A}_{gem} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_{gem}}{\partial t} = 0$
$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$	$\Delta \vec{A}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_{gem}}{\partial t^2} = -\mu_{gem} \vec{J}_m$
$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\Delta \varphi_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_{gem}}{\partial t^2} = -\frac{\rho_m}{\epsilon_{gem}}$
$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\Delta \varphi_{gem} = 4\pi\gamma\rho_m$
$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV'$	$\varphi_{gem}(\vec{r}) = -\gamma \int_{V'} \frac{\rho_m(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV'$
$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$	$\Delta \vec{A}_{gem} = -\mu_{gem} \vec{J}_m$
$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{ \vec{r} - \vec{r}' }$	$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \int_{V'} \frac{\vec{J}_m(\vec{r}') dV'}{ \vec{r} - \vec{r}' }$
$\Delta \vec{B} = -\mu_0 \text{rot} \vec{j}$	$\Delta \vec{B}_{gem} = -\mu_{gem} \text{rot} \vec{J}_m$
$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{1}{c} \vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV'$	$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\gamma \int_{V'} \frac{\rho_m(\vec{r}', t - \frac{1}{c} \vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV'$
$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c} \vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV'$	$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma}{c^2} \int_{V'} \frac{\vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{1}{c} \vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV'$
$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(R - \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{R}}{c}\right)}_{[t_{ret}]}$	$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\gamma m \frac{1}{\left(R - \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{R}}{c}\right)}_{[t_{ret}]}$
$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v}_{\check{c}}}{\left(R - \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{R}}{c}\right)}_{[t_{ret}]}$	$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{c^2} \frac{\vec{v}_{\check{c}}}{\left(R - \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{R}}{c}\right)}_{[t_{ret}]}$
$W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$	$W_{gem} = \frac{1}{2\mu_{gem}} B_{gem}^2 + \frac{1}{2\mu_{gem} c^2} E_{gem}^2$
$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$	$\vec{P}_{gem} = -\frac{c^2}{16\pi\gamma} \vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem}$

Tabela 1

3. Dinamika veštačkih Zemljinih satelita. Gravitomagnetno polje ravnomerno rotirajuće lopte

Sateliti imaju mnoge praktične primene. Iz tog razloga izuzetno je bitno precizno poznavanje njihovih orbita. Na satelit u toku kretanja deluju sile gravitacionog, ali i sile negravitacionog porekla. Da bi se precizno odredila orbita satelita potrebno je poznavanje svih sila koje deluju na satelit.

Jednačina dinamike satelita može se napisati u sledećem obliku

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma M_Z m}{r^3} \vec{r} + \vec{F}_{per} \quad (3.1)$$

Član na levoj strani jednačine (3.1) ukazuje nam da ova jednačina važi za slučaj kada se satelit kreće brzinom mnogo manjom od brzine c . Masa Zemlje označena je sa M_Z , a masa satelita sa m . Na desnoj strani jednačine prepoznavamo Njutnovu silu. Njutnov član je posebno izdvojen jer je dominantan.

Sve ostale sile koje deluju na satelit predstavljaju male perturbacije, i za njih koristim zajedničku oznaku \vec{F}_{per} . Perturbujuće sile ne možemo zanemariti jer one u dužem vremenskom intervalu mogu da izazovu promene orbite. Perturbujuće sile podelio sam u tri grupe. Prvu grupu čine sile gravitacionog porekla, i za njih koristim oznaku $\vec{F}_{per 1}$. Drugu grupu čine sile negravitacionog porekla, i označavam ih sa $\vec{F}_{per 2}$. Treću grupu čine sile koje predstavljaju korekcije Njutnove gravitacije, a dobijene su na osnovu opšte teorije relativnosti. Za njih koristim oznaku \vec{F}_{otr} . U skladu sa ovim definicijama jednačina (3.1) dobija oblik.

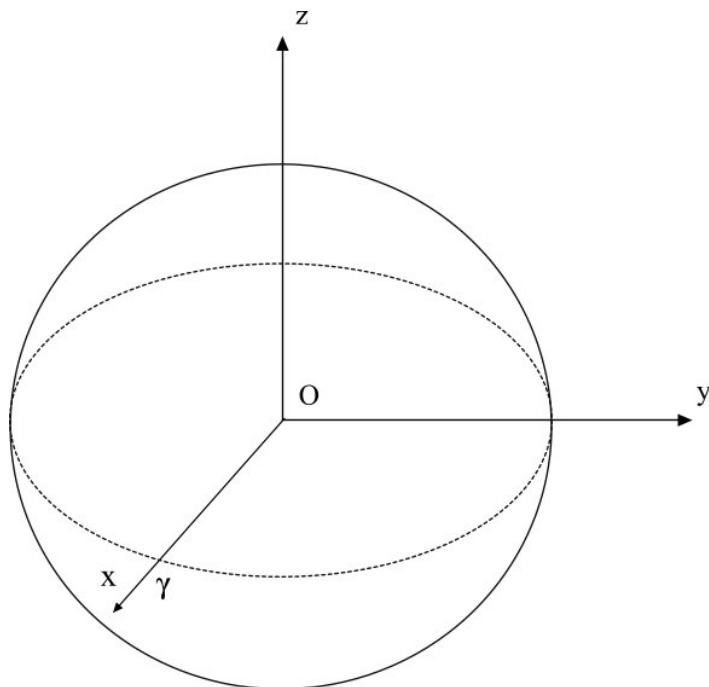
$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma M_Z m}{r^3} \vec{r} + \vec{F}_{per 1} + \vec{F}_{per 2} + \vec{F}_{otr} \quad (3.2)$$

Sada ću dati dodatna objašnjenja o perturbujućim silama gravitacionog porekla. Zemlja je nepravilnog oblika, nehomogene unutrašnje gradje. Najveći poremećajni faktor na kretanje satelita ima spljoštenost Zemlje. Sledeći važan poremećajni faktor predstavlja gravitaciono privlačenje Sunca i Meseca. Masa Meseca je mnogo manja od mase Sunca, ali Mesec je bliži Zemlji tako da je njegov gravitacioni uticaj na satelit veći od gravitacionog uticaja Sunca. Gravitaciono privlačenje Meseca dovodi do nastanka plime i oseke tako da se i taj efekat uzima u razmatranje.

Postoje i nekoliko perturbujućih sila koje nisu gravitacionog porekla. Najznačajnija je sila koja nastaje usled pritiska Sunčevog zračenja. Pritisak nastaje kada se fotoni emitovani sa Sunca sudaraju sa satelitom. Obzirom da fotoni poseduju impuls prilikom interakcije sa satelitom nastaje određena sila koja satelitu daje poremećajno ubrzanje. Sunčevo zračenje se jednim delom odbija od površine Zemlje, i to reflektovano zračenje takodje utiče na kretanje satelita. Ova pojava naziva se albedo.

Najmanji uticaj na kretanje satelita ima sila trenja koja nastaje usled otpora vazduha. Ta sila trenja je veoma mala jer na visinama leta satelita atmosfera je veoma razredjena. Ovi poremećajni efekti jesu mali, ali se uzimaju u razmatranje.

Potrebno je najpre precizirati referentni sistem u kome se određuje radijus vektor satelita. Za opisivanje kretanja satelita obično se koristi Konvencionalni inercijalni sistem (The Conventional Inertial System (CIS)). Definiše se na sledeći način. Koordinatni početak je u centru mase Zemlje. Osa z se poklapa sa trenutnom osom rotacije Zemlje i orjentisana je u pravcu severnog pola. Jedinični vektor te ose označiću sa \vec{e}_{z1} . Ovaj sistem označiću sa S_1 . Osa x nalazi se u ekvatorijalnoj ravni, i usmerena je ka tzv. γ tački (tačka prolećne ravnodnevice). O ovom pojmu biće više reči u narednom tekstu. Jedinični vektor ose x označiću sa \vec{e}_{x1} . Osa y takodje se nalazi u ekvatorijalnoj ravni, i kompletira pravougli sistem desne orjentacije. Jedinični vektor ove ose je \vec{e}_{y1} . Ovaj koordinatni sistem je prikazan na slici 5



Slika 5

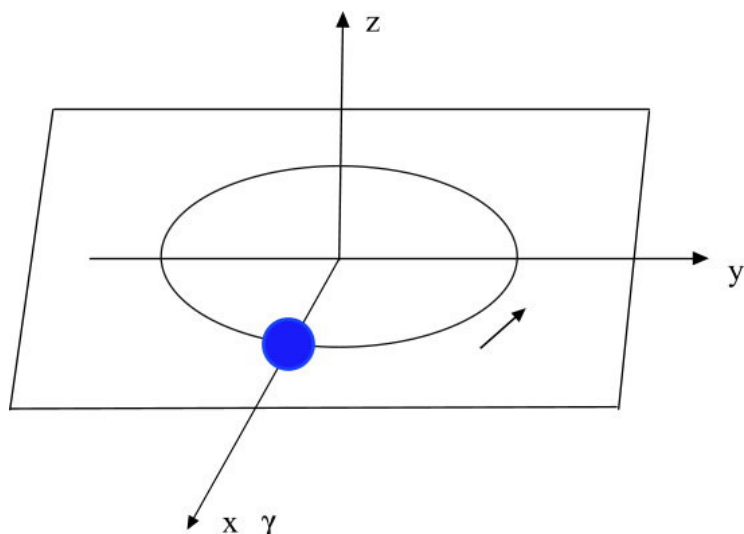
Ovaj sistem ne rotira sa Zemljom, i ako se zanemari mala promena pravca ose rotacije Zemlje sa vremenom može se smatrati inercijalnim sistemom, i koristiti se za opisivanje kretanja satelita. Položaj satelita određen je radijus vektorom

$$\vec{r} = x\vec{e}_{x1} + y\vec{e}_{y1} + z\vec{e}_{z1} \quad (3.3)$$

Konvencionalni inercijalni sistem ne rotira. Možemo uvesti sisteme koji će rotirati zajedno sa Zemljom. Jedan od takvih sistema je Terestrički referentni sistem. Koordinatni početak tog sistema se poklapa sa centrom mase Zemlje, a osa z se poklapa sa trenutnom osom rotacije Zemlje. Osa x prolazi kroz tačku preseka ekvatora i Griničkog meridijana, i nalazi se u ekvatorijalnoj ravni Zemlje. Osa y takodje se nalazi u ekvatorijalnoj ravni, i kompletira pravougli sistem desne orijentacije. Medjutim i ovde postoji jedan problem. Osa Zemljine rotacije menja svoj položaj u odnosu na planetu Zemlju. Problem je prevaziđen na taj način što je izabran tzv. konvencionalni terestrički pol.

Zemlja se kreće oko Sunca po eliptičnoj putanji. Ta putanja se nalazi u tzv. ravni ekliptike. Uvodjenje ove ravni je vrlo korisno jer sve planete izuzev Merkura, kao i mnogi astronomski objekti u Sunčevom sistemu imaju orbite sa malom inklinacijom u odnosu na ravan ekliptike. Ova ravan nam omogućuje da uvedemo neke koordinatne sisteme.

Prvo ću definisati Heliocentrični ekliptički koordinatni sistem (The Heliocentric Ecliptic Coordinate System). Ovaj sistem označiću sa S_2 (slika 6). Početak koordinatnog sistema se poklapa sa centrom Sunca. Z osa je normalna na ravan ekliptike. Jedinični vektor te ose označiću sa \vec{e}_{z2} . Ova osa je usmerena ka severnom ekliptičkom polu.



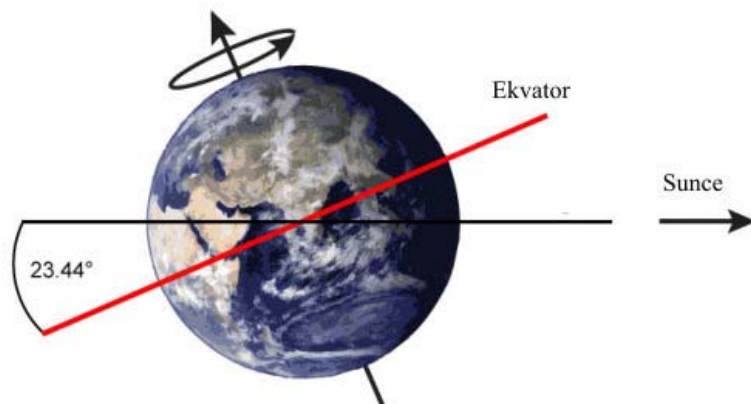
Slika 6

Zemlja se kreće po eliptičnoj putanji. Na slici 6 prikazana je putanja Zemlje po ravni ekliptike i njen položaj 21 marta. Na slici 6 prikazan je i smer kretanja Zemlje. Tog dana na severnoj hemisferi počinje proleće. To je dan prolećnog ekvinocija tj. dan prolećne ravnodnevnice. Tada su dan i noć jednaki i traju po 12 sati, a sunčevi zraci udaraju pod pravim uglom Zemljin ekvator.

Ovaj položaj koji Zemlja ima 21 marta koristi se za definisanje x ose Heliocentričnog ekliptičkog koordinatnog sistema. x osa sistema S_2 dobija se povlačenjem prave koja prolazi kroz centar Zemlje i centar Sunca. x osa je orjentisana od Sunca ka Zemlji, i pripada ravni ekliptike. Jedinični vektor ove ose označicu sa \vec{e}_{x_2} . U dosadašnjem tekstu spomenuta je γ tačka. Naziva se i tačka prolećne ravnodnevice, mada se koristi i naziv prolećna tačka. x osa je usmerena ka γ tački.

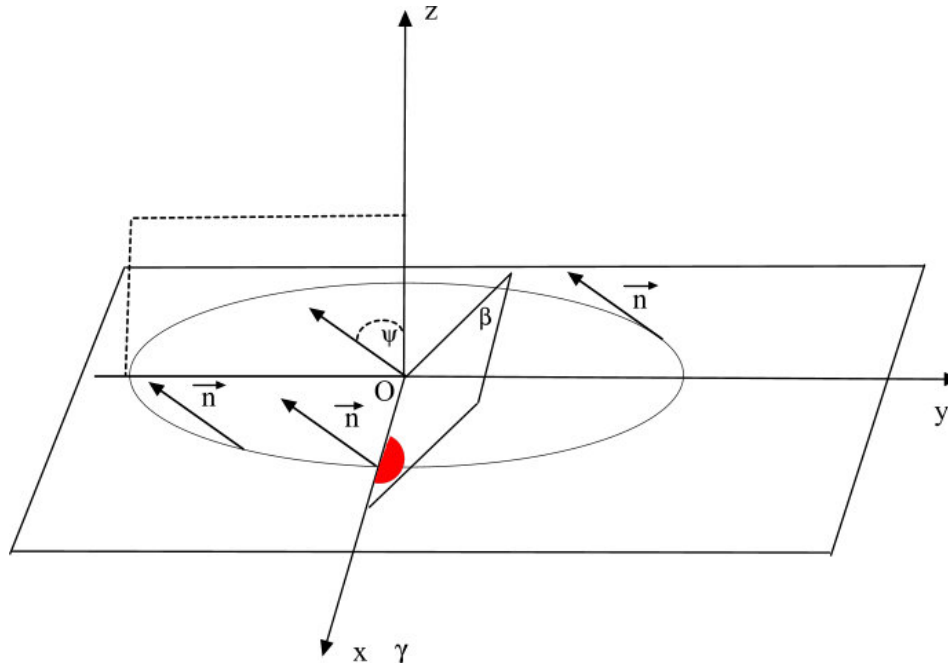
Ostalo je još da odredimo osu y . Ona je normalna na x i z ose. Osa y dobija se iz zahteva da koordinatni sistem bude sistem desne orjentacije. Jedinični vektor ove ose označicu sa \vec{e}_{y_2} .

Pravac ose rotacije Zemlje nije paralelan sa z osom sistema S_2 , već ugao između njih iznosi približno $23,5^\circ$. Ovaj ugao označicu sa ψ . Ovo ima za posledicu da je ekvatorijalna ravan Zemlje nagnuta pod uglom od $23,5^\circ$ u odnosu na ravan ekliptike (slika 7). Ova nagnutost pravca ose rotacije Zemlje izaziva pojavu godišnjih doba.



Slika 7

Vratimo se ponovo položaju Zemlje na dan 21 mart. Na slici 8 nacrtana je ravan β kojoj pripada ekvatorijalna ravan Zemlje, kada se Zemlja nalazi u položaju na dan 21 mart. Deo ekvatorijalne ravni Zemlje prikazan je pomoću obojenog polukruga na slici 8. Osa x sistema S_2 je dobijena presekom ravni ekliptike i ekvatorijalne ravni Zemlje (ravni β) Na slici 8 punom linijom je prikazana putanja Zemlje oko Sunca.



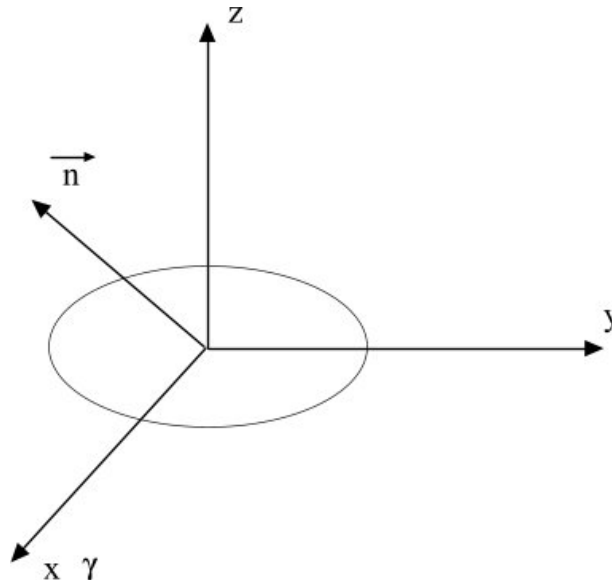
Slika 8

Jedinični vektor ose rotacije Zemlje na slici 8 označio sam sa \vec{n} , i on je identičan sa vektorom \vec{e}_{z1} . Vektor \vec{n} možemo translatorno pomeriti i on će se naći u yOz ravni. Početak vektora \vec{n} poklopiće se sa tačkom O . Prilikom ove translacije nismo promenili intenzitet, pravac i smer ovog vektora. U sistemu S_2 ovaj vektor se može izraziti na način

$$\vec{n} = -\sin\psi\vec{e}_{y1} + \cos\psi\vec{e}_{z1} \quad (3.4)$$

Ako zanemarimo precesiju i nutaciju ovaj vektor se ne menja, odnosno pravac ose rotacije Zemlje ostaje konstantan tokom vremena. Na slici 8 prikazao sam još nekoliko vektora \vec{n} , i svi su oni međusobno ekvivalentni.

Uvešću još jedan sistem koji je povezan sa ravni ekliptike. Naziv tog sistema je Geocentrični ekliptički inercijalni koordinatni sistem (The Geocentric Ecliptic Inertial Coordinate System). Pošto sam uveo u razmatranje više sistema ovaj sistem označiću sa S_3 . On je prikazan je na slici 9

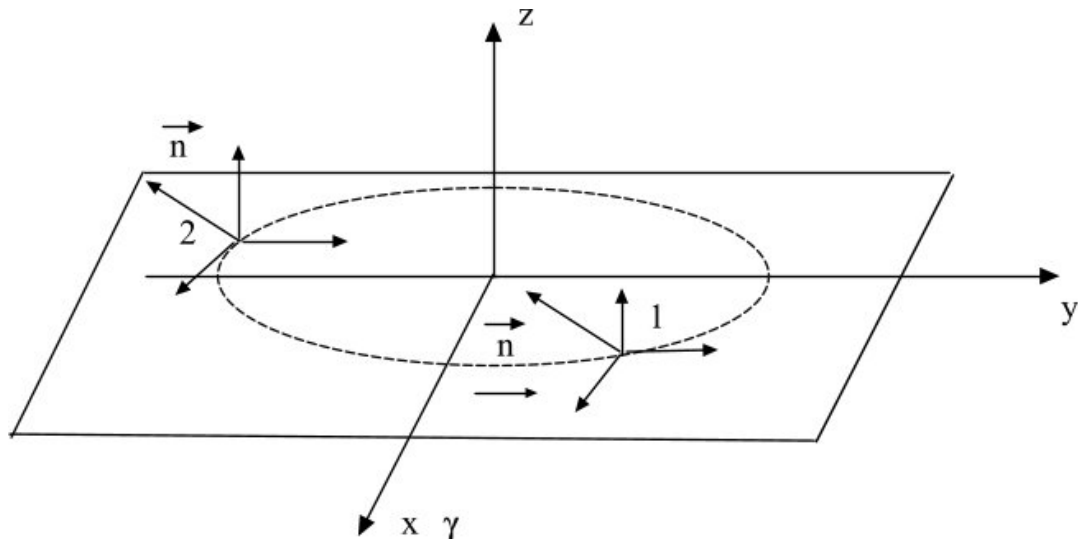


Slika 9

Koordinatni početak tog sistema poklapa se sa centrom mase Zemlje. Osa z je orjentisana u smeru severnog ekliptičkog pola. Jedinični vektor ove ose označicu sa \vec{e}_{z3} , i on je identičan sa vektorom \vec{e}_{z2} . Osa x pripada ravni ekliptike, prolazi kroz centar mase Zemlje i usmerena je ka γ tački. Jedinični vektor ove ose označicu sa \vec{e}_{x3} , i on je identičan sa vektorom \vec{e}_{x2} . Osa y bira se na taj način da se dobije sistem desne orjentacije. Ova osa leži u ravni ekliptike. Jedinični vektor ove ose označicu sa \vec{e}_{y3} , i on je identičan sa vektorom \vec{e}_{y2} . Na slici 9 je prikazan i vektor \vec{n} , odnosno jedinični vektor ose rotacije Zemlje.

Pravac ose rotacije Zemlje menja se tokom vremena. Zemlja nema oblik idealne sfere, nego je malo spljoštena na polovima. Masa nije homogeno distribuirana unutar Zemlje. Zbog gravitacionog uticaja Sunca, Meseca i planeta na nehomogenu i blago spljoštenu Zemlju dolazi do složenog periodičnog kretanja njene ose rotacije u odnosu na zvezde i ekstragalaktičke objekte. To kretanje se može razložiti na dve komponente. Prva komponenta se zove precesija, a druga nutacija. Precesija Zemljine ose je pojava koju su zabeležili još drevni astronomi. Ako produžimo osu rotacije Zemlje dobićemo jednu zamišljenu pravu. Na toj pravoj definisaćemo jednu duž. Početak duži nalazi se u centru mase Zemlje. Tu tačku obeležićemo sa O . Kraj duži označicu tačkom B , i ona se nalazi na nekoj udaljenosti od tačke O . Zbog precesije prava će opisati rotacioni konus, a tačka B kružnicu. Vreme koje je potrebno da tačka B opiše kružnicu iznosi oko 25800 godina. Precesiono kretanje kombinovano je sa nutacijom, koja predstavlja periodičnu promenu nagiba ravni ekvatora u odnosu na ravan ekliptike, sa osnovnim periodom od 18,6 godina. Zbog efekata precesije i nutacije dolazi do konstantne rotacije γ tačke u ravni ekliptike sa periodom od oko 25800 godina. Za vremenski period od 72 godine γ tačka se pomeri u ravni ekliptike za jedan stepen.

Posmatrajmo kretanje Zemlje oko Sunca. Na slici 10 prikazana su dva položaja Zemlje. Ona su označena sa 1 i 2. Na slici su predstavljena dva Geocentrična ekliptička inercijalna koordinatna sistema koja se nalaze u položajima 1 i 2. Za ove položaje predstavljen je i vektor \vec{n} , odnosno jedinični vektor ose rotacije Zemlje. Na slici 10 predstavljen je i Heliocentrični ekliptički koordinatni sistem. Sa slike se uočava da su koordinatne ose sistema S_2 i S_3 međusobno paralelne u svakom trenutku vremena. Na slici je predstavljen i smer kretanja Zemlje oko Sunca.



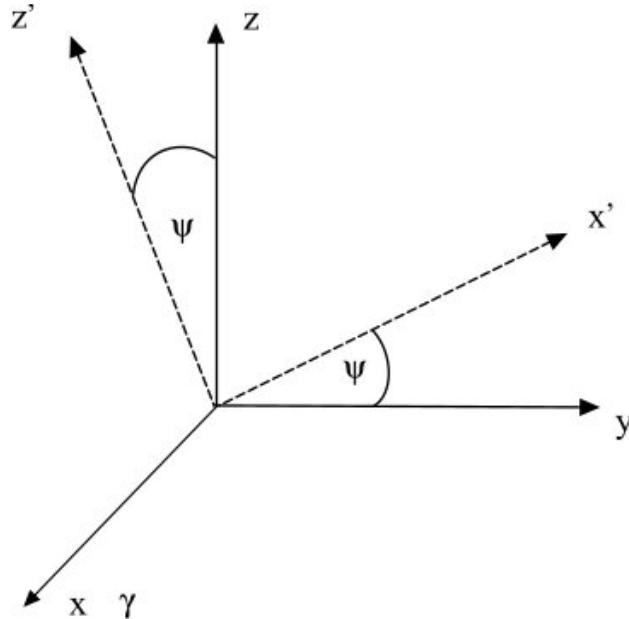
Slika 10

Sistemi S_1 i S_3 imaju pojedine stvari zajedničke. Počeci oba sistema nalaze se u centru mase Zemlje. Ose x su im paralelne, i usmerene su ka γ tački. Važi sledeća jednakost

$$\vec{e}_{x1} = \vec{e}_{x3} \quad (3.5)$$

Postoje i određene razlike. Z osa sistema S_3 je normalna na ravan ekliptike, a z osa sistema S_1 je normalna na ekvatorijalnu ravan Zemlje. Ugao između ove dve ose je približno $23,5^\circ$.

Na slici 11 prikazani su koordinatni sistemi S_1 i S_3 . Koordinatne ose sistema S_3 označene su sa x_3, y_3 i z_3 , a koordinatne ose sistema S_1 sa x_1, y_1 i z_1 .



Slika 11

Iz sistema S_3 može se dobiti sistem S_1 jednostavnom transformacijom. Ako izvršimo rotaciju sistema S_3 oko ose x u pozitivnom smeru za ugao od $23,5^\circ$ dobićemo sistem S_1 (slika 11)

Osa z_1 dobijena je rotacijom ose z_3 za ugao $\psi = 23,5^\circ$ oko ose x_3 . Jedinični vektor z ose sistema S_1 označio sam sa \vec{e}_{z1} . On se može izraziti preko vektora \vec{e}_{y3} i \vec{e}_{z3} na sledeći način

$$\vec{e}_{z1} = -\sin\psi\vec{e}_{y3} + \cos\psi\vec{e}_{z3} \quad (3.6)$$

Jedinični vektor y ose sistema S_1 označio sam sa \vec{e}_{y1} . On se može izraziti na sledeći način

$$\vec{e}_{y1} = \cos\psi\vec{e}_{y3} + \sin\psi\vec{e}_{z3} \quad (3.7)$$

Sistemi S_1 i S_3 imaju isti koordinatni početak (centar mase Zemlje). Neka je u sistemu S_3 dat vektor \vec{A}

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_{x3} + A_y\vec{e}_{y3} + A_z\vec{e}_{z3} \quad (3.8)$$

Početak vektora \vec{A} se poklapa sa koordinatnim početkom sistema S_3 . Možemo postaviti pitanje kolike su komponente ovog vektora u sistemu S_1 . Potrebno je rešiti ovaj problem jer će on imati i svoju praktičnu primenu. Vektor \vec{A} se nalazi i u sistemu S_1 i može se izraziti na sledeći način

$$\vec{A} = \overline{A}_x\vec{e}_{x1} + \overline{A}_y\vec{e}_{y1} + \overline{A}_z\vec{e}_{z1} \quad (3.9)$$

Da bi smo našli komponente vektora \vec{A} u sistemu S_1 krenimo najpre od identiteta

$$\vec{A} = \vec{A}$$

$$\overline{A}_x\vec{e}_{x1} + \overline{A}_y\vec{e}_{y1} + \overline{A}_z\vec{e}_{z1} = A_x\vec{e}_{x3} + A_y\vec{e}_{y3} + A_z\vec{e}_{z3} \quad (3.10)$$

Ako pomnožimo jednačinu (3.10) sa \vec{e}_{x1} dobićemo

$$\overline{A}_x = A_x(\vec{e}_{x3} \cdot \vec{e}_{x1}) + A_y(\vec{e}_{y3} \cdot \vec{e}_{x1}) + A_z(\vec{e}_{z3} \cdot \vec{e}_{x1}) \quad (3.11)$$

Ponovimo proceduru i za ostale dve komponente

$$\overline{A}_y = A_x(\vec{e}_{x3} \cdot \vec{e}_{y1}) + A_y(\vec{e}_{y3} \cdot \vec{e}_{y1}) + A_z(\vec{e}_{z3} \cdot \vec{e}_{y1}) \quad (3.12)$$

$$\overline{A}_z = A_x(\vec{e}_{x3} \cdot \vec{e}_{z1}) + A_y(\vec{e}_{y3} \cdot \vec{e}_{z1}) + A_z(\vec{e}_{z3} \cdot \vec{e}_{z1}) \quad (3.13)$$

Dobijeni rezultati mogu se prikazati u matricnoj formi

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_x \\ \overline{A}_y \\ \overline{A}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x3} \cdot \vec{e}_{x1} & \vec{e}_{y3} \cdot \vec{e}_{x1} & \vec{e}_{z3} \cdot \vec{e}_{x1} \\ \vec{e}_{x3} \cdot \vec{e}_{y1} & \vec{e}_{y3} \cdot \vec{e}_{y1} & \vec{e}_{z3} \cdot \vec{e}_{y1} \\ \vec{e}_{x3} \cdot \vec{e}_{z1} & \vec{e}_{y3} \cdot \vec{e}_{z1} & \vec{e}_{z3} \cdot \vec{e}_{z1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Ako iskoristimo jednačine (3.5-7) dobijamo

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_x \\ \overline{A}_y \\ \overline{A}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Matrica transformacije glasi

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Može se postaviti i inverzni problem. Recimo date su nam komponente vektora u sistemu S_1 , a potrebno je odrediti komponente tog vektora u sistemu S_3 . Ovaj problem se može rešiti korišćenjem prezentovane procedure i matrice transformacije.

Za moju dalju analizu bitan je član \vec{F}_{otr} koji figuriše u jednačini (3.2). On se sastoji od tri sile koje predstavljaju korekcije Njutnove gravitacije, a dobijene su na osnovu opšte teorije relativnosti. U daljem tekstu biće prezentovani konkretni oblici tih sila. Putanja tela u gravitacionom polju u opštoj teoriji relativnosti određuje se na osnovu geodezijske jednačine. U pojedinim slučajevima jednačine kretanja tela mogu se prikazati u vektorskoj formi, odnosno u obliku na koji smo navikli u Njutnovo mehanici. U radu [4] prezentovano je dopunsko ubrzanje koje se javlja kao posledica opšte teorije relativnosti. Taj rezultat je dat u vektorskoj formi i jednostavniji je za analizu. Ja ću malo modifikovati originalne oznake iz rada [4] i taj rezultat predstaviti u obliku

$$\vec{a}_{otr} = \frac{\gamma M_z}{c^2 r^3} \left\{ \left[4 \frac{\gamma M_z}{r} - (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \right] \vec{r} + 4(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}} \right\} +$$

$$2 \frac{\gamma M_z}{c^2 r^3} \left[\frac{3}{r^2} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})(\vec{r} \cdot \vec{J}) + (\dot{\vec{r}} \times \vec{J}) \right] + 3 \left[\dot{\vec{R}} \times \left(-\frac{\gamma M_s \vec{R}}{c^2 R^3} \right) \right] \times \dot{\vec{r}} \quad (3.16)$$

Ovaj rezultat je dobijen za slučaj slabog gravitacionog pola i nerelativističkih brzina kretanja probnih tela. Za slučaj gravitacionog polja Zemlje i kretanja satelita ovi uslovi su ispunjeni. Pri dobijanju ove jednačine je pretpostavljeno da je Zemlja homogena lopta.

Potrebno je objasniti šta znače pojedine veličine. Univerzalna gravitaciona konstanta je označena sa γ , a brzina svetlosti u vakuumu sa c . Masa Zemlje i masa Sunca označene su respektivno sa M_z i M_s . Položaj satelita u odnosu na Zemlju opisan je radijus vektorom \vec{r} . Za opisivanje položaja Zemlje u odnosu na Sunce koristi se vektor \vec{R} . Početak tog vektora nalazi se u centru Sunca, a R je moduo vektora.

Veličina \vec{J} je moment impulsa Zemlje po jedinici mase

$$\vec{J} = \frac{\vec{L}}{M_z}$$

Na osnovu ove jednačine jednostavno nalazimo moment impulsa Zemlje

$$\vec{L} = \vec{J} M_z \quad (3.17)$$

U ovoj aproksimaciji se uzima da je Zemlja idealna lopta sa homogenom distribucijom mase.

Na osnovu (3.17) jednačina (3.16) postaje

$$\begin{aligned} \vec{a}_{otr} = & \frac{\gamma M_z}{c^2 r^3} \left\{ \left[4 \frac{\gamma M_z}{r} - (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \right] \vec{r} + 4(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}} \right\} + \\ & 2 \frac{\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3}{r^2} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})(\vec{r} \cdot \vec{L}) + (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \right] + \\ & 3 \left[\dot{\vec{R}} \times \left(-\frac{\gamma M_s \vec{R}}{c^2 R^3} \right) \right] \times \dot{\vec{r}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Predhodna jednačinu napisaću u obliku tri sabirka

$$\vec{a}_{otr} = \vec{a}_{\text{švarcvild}} + \vec{a}_{LT} + \vec{a}_{de\ siter} \quad (3.19)$$

Prvi sabirak nazvaću Švarcvildovo ubrzanje, i ono je definisano sledećom jednačinom

$$\vec{a}_{\text{švarcvild}} = \frac{\gamma M_z}{c^2 r^3} \left\{ \left[4 \frac{\gamma M_z}{r} - (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \right] \vec{r} + 4(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}} \right\} \quad (3.20)$$

Naziv potiče od naučnika Karla Švarcvilda (Karl Schwarzschild). On je dobio rešenje Ajnštajnovih jednačina polja. Njegovo rešenje može se primeniti i na dinamiku veštačkih satelita. Ako jednačinu (3.20) pomnožim masom veštačkog zemljinog satelita dobiću silu

$$\vec{F}_{\text{švarcvild}} = m \vec{a}_{\text{švarcvild}} \quad (3.21)$$

U skladu sa predhodnom diskusijom ovu silu nazvaću Švarcvildova sila. Glavni doprinos ove sile na veštačke satelite je precesija perihela njihove orbite. Ova sila GPS satelitima saopštava ubrzanje reda $10^{-10} m/s^2$.

Drugi sabirak nazvaću LT ubrzanje, i ono je definisano jednačinom

$$\vec{a}_{LT} = 2 \frac{\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3}{r^2} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})(\vec{r} \cdot \vec{L}) + (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \right] \quad (3.22)$$

Skraćenica LT potiče od imena naučnika Lense i Tiringa (Josef Lense, Hans Thirring). Oni su predvideli efekat koji nosi naziv po njima, a sastoji se u tome da rotacija masivnih objekata (Zemlje) ima uticaj na kretanje probnih tela (veštačkih satelita). U Njutnovoju mehanici takav efekat ne postoji,

jer gravitaciono polje zavisi jedino od mase tela, a ne od njegove rotacije. U jednačini (3.22) figuriše moment impulsa Zemlje, a on je povezan sa ugaonom brzinom, veličinom koja karakteriše rotaciju Zemlje. Kasnije se došlo do zaključka da rotacija Zemlje može izazvati precesiju žiroskopa koji se nalazi u satelitu koji orbitira oko Zemlje.

Jednačinu (3.22) pomnožiću masom veštačkog zemljinog satelita, i dobiću silu koju ću nazvati *LT* sila

$$\vec{F}_{LT} = m\vec{a}_{LT} \quad (3.23)$$

Ova sila GPS satelitima saopštava ubrzanje reda $10^{-12} m/s^2$.

Preostao nam je još treći sabirak u jednačini (3.18). To ubrzanje nazvaću de Siterovo ubrzanje, i određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{a}_{de\ Siter} = 3 \left[\dot{\vec{R}} \times \left(-\frac{\gamma M_s \vec{R}}{c^2 R^3} \right) \right] \times \dot{\vec{r}} \quad (3.24)$$

Možemo uvesti i de Siterovu silu

$$\vec{F}_{de\ Siter} = m\vec{a}_{de\ Siter} \quad (3.25)$$

Ova sila takodje ima malu vrednost, ali utiče na orbitu veštačkog satelita. Ona GPS satelitima saopštava ubrzanje reda $10^{-11} m/s^2$. De Siterovo ubrzanje je posledica gravitacionog uticaja Sunca na Zemlju.

U jednačini (3.2) figuriše član \vec{F}_{otr} . On se sastoji od tri sile koje predstavljaju korekcije Njutnove gravitacije, a dobijene su na osnovu opšte teorije relativnosti. Na osnovu predhodne diskusije sila \vec{F}_{otr} može se izraziti na sledeći način

$$\vec{F}_{otr} = \vec{F}_{\check{s}varcvild} + \vec{F}_{LT} + \vec{F}_{de\ Siter} \quad (3.26)$$

, i jednačina (3.2) dobija oblik

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma Mm}{r^3}\vec{r} + \vec{F}_{\check{s}varcvild} + \vec{F}_{LT} + \vec{F}_{de\ Siter} + \vec{F}_{per\ 1} + \vec{F}_{per\ 2} \quad (3.27)$$

Prilikom kretanja satelita postoje sile $\vec{F}_{per\ 1}$ i $\vec{F}_{per\ 2}$, koje imaju određeni uticaj na orbitu satelita. Cilj ovog poglavlja nije detaljna analiza uticaja ovih sila, već perturbujuće sile koje su dobijene na osnovu opšte teorije relativnosti. Zato ću ja zanemariti sile $\vec{F}_{per\ 1}$ i $\vec{F}_{per\ 2}$ iz dalje diskusije, i jednačina (3.27) dobija jednostavniju formu

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma Mm}{r^3}\vec{r} + \vec{F}_{\check{s}varcvild} + \vec{F}_{LT} + \vec{F}_{de\ Siter} \quad (3.28)$$

Ova jednačina opisuje dinamiku satelita sa stanovišta opšte teorije relativnosti. Postavlja se pitanje kako dobiti odgovarajuću jednačinu sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Problem je prilično komplikovan jer se satelit nalazi u gravitacionom polju Zemlje, Sunca i Meseca. Taj problem analiziraću u šestom poglavlju. Bez obzira na svu kompleksnost problema, u daljem tekstu najpre ću odrediti silu sa stanovišta gravitoelektromagnetizma koja po svojoj formi odgovara sili \vec{F}_{LT} . Na osnovu (3.22) i (3.23) može se napisati sledeća jednačina

$$\vec{F}_{LT} = m\vec{v} \times \left\{ 2 \frac{\gamma}{c^2 r^3} \left[-\frac{3}{r^2} \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{L}) + (\vec{r} \times \vec{L}) \right] \right\} \quad (3.29)$$

Na telo koje se kreće u gravitomagnetnom polju deluje sila (jednačina (2.28))

$$\vec{F}_{gem} = m\vec{v} \times \vec{B}_{gem} \quad (3.30)$$

Zapaža se formalna sličnost jednačina (3.29) i (3.30).

Jednačina (3.18) dobijena je sa stanovišta opšte teorije relativnosti. Pri tome je korišćena pretpostavka da je Zemlja idaelna lopta sa homogenom distribucijom mase. Dobijanje jednačine (3.18) zasniva se na aproksimaciji slabog gravitacionog polja i malih brzina probnih tela. U slučaju Zemlje i kretanja veštačkih satelita ovi uslovi su ispunjeni.

U daljem radu i ja ću koristiti pretpostavku da je Zemlja idaelna lopta sa homogenom distribucijom mase. Cilj mi je da odredim gravitoelektrično i gravitomagnetno polje Zemlje.

Zemlja usled rotacije stvara gravitomagnetno polje, koje se ne menja tokom vremena. Takodje i gravitoelektrično polje se ne menja tokom vremena. Zbog toga neću koristiti sistem jednačina (2.34-37) koji opisuje vremenski promenljiva polja već ću koristiti sledeći sistem jednačina

$$\operatorname{div} \vec{E}_{gem} = \frac{\rho_m}{\epsilon_{gem}} \quad (3.31)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}_{gem} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{gem} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}_{gem} = \mu_{gem} \vec{j}_m$$

O ovom sistemu je već bilo reči u drugom poglavlju. Pokazano je da vektorski potencijal zadovoljava jednačinu (2.72), i da opšte rešenje te jednačine glasi

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.32)$$

Na osnovu jednačine (3.31) može se dobiti jačina gravitoelektričnog polja. Izvršimo integraciju leve i desne strane jednačine (3.31) po zapremini V'

$$\int_{V'} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} dV' = \frac{1}{\epsilon_{gem}} \int_{V'} \rho_m dV'$$

Integral na desnoj strani jednačine daje masu Zemlje.

$$\int_{V'} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} dV' = \frac{M_z}{\epsilon_{gem}}$$

Primenom Gausove teoreme dobijamo

$$\oiint_S \vec{E}_{gem} d\vec{s} = \frac{M_z}{\epsilon_{gem}} \quad (3.33)$$

Pretpostavili smo da Zemlja ima oblik idealne lopte. To ima za posledicu da je vektor jačine gravitoelektričnog polja kolinearisan sa vektorom $d\vec{s}$. Uzeću da ovi vektori imaju suprotne smerove. U skladu sa tom činjenicom površinski integral ima vrednost

$$\oiint_S \vec{E}_{gem} d\vec{s} = -E_{gem} 4r^2 \pi$$

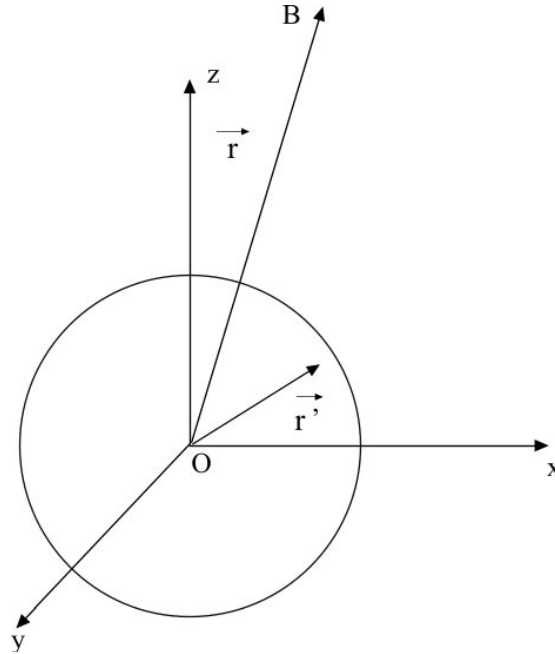
Zamenom ovog rezultata u jednačinu (3.33) i korišćenjem jednačine (2.31) dobija se rezultat

$$E_{gem} = \frac{\gamma M_z}{r^2}$$

Ova jednačina može se napisati u vektorskoj formi

$$\vec{E}_{gem} = -\frac{\gamma M_z}{r^3} \vec{r} \quad (3.34)$$

Odredjena je jačina gravitoelektričnog polja. Lopte mase M usled rotacije generiše gravitomagnetno polje. Potrebno je odrediti jačinu gravitomagnetnog polja Zemlje, odnosno rešiti jednačinu (3.32). Da bi to uradio najpre ću koristi analogiju sa elektrodinamikom, odnosno analiziraću jedan ilustrativan primer iz elektrodinamike. Uvodim u razmatranje jednu zapreminski naelektrisanu loptu poluprečnika R . Naelektrisanje lopte je Q , a njena masa M . Lopta rotira oko jednog svog prečnika konstantnom ugaonom brzinom ω (slika 12).



Slika 12

Potrebno je uvesti koordinatni sistem. Početak koordinatnog sistema poklapa se sa centrom lopte, a z osa je duž ose rotacije lopte. Ose x i y nalaze se u ekvatorijalnoj ravni lopte, a izabrane su tako da sa z osom čine trijedrar desne orijentacije. Ovaj koordinatni sistem miruje, a lopta rotira u odnosu na njega.

Zbog rotacije lopte nastaje magnetno polje unutar i van lopte. Analiziraću samo magnetno polje van lopte. Jačina magnetnog polje van lopte u nekoj tački određenoj radijus vektorom \vec{r} određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right]$$

Veličina \vec{m} naziva se magnetni moment i određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV' \quad (3.35)$$

Predhodni izraz važi sa kontinualnu raspodelu naelektrisanja. Za slučaj diskretne raspodele naelektrisanja magnetni moment izračunava se na osnovu jednačine

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i) \quad (3.36)$$

Vektorski potencijal u magnetostatici određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.37)$$

U našem primeru naelektrisanje je lokalizovano unutar lopte zapremine V' . Integracija se vrši po toj zapremini, a vektor \vec{r}' određuje položaje tačaka unutar te zapremine.

Potrebno je naći vektorski potencijal (magnetno polje) u tački koja se nalazi na velikoj udaljenosti od zapremine V' , odnosno ispunjen je sledeći uslov

$$|\vec{r}'| \ll |\vec{r}| \quad (3.38)$$

Veličina $|\vec{r} - \vec{r}'|$ može se izraziti u sledećem obliku

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}$$

odnosno

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}$$

Zbog uslova (3.38) poslednji sabirak u podkorenom izrazu može se zanemariti, i dobijamo rezultat

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r \sqrt{1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}}$$

Ako je h mnogo manje od jedinice važi sledeća aproksimacija

$$\sqrt{1 - h} \approx 1 - \frac{h}{2}$$

Njenim korišćenjem dobijamo

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \quad (3.39)$$

Potrebna je recipročna vrednost veličine $|\vec{r} - \vec{r}'|$ jer ona figuriše u jednačini za vektorski potencijal

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)} \quad (3.40)$$

Korišćenjem aproksimacije

$$\frac{1}{1 - h} \approx 1 + h$$

možemo transformisati jednačinu (3.40) i dobiti

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)$$

, odnosno

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \quad (3.41)$$

Zamenom ovog izraza u jednačinu za vektorski potencijal dobijamo

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \right) dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') dV' + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dV'$$

Ova jednačina može se napisati u obliku

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_m(\vec{r}) + \vec{A}_d(\vec{r})$$

Ovde je izvršeno razlaganje vektorskog potencijala po multipolima. Prvi član naziva se monopolni, a drugi dipolni. Prilikom razvoja funkcije $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ uzeo sam samo dva člana, a ostale sam zanemario. U skladu sa tim figurišu samo monopolni i dipolni član. Naravno funkcija $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ može se razviti u red koji će sadržati proizvoljan (N) broj članova. To će imati za posledicu da se vektorski potencijal može prikazati u obliku zbira N sabiraka.

Analizirajmo najpre monopolni član

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') dV'$$

Prvo ćemo transformisati podintegralni izraz koristeći definiciju gustine struje

$$\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') dV' = \int_{V'} \rho \vec{v}' dV'$$

, a potom ćemo preći sa kontinualne raspodele naelektrisanja na diskretnu

$$\int_{V'} \rho \vec{v}' dV' = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{v}'_i$$

Nakon ovih transformacija dobili smo sledeći rezultat

$$\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') dV' = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{v}'_i \quad (3.42)$$

Električni dipolni moment sistema određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{r}'_i \quad (3.43)$$

Potražimo sada vremensku promenu ove veličine

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{r}'_i = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \frac{d\vec{r}'_i}{dt} = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{v}'_i$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (3.42) dobijamo

$$\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') dV' = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.44)$$

U magnetostatici važi uslov da nema promene električnog dipolnog momenta sistema sa vremenom

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

Na osnovu ovog uslova sledi da je monopolni član jednak nuli.

Ostalo je još da analiziramo dipolni član. On je definisan relacijom

$$\vec{A}_d(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dV' \quad (3.45)$$

Može se pokazati da važi relacija

$$\int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dV' = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV' \quad (3.46)$$

Magnetni moment određuje se na osnovu jednačine (3.35). Koristeći ovu veličinu jednačina (3.46) postaje

$$\int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dV' = \vec{m} \times \vec{r}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (3.45) dobijamo

$$\vec{A}_d(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

Korišćenjem relacije

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r})$$

dobijamo jačinu magnetnog polja

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right] \quad (3.47)$$

Ovu proceduru treba primeniti za dobijanje jačine gravitomagnetnog polja koje stvara lopta mase M koja rotira oko jednog svog prečnika konstantnom ugaonom brzinom ω . Lopta ima homogenu distribuciju mase. Poluprečnik lopte označio sam sa R . Koristiću koordinatni sistem koji je prikazan na slici 12. Zbog rotacije lopte nastaje gravitomagnetno polje unutar i van lopte. Analiziraću samo gravitomagnetno polje van lopte.

Vektorski potencijal u gravitoelektromagnetizmu određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \int_{V'} \frac{\vec{J}_m(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Potrebno je odrediti jačinu gravitomagnetnog polja u tački koja se nalazi na velikoj udaljenosti od zapremine V' . Kao i u slučaju elektrodinamike ispunjen je uslov

$$|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$$

Zbog važenja ovog uslova mogu koristiti jednačinu (3.41), i vektorski potencijal dobija sledeći oblik

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2 r} \int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}') dV' - \frac{4\gamma}{c^2 r^3} \int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}_m(\vec{r}') dV' \quad (3.48)$$

Vektorski potencijal može se predstaviti u obliku zbira dva sabirka

$$\vec{A}_{gem}(\vec{r}) = \vec{A}_{gem m}(\vec{r}) + \vec{A}_{gem d}(\vec{r})$$

Po analogiji sa elektrodinamikom prvi član nazvaću monopolni, a drugi dipolni. Oni su definisani sledećim jednačinama

$$\vec{A}_{gem m}(\vec{r}) = -\frac{4\gamma}{c^2 r} \int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}') dV' \quad (3.49)$$

$$\vec{A}_{gem d}(\vec{r}) = -\frac{4\gamma}{c^2 r^3} \int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}_m(\vec{r}') dV' \quad (3.50)$$

U gravitoelektromagnetizmu koristimo masenu gustinu struje. Podintegralni izraz u jednačini (3.49) transformisaćemo koristeći definiciju masene gustine struje

$$\int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}') dV' = \int_{V'} \rho_m \vec{v} dV'$$

, a potom ćemo preći sa kontinualne raspodele mase na diskretnu

$$\int_{V'} \rho_m \vec{v} dV' = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i$$

Nakon ovih transformacija dobili smo sledeći rezultat

$$\int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}') dV' = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i \quad (3.51)$$

U elektrodinamici uvedena je veličina električni dipolni moment sistema. U gravitoelektromagnetizmu uvodim veličinu \vec{p}_{gem} . Tu veličinu nazvaću maseni dipolni moment sistema, i ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{p}_{gem} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}'_i \quad (3.52)$$

Potražiću vremensku promenu veličine \vec{p}_{gem} . Uradiću sličan postupak kao u elektrodinamici

$$\frac{d\vec{p}_{gem}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d\vec{r}'_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (3.51) dobijam

$$\int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}') dV' = \frac{d\vec{p}_{gem}}{dt}$$

Na osnovu ovog rezultata monopolni član postaje

$$\vec{A}_{gem\ m}(\vec{r}) = -\frac{4\gamma}{c^2 r} \frac{d\vec{p}_{gem}}{dt} \quad (3.53)$$

Ovaj član u opštem slučaju različit je od nule. U ovom konkretnom primeru rotirajuće lopte jednak je nuli. Razlog dobijanja nulte vrednosti je simetrija lopte u odnosu na njen centar. Možemo uzeti da se lopta sastoji od velikog broja materijalnih tačaka. Svaka materijalna tačka ima istu masu m . Radi lakše analize posmatrajmo materijalne tačke koje se nalaze u ekvatorijalnoj ravni lopte. Izaberimo proizvoljnu materijalnu tačku. Radijus vektor te tačke označimo sa \vec{r}'_1 . Ovoj materijalnoj tački možemo naći simetričnu materijalnu tačku u odnosu na centar lopte. Radijus vektor te tačke označimo sa \vec{r}'_2 . Za vektore \vec{r}'_1 i \vec{r}'_2 važi relacija

$$\vec{r}'_1 = -\vec{r}'_2$$

Ovo su suprotni vektori. Očigledno je da važi i sledeća jednačina

$$m\vec{r}'_1 + m\vec{r}'_2 = \vec{0} \quad (3.54)$$

Veličina \vec{p}_{gem} definiše se na osnovu jednačine (3.52)

$$\vec{p}_{gem} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}'_i \quad (3.55)$$

Potrebno je naći ovu sumu za slučaj lopte. Izaberimo neku materijalnu tačku koja ne mora pripadati ekvatorijalnoj ravni lopte. Toj materijalnoj tački možemo naći simetričnu materijalnu tačku u odnosu na centar lopte. Njihove radijus vektore označimo sa \vec{r}'_3 i \vec{r}'_4 . Za ovaj par materijalnih tačaka važe jednačine

$$\vec{r}'_3 = -\vec{r}'_4$$

$$m\vec{r}'_3 + m\vec{r}'_4 = \vec{0} \quad (3.56)$$

Ovaj postupak ponavljamo i za druge materijalne tačke. Cilj nam je naći sumu na desnoj strani jednačine (3.55). Dosada smo u analizu uveli četiri čestice (dva para). Ako saberemo jednačine (3.54) i (3.56) dobijamo

$$m\vec{r}'_1 + m\vec{r}'_2 + m\vec{r}'_3 + m\vec{r}'_4 = \vec{0}$$

Ako izvršimo ovakvo sumiranje za sve parove materijalnih tačaka dobićemo da je suma na desnoj strani jednačine (3.55) jednaka nuli, odnosno da je veličina \vec{p}_{gem} jednaka nuli.

Preostaje nam da analiziramo dipolni član

$$\vec{A}_{gem\ d}(\vec{r}) = -\frac{4\gamma}{c^2 r^3} \int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}_m(\vec{r}') dV' \quad (3.57)$$

U elektrodinamici važi jednačina (3.46). Uzeću da u gravitoelektromagnetizmu važi jednačina

$$\int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}_m(\vec{r}') dV' = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{J}_m(\vec{r}') dV' \quad (3.58)$$

Integral koji se pojavljuje na desnoj strani ove jednačine možemo zameniti odgovarajućom sumom

$$\int_{V'} \vec{r}' \times \vec{J}_m(\vec{r}') dV' = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i)$$

Ova suma predstavlja moment impulsa tela

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i)$$

U skladu sa tim jednačina (3.58) postaje

$$\int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}_m(\vec{r}') dV' = \frac{1}{2} \vec{L} \times \vec{r}$$

Korišćenjem ovog rezultata vektorski potencijal dobija oblik

$$\vec{A}_{gem d}(\vec{r}) = -\frac{2\gamma \vec{L} \times \vec{r}}{c^2 r^3} \quad (3.59)$$

Primenom jednačine

$$\vec{B}_{gem} = rot \vec{A}_{gem}$$

dobijam jačinu gravitomagnetnog polja

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right] \quad (3.60)$$

Ovaj rezultat može se primeniti za određivanje gravitomagnetnog polja Zemlje, jer sam pretpostavio da je Zemlja idealna loptom sa homogenom distribucijom mase.

U skladu sa tim moment inercije Zemlje određujemo na osnovu jednačine

$$I = \frac{2}{5} M_z R_z^2$$

Sa R_z je označen poluprečnik Zemlje. Sa $\vec{\omega}_z$ označicu vektor ugaone brzine rotacije Zemlje. Moment impulsa Zemlje određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{L} = I \vec{\omega}_z = \frac{2}{5} M_z R_z^2 \vec{\omega}_z \quad (3.61)$$

Jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja Zemlje određuju se na osnovu jednačina (3.34) i (3.60). Korišćenjem jednačine (2.28) dobijam da na veštački satelit deluje sila

$$\vec{F}_{gem} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + m \vec{v} \times \left\{ \frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[-\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} + \vec{L} \right] \right\} \quad (3.62)$$

Posmatrajmo drugi sabirak u jednačini (3.62). On je povezan sa gravitomagnetnim poljem koje je uzrokovano rotacijom Zemlje oko svoje ose. Ovu komponentu sile označicu sa $\vec{F}_{gem 1}$

$$\vec{F}_{gem 1} = m \vec{v} \times \left\{ \frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[-\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} + \vec{L} \right] \right\} \quad (3.63)$$

Ako uporedimo ovu silu sa \vec{F}_{LT} vidimo da su jednačine (3.63) i (3.29) identične. Znači na osnovu teorije gravitoelektromagnetizma dobio sam rezultat koji je identičan sa rezultatom iz opšte teorije relativnosti. Rezultati dati jednačinama (3.60) i (3.63) veoma su povoljni za teoriju gravitoelektromagnetizma.

4 Efekti retardacije za slučaj kretanje tela po kružnim (eliptičnim) orbitama

Postoji određeni skup eksperimenata koji čine eksperimentalnu osnovu opšte teorije relativnosti. Pojedini eksperimenti izvršeni su u gravitacionom polju Zemlje. Pojedine potvrde validnosti opšte teorije relativnosti dobijene su proučavanjem nekih astronomskih objekata. Postoji jedan veliki problem, a to je da efekti koje predviđa opšta teorija relativnosti su veoma mali, i teško ih je eksperimentalno proveriti. Ovo naročito važi za dinamičke efekte. Njih je ponekad veoma teško razdvojiti od određenih efekata Njutnove gravitacije.

Opšta teorija relativnosti koristi se i za proučavanje pojava u Solarnom sistemu. Johan Kepler (Johannes Kepler) je formulisao tri zakona o kretanju planeta oko Sunca. Po Kepleru planete se kreću oko Sunca po eliptičnim putanja, a u zajedničkoj žiži tih elipsi nalazi se centar Sunca. Najveći ekscentricitet orbite ima Merkur, i on iznosi 0,206 a najmanji Neptun 0,009. Ekscentricitet zemljine orbite iznosi 0,017. Često se uzima da se planete kreću po kružnim putanjama.

U predhodnom poglavlju analizirano je gravitomagnetnog polja koje nastaje usled rotacije Zemlje oko svoje ose. Zemlja stvara gravitomagnetno polje i usled njenog kretanja oko Sunca. Sunce i

Zemlja mogu se smatrati materijalnim tačkama zbog njihovog velikog međusobnog rastojanja. Primer koji ću analizirati je kretanje Zemlje oko Sunca. Medjutim rezultati analize koja sledi mogu se primeniti na bilo koju planetu Sunčevog sistema. Oni se mogu primeniti i na analizu kretanja veštačkih satelita.

Potrebno je odrediti jačinu gravitoelektričnog i jačinu gravitomagnetnog polja koje stvara Zemlja usled njenog kretanja oko Sunca. Da bi to uradio koristiću jednačine (2.99) i (2.100) koje ovom prilikom ponovo navodim

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma m}{R^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot \vec{R}}{cR}\right)^3} \left\{ \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot R}{c} \right) \left(1 - \left(\frac{v_{\zeta}}{c} \right)^2 \right) + \vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot R}{c} \right) \times \frac{\vec{a}_{\zeta}}{c^2} \right] \right\} \quad (4.1)$$

[t_{ret}]

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{c^2} \left[-\frac{\vec{R} \times \vec{v}_{\zeta}}{\left(R - \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot \vec{R}}{c} \right)^3} \left(1 - \left(\frac{v_{\zeta}}{c} \right)^2 + \frac{\vec{a}_{\zeta} \cdot \vec{R}}{c^2} \right) - \frac{\vec{R} \times \vec{a}_{\zeta}/c}{\left(R - \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot \vec{R}}{c} \right)^2} \right] \quad (4.2)$$

[t_{ret}]

Prilikom analize ovih jednačina uzeo sam primer čestice mase m koja se kreće u nekom inercijalnom sistemu po fiksiranoj putanji. Položaj čestice nam je poznat u svakom trenutku vremena, i opisan je radijus vektorom $\vec{r}_{\zeta}(t)$. Čestica u prostoru oko sebe stvara gravitoelektrično i gravitomagnetno polje. Jačine tih polja određuju se u proizvoljnoj tački koja je određena radijus vektorom \vec{r} . Jednačine (4.1) i (4.2) su najuopštenije jednačine. Za slučaj kretanja Zemlje oko Sunca one će dobiti jednostavniju formu, jer ću koristiti određene aproksimacije. Zemlja se kreće po eliptičnoj putanji oko Sunca, ali zbog jednostavnosti proračuna uzeću da se kreće po kružnoj putanji. Masu Zemlje označiću sa m .

Za opisivanje ovog kretanja koristiću Heliocentrični ekliptički koordinatni sistem. Ovaj sistem označio sam sa S_2 . Početak koordinatnog sistema nalazi se u centru Sunca (slika 6). Radijus vektor Zemlje označiću sa \vec{r}_{ζ} , a vektor brzine i ubrzanja označiću su sa \vec{v}_{ζ} i \vec{a}_{ζ} .

Zemlja zbog kretanja u prostoru oko sebe stvara gravitoelektrično i gravitomagnetno polje. Odrediću jačine ovih polja u koordinatnom početku sistema S_2 , u skladu sa tim važi sledeći uslov

$$\vec{r} = \vec{0} \quad (4.3)$$

Vektor \vec{R} određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_{\zeta}(t) \quad (4.4)$$

Korišćenjem uslova (4.3) dobijam

$$\vec{R} = -\vec{r}_{\zeta}(t) \quad (4.5)$$

U opštem slučaju moduo vektora \vec{R} se označava sa R , ali zbog jednačine (4.5) pišaću

$$R = r_{\zeta}$$

Pošto je specifikovana tačka za koju se određuju jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja jednačine (4.1) i (4.2) dobijaju formu

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma m}{r_{\zeta}^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot \vec{r}_{\zeta}}{cr_{\zeta}}\right)^3} \left\{ \left(\vec{r}_{\zeta} + \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot r_{\zeta}}{c} \right) \left(1 - \left(\frac{v_{\zeta}}{c} \right)^2 \right) - \vec{r}_{\zeta} \times \left[\left(\vec{r}_{\zeta} + \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot r_{\zeta}}{c} \right) \times \frac{\vec{a}_{\zeta}}{c^2} \right] \right\} \quad (4.6)$$

[t_{ret}]

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{c^2} \left[\frac{\vec{r}_{\check{c}} \times \vec{v}_{\check{c}}}{\left(r_{\check{c}} + \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{c}\right)^3} \left(1 - \left(\frac{v_{\check{c}}}{c}\right)^2 - \frac{\vec{a}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{c^2}\right) + \frac{\vec{r}_{\check{c}} \times \vec{a}_{\check{c}}/c}{\left(r_{\check{c}} + \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{c}\right)^2} \right]_{[t_{ret}]} \quad (4.7)$$

Uzeo sam da se Zemlja kreće po kružnoj putanji. To ima za posledicu da je skalarni proizvod vektora brzine i radijus vektora u svakom trenutku jednak nuli

$$\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}} = 0 \quad (4.8)$$

U ovom slučaju ubrzanje planete je centripetalno ubrzanje. Ono se određuje na osnovu jednačine

$$\vec{a}_{\check{c}} = -\frac{(v_{\check{c}})^2}{r_{\check{c}}} \vec{r}_{\check{c}} \quad (4.9)$$

Korišćenjem jednačina (4.8) i (4.9) jednačine (4.6) i (4.7) se pojednostavljaju i dobijaju formu

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma m}{r_{\check{c}}^3} \left\{ \left(\vec{r}_{\check{c}} + \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{c} \right) \left(1 - \left(\frac{v_{\check{c}}}{c} \right)^2 \right) - \vec{r}_{\check{c}} \times [(\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}) \times \vec{a}_{\check{c}}] \frac{1}{c^3} \right\}_{[t_{ret}]} \quad (4.10)$$

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{c^2} \left[\frac{\vec{r}_{\check{c}} \times \vec{v}_{\check{c}}}{r_{\check{c}}^3} \left(1 - \left(\frac{v_{\check{c}}}{c} \right)^2 - \frac{\vec{a}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{c^2} \right) \right]_{[t_{ret}]} \quad (4.11)$$

Pri dobijanju ovih jednačina iskorišćena je činjenica da je

$$\vec{r}_{\check{c}} \times \vec{a}_{\check{c}} = \vec{0}$$

Nakon elementarnih algebarskih transformacija jednačine (4.10) i (4.11) postaju

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma m}{r_{\check{c}}^3} \left\{ \vec{r}_{\check{c}} + \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{c} - \vec{r}_{\check{c}} \left(\frac{v_{\check{c}}}{c} \right)^2 - \frac{(\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}) v_{\check{c}}^2}{c^3} - \vec{r}_{\check{c}} \times [(\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}) \times \vec{a}_{\check{c}}] \frac{1}{c^3} \right\}_{[t_{ret}]} \quad (4.12)$$

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -4\gamma m \left[\frac{\vec{r}_{\check{c}} \times \vec{v}_{\check{c}}}{r_{\check{c}}^3} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{v_{\check{c}}^2}{c^4} + \frac{\vec{a}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{c^4} \right) \right]_{[t_{ret}]} \quad (4.13)$$

U jednačini (4.12) zanemarujem sabirke koji sadrže faktor $1/c^3$, dok u jednačini (4.13) zanemarujem sabirke koji sadrže faktor $1/c^4$, tako da dobijam sledeće jednačine za određivanje jačina gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_2

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma m}{r_{\check{c}}^3} \left[\vec{r}_{\check{c}} \left(1 - \left(\frac{v_{\check{c}}}{c} \right)^2 \right) + \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{c} \right]_{[t_{ret}]} \quad (4.14)$$

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{c^2} \left[\frac{\vec{r}_{\check{c}} \times \vec{v}_{\check{c}}}{r_{\check{c}}^3} \right]_{[t_{ret}]} \quad (4.15)$$

U drugom poglavlju napomenuo sam da indeks $[t_{ret}]$ ukazuje da sve veličine u jednačinama ne smemo određivati za vremenski trenutak t nego za retardovani trenutak vremena t_{ret} . Iz tog razloga potrebna je dalja analiza ovih jednačina.

Retardovani trenutak vremena određuje se na osnovu jednačine (2.88)

$$|\vec{r} - \vec{r}_{\check{c}}(t_{ret})| = c(t - t_{ret}) \quad (4.16)$$

Jačine polja određujem za koordinatni početak sistema $\vec{r} = \vec{0}$, pa uskladu sa tim jednačina (4.16) dobija oblik

$$|\vec{r}_{\check{c}}(t_{ret})| = c(t - t_{ret}) \quad (4.17)$$

Uzeo sam da se Zemlja kreće po kružnici. Radijus vektor planete u sistemu S_2 može se napisati u obliku

$$\vec{r}_{\check{c}}(t) = r_{\check{c}} [\cos(\omega t) \vec{e}_{x2} + \sin(\omega t) \vec{e}_{y2}] \quad (4.18)$$

Sa ω označio sam ugaonu brzinu rotacije Zemlje, i ona je konstantna veličina. Poluprečnik kružne putanje označio sam sa $r_{\check{c}}$.

Brzina i ubrzanje planete određuju se na osnovu jednačina

$$\vec{v}_{\check{c}}(t) = r_{\check{c}}\omega[-\sin(\omega t)\vec{e}_{x2} + \cos(\omega t)\vec{e}_{y2}] \quad (4.19)$$

$$\vec{a}_{\check{c}}(t) = -r_{\check{c}}\omega^2[\cos(\omega t)\vec{e}_{x2} + \sin(\omega t)\vec{e}_{y2}] \quad (4.20)$$

Jednačina (4.20) može se napisati u obliku

$$\vec{a}_{\check{c}}(t) = -\omega^2\vec{r}_{\check{c}}(t) \quad (4.21)$$

Retardovani trenutak vremena je neki raniji trenutak vremena u odnosu na trenutak t . Predhodne veličine mogu se odrediti i za t_{ret} . U slučaju radijus vektora dobijamo

$$\vec{r}_{\check{c}}(t_{ret}) = r_{\check{c}}[\cos(\omega t_{ret})\vec{e}_{x2} + \sin(\omega t_{ret})\vec{e}_{y2}] \quad (4.22)$$

Jednostavno je pokazati da važi sledeća jednačina

$$|\vec{r}_{\check{c}}(t_{ret})| = r_{\check{c}}$$

Zamenom ovog rezultata u (4.17) dobijamo

$$r_{\check{c}} = c(t - t_{ret})$$

Retardovani trenutak vremena određuje se na osnovu jednačine

$$t_{ret} = t - \frac{r_{\check{c}}}{c} \quad (4.23)$$

Brzina i ubrzanje takodje se mogu odrediti za retardovani trenutak vremena, i te jednačine glase

$$\vec{v}_{\check{c}}(t_{ret}) = r_{\check{c}}\omega[-\sin(\omega t_{ret})\vec{e}_{x2} + \cos(\omega t_{ret})\vec{e}_{y2}] \quad (4.24)$$

$$\vec{a}_{\check{c}}(t_{ret}) = -\omega^2\vec{r}_{\check{c}}(t_{ret}) \quad (4.25)$$

U jednačinama (4.14) i (4.15) fizičke veličine moraju biti određene za retardovani trenutak vremena t_{ret} . Pojedine veličine su konstantne tj. one ne zavise od vremena. To su na primer intenzitet brzine rotacije planete ($v_{\check{c}}$) i poluprečnik kružne putanje ($r_{\check{c}}$). Jednačine (4.14) i (4.15) mogu se napisati u obliku

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma m}{r_{\check{c}}^3} \left[\vec{r}_{\check{c}}(t_{ret}) \left(1 - \left(\frac{v_{\check{c}}}{c} \right)^2 \right) + \frac{\vec{v}_{\check{c}}(t_{ret}) \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{c} \right] \quad (4.26)$$

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{c^2} \left[\frac{\vec{r}_{\check{c}}(t_{ret}) \times \vec{v}_{\check{c}}(t_{ret})}{r_{\check{c}}^3} \right] \quad (4.27)$$

Korisno je napomenuti de se intenzitet brzine rotacije planete određuje na osnovu jednačine

$$v_{\check{c}} = r_{\check{c}}\omega$$

Može se uspostaviti veza izmedju vektora $\vec{r}_{\check{c}}(t_{ret})$ i $\vec{r}_{\check{c}}(t)$. To se postiže na taj način što se uzima da je veličina $r_{\check{c}}/c$ mnogo manja od t , i izvrši se razvoj vektorske funkcije u Tejlorov red

$$\vec{r}_{\check{c}}\left(t - \frac{r_{\check{c}}}{c}\right) = \vec{r}_{\check{c}}(t) + \frac{d\vec{r}_{\check{c}}(t)}{dt} \left(-\frac{r_{\check{c}}}{c}\right) + \frac{1}{2!} \frac{d^2\vec{r}_{\check{c}}(t)}{dt^2} \left(-\frac{r_{\check{c}}}{c}\right)^2 + \dots$$

Ako se u razvoju zadržimo samo na prva dva člana i iskoristimo jednačinu (4.21) dobijamo

$$\vec{r}_{\check{c}}\left(t - \frac{r_{\check{c}}}{c}\right) = \vec{r}_{\check{c}}(t) - \vec{v}_{\check{c}}(t) \left(\frac{r_{\check{c}}}{c}\right) + \frac{1}{2} (-\omega^2\vec{r}_{\check{c}}(t)) \left(\frac{r_{\check{c}}}{c}\right)^2 \quad (4.28)$$

Izvršimo razvoj i vektorske funkcije $\vec{v}_{\check{c}}(t_{ret})$ u red

$$\vec{v}_{\check{c}}\left(t - \frac{r_{\check{c}}}{c}\right) = \vec{v}_{\check{c}}(t) + \frac{d\vec{v}_{\check{c}}(t)}{dt} \left(-\frac{r_{\check{c}}}{c}\right) + \frac{1}{2!} \frac{d^2\vec{v}_{\check{c}}(t)}{dt^2} \left(-\frac{r_{\check{c}}}{c}\right)^2 + \dots$$

Ova jednačina može se napisati u obliku

$$\vec{v}_{\check{c}}\left(t - \frac{r_{\check{c}}}{c}\right) = \vec{v}_{\check{c}}(t) - \vec{a}_{\check{c}}(t) \left(\frac{r_{\check{c}}}{c}\right) + \frac{1}{2} \frac{d^3\vec{r}_{\check{c}}(t)}{dt^3} \left(\frac{r_{\check{c}}}{c}\right)^2 + \dots \quad (4.29)$$

Treći izvod radijus vektora određuje se na osnovu jednačine

$$\frac{d^3 \vec{r}_\xi(t)}{dt^2} = -\omega^2 \vec{v}_\xi(t)$$

Zamenom ovog rezultata i jednačine (4.21) u jednačinu (4.29) dobijamo

$$\vec{v}_\xi \left(t - \frac{r_\xi}{c} \right) = \vec{v}_\xi(t) - (-\omega^2 \vec{r}_\xi(t)) \left(\frac{r_\xi}{c} \right) + \frac{1}{2} (-\omega^2 \vec{v}_\xi(t)) \left(\frac{r_\xi}{c} \right)^2 + \dots$$

Kao i u slučaju radijus vektora zadržaćemo se samo na prva dva člana razvoja vektorske funkcije

$$\vec{v}_\xi \left(t - \frac{r_\xi}{c} \right) = \vec{v}_\xi(t) + (\omega^2 \vec{r}_\xi(t)) \left(\frac{r_\xi}{c} \right) + \frac{1}{2} (-\omega^2 \vec{v}_\xi(t)) \left(\frac{r_\xi}{c} \right)^2 \quad (4.30)$$

Zamenom jednačina (4.28) i (4.30) u jednačinu (4.26), i nakon algebarskih transformacija dobija se sledeća jednačina

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma m}{r_\xi^3} \left[\left(1 - \frac{v_\xi^2}{2c^2} \right) \vec{r}_\xi(t) - \frac{2}{3} \frac{r_\xi \cdot v_\xi^2}{c^3} \vec{v}_\xi(t) \right]$$

Član koji sadrži faktor $1/c^3$ možemo zanemariti i dobijamo sledeću jednačinu

$$\vec{E}_{gem}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma m}{r_\xi^3} \left(1 - \frac{v_\xi^2}{2c^2} \right) \vec{r}_\xi(t) \quad (4.31)$$

Na osnovu ove jednačine određujemo jačinu gravitoelektričnog polja koje stvara Zemlja u koordinatnom početku sistema S_2 .

Položaj planete određuje se na osnovu jednačine (4.18)

$$\vec{r}_\xi(t) = r_\xi [\cos(\omega t) \vec{e}_{x2} + \sin(\omega t) \vec{e}_{y2}]$$

Radijus vektor se menja tokom vremena. To ima za posledicu da se pravac vektora $\vec{E}_{gem}(\vec{r}, t)$ takodje menja tokom vremena, ali njegov intenzitet ostaje konstantan.

Možemo napomenuti da se jednačina (4.31) razlikuje od odgovarajućeg rezultata u Njutnovoju mehanici koji glasi

$$\vec{G}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma m}{r_\xi^3} \vec{r}_\xi(t)$$

Sa $\vec{G}(\vec{r}, t)$ je označena jačina gravitacionog polja.

Jačina gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_2 određuje se na osnovu jednačine (4.27)

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{r_\xi^3} \left[\frac{\vec{r}_\xi(t_{ret}) \times \vec{v}_\xi(t_{ret})}{c^2} \right] \quad (4.32)$$

U ovu jednačinu zamenimo jednačine (4.28) i (4.30). Kada se izvrši vektorsko množenje vektora $\vec{r}_\xi(t_{ret})$ i $\vec{v}_\xi(t_{ret})$ dobiće se ukupno devet sabiraka. Svaki pojedinačni sabirak pomnožimo sa $1/c^2$. Na taj način izraz u uglastim zagradama smo transformisali u sumu od devet sabiraka. Samo u slučaju sabirka $\vec{r}_\xi(t) \times \vec{v}_\xi(t)$ figurisaće faktor $1/c^2$. U svim ostalim sabircima javljaju se faktori oblika $1/c^n$, gde je n veće od dva, i ti sabirci se zanemaruju. Na osnovu ove analize dobijamo

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{r_\xi^3} \left[\frac{\vec{r}_\xi(t) \times \vec{v}_\xi(t)}{c^2} \right] \quad (4.33)$$

Moment impulsa planete određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{L} = m \vec{r}_\xi(t) \times \vec{v}_\xi(t)$$

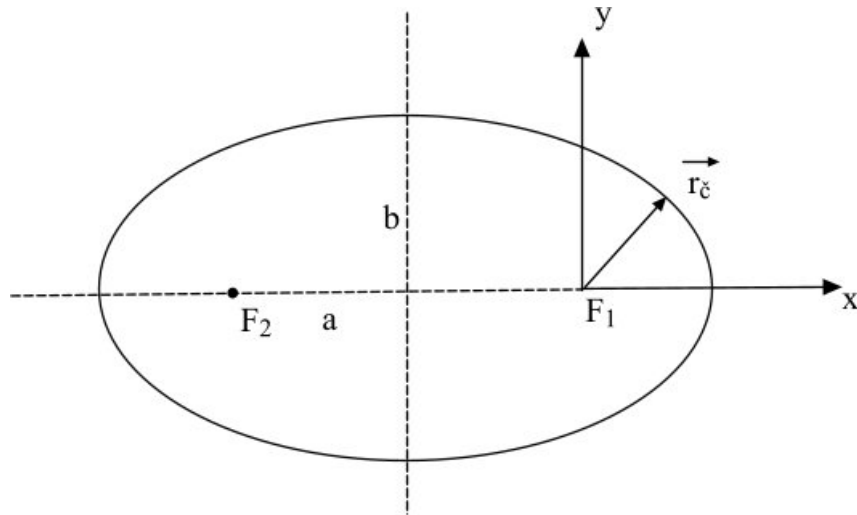
, i jednačinu (4.33) možemo napisati u obliku

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma \vec{L}}{r_\xi^3 c^2} \quad (4.34)$$

Ako zanemarimo gravitacioni uticaj drugih planeta na Zemlju moment impulsa biće konstantna veličina. To će imati za posledicu da je vektor jačine gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_2 konstantan, odnosno ne menja se po intenzitetu, pravcu i smeru.

U predhodnom poglavlju određena je jačina gravitomagnetnog polja koje nastaje usled rotacije Zemlje oko svoje ose. Ona se određuje na osnovu jednačine (3.60). Napomenuo sam da Zemlja stvara i druga gravitomagnetna polja. U ovom poglavlju razmatrao sam gravitomagnetno polje koje nastaje usled kretanja Zemlje oko Sunca. Zemlja se kreće po eliptičnoj putanji oko Sunca, ali zbog jednostavnosti proračuna analizirao sam kružnu putanju. U skladu sa tom pretpostavkom dobio sam jednačine (4.31) i (4.34).

Sada ću analizirati slučaj kretanja planete po eliptičnoj putanji. Masu planete označiću sa m , a radijus vektor sa \vec{r}_{ζ} . Vektore brzine i ubrzanja planete označiću sa \vec{v}_{ζ} i \vec{a}_{ζ} . U slučaju kretanja planete po kružnoj putanji uzeo sam da se početak koordinatnog sistema nalazi u centru Sunca (slika 6). Za slučaj kretanja planete po eliptičnoj putanji potrebno je uvesti odgovarajući koordinatni sistem. Početak tog koordinatnog sistema takodje se nalazi u centru Sunca, ali u ovom slučaju Sunce nije u centru kružnice, nego se centar Sunca poklapa sa jednom od žiža elipse (slika 13). Osa x ovog sistema se poklapa sa velikom poluosom elipse, koja je na slici označena sa a , i usmerena je ka γ tački. Osa y je paralelna sa malom poluosom elipse. Na ovaj način definisan je orbitalni koordinatni sistem. Označiću ga sa S_4 . Na slici 13 prikazane su i žiže elipse, koje su označene sa F_1 i F_2



Slika 13

Odrediću jačinu gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_4 . Ispunjen je uslov $\vec{r} = \vec{0}$

Polaznu osnovu za dalju analizu daje jednačina (4.7) koju ponovo navodim

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{c^2} \left[\frac{\vec{r}_{\zeta} \times \vec{v}_{\zeta}}{\left(r_{\zeta} + \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot \vec{r}_{\zeta}}{c}\right)^3} \left(1 - \left(\frac{v_{\zeta}}{c}\right)^2 - \frac{\vec{a}_{\zeta} \cdot \vec{r}_{\zeta}}{c^2}\right) + \frac{\vec{r}_{\zeta} \times \vec{a}_{\zeta}/c}{\left(r_{\zeta} + \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot \vec{r}_{\zeta}}{c}\right)^2} \right]_{[t_{ret}]} \quad (4.35)$$

Ona se može napisati u obliku

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -4\gamma m \left[\frac{\vec{r}_{\zeta} \times \vec{v}_{\zeta}}{r_{\zeta}^3 \left(1 + \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot \vec{r}_{\zeta}}{r_{\zeta} c}\right)^3} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{v_{\zeta}^2}{c^4} - \frac{\vec{a}_{\zeta} \cdot \vec{r}_{\zeta}}{c^4}\right) + \frac{1}{c^3} \frac{\vec{r}_{\zeta} \times \vec{a}_{\zeta}}{\left(r_{\zeta} + \frac{\vec{v}_{\zeta} \cdot \vec{r}_{\zeta}}{c}\right)^2} \right]_{[t_{ret}]} \quad (4.36)$$

Zanemariću sabirke koji sadrže faktore $1/c^3$ i $1/c^4$, i jednačina (4.36) dobija oblik

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{c^2 r_{\check{c}}^3} \frac{\vec{r}_{\check{c}} \times \vec{v}_{\check{c}}}{\left(1 + \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{r_{\check{c}} c}\right)^3} \quad [t_{ret}] \quad (4.37)$$

Posmatrajmo sada ovaj faktor

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{r_{\check{c}} c}\right)^3}$$

Veličina

$$\frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{r_{\check{c}} c}$$

, koju ću označiti sa h je zaista mala po brojnoj vrednosti, i to po dva osnova. Skalarni prozvod $\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}$ ima malu vrednost, jer je ugao između vektora $\vec{r}_{\check{c}}$ i $\vec{v}_{\check{c}}$ približno 90° . Sa druge strane imamo da je brzina planete mnogo manja od c .

Koristim sledeću aproksimaciju

$$\frac{1}{(1+h)^3} \approx 1 - 3h \quad (4.38)$$

Primenom jednačine (4.38) dobijam

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{r_{\check{c}} c}\right)^3} \approx 1 - 3 \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{r_{\check{c}} c}$$

Zamenom ovog rezultata u (4.37) dobijam sledeću jednačinu

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{c^2 r_{\check{c}}^3} (\vec{r}_{\check{c}} \times \vec{v}_{\check{c}}) \left(1 - 3 \frac{\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{r_{\check{c}} c}\right) \quad [t_{ret}]$$

Ona se može napisati u obliku

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m}{r_{\check{c}}^3} (\vec{r}_{\check{c}} \times \vec{v}_{\check{c}}) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{3\vec{v}_{\check{c}} \cdot \vec{r}_{\check{c}}}{c^3 r_{\check{c}}}\right) \quad [t_{ret}] \quad (4.39)$$

Sabirak koji sadrži faktor $1/c^3$ zanemarujem, i jednačina (4.39) dobija oblik

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m \vec{r}_{\check{c}} \times \vec{v}_{\check{c}}}{c^2 r_{\check{c}}^3} \quad [t_{ret}] \quad (4.40)$$

Korišćenjem momenta impulsa jednačina (4.40) može se napisati u obliku

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma \vec{L}_{\check{c}}}{c^2 r_{\check{c}}^3} \quad [t_{ret}] \quad (4.41)$$

Jednačine (4.40) i (4.41) mogu se napisati i na sledeći način

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m \vec{r}_{\check{c}}(t_{ret}) \times \vec{v}_{\check{c}}(t_{ret})}{c^2 [r_{\check{c}}(t_{ret})]^3} \quad (4.42)$$

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma \vec{L}_{\check{c}}(t_{ret})}{c^2 [r_{\check{c}}(t_{ret})]^3} \quad (4.43)$$

U jednačinama (4.40-43) i dalje figuriše retardovani trenutak vremena t_{ret} . On se određuje na osnovu jednačine (2.88)

$$|\vec{r} - \vec{r}_{\check{c}}(t_{ret})| = c(t - t_{ret}) \quad (4.44)$$

Obzirom da se polja određuju u početku koordinatnog sistema S_4 jednačina (4.44) dobija jednostavniju formu

$$|\vec{r}_{\check{c}}(t_{ret})| = c(t - t_{ret}) \quad (4.45)$$

U slučaju kretanja planete po kružnici retardovani trenutak vremena određuje se na osnovu jednačine

$$t_{ret} = t - \frac{r_{\zeta}}{c}$$

Pri dobijanju ovog rezultata iskorišćena je činjenica da intenzitet radijus vektora \vec{r}_{ζ} (koji sam označio sa r_{ζ}) ima konstantnu vrednost.

U slučaju kretanja planete po eliptičnoj putanji situacija je složenija jer se rastojanje između planete i Sunca (odnosno intenzitet radijus vektora \vec{r}_{ζ}) menja tokom vremena. To ima za posledicu da je jednačina (4.45) komplikovanija za rešavanje od slučaja kada se planeta kreće po kružnoj putanji.

Već sam istakao da ako se zanemari gravitacioni uticaj drugih planeta na Zemlju njen moment impulsa imaće konstantnu vrednost. Taj zaključak važi i za ostale planete Sunčevog sistema.

Planeta se kreće po eliptičnoj putanji. U trenutku t radijus vektor i vektor brzine imaju vrednosti $\vec{r}_{\zeta}(t)$ i $\vec{v}_{\zeta}(t)$. Moment impulsa planete u tom trenutku je

$$\vec{L}_{\zeta}(t) = m\vec{r}_{\zeta}(t) \times \vec{v}_{\zeta}(t)$$

Možemo postaviti pitanje o vrednosti momenta impulsa u retardovanom trenutku vremena. Da bi to pitanje analizirali podsetimo se primera kretanje čestice koji je prikazan na slici 4. Čestica se kreće po fiksiranoj putanji. U trenutku t ona se nalazi u tački C , i njen položaj je određen vektorom $\vec{r}_{\zeta}(t)$. Retardovani trenutak vremena je neki raniji trenutak vremena u odnosu na trenutak t . Čestica bi se u retardovanom trenutku vremena nalazila u tački D .

Za slučaj kretanja planete radijus vektor i vektor brzine planete u retardovanom trenutku vremena imaju vrednosti $\vec{r}_{\zeta}(t_{ret})$ i $\vec{v}_{\zeta}(t_{ret})$, a moment impulsa određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{L}_{\zeta}(t_{ret}) = m\vec{r}_{\zeta}(t_{ret}) \times \vec{v}_{\zeta}(t_{ret})$$

U svakom trenutku vremena moment impulsa ima stalnu vrednost. Moment impulsa je konstantna veličina koju ću označiti sa \vec{L} . Moment impulsa ima istu vrednost i u trenutku t , i u trenutku t_{ret} , odnosno

$$\vec{L} = \vec{L}_{\zeta}(t) \quad (4.46)$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{\zeta}(t_{ret}) \quad (4.47)$$

Kada se planeta kreće po eliptičnoj orbiti moment impulsa određuje se na osnovu jednačine (7.43)

$$\vec{L} = m\sqrt{\gamma M_s a(1 - e^2)}\vec{e}_z \quad (4.48)$$

Sa m je označena masa planete, a sa M_s masa Sunca. Ekscentricitet elipse je označen sa e , a velika poluosa sa a . Pravac jediničnog vektora \vec{e}_z je normalan na ravan u kojoj se kreće planeta.

Na osnovu jednačina (4.47) i (4.48) dobijamo

$$\vec{L}_{\zeta}(t_{ret}) = m\sqrt{\gamma M_s a(1 - e^2)}\vec{e}_z$$

Koristeći ovaj rezultat jednačina (4.43) može se napisati u obliku

$$\vec{B}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma m\sqrt{\gamma M_s a(1 - e^2)}}{c^2 [r_{\zeta}(t_{ret})]^3}\vec{e}_z \quad (4.49)$$

Posmatrajmo sada neku proizvoljnu oblast oko Sunca. To može biti sfera poluprečnika r . Uzeću da poluprečnik sfere iznosi nekoliko sunčevim radijusima. Izbor vrednosti poluprečnika sfere je sasvim proizvoljan. Zbog jednostavnosti dalje analize vratimo se ponovo primeru kružnog kretanja Zemlje oko Sunca. Na osnovu jednačina (4.31) i (4.34) određuju se jačine polja u koordinatnom početku sistema S_2 . Možemo pretpostaviti da se intenziteti vektora \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} u bilo kojoj tački te oblasti određuju na osnovu jednačina (4.31) i (4.34). Pretpostavka je sasvim korektna jer poluprečnik sfere je mnogo manji od rastojanja između Sunca i Zemlje, tako da su promene intenziteta vektora \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} unutar sfere

zanemarljive. Medjutim dozvolićemo mogućnost promene pravca vektora \vec{E}_{gem} jer se radijus vektor koji opisuje položaj Zemlje menja sa vremenom.

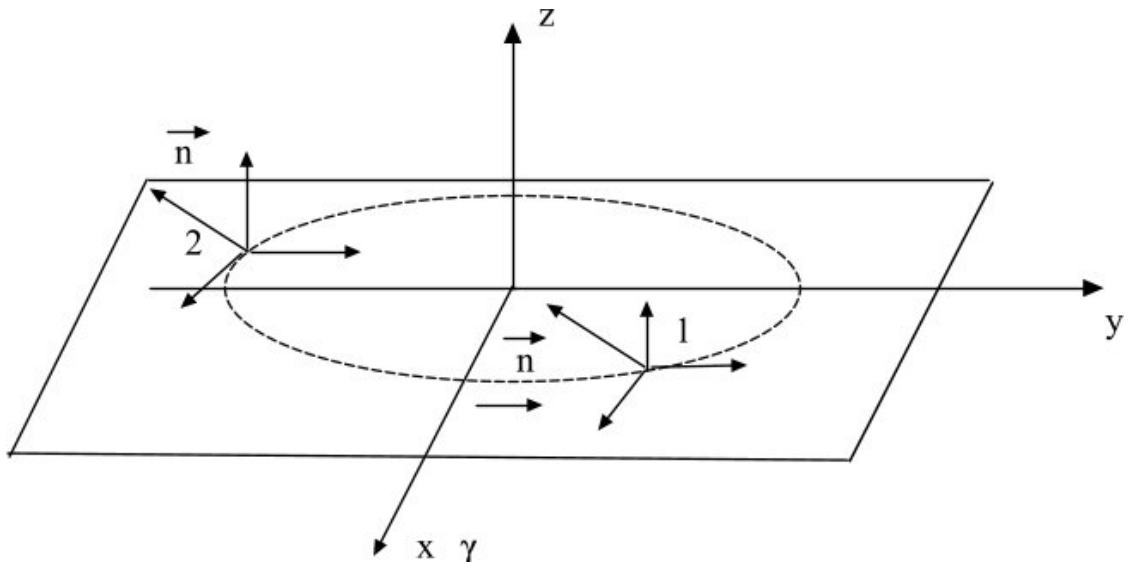
Razmotrimo sada hipotetičku situaciju da postoji telo koje se nalazi u toj oblasti, i ono orbitira oko Sunca. Masu tog probnog tela označiću sa m_p , a njegovu brzinu sa \vec{v}_p . Ono se nalazi u gravitacionom polju Sunca, ali će na njega delovati i gravitaciono polje Zemlje. Jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja Zemlje u toj oblasti odredjuju se na osnovu jednačina (4.31) i (4.34). U skladu sa jednačinom (2.28) sila koja deluje na probno telo je

$$\vec{F}_{gem} = m_p \vec{E}_{gem} + m_p \vec{v}_p \times \vec{B}_{gem}$$

Ovom jednačinom je kvantitativno opisan gravitacioni uticaj Zemlje na probno telo.

Može se proučavati gravitacioni uticaj Zemlje na Suncu, medjutim prevashodni cilj ove analize je odredjivanje gravitacione sile kojom Sunce deluje na Zemlju odnosno na neku planetu Sunčevog sistema.

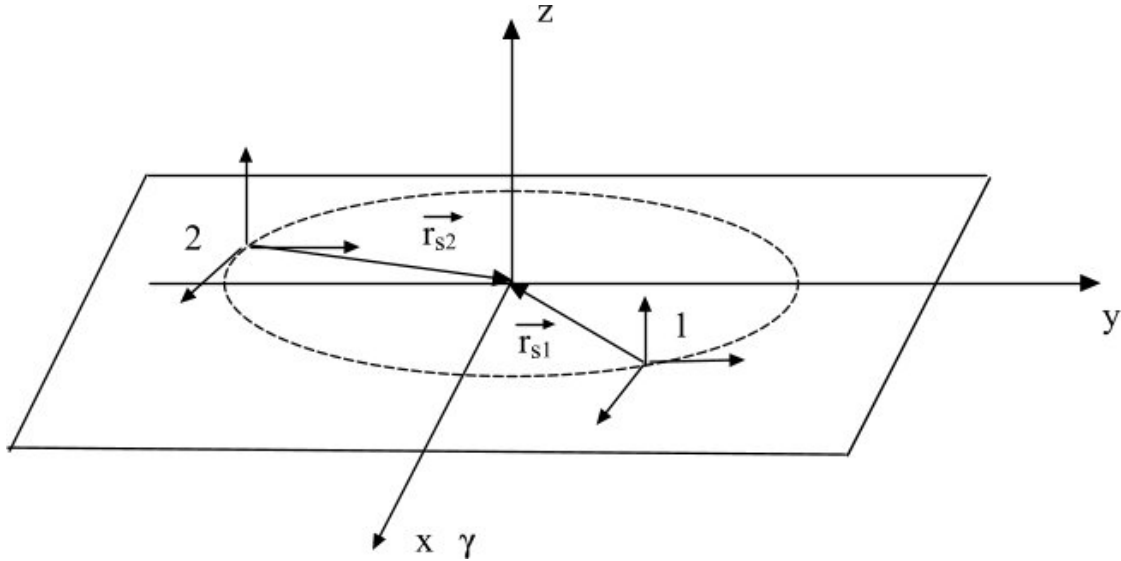
Na slici 10 prikazano je kretanje Zemlje oko Sunca. Prikazana su dva položaja Zemlje. Ona su označena sa 1 i 2. Na slici 10 predstavljena su dva Geocentrična ekliptička inercijalna koordinatna sistema koja se nalaze u položajima 1 i 2. Zbog analize koja sledi potrebno je ponovo koristiti sliku 10. Ja ću tu sliku ponovo navesti u radu, ali ću je sada označiti brojem 14. Za dva položaja Zemlje koji su na slici 14 označeni sa 1 i 2 predstavljen je i vektor \vec{n} , odnosno jedinični vektor ose rotacije Zemlje. Na slici 14 predstavljen je i Heliocentrični ekliptički koordinatni sistem. Sa slike se uočava da su koordinatne ose sistema S_2 i S_3 međusobno paralelne u svakom trenutku vremena. Na slici predstavljen je i smer kretanja Zemlje oko Sunca.



Slika 14

Problem kretanja Zemlje oko Sunca možemo posmatrati i na drugačiji način. Postavićemo posmatrača na Zemlji, u sistemu S_3 . On će opisivati kretanje Sunca oko Zemlje. On može tvrditi da Zemlja miruje, a da se Sunce kreće oko nje. Ova tvrdnja ima smisla jer postoji relativno kretanje između Zemlje i Sunca. Zbog jednostavnosti analize uzeću da se Zemlja kreće oko Sunca po kružnoj putanji.

Na slici 15 takodje sam predstavio dva položaja Zemlje prilikom njenog kretanja oko Sunca. Ti položaji su označeni sa 1 i 2. Posmatrač u sistemu S_2 za odredjivanje položaja Zemlje koristi radijus vektor \vec{r}_{ξ} . Položaji Zemlje koji su na slici 15 označeni sa 1 i 2 odredjeni su radijus vektorima $\vec{r}_{\xi 1}$ i $\vec{r}_{\xi 2}$ respektivno.



Slika 15

Posmatrač u sistemu Zemlje (sistemu S_3) opisuje kretanje Sunca oko Zemlje. On položaj Sunca u odnosu na Zemlju opisuje radijus vektorom \vec{r}_s . Kada se Zemlja nalazi u položaju 1 sa stanovišta posmatrača u sistemu S_3 položaj Sunca određen je radijus vektorom \vec{r}_{s1} , a kada se Zemlja nalazi u položaju 2 sa stanovišta posmatrača u sistemu S_3 položaj Sunca određen je radijus vektorom \vec{r}_{s2} . Da bi uspostavili vezu sa vektorima $\vec{r}_{\xi 1}$ i $\vec{r}_{\xi 2}$ ponovimo najpre konstataciju da su koordinatne ose sistema S_2 i S_3 međusobno paralelne u svakom trenutku vremena.

Zadržimo se najpre na položaju 1. Posmatrajući sliku 15 možemo zaključiti da je

$$\vec{r}_{s1} = -\vec{r}_{\xi 1}$$

Za položaj 2 možemo izvesti sličan zaključak

$$\vec{r}_{s2} = -\vec{r}_{\xi 2}$$

Važi opšti zaključak

$$\vec{r}_s = -\vec{r}_\xi \quad (4.50)$$

U ovoj analizi uzeo sam da se Zemlja kreće oko Sunca po kružnoj putanji. Radijus vektor planete određuje se na osnovu jednačina (4.18)

$$\vec{r}_\xi(t) = r_\xi [\cos(\omega t) \vec{e}_{x2} + \sin(\omega t) \vec{e}_{y2}]$$

Sa ω označio sam ugaonu brzinu rotacije Zemlje oko Sunca, i to je konstantna veličina. Poluprečnik kružne putanje označio sam sa r_ξ .

Na osnovu jednačina (4.50) i (4.18) dobijamo

$$\vec{r}_s(t) = -r_\xi [\cos(\omega t) \vec{e}_{x2} + \sin(\omega t) \vec{e}_{y2}] \quad (4.51)$$

U trećem poglavlju pokazano je da sistemi S_2 i S_3 imaju međusobno paralelne koordinatne ose, i važe sledeće jednačine

$$\vec{e}_{x2} = \vec{e}_{x3} \quad (4.52)$$

$$\vec{e}_{y2} = \vec{e}_{y3} \quad (4.53)$$

Na osnovu (4.52) i (4.53) jednačina (4.51) postaje

$$\vec{r}_s(t) = -r_\xi [\cos(\omega t) \vec{e}_{x3} + \sin(\omega t) \vec{e}_{y3}] \quad (4.54)$$

Koristeći jednačinu (4.54) jednostavno je dokazati sledeću jednačinu

$$|\vec{r}_s| = r_\xi$$

Na osnovu jednačine (4.54) možemo odrediti vektor brzine kretanja Sunca sa stanovišta posmatrača u sistemu Zemlje

$$\vec{v}_s(t) = -r_\xi \omega [-\sin(\omega t) \vec{e}_{x3} + \cos(\omega t) \vec{e}_{y3}]$$

Koristeći jednačine (4.52) i (4.53) vektor \vec{v}_s može se napisati i na sledeći način

$$\vec{v}_s(t) = -r_\xi \omega [-\sin(\omega t) \vec{e}_{x2} + \cos(\omega t) \vec{e}_{y2}] \quad (4.55)$$

U ovoj analizi uzeo sam da se Zemlja kreće oko Sunca po kružnoj putanji. Radijus vektor planete određuje se na osnovu jednačine (4.18), a vektor brzine na osnovu jednačine (4.19) koju ponovo navodin

$$\vec{v}_\xi(t) = r_\xi \omega [-\sin(\omega t) \vec{e}_{x2} + \cos(\omega t) \vec{e}_{y2}]$$

Upoređivanjem jednačina (4.55) i (4.19) dobijamo sledeći rezultat

$$\vec{v}_s = -\vec{v}_\xi \quad (4.56)$$

Jednostavno je pokazati da je moduo vektora \vec{v}_s jednak brzini kretanja Zemlje oko Sunca

$$|\vec{v}_s| = v_z$$

Za posmatrača u sistemu Zemlje (sistemu S_3) Sunce rotira oko Zemlje. Položaj Sunca određuje se na osnovu jednačine (4.54) ili jednačine (4.51), a brzina na osnovu jednačine (4.55). Sa njegovog stanovišta Sunce se kreće po kružnici i stvara gravitoelektrično i gravitomagnetno polje u njegovom sistemu. Možemo odrediti jačine ovih polja u koordinatnom početku sistema S_3 . Medjutim nema potrebe ponavljati celokupnu proceduru izvođenja jednačina za jačine ovih polja, jer je taj problem već rešen.

Koristeći jednačine (4.31) i (4.33) dobijamo

$$\vec{E}_{gem s}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma M_s}{r_s^3} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \vec{r}_s(t) \quad (4.57)$$

$$\vec{B}_{gem s}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_s}{r_s^3} \left[\frac{\vec{r}_s(t) \times \vec{v}_s(t)}{c^2} \right] \quad (4.58)$$

Sa M_s je označena masa Sunca.

Kod vektora $\vec{E}_{gem s}$ i $\vec{B}_{gem s}$ koristim indeks s da bi naznačio da gravitaciono polje potiče od Sunca. Vektori $\vec{r}_s(t)$ i $\vec{v}_s(t)$ određuju se u sistemu Zemlje (u sistemu S_3). Mnogo je pogodnije koristiti vektore iz Heliocentričnog ekliptičkog koordinatnog sistema odnosno vektore $\vec{r}_\xi(t)$ i $\vec{v}_\xi(t)$. Na osnovu jednačina (4.50) i (4.56) dobijamo

$$\vec{E}_{gem s}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma M_s}{r_\xi^3} \left(1 - \frac{v_\xi^2}{2c^2}\right) \vec{r}_\xi(t) \quad (4.59)$$

$$\vec{B}_{gem s}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_s}{r_\xi^3} \left[\frac{\vec{r}_\xi(t) \times \vec{v}_\xi(t)}{c^2} \right] \quad (4.60)$$

Kada se neko telo mase m kreće u inercijalnom sistemu ono u prostoru oko sebe stvara gravitoelektrično i gravitomagnetno polje. Ta polja određuju se na osnovu jednačina (2.99) i (2.100). Ovo su najuopštenije jednačine. Čestica se kreće u inercijalnom sistemu po fiksiranoj putanji. Položaj čestice nam je poznat u svakom trenutku vremena, i opisan je radijus vektorom $\vec{r}_\xi(t)$. Za opisivanje kretanja Zemlje oko Sunca koristio sam Heliocentrični ekliptički koordinatni sistem. Početak koordinatnog sistema nalazi se u centru Sunca. Radijus vektor Zemlje označio sam sa \vec{r}_ξ , a vektore brzine i ubrzanja sa \vec{v}_ξ i \vec{a}_ξ (slika 6). Zemlja predstavlja materijalnu tačku (česticu) koja se kreće u inercijalnom sistemu. Malo ću izmeniti oznake u jednačinama (4.59) i (4.60). Umesto vektora $\vec{r}_\xi(t)$ koristiću vektor $\vec{r}_z(t)$. Ta dva vektora su identična

$$\vec{r}_\xi(t) = \vec{r}_z(t) \quad (4.61)$$

Umesto vektora $\vec{v}_\xi(t)$ koristiću vektor $\vec{v}_z(t)$. Ta dva vektora su takodje identična

$$\vec{v}_\xi(t) = \vec{v}_z(t) \quad (4.62)$$

Na osnovu (4.61) i (4.62) jednačine (4.59) i (4.60) dobijaju oblik

$$\vec{E}_{gem s}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma M_s}{r_z^3} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \vec{r}_z(t) \quad (4.63)$$

$$\vec{B}_{gem s}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_s}{r_z^3} \left[\frac{\vec{r}_z(t) \times \vec{v}_z(t)}{c^2} \right] \quad (4.64)$$

Na osnovu jednačina (4.63) i (4.64) određujemo jačinu gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_3 (sistemu Zemlje), a vektori \vec{r}_z i \vec{v}_z određuju položaj i brzinu Zemlje u Heliocentričnom ekliptičkom koordinatnom sistemu (sistemu S_2).

U dosadašnjoj analizi razmatrao sam hipotetičku situaciju da oko Sunca orbitira neko telo. Podsetimo se određenih rezultata i zaključaka te analize. Najpre sam uveo jednu oblast oko Sunca. Ta oblast bila je sfera poluprečnika r . Poluprečnik sfere bio je nekoliko Sunčevim radijusa, a izbor vrednosti poluprečnika sfere bio je sasvim proizvoljan. Zemlja se kreće oko Sunca i stvara gravitoelektrično i gravitomagnetno polje, a jačine polja u koordinatnom početku sistema S_2 određuju se osnovu jednačina (4.31) i (4.34). Medjutim pokazao sam da su intenziteti vektora \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} konstantni u bilo kojoj tački te oblasti, i da se određuju na osnovu jednačina (4.31) i (4.34). Ovaj rezultat se dobija zbog pretpostavke da je poluprečnik sfere mnogo manji od rastojanja između Sunca i Zemlje, i promene intenziteta vektora \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} unutar sfere su zanemarljive.

Pretpostavio sam da oko Sunca orbitira neko hipotetičko telo koje se nalazi u toj oblasti. U toj oblasti postoji gravitoelektrično i gravitomagnetno polje, a jačine tih polja određuju se osnovu jednačina (4.31) i (4.34). Masu probnog tela označio sam sa m_p , a njegovu brzinu sa \vec{v}_p . U skladu sa jednačinom (2.28) sila koja deluje na probno telo je

$$\vec{F}_{gem} = m_p \vec{E}_{gem} + m_p \vec{v}_p \times \vec{B}_{gem}$$

Možemo analizirati sličan primer u slučaju Zemlje. Uvodim u analizu jednu sfernu oblast oko Zemlje. Poluprečnik sfere iznosi nekoliko Zemljinih radijusa, a izbor vrednosti poluprečnika je sasvim proizvoljan. Na osnovu jednačina (4.63) i (4.64) određujemo jačinu gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_3 (sistemu Zemlje). Ta polja potiču od Sunca. Pošto je poluprečnik sfere mnogo manji od rastojanja između Sunca i Zemlje, intenziteti vektora $\vec{E}_{gem s}$ i $\vec{B}_{gem s}$ konstantni su u bilo kojoj tački te oblasti. Predhodno smo imali hipotetičku situaciju da oko Sunca orbitira neko telo, i određena je sila koja deluje na to probno telo. U slučaju Zemlje probno telo je veštački satelit. Brzinu satelita u sistemu S_3 označiću sa \vec{v}_{sat} , a njegovu masu sa m . Na osnovu jednačine (2.28) dobijam silu koja deluje na veštački Zemljin satelit

$$\vec{F}_{gem s} = m \vec{E}_{gem s} + m \vec{v}_{sat} \times \vec{B}_{gem s} \quad (4.65)$$

Ova sila opisuje gravitacioni uticaj Sunca na veštački Zemljin satelit, i u skladu sa tim koristim indeks s .

Uvešću u analizu telo mase m koje miruje na površini Zemlje. Ono se nalazi u gravitacionom polju Zemlje, ali i u gravitacionom polju Sunca. Gravitaciona sila koja deluje na telo mase m , a potiče od Sunca dobija se na osnovu jednačina (2.28) i (4.63). Tu silu označiću sa $\vec{F}_{gem 1}$

$$\vec{F}_{gem 1} = -\frac{\gamma M_s m}{r_z^3} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \vec{r}_z(t)$$

Planetu Zemlju možemo u mislima podeliti na skup tela. Taj skup sastojaće se od velikog broja tela. Broj tela koja sačinjavaju Zemlju označiću sa N . Svako pojedinačno telo neka ima masu m . Na svako telo mase m deluje sila $\vec{F}_{gem 1}$. Ukupnu silu koja deluje na planetu Zemlju označiću sa $\vec{F}_{gem u}$, a ona se određuje na osnovu jednačine

$$\vec{F}_{gem u} = \vec{E}_{gem s} \sum_{i=1}^N m_i \quad (4.66)$$

, odnosno

$$\vec{F}_{gemu} = \vec{E}_{gem s} M_z \quad (4.67)$$

Sa M_z označio sam masu Zemlje. U jednačini (4.66) vektor jačine gravitoelektričnog polja nalazi se ispred sume, jer on ima istu vrednost u svakoj tački planete Zemlje. Jednačina (4.67) može se napisati na sledeći način

$$\vec{F}_{gemu} = -\frac{\gamma M_s M_z}{r_z^3} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \vec{r}_z(t) \quad (4.68)$$

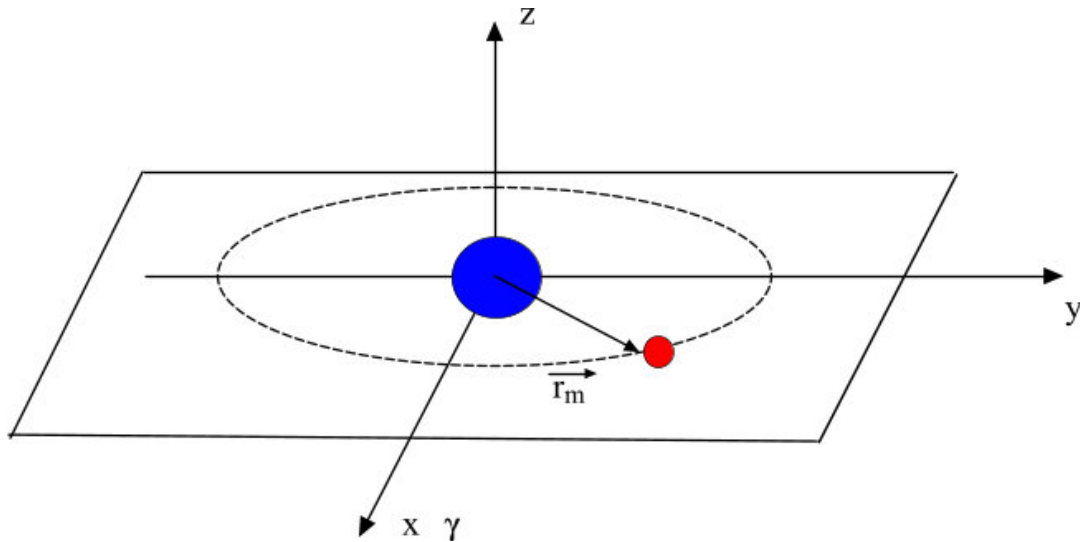
Ovu silu možemo zapisati kao sumu dva sabirka

$$\vec{F}_{gemu} = -\frac{\gamma M_s M_z}{r_z^3} \vec{r}_z(t) + \frac{\gamma M_s M_z}{r_z^3} \frac{v_z^2}{2c^2} \vec{r}_z(t)$$

Pored Njutnovog člana figuriše i dopunski član koji zavisi od brzine kretanja Zemlje. Taj član će svakako imati uticaj na kretanje Zemlje oko Sunca, i biće analiziran u daljem radu.

U analizu moramo uzeti i gravitaciono polje Meseca. Zemlja i Mesec kreću se oko zajedničkog centra mase koji se nalazi na udaljenosti od oko 4600 km od Zemljinog centra. Mesec se kreće oko Zemlje po eliptičnoj orbiti. Ja ću ovu fizičku situaciju pojednostaviti. Najpre ću zanemariti kretanje Zemlje i Meseca oko zajedničkog centra mase, odnosno uzeću da se centar mase ovog binarnog sistema poklapa sa centrom Zemlje. Problem ću dalje pojednostaviti time što ću uzeti da se Mesec kreće oko Zemlje po kružnoj putanji. Može se uzeti da je srednje rastojanje izmedju centara Zemlje i Meseca oko 385000 km. Ova vrednost rastojanja je oko 60 Zemljinih radijusa. Orbita Meseca nalazi se u ravni koja je nagnuta u odnosu na ravan ekliptike pod uglom od $5,14^0$. Ova inklinacija orbite nije velika, i zbog jednostavnosti dalje analize uzeću da se Mesečeva orbita nalazi u ravni ekliptike.

Uvešću posmatrača u sistem S_3 (u sistemu Zemlje). Položaj Meseca u ovom sistemu određen je radijus vektorom \vec{r}_m , a njegova brzina vektorom \vec{v}_m . Mesec se za posmatrača na Zemlji kreće po kružnoj putanji (slika 16)



Slika 16

Radijus vektor \vec{r}_m i vektor brzine Meseca \vec{v}_m određuju se na osnovu jednačina

$$\vec{r}_m(t) = r_m [\cos(\omega_m t) \vec{e}_{x3} + \sin(\omega_m t) \vec{e}_{y3}]$$

$$\vec{v}_m(t) = r_m \omega_m [-\sin(\omega_m t) \vec{e}_{x3} + \cos(\omega_m t) \vec{e}_{y3}]$$

Ugaona brzina rotacije Meseca oko Zemlje označena je sa ω_m

Jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja Meseca u koordinatnom početku sistema S_3 (sistemu Zemlje) odrediću korišćenjem jednačina (4.31) i (4.33). Materijalna tačka (čestica) koje se ovde kreće je Mesec tako da ću umesto vektora \vec{r}_ξ i \vec{v}_ξ koristiti vektore \vec{r}_m i \vec{v}_m . U skladu sa ovom zamenom i na osnovu jednačina (4.31) i (4.33) dobijam

$$\vec{E}_{gem\ m}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma M_m}{r_m^3} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2} \right) \vec{r}_m(t) \quad (4.69)$$

$$\vec{B}_{gem\ m}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_m}{r_m^3} \left[\frac{\vec{r}_m(t) \times \vec{v}_m(t)}{c^2} \right] \quad (4.70)$$

Sa M_m je označena masa Meseca. Kod vektora $\vec{E}_{gem\ m}$ i $\vec{B}_{gem\ m}$ koristim indeks m da bi naznačio da gravitaciono polje potiče od Meseca.

U predhodnoj analizi uveo sam određenu oblast oko Zemlje. U toj oblasti orbitiraju veštački Zemljini sateliti. Ta oblast bila je sfera poluprečnika r . Poluprečnik sfere bio je nekoliko Sunčevim radijusa, a izbor vrednosti poluprečnika sfere bio je sasvim proizvoljan. Analiziran je gravitacioni uticaj Sunca i dobijena je jednačina (4.65).

Na osnovu jednačina (4.69) i (4.70) odredjujem jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja Meseca u koordinatnom početku sistema S_3 (u sistemu Zemlje). Ponovo ću uvesti sfernu oblast u analizu, ali moram napomenuti pojedine stvari. Kada je analiziran gravitacioni uticaj Sunca na veštačke Zemljine satelite imali smo da je poluprečnik sfere bio mnogo manji od rastojanja između Sunca i Zemlje, i u skladu sa tim intenziteti vektora $\vec{E}_{gem\ s}$ i $\vec{B}_{gem\ s}$ imali su istu vrednost u bilo kojoj tački te oblasti.

U slučaju Meseca situacija je drugačija. Srednje rastojanje između centara Zemlje i Meseca je oko 60 Zemljinih radijusa. I u slučaju Meseca uvođim sfernu oblast u analizu, ali ću uzeti konkretnu vrednost za poluprečnik sferne oblasti oko Zemlje. Ta vrednost neka iznosi $2R_z$. Sa R_z označen je poluprečnik Zemlje. Poluprečnik sferne oblasti je oko 30 puta manji od srednjeg rastojanja između centara Zemlje i Meseca, odnosno poluprečnik sferne oblasti uporediv je sa srednjim rastojanjem između centara Zemlje i Meseca. To bi moglo rezultirati da intenziteti vektora $\vec{E}_{gem\ s}$ i $\vec{B}_{gem\ s}$ nemaju istu vrednost u svim tačkama te sferne oblasti. Mogla bi nastati promena intenziteta vektora $\vec{E}_{gem\ s}$ i $\vec{B}_{gem\ s}$ u toj oblasti. Međutim zbog jednostavnosti analize uzeću da su intenziteti vektora $\vec{E}_{gem\ s}$ i $\vec{B}_{gem\ s}$ konstantni, odnosno da imaju istu vrednost u bilo kojoj tački te sferne oblasti.

Brzinu satelita u sistemu S_3 označio sam sa \vec{v}_{sat} , a njegovu masu sa m . Na osnovu jednačine (2.28) dobijam silu koja deluje na veštački Zemljin satelit

$$\vec{F}_{gem\ m} = m\vec{E}_{gem\ m} + m\vec{v}_{sat} \times \vec{B}_{gem\ m} \quad (4.71)$$

Ova sila opisuje gravitacioni uticaj Meseca, i u skladu sa tim koristim indeks m u jednačini.

5 Tomsonova precesija

Da bi objasnili Tomsonovu precesiju potrebno je da se podsetimo pojedinih elemenata kvantne mehanike. Možemo reći da je kvantna mehanika nastala kao rezultat težnje naučnika da objasne određene eksperimentalne rezultate koji su dobijeni uglavnom u drugoj polovini devetnestog veka i početkom dvadesetog veka, a koje klasična mehanika i klasična elektrodinamika nisu uspele da objasne. Ovde treba pre svega spomenuti sledeće eksperimentalne rezultate: zračenje crnog tela, rezultate iz oblata spektroskopije, fotoelektrični efekat i toplotni kapacitet čvrstih tela. Veliki impuls za

nastanak kvantne mehanike bila je potreba da se objasne spektri atoma, i to prvenstveno emisijski spektri.

Najpe je stvorena matricna mehanika. To je bila prva logički konzistentna formulacija kvantne mehanike. Nakon toga Šredinger razvija talasnu mehaniku. Njegov cilj bio je da odredi jednačinu koja će opisivati de Brojjeve talase. Kasnije je pokazano da su matricna mehanika i talasna mehanika medjusobno ekvivalentne, i da predstavljaju dve forme kvantne mehanike.

Centralno mesto u nerelativističkoj kvantnoj mehanici pripada Šredingerovoj jednačini. Ona određuje vremensku evoluciju talasne funkcije sistema

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\vec{r}, t) \quad (5.1)$$

Sa $\psi(\vec{r}, t)$ je označena talasna funkcija, i je imaginarna jedinica. Veličina \hat{H} je Hamiltonijanski operator, a \hbar je redukovana Plankova konstanta, i određuje se na osnovu jednačine

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Prema standardnoj interpretaciji kvantne mehanike talasna funkcija daje najkompletniji opis fizičkog sistema. Talasna funkcija ψ je u opštem slučaju kompleksna funkcija, i ne može se meriti u eksperimentima. Za talasnu funkciju se koristi i naziv vektor stanja. Fizički smisao ima kvadrat modula talasne funkcije

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

Verovatnoća da se čestica nađe u nekom elementu zapremine dV u trenutku t određuje se na osnovu jednačine

$$P = \int |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV$$

Ova jednačina nam ukazuje da je kvantna mehanika probabilistička teorija.

Za slučaj jedne čestice koja se kreće u nekom polju, i ima potencijalnu energiju $V(\vec{r}, t)$ Šredingerova jednačina glasi

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (5.2)$$

U slučaju da potencijalna energija ne zavisi od vremena jednačina (5.2) dobija oblik

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (5.3)$$

Ako uporedimo jednačine (5.1) i (5.3) vidimo da Hamiltonijanski operator ima formu

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \quad (5.4)$$

U klasičnoj mehanici koristimo veličine kao što su impuls, kinetička energija, potencijalna energija itd. U kvantnoj mehanici svakoj dinamičkoj varijabli pridružuje se linearni operator. Impulsu iz klasične mehanike pridružuje se operator impulsa u kvantnoj mehanici. Taj operator se definiše na osnovu jednačine

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla \quad (5.5)$$

Kinetička energija može se izraziti preko impulsa

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

Operator kinetičke energije određuje se na osnovu jednačine

$$\hat{E}_k = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (5.6)$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (5.5), i dobijamo

$$\widehat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad (5.7)$$

Jedna od prvih primena kvantne mehanike je rešavanje Šredingerove jednačine za atom vodonika. Elektron se nalazi u elektrostatičkom polju protona, pa u skladu sa tim potencijalna energija elektrona određuje se na osnovu jednačine

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Operator potencijalne energije glasi

$$\widehat{V} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Sa r je označeno trenutno rastojanje elektrona od protona.

U klasičnoj mehanici zbir kinetičke i potencijalne energije daje ukupnu energiju sistema. U kvantnoj mehanici zbir operatora kinetičke energije i operatora potencijalne energije daje Hamiltonijanski operator. Za slučaj atoma vodonika Hamiltonijanski operator glasi

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (5.8)$$

, a Šredingerova jednačina dobija oblik

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (5.9)$$

Sa μ je označena tzv. redukovana masa za sistem elektron i proton. Ona se određuje na osnovu jednačine

$$\mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$$

Sa m_e označena je masa elektrona, a sa m_p masa protona.

Vrednosti energetskih nivoa atoma vodonika dobijeni su rešavanjem jednačine (5.9)

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad (5.10)$$

Sa n je označen glavni kvantni broj.

Jednačina (5.10) može se napisati i u obliku

$$E_n = -\frac{Rhc}{n^2} \quad (5.11)$$

, gde je sa R označena tzv. Ridbergova konstanta.

Korišćenjem jednačine (5.11) i drugog Borovog postulata dobijena je jednačina za određivanje talasne dužine svetlosti koju atom vodonika emituje ili apsorbuje

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (5.12)$$

Kada se snimi spektar atoma vodonika (emisioni, apsorcion) dobijaju se odgovarajuće spektralne linije. Talasne dužine koje odgovaraju tim spektralnim linijama određuju se na osnovu jednačine (5.12). Ove spektralne linije nazovimo glavnim spektralnim linijama.

Snažnu potvrdu validnosti kvantnoj mehanici dalo je objašnjenje spektra atoma vodonika. Medjutim dalji napredak u spektroskopskoj tehnici omogućio je da se registruju spektralne linije, odnosno da se izmere talasne dužine koje se ne mogu dobiti na osnovu jednačine (5.12). Proučavanjem spektara sa poboljšanom spektroskopskom tehnikom primećeno je da se umesto jedne glavne spektralne linije pojavljuju dve ili više spektralnih linija koje su medjusobno malo razdvojene. Ova pojava primećena je kod pojedinih glavnih spektralnih linija. Pojava podele glavne spektralne linije u dve ili više komponenata u spektroskopiji naziva se fina struktura.

Trebalo je objasniti finu strukturu. Da bi ilustrovao kako je to uradjeno najpre ću Hamiltonijanski operator definisan jednačinom (5.8) označiti sa \hat{H}_0

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (5.13)$$

Ovom Hamiltonijanskom operatoru dodata su tri operatora koji predstavljaju male korekcije. Te operatore označiću sa \hat{H}_1 , \hat{H}_2 i \hat{H}_3 . Ukupni Hamiltonijanski operator postaje

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 \quad (5.14)$$

Da bi se odredili energetske nivou za finu strukturu, a potom i odgovarajuće talasne dužine primenjuje se vremenski nezavisna teorija perturbacije. Operatori \hat{H}_1 , \hat{H}_2 i \hat{H}_3 predstavljaju male perturbacije za operator \hat{H}_0 . Ja se neću zadržavati na primeni vremenski nezavisne teorije perturbacije u cilju objašnjenja fine strukture spektra atoma vodonika, ali ću dati pojedina objašnjenja u vezi operatora \hat{H}_1 , \hat{H}_2 i \hat{H}_3 . Moj prevashodni cilj je Tomsona precesija koja je povezana sa spin-orbitalnom interakcijom odnosno operatorom \hat{H}_2 .

Zadržimo se najpre na operatoru \hat{H}_1 . Kinetička energija u klasičnoj mehanici određuje se na osnovu jednačine

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

U kvantnoj mehanici pridružen je operator kinetičke energije (jednačina (5.7)).

U specijalnoj teoriji relativnosti kinetička energija čestice određuje se na osnovu jednačine

$$E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \quad (5.15)$$

Sa m je označena masa mirovanja čestice, a sa p njen impuls. Jednačina (5.15) može se napisati u obliku

$$E_k = mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1 \right] \quad (5.16)$$

Za slučaj malih brzina imamo da važi

$$p \ll mc$$

Zbog ovog uslova dobijamo

$$\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{p}{mc}\right)^4$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (5.16) dobijamo

$$E_k = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^3}$$

Vidimo da pored izraza za kinetičku energiju iz klasične mehanike figuriše i dopunski član.

Ovom dopunskom članu pridružuje se operator u kvantnoj mehanici, a to je upravo operator \hat{H}_1

$$\hat{H}_1 = -\frac{(\hat{p}^2)^2}{8m^3 c^3} \quad (5.17)$$

Kada je Šredinger formulisao svoju jednačinu u njoj nije figurisao spin elektrona. Spin čestice (elektrona) je kasnije uveden u kvantnu mehaniku, i ne pojavljuje se prirodno iz Šredingerove jednačine. Ako čestica ima nenulti spin onda će se imati magnetski moment, i ako se čestica nadje u magnetnom polju imaće dopunsku energiju.

Kada se atom vodonika stavi u statičko magnetno polje zapaža se da se umesto jedne glavne spektralne linije pojavljuju dve ili više spektralnih linija koje su međusobno malo razdvojene. Ova je primećeno kod pojedinih glavnih spektralnih linija, i ova pojava naziva se Zemanov efekat (Pieter Zeeman). Naravno ova pojava postoji i kod drugih atoma. Medjutim čak i kada se atom vodonika ne nalazi u spoljašnjem magnetnom polju, dolazi do podele glavne spektralne linije u dve ili više komponenata. Ta pojava se u spektroskopiji naziva fina struktura.

Da bi se objasnila fina struktura konstatujemo najpre da elektron ima nenulti spin, pa u skladu sa tim poseduje magnetski moment. Fina struktura spektra atoma vodonika može se analizirati posebno od Zemanovog efekta, odnosno uzima se da se atom vodonika ne nalazi u spoljašnjem magnetnom polju. Medjutim elektron se kreće u elektrostatičkom polju protona, i ako uvedemo sistem koji je vezan za elektron u tom sistemu postojaće magnetno polje. Obzirom da elektron poseduje magnetski momenat i nalazi se u magnetnom polju posedovaće dopunsku energiju. Takva analiza i analogija sa klasičnom elektrodinamikom dovela je do uvođenja sledećeg Hamiltonijanskog operatora, koji ću označiti sa \hat{H}_4

$$\hat{H}_4 = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^3 r^3} \hat{L} \cdot \hat{S} \quad (5.18)$$

Sa \hat{L} je označen operator momenta impulsa elektrona, a sa \hat{S} operator spina. Sa stanovišta kvantne mehanike došlo je do interakcije spina elektrona sa magnetnim poljem koje postoji u sistemu elektrona. Ova interakcija naziva se spin-orbitalna interakcija.

Medjutim na osnovu Hamiltonijanskog operatora \hat{H}_4 ne može se objasniti fina struktura atoma vodonika. Izlaz iz ove situacije predložio je naučnik Tomas (Llewellyn Hilleth Thomas). On je otkrio pojavu precesije koja nosi naziv po njemu. Predložio je da treba izvršiti korekciju operatora \hat{H}_4 , tako što treba dodati faktor 1/2. Hamiltonijanski operator na osnovu koga se može objasniti fina struktura označiću sa \hat{H}_2 i on glasi

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^3 r^3} \hat{L} \cdot \hat{S} \quad (5.19)$$

Ovaj operator figuriše u izrazu za ukupni Hamiltonijanski operator (jednačina (5.14)). Operatori \hat{H}_2 i \hat{H}_4 razlikuju se za faktor 1/2, i taj faktor predstavlja Tomsonovu korekciju. Pri dobijanju tog faktora Tomson je koristio specijalnu teoriju relativnosti i efekat dilatacije vremena.

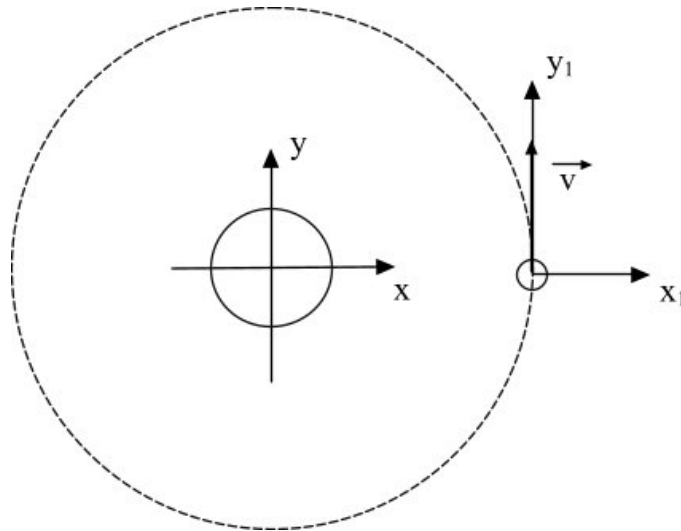
Operator \hat{H}_3 koji figuriše u jednačini (5.14) naziva se Darwinov član (Charles Galton Darwin). On se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\hat{H}_3 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{h^2}{m^2 c^2} \delta^3(\vec{r}) \quad (5.20)$$

Elektron se nalazi u elektrostatičkom polju protona, i poseduje potencijalnu energiju. Darwinov član opisuje promenu potencijalne energije (potencijala) elektrona. Darwinov član jedino utiče na ona kvantna stanja opisana talasnom funkcijom kod kojih je orbitalni kvantni broj jednak nuli ($l = 0$). Za talasne funkcije kod kojih je orbitalni kvantni broj veći od nule Darwinov član na njih nema uticaj.

Postoji dosta literature o Tomsonovoj precesiji, i različitim pristupa za objašnjenje ovog fenomena. U daljem tekstu ja ću se zadržati na određenim rezultatima u vezi Tomsonove precesije koji se mogu primeniti u teoriji gravitacije. Da bi ilustrovao Tomsonovu precesiju mogao bih uzeti sledeći primer. Oko jednog tela koje miruje i ima naelektrisanje Q kreće se po kružnoj putanji telo koje ima naelektrisanje q . Medjutim pošto je u predhodnoj diskusiji bilo reči o atomskoj fizici predhodni primer zameniće kretanjem elektrona oko jezgra. Pošto je masa elektrona mnogo manja od mase jezgra uzimamo da jezgro miruje. Zbog jednostavnosti analize uzeću da se elektron kreće po kružnoj putanji. Rastojanje elektrona do jezgra označiću sa r , a brzinu elektrona sa v . Ovo bi odgovaralo planetarnom modelu atoma, ali kvantne efekte u daljoj analizi neću uzimati u razmatranje.

Uvodim dva koordinatna sistema S i S_1 . Sistem S je vezan za jezgro, a sistem S_1 za elektron. Koordinatne ose sistema S obeležene su sa x i y , a koordinatne ose sistema S_1 sa x_1 i y_1 . Na slici 17 prikazan je i smer rotacije elektrona.



Slika 17

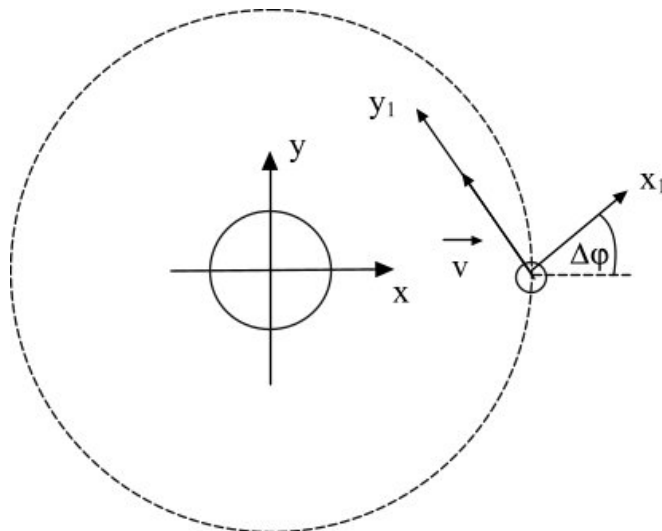
U početnom trenutku koordinatne ose sistema S i S_1 su paralelne. Početni položaj elektrona označen je sa A . Na slici 17 prikazan je i vektor brzine elektrona u tom početnom trenutku. Pravac vektora brzine poklapa se sa osom y_1 . Sistem S_1 je vezan za elektron. To je pokretni sistem jer se elektron kreće oko protona. On je uveden na taj način da se osa y_1 uvek poklapa sa pravcem vektora brzine u svakom trenutku vremena.

Kada ne bi postojala Thomsonova precesija pravac vektora brzine u svakoj tački putanje poklapao bi se sa pravcem tangente. Vreme koje je potrebno elektronu da prilikom svog kretanja opiše jedan pun krug, odnosno da se vrati u početni položaj određen tačkom A nazvaću period rotacije elektrona. Ono se određuje na osnovu jednačine

$$T = \frac{2r\pi}{v} \quad (5.21)$$

Nakon povratka elektrona u položaj određen tačkom A pravac vektora brzine je identičan sa pravcem vektora brzine koji je elektron imao u početnom trenutku. Nije došlo ni do promene intenziteta i smera vektora brzine. Sve je ovo u saglasnosti sa klasičnom mehanikom.

Istakao sam da je Thomson koristio specijalnu teoriju relativnosti i efekat dilatacije vremena prilikom objašnjenja pojave precesije koja nosi naziv po njemu. Sa stanovišta posmatrača u sistemu S doći će do pojave Thomsonove precesije. Kada se elektron nakon vremena T vrati u početni položaj pravac vektora brzine biće malo pomeren u odnosu na pravac koji je imao u početnom trenutku. To je predstavljeno na slici 18



Slika 18

Sistem S_1 je pokretni sistem koji je vezan za elektron. Osa y_1 se poklapa sa pravcem vektora brzine u svakom trenutku vremena. Obzirom da je došlo do promene pravca vektora brzine to znači da je došlo do rotacije koordinatnog sistema S_1 . Na slici 18 ugao izmedju osa x i x_1 je označen sa $\Delta\varphi$. Znači nakon vremena T koordinatni sistem se zarotirao za ugao $\Delta\varphi$.

Sa stanovišta posmatrača u sistemu S ugaona brzina rotacije koordinatnog sistema S_1 određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{\omega}_T = \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right) \frac{\vec{a} \times \vec{v}}{c^2} \quad (5.22)$$

Veličina $\vec{\omega}_T$ naziva se Tomsonova precesiona frekvenca, a γ je Lorencov faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Za slučaj malih brzina jednačina (5.22) dobija oblik

$$\vec{\omega}_T = \frac{1}{2c^2} (\vec{a} \times \vec{v}) \quad (5.23)$$

U ovom slučaju elektron se kreće po kružnoj putanji i ubrzanje elektrona jednako je centripetalnom ubrzanju

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{n} \quad (5.24)$$

Sa \vec{n} je označen jedinični vektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Zamenom jednačine (5.24) u jednačinu (5.23) dobijam Tomsonovu precesionu frekvencu

$$\vec{\omega}_T = -\frac{v^3}{2c^2 r} \vec{k} \quad (5.25)$$

Vektor \vec{k} je jedinični vektor čiji je pravac normalan na ravan orbite elektrona.

Tomsonovu precesiju može izazvati ne samo Kulonova sila već i neka druga sila, ali mora postojati komponenta ubrzanja koja je normalna na pravac vektora \vec{v} . U slučaju pravolinijskog kretanja vektori brzine i ubrzanja imaju isti pravac i ne dolazi do pojave Tomsonove precesije.

Vratimo se primeru rotacije elektrona oko jezgra (slika 18). Kao rezultat Tomsonove precesije za posmatrača u sistemu S koordinatni sistem S_1 rotiraće ugaonom brzinom koja se određuje na osnovu jednačine (5.25). Posle vremena T ose koordinatnog sistema zarotirane su za ugao $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \omega_T T$$

Korišćenjem jednačina (5.25) i (5.21) dobijamo

$$\Delta\varphi = \frac{v^2}{c^2} \pi \quad (5.26)$$

Harihar Behera je u svojim radovima [5] i [6] razmatrao primenu Tomsonove precesije u oblasti gravitacione fizike. Po mom mišljenju dao je neke veoma bitne zaključke u vezi Tomsonove precesije koji imaju dalekosežne posledice u oblasti gravitacione fizike. On je radio na objašnjenju precesije perihela Merkura. Tomsonovu precesiju može izazvati ne samo Kulonova sila već i neka druga sila, ali mora postojati komponenta ubrzanja koja je normalna na pravac vektora \vec{v} .

Obzirom da se u radovima [5] i [6] autor bavio precesijom perihela Merkura, zadržaću se na tom primeru. Tomsonova precesija u tom slučaju uzrokovana je Njutnovom gravitacionom silom. Ubrzanje Merkura određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{a} = -\frac{\gamma M_S}{r^3} \vec{r} \quad (5.27)$$

U radu [5] autor Tomsonovu precesionu frekvenciju obeležava sa $\vec{\omega}_{gT}$ i dobija sledeći rezultat

$$\vec{\omega}_{gT} = \frac{\gamma M_S}{2c^2 r^3} (\vec{v} \times \vec{r}) \quad (5.28)$$

Ovaj rezultat jednostavno se dobija zamenom jednačine (5.27) u jednačinu (5.23).

Behera pokazuje da zbog postojanja Tomsonove precesije treba uvesti dodatnu silu koja deluje na Merkur. Tu silu je označio sa \vec{F}_{Th} , i ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{F}_{Th} = m_0 \vec{v} \times \vec{B}_g \quad (5.29)$$

Sa m_0 je označio masu Merkura, a \vec{v} je brzina Merkura.

Ja ću prihvatiti egzistenciju ove sile, ali ću je obeležiti sa \vec{F}_T , i nazvaću je Tomsonova sila. Smatram da ima smisla uvesti ovu silu i to iz sledećeg razloga. Kada sam razmatrao kretanje elektrona oko jezgra konstatovao sam da kada elektron opiše jedan pun krug, i nakon vremena T vrati se u početni položaj, pravac vektora brzine je malo pomeren u odnosu na pravac koji je imao u početnom trenutku. To je predstavljeno na slici 18. Ugao za koji je zarotiran sistem S_1 određuje se na osnovu jednačine (5.26). Obzirom da je došlo do promene pravca brzine možemo smatrati da je ta promena uzrokovana delovanjem sile.

Veličinu \vec{B}_g Behera određuje na osnovu jednačine

$$\vec{B}_g = \frac{\vec{v} \times \vec{g}}{c^2} \quad (5.30)$$

, gde je \vec{g} gravitaciono ubrzanje Merkura

$$\vec{g} = -\frac{\gamma M_S}{r^3} \vec{r} \quad (5.31)$$

Behera dobija sledeći rezultat za silu \vec{F}_{Th}

$$\vec{F}_{Th} = -\frac{\gamma m_0 M_S}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r}) \quad (5.32)$$

Pri tome je koristio jednačine (5.29-31)

Veoma bitan zaključak daje u vezi veličine \vec{B}_g . Po njemu kada se Merkur kreće oko Sunca on se nalazi u gravitomagnetnom polju Sunca koje je kvantitativno opisano vektorom \vec{B}_g , a poreklo ovog polja leži u Tomsonovoj precesiji. Behera se poziva na analogiju sa elektromagnetizmom. Analogija ima smisla jer jednačina (5.29) po svojoj formi podseća na Lorencovu silu.

Ja sam uveo gravitomagnetno polje \vec{B}_{gem} . Ono se određuje na osnovu sistema jednačina (2.34-37). Medjutim polje \vec{B}_g je sasvim drugačije prirode. Behera smatra da poreklo ovog polja leži u Tomsonovoj precesiji. Istakao sam da se Tomsonova precesija objašnjava korišćenjem specijalne teorije relativnosti i efekta dilatacije vremena. Ja ću prihvatiti postojanje ovog polja koje je Behera uveo, ali umesto oznake \vec{B}_g korišću oznaku \vec{B}_T i nazvaću ga Tomsonovo polje.

O kretanju veštačkih satelita u gravitacionom polju Zemlje bilo je reči u trećem poglavlju. Za opisivanje kretanja satelita obično se koristi Konvencionalni inercijalni sistem (slika 5). Položaj satelita u tom sistemu određuje se pomoću radijus vektora \vec{r} , a vektor brzine satelita je označen sa \vec{v} . Jednačina (3.1) predstavlja jednačinu dinamike satelita. Njutnov član je posebno izdvojen na desnoj strani jednačine (3.1) jer je on dominantan. Ako se zanemare perturbujuće sile koje deluju na satelit jednačina dinamike satelita (3.1) dobija oblik

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r}$$

Na osnovu ove jednačine jednostavno je odrediti ubrzanje satelita

$$\vec{a} = -\frac{\gamma M_z}{r^3} \vec{r} \quad (5.33)$$

Satelit se kreće u gravitacionom polju Zemlje. Dolazi do pojave Tomsonove precesije i Tomsonove sile. Tomsonova sila određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{F}_T = m\vec{v} \times \vec{B}_T \quad (5.34)$$

Jednačina (5.34) je po svojoj suštini ista sa jednačinom (5.29) samo sam promenio oznake.

Tomsonovo polje određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{B}_T = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{a} \quad (5.35)$$

Korišćenjem jednačine (5.33) dobijam

$$\vec{B}_T = \frac{\gamma M_z}{r^3 c^2} \vec{r} \times \vec{v} \quad (5.36)$$

Na osnovu jednačina (5.34) i (5.36) dobijam izraz za Tomsonovu silu koja deluje na satelit

$$\vec{F}_T = \frac{\gamma M_z m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (5.37)$$

Ova sila biće uzeta u obzir kada se proučava dinamika veštačkih Zemljinih satelita. Medjutim rezultati prezentovani u ovom poglavlju imaju opštu važnost i biće korišćeni i u drugim primerima iz oblasti gravitacione fizike.

6. Jednačina dinamike veštačkih Zemljinih satelita sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Keplerovi orbitalni elementi

U trećem poglavlju prezentovana je jednačina dinamike veštačkih Zemljinih satelita. Dominantan član u jednačini (3.2) je Njutnova sila. Sve ostale sile koje deluju na satelit predstavljaju male perturbacije. Njih sam podelio u tri grupe. Prvu grupu čine sile gravitacionog porekla, a drugu grupu predstavljaju sile negravitacionog porekla. Treću grupu čine sile koje su korekcije Njutnove gravitacije, a dobijene su na osnovu opšte teorije relativnosti. U trećem poglavlju zadržao sam se samo na trećoj grupi sila, tako da je jednačina (3.2) dobila jednostavniji oblik

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + \vec{F}_{otr}$$

Sila \vec{F}_{otr} sastoji se od tri komponente. Ta sila veštačkom satelitu saopštava ubrzanje \vec{a}_{otr} koje se određuje na osnovu jednačine (3.18). Ovaj rezultat je dobijen za slučaj slabog gravitacionog polja i

nerelativističkih brzina kretanja probnih tela. Za slučaj gravitacionog polja Zemlje i kretanja satelita ovi uslovi su ispunjeni. Pri dobijanju ove jednačine je pretpostavljeno da je Zemlja idealna lopta sa homogenom distribucijom mase.

Za opisivanje kretanja satelita obično se koristi Konvencionalni inercijalni sistem (slika 5). Položaj satelita u tom sistemu određuje se pomoću radius vektora \vec{r} (jednačina (3.3))

$$\vec{r} = x\vec{e}_{x1} + y\vec{e}_{y1} + z\vec{e}_{z1}$$

Vektor brzine satelita u tom sistemu označiću sa \vec{v} .

Cilj ovog poglavlja je dobijanje jednačine dinamike veštačkog Zemljinog satelita, ali sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. To je prilično komplikovan problem jer se satelit nalazi u gravitacionom polju Zemlje, Sunca i Meseca. Masu satelita označiću sa m , a masu Zemlje sa M_z .

Najpre moram učiniti jednu digresiju u vezi efekta vremenske dilatacije. Uzmimo u razmatranje dva identična atomska časovnika. Jedan se nalazi na površini Zemlje, a drugi u GPS satelitu. Satelit za posmatrača na Zemlji kreće se po idealno kružnoj putanji, a za Zemlju ćemo pretpostaviti da je idealna lopta sa homogenom distribucijom mase. Brzina kojom se kreće GPS satelit oko Zemlje je 4 km/s . Vreme u sistemu GPS satelita će proticati sporije nego u sistemu časovnika koji se nalazi na Zemlji. Možemo izračunati koliko će atomski časovnik u sistemu GPS satelita kasniti u odnosu na atomski časovnik koji se nalazi na Zemlji.

Neka u sistemu časovnika koji se nalazi na Zemlji protekne vremenski interval Δt_z . U sistemu časovnika GPS satelita protekne vremenski interval Δt_{sat} koji je kraći od vremenskog intervala Δt_z .

Saglasno specijalnoj teoriji relativnosti vremenski intervali Δt_{sat} i Δt_z povezni su jednačinom

$$\Delta t_{sat} = \Delta t_z \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (6.1)$$

Za infinitezimalne vremenske intervale važi sledeća jednačina

$$dt_{sat} = dt_z \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (6.2)$$

U jednačini (6.1) v je relativna brzina između atomskih časovnika. Uzećemo da ta brzina ima vrednost 4 km/s . Korišćenjem ove vrednosti možemo odrediti razliku u pokazivanju časovnika. Obzirom da je Δt_{sat} manje od Δt_z , ta razlika sa stanovišta specijalne teorije relativnosti iznosi

$$\Delta t = \Delta t_z - \Delta t_{sat} = \Delta t_z \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right) \quad (6.3)$$

Ako uzmemo da je dužina vremenskog intervala Δt_z jednaka jedan dan odnosno 86400 sekundi možemo na osnovu jednačine (6.3) izračunati koliko će atomski časovnik u GPS satelitu kasniti u odnosu na atomski časovnik koji se nalazi na površini Zemlje. To kašnjenje u toku jednog dana iznosi

$$\Delta t = 7,68 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Ovo kašnjenje ima kumulativni efekat i mora se korigovati. Korekcija se mora izvršiti jer da bi GPS sistem pravilno funkcionisao časovnici moraju biti sinhronizovani. Korekcija se delimično vrši i usled dejstva gravitacionog polja, jer atomski časovnik u GPS satelitu se nalazi u slabijem gravitacionom polju, i vreme u tom sistemu brže protiče nego vreme u sistemu časovnika koji se nalazi na površini Zemlje.

Ovaj primer sa GPS satelitom sam iskoristio da bi ukazao na činjenicu da vreme ne protiče isto u sistemu Zemlje i sistemu veštačkog satelita. Ja ću najpre napisati jednačinu dinamike satelita sa stanovišta posmatrača u sistemu Zemlje. Obzirom da se satelit nalazi u gravitacionom polju Zemlje, Sunca i Meseca najuopštenija jednačina glasi

$$\frac{d}{dt_z} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] = \vec{F}_{gemz} + \vec{F}_{gem s} + \vec{F}_{gem m} \quad (6.4)$$

Sile koje potiču od gravitacionog dejstva Zemlje, Sunca i Meseca označio sam sa \vec{F}_{gemz} , \vec{F}_{gems} i \vec{F}_{gemm} respektivno. Ove sile biće određene sa stanovišta gravitoelektromagnetizma.

U daljem tekstu biće pokazano da se svaka od ovih sila sastoji od više komponentata, i jednačina (6.4) dobija sledeći oblik

$$\frac{d}{dt_z} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] = \vec{F}_{gemz1} + \vec{F}_{gemz2} + \vec{F}_{gemz3} + \vec{F}_{gems1} + \vec{F}_{gems2} + \vec{F}_{gems3} + \vec{F}_{gemm1} + \vec{F}_{gemm2} \quad (6.5)$$

Ovo je jednačina dinamike veštačkog Zemljinog satelita sa stanovišta posmatrača u sistemu Zemlje (sistemu S_1). Radijus vektor i vektor brzine u tom sistemu označeni su sa \vec{r} i \vec{v} .

Mogu se napisati i odgovarajuće jednačine sa stanovišta posmatrača u sistemu satelita. Najupštenija jednačina glasi

$$\frac{d}{dt_{sat}} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] = \vec{F}_{gemz} + \vec{F}_{gems} + \vec{F}_{gemm} \quad (6.6)$$

Upoređivanjem jednačina (6.4) i (6.6) vidimo da imaju identičan matematički oblik, ali postoji jedna suštinska razlika. U jednačini (6.6) figuriše vreme koje se meri u sistemu satelita i ono je označeno sa t_{sat} .

Jednačina (6.6) može se napisati i u sledećem obliku

$$\frac{d}{dt_{sat}} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] = \vec{F}_{gemz1} + \vec{F}_{gemz2} + \vec{F}_{gemz3} + \vec{F}_{gems1} + \vec{F}_{gems2} + \vec{F}_{gems3} + \vec{F}_{gemm1} + \vec{F}_{gemm2} \quad (6.7)$$

Jednačina (6.7) je posledica predhodne konstatacije da se svaka od sila \vec{F}_{gemz} , \vec{F}_{gems} i \vec{F}_{gemm} sastoji od više komponentata.

Za posmatrača u sistemu S_1 sile \vec{F}_{gemz} , \vec{F}_{gems} i \vec{F}_{gemm} imaju određenu matematičku formu. Medjutim ja sam uzeo da i za posmatrača u sistemu satelita sile \vec{F}_{gemz} , \vec{F}_{gems} i \vec{F}_{gemm} imaju istu matematičku formu kao i sa stanovišta posmatrača u sistemu S_1 .

Postavlja se jedno izuzetno bitno pitanje, a to je da li koristiti jednačinu (6.4) ili jednačinu (6.6) za opisivanje kretanja satelita. Ja sam se odlučio za korišćenje jednačine (6.6). Prilikom proučavanja kretanja satelita mi koristimo vreme u sistemu Zemlje (sistemu S_1), a u jednačini (6.6) figuriše vreme u sistemu satelita. Medjutim jednačinu (6.6) transformisaću i dobiću jednačinu u kojoj figuriše vreme koje se meri u sistemu Zemlje (sistemu S_1). Prilikom tih transformacija viša puta ću koristiti jednačinu (6.2).

Najpre ću transformisati levu stranu jednačine (6.6) bez uzimanja u obzir efekta vremenske dilatacije.

Korišćenjem Lorencovog faktora γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (6.8)$$

leva strana jednačine (6.6) može se napisati na sledeći način

$$\frac{d}{dt_{sat}} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] = \frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{sat}}$$

Nakon diferenciranja dobijamo

$$\frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{sat}} = m \frac{d\vec{v}}{dt_{sat}} \gamma + m\vec{v} \frac{d\gamma}{dt_{sat}}$$

Ovaj izraz dalje se transformiše na sledeći način

$$\frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{sat}} = m \frac{d\vec{v}}{dt_{sat}} \gamma + m\vec{v} \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{dt_{sat}} \quad (6.9)$$

Izvod γ faktora po brzini je

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{v}{c^2} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-3/2}$$

, odnosno

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{v}{c^2} \gamma^3$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (6.9) dobijamo

$$\frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{sat}} = m \frac{d\vec{v}}{dt_{sat}} \gamma + m\vec{v} \left(\frac{dv}{dt_{sat}}\right) \frac{v}{c^2} \gamma^3 \quad (6.10)$$

U drugom sabirku na desnoj strani jednačine (6.10) figuriše faktor $1/c^2$, i taj sabirak možemo zanemariti. U skladu sa tim jednačina (6.10) dobija oblik

$$\frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{sat}} = m \frac{d\vec{v}}{dt_{sat}} \gamma$$

Ona se može zapisati i na sledeći način

$$\frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{sat}} = m \frac{d\vec{v}}{dt_{sat}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (6.11)$$

Na osnovu ovog rezultata jednačina (6.6) može se napisati u obliku

$$m \frac{d\vec{v}}{dt_{sat}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \vec{F}_{gem z} + \vec{F}_{gem s} + \vec{F}_{gem m} \quad (6.12)$$

Jednačina (6.12) je dobijena bez uzimanja u obzir efekta vremenske dilatacije. Medjutim kada se proučava dinamika satelita, kretanje je opisano u sistemu S_1 , odnosno u sistemu Zemlje, i vreme se meri u tom sistemu. U jednačini (6.12) figuriše vreme u sistemu satelita tako da je potrebno transformisati ovu jednačinu. To će biti uradjeno u daljem tekstu, i u toj analizi koristiću jednačinu (6.2).

Jednačina (6.12) može se zapisati i na sledeći način

$$m \frac{d\vec{v}}{dt_{sat}} = (\vec{F}_{gem z} + \vec{F}_{gem s} + \vec{F}_{gem m}) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Korišćenjem jednačine (6.2) ova jednačina dalje se transformiše

$$m \frac{d\vec{v}}{dt_z \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = (\vec{F}_{gem z} + \vec{F}_{gem s} + \vec{F}_{gem m}) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

, odnosno

$$m \frac{d\vec{v}}{dt_z} = (\vec{F}_{gem z} + \vec{F}_{gem s} + \vec{F}_{gem m}) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (6.13)$$

Brzina kretanja satelita sa stanovišta posmatrača u sistemu satelita određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt_{sat}}$$

Korišćenjem ovog rezultata jednačina (6.13) dobija oblik

$$m \frac{d}{dt_z} \left(\frac{d\vec{r}}{dt_{sat}} \right) = (\vec{F}_{gem z} + \vec{F}_{gem s} + \vec{F}_{gem m}) \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)$$

Ova jednačina dalje se transformiše primenom jednačine (6.2)

$$m \frac{d}{dt_z} \left(\frac{d\vec{r}}{dt_z \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \right) = (\vec{F}_{gem z} + \vec{F}_{gem s} + \vec{F}_{gem m}) \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \quad (6.14)$$

Dobijena je jednačina u kojoj samo figuriše vreme koje se meri u sistemu Zemlje.

Potrebno je diferencirati izraz na levoj strani jednačine (6.14). Taj postupak već je prezentovan u dosadašnjem tekstu (jednačina (6.10)), i neću ga ponavljati. Primenom jednačine (6.10) dobijam

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} \gamma + m \vec{v} \left(\frac{dv}{dt_z} \right) \frac{v}{c^2} \gamma^3 = (\vec{F}_{gem z} + \vec{F}_{gem s} + \vec{F}_{gem m}) \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \quad (6.15)$$

U drugom sabirku na levoj strani jednačine (6.15) figuriše faktor $1/c^2$, i taj sabirak možemo zanemariti. U skladu sa tim jednačina (6.15) dobija oblik

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} \gamma = (\vec{F}_{gem z} + \vec{F}_{gem s} + \vec{F}_{gem m}) \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)$$

Ona se može napisati i na sledeći način

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = (\vec{F}_{gem z} + \vec{F}_{gem s} + \vec{F}_{gem m}) \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{3/2} \quad (6.16)$$

Obzirom da je brzina satelita mnogo manja od c važi sledeća aproksimacija

$$\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{3/2} \approx 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

Njenim korišćenjem jednačina (6.16) dobija oblik

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = (\vec{F}_{gem z} + \vec{F}_{gem s} + \vec{F}_{gem m}) \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)$$

, odnosno

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gem z} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) + \vec{F}_{gem s} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) + \vec{F}_{gem m} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \quad (6.17)$$

Ja ću najpre analizirati gravitacioni uticaj Zemlje. Iz tog razloga privremeno ću zanemariti gravitacioni uticaj Sunca i Meseca, pa jednačina (6.17) dobija jednostavniju formu

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gem z} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \quad (6.18)$$

Istakao sam da se svaka od sila $\vec{F}_{gem z}$, $\vec{F}_{gem s}$ i $\vec{F}_{gem m}$ sastoji od više komponentata. Sila $\vec{F}_{gem z}$ sastoji se od tri komponente, i u skladu sa tim jednačina (6.18) postaje

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = (\vec{F}_{gem z 1} + \vec{F}_{gem z 2} + \vec{F}_{gem z 3}) \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)$$

, odnosno

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gem z 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) + \vec{F}_{gem z 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) + \vec{F}_{gem z 3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \quad (6.19)$$

U ovoj jednačini figurišu tri sile. Najpre ću odrediti silu \vec{F}_{gemz1} . U trećem poglavlju objasnio sam da Zemlja u prostoru oko sebe stvara gravitomagnetno polje zbog svoje rotacije. Jačina gravitomagnetnog polja određuje se na osnovu jednačine (3.60)

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right]$$

Obzirom da se satelit kreće u gravitomagnetnom polju na njega će delovati sila

$$\vec{F}_{gemz1} = m\vec{v} \times \left\{ -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right] \right\} \quad (6.20)$$

Ovo je prva komponenta u jednačini (6.19).

Silu \vec{F}_{gemz2} možemo jednostavno dobiti. To je Tomsonova sila (jednačina (5.37))

$$\vec{F}_{gemz2} = \frac{\gamma M_z m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (6.21)$$

Ostalo je još da se izvrši analiza sile \vec{F}_{gemz3} . Da bi to uradio moramo se najpre podsetiti određenih rezultata iz četvrtog poglavlja. Zemlja se kreće po eliptičnoj putanji oko Sunca, ali sam zbog jednostavnosti proračuna u tom poglavlju najpre analizirao kružnu putanju. Jednačine (4.31) i (4.34) koriste se za određivanje jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u centru Sunca. Ovo gravitaciono polje stvara Zemlja. Pokazao sam da se ove jednačine mogu koristiti i za opisivanje gravitacionog polja u okolini Sunca.

U daljoj analizi uveo sam posmatrača na Zemlji (u sistemu S_3). On može tvrditi da Zemlja miruje, a da se Sunce kreće oko nje. Jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_3 (sistemu Zemlje) određuju se na osnovu jednačina (4.63) i (4.64). Ove jednačine se mogu koristiti i za određivanje gravitacionog polja u okolini Zemlje. U daljoj analizi uveo sam telo mase m koje miruje na površini Zemlje. Pokazao sam da sa stanovišta posmatrača na Zemlji gravitaciona sila koja deluje na telo mase m , a potiče od Sunca određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{F}_{gem1} = -\frac{\gamma M_s m}{r_z^3} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2} \right) \vec{r}_z(t)$$

Ovaj rezultat sam generalizovao i dobio sam silu koja deluje na planetu Zemlju (jednačina (4.68))

$$\vec{F}_{gemu} = -\frac{\gamma M_s M_z}{r_z^3} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2} \right) \vec{r}_z(t)$$

Istakao sam da za opisivanje položaja satelita u Konvencionalnom inercijalnom sistemu (sistemu S_1) koristim radijus vektora \vec{r} . Vektor brzine u tom sistemu označen je sa \vec{v} . Satelit stvara gravitaciono polje. Jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_1 koji se poklapa sa centrom Zemlje mogu se naći primenjujući predhodno prezentovane metode, ali gravitaciono polje satelita nije od velikog interesa za dalju analizu. Slično predhodnom slučaju (gde je analizirano kretanje Sunca oko Zemlje) možemo uvesti posmatrača u sistemu satelita. Pomatrač može tvrditi da Zemlja rotira oko njega. Ako primenimo predhodno prezentovane metode možemo naći jačinu gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u polja u sistemu satelita

$$\vec{E}_{gem sat} = -\frac{\gamma M_z}{r^3} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) \vec{r}(t) \quad (6.22)$$

$$\vec{B}_{gem sat} = -\frac{4\gamma M_s}{r^3} \left[\frac{\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)}{c^2} \right] \quad (6.23)$$

Ovde treba dati jednu primedbu. U slučaju kretanja Zemlje oko Sunca, ovi se objekti mogu smatrati materijalnim tačkama, jer je rastojanje izmedju njih mnogo veće i od poluprečnika Sunca i

poluprečika Zemlje. Ta činjenica je korišćena prilikom izvodjenja jednačina (4.63) i (4.64). U slučaju kretanja Zemlje oko satelita, Zemlja se ne može smatrati materijalnom tačkom, pa bi to verovatno dovelo do toga da se pojavi korekcionni faktor u jednačinama (6.22) i (6.23).

Na osnovu jednačine (4.68) određuje se sila koja deluje na planetu Zemlju. Ako primenimo slično rezonovanje kao u tom slučaju, možemo dobiti silu koja deluje na satelit. Masu satelita označio sam sa m , a jačina gravitoelektričnog polja određuje se na osnovu jednačine (6.22). Sila koja deluje na satelit sa stanovišta posmatrača u sistemu satelita dobija se na osnovu jednačine

$$\vec{F}_{gemz3} = m\vec{E}_{gem sat}$$

, odnosno

$$\vec{F}_{gemz3} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \vec{r}(t) \quad (6.24)$$

Određjena je i sila \vec{F}_{gemz3} .

Analizirajmo sada pojedine sabirke u jednačini (6.19). Prvi sabirak se može napisati u obliku

$$\vec{F}_{gemz1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \vec{F}_{gemz1} - m\vec{v} \times \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left\{ -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right] \right\} \quad (6.25)$$

U drugom članu na desnoj strani jednačine (6.25) figuriše faktor $1/c^4$, i taj član se zanemaruje. U skladu sa tim jednačina (6.25) dobija sledeću formu

$$\vec{F}_{gemz1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx m\vec{v} \times \left\{ -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right] \right\} \quad (6.26)$$

Primenimo ovaj postupak i kod drugog sabirka u jednačini (6.19). On se može napisati u obliku

$$\vec{F}_{gemz2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \frac{\gamma M_z m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) - \frac{\gamma M_z m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Zanemarivanjem člana koji sadrži faktor $1/c^4$ dobijamo

$$\vec{F}_{gemz2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx \frac{\gamma M_z m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (6.27)$$

Analizirajmo sada i treći sabirak u jednačini (6.19). On se može napisati u obliku

$$\vec{F}_{gemz3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \vec{r} + \frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \vec{r} \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Nakon elementarnih algebarskih transformacija dobijam

$$\vec{F}_{gemz3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + \frac{\gamma M_z m}{r^3} \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} + \frac{\gamma M_z m}{r^3} \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} - \frac{\gamma M_z m}{r^3} \frac{3}{4} \left(\frac{v}{c}\right)^4 \vec{r}$$

Poslednji član u ovoj jednačini sadrži faktor $1/c^4$ i njega ću zanemariti

$$\vec{F}_{gemz3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + \frac{\gamma M_z m}{r^3} \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} + \frac{\gamma M_z m}{r^3} \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r}$$

, odnosno

$$\vec{F}_{gemz3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + 2 \frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} \quad (6.28)$$

Vidimo da pored Njutnovog člana u jednačini (6.28) figuriše i dopunski član. To je perturbativni član.

Zamenom jednačina (6.26), (6.27) i (6.28) u jednačinu (6.19) dobijamo

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + m\vec{v} \times \left\{ -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right] \right\} + 2 \frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} + \frac{\gamma M_z m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (6.29)$$

Ovo je diferencijalna jednačina kretanja satelita sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Ovom jednačinom je opisan samo gravitacioni uticaj Zemlje na kretanje veštačkog satelita.

Medjutim satelit se nalazi i u gravitacionom polju Sunca i Meseca pa je potrebno analizirati i njihov uticaj. To će biti uradjeno u daljem tekstu. Krenimo najpre sa analizom gravitacionog uticaja Sunca na veštački satelit.

Više puta sam napomenuo da se kretanje satelita opisuje u Konvencionalnom inercijalnom sistemu. Taj sistem sam označio sa S_1 , i prikazan je na slici 5. Da bi odredio gravitacioni uticaj Sunca na veštački satelit najpre ću koristiti Geocentrični ekliptički inercijalni koordinatni sistem. Taj sistem je označen sa S_3 , i prikazan je na slici 9. Koordinatni početak sistema S_3 poklapa se sa centrom mase Zemlje. Osa z je orjentisana u smeru severnog ekliptičkog pola. Osa x pripada ravni ekliptike, prolazi kroz centar mase Zemlje, i usmerena je ka γ tački. Osa y bira se na taj način da se dobije sistem desne orijentacije. Ova osa leži u ravni ekliptike.

Odrediću komponente vektora jačine gravitoelektričnog, gravitomagnetnog polja i komponente Tomsonovog polja u sistemu S_3 . Ovi rezultati biće kasnije korišćeni prilikom dobijanja diferencijalne jednačine kretanja satelita u sistemu S_1 .

Uvešću posmatrača u sistemu S_3 . Pokazao sam da se jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja koje potiče od Sunca u koordinatnom početku sistema S_3 (sistemu Zemlje) određuju na osnovu jednačina (4.63) i (4.64).

Zbog njihove važnosti ove jednačine ponovo ću napisati

$$\vec{E}_{gem\ s}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma M_s}{r_z^3} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \vec{r}_z(t) \quad (6.30)$$

$$\vec{B}_{gem\ s}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_s}{r_z^3} \left[\frac{\vec{r}_z(t) \times \vec{v}_z(t)}{c^2} \right] \quad (6.31)$$

Ove jednačine mogu se koristiti i za određivanje gravitacionog polja u okolini Zemlje, odnosno u oblasti u kojoj se kreću veštački sateliti.

Sada ću odrediti komponente vektora jačine gravitoelektričnog polja u sistemu S_3 . Jednačine (6.30) i (6.31) dobijene su za slučaj kretanja Zemlje oko Sunca po kružnoj putanji, i u skladu sa tim vektor $\vec{r}_z(t)$ može se izraziti na sledeći način

$$\vec{r}_z(t) = r_z [\cos(\omega t) \vec{e}_{x2} + \sin(\omega t) \vec{e}_{y2}] \quad (6.32)$$

Veličina r_z je intenzitet radijus vektora, i on je jednak rastojanju između Sunca i Zemlje. Sa ω je označena ugaona brzina rotacije Zemlje oko Sunca, a jedinični vektori koordinatnog sistema S_2 su \vec{e}_{x2} , \vec{e}_{y2} i \vec{e}_{z2} .

Korišćenjem jednačine (6.32) jednačina (6.30) može se napisati u obliku

$$\vec{E}_{gem\ s}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma M_s}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) [\cos(\omega t) \vec{e}_{x2} + \sin(\omega t) \vec{e}_{y2}] \quad (6.33)$$

Vektor jačine gravitoelektričnog polja u sistemu S_3 može se izraziti preko svojih komponenta koje ću označiti sa $E_{gem\ s\ x}$, $E_{gem\ s\ y}$ i $E_{gem\ s\ z}$

$$\vec{E}_{gem\ s}(\vec{r}, t) = E_{gem\ s\ x} \vec{e}_{x3} + E_{gem\ s\ y} \vec{e}_{y3} + E_{gem\ s\ z} \vec{e}_{z3} \quad (6.34)$$

Da bi smo transformisali jednačinu (6.33) moramo se podsetiti činjenice da su koordinatne ose sistema S_2 i S_3 međusobno paralelne. Kao posledica toga važe jednačine (4.52) i (4.53) koje ću ponovo navesti

$$\vec{e}_{x2} = \vec{e}_{x3}$$

$$\vec{e}_{y2} = \vec{e}_{y3}$$

Važi i jednačina

$$\vec{e}_{z2} = \vec{e}_{z3} \quad (6.35)$$

Korišćenjem ovih identiteta jednačina (6.33) dobija oblik

$$\vec{E}_{gem\ s}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma M_s}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) [\cos(\omega t) \vec{e}_{x3} + \sin(\omega t) \vec{e}_{y3}] \quad (6.36)$$

Uporedjivanjem (6.36) i (6.34) dobijamo

$$E_{gem\ s\ x} = -\frac{\gamma M_s}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \cos(\omega t) \quad (6.37)$$

$$E_{gem\ s\ y} = -\frac{\gamma M_s}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \sin(\omega t) \quad (6.38)$$

$$E_{gem\ s\ z} = 0$$

Potrebno je odrediti i komponente vektora jačine gravitomagnetnog polja u sistemu S_3 . Da bi to uradio treba najpre naći vektor brzine. On se dobija korišćenjem jednačine (6.32)

$$\vec{v}_z(t) = r_z \omega [-\sin(\omega t) \vec{e}_{x2} + \cos(\omega t) \vec{e}_{y2}] \quad (6.39)$$

Zamenom jednačina (6.32) i (6.39) u jednačinu (6.31) dobijam

$$\vec{B}_{gem\ s}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_s \omega}{r_z c^2} \vec{e}_{z2}$$

Na osnovu jednačine (6.35) sledi

$$\vec{B}_{gem\ s}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_s \omega}{r_z c^2} \vec{e}_{z3} \quad (6.40)$$

Vektor jačine gravitomagnetnog polja u sistemu S_3 može se izraziti preko svojih komponenata koje ću označiti sa $B_{gem\ s\ x}$, $B_{gem\ s\ y}$ i $B_{gem\ s\ z}$

$$\vec{B}_{gem\ s}(\vec{r}, t) = B_{gem\ s\ x} \vec{e}_{x3} + B_{gem\ s\ y} \vec{e}_{y3} + B_{gem\ s\ z} \vec{e}_{z3}$$

Jedino je z komponenta različita od nule, i određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$B_{gem\ s\ z} = -\frac{4\gamma M_s \omega}{r_z c^2} \quad (6.41)$$

Zemlja se kreće u gravitacionom polju Sunca. Dolazi do pojave Tomsonove precesije i Tomsonove sile. Tomsonovo polje određuje se na osnovu jednačine (5.35). Primenom te jednačine za slučaj kretanja Zemlje oko Sunca dobijamo

$$\vec{B}_T = \frac{1}{c^2} \vec{v}_z \times \vec{a}_z \quad (6.42)$$

Ubrzanje Zemlje može se odrediti na osnovu Njutnovog zakona gravitacije

$$\vec{a}_z = -\frac{\gamma M_s}{r_z^3} \vec{r}_z \quad (6.43)$$

Zamenom jednačine (6.43) u (6.42) dobija se

$$\vec{B}_T = \frac{\gamma M_s}{r_z^3} \left[\frac{\vec{r}_z(t) \times \vec{v}_z(t)}{c^2} \right]$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačina (6.32) i (6.39)

$$\vec{B}_T = \frac{\gamma M_s \omega}{r_z c^2} \vec{e}_{z2}$$

Na osnovu jednačine (6.35) dobijamo

$$\vec{B}_T = \frac{\gamma M_s \omega}{r_z c^2} \vec{e}_{z3} \quad (6.44)$$

Vektor jačine Tomsonovog polja u sistemu S_3 može se izraziti preko svojih komponenata koje ću označiti sa $B_{T\ x}$, $B_{T\ y}$ i $B_{T\ z}$

$$\vec{B}_{gem\ s}(\vec{r}, t) = B_{T\ x} \vec{e}_{x3} + B_{T\ y} \vec{e}_{y3} + B_{T\ z} \vec{e}_{z3}$$

Jedino je z komponenta različita od nule

$$B_{Tz} = \frac{\gamma M_s \omega}{r_z c^2} \quad (6.45)$$

Vektor brzine i radijus vektor satelita u sistemu S_3 označiću sa \vec{v}_{sat} i \vec{r}_{sat} . Zemlja se nalazi u Tomsonovom polju, a samim tim i satelit. Na osnovu jednačine (5.37) možemo odrediti Tomsonovu silu koja deluje na satelit

$$\vec{F}_T = m\vec{v}_{sat} \times \vec{B}_T$$

Ova jednačina važi sa stanovišta posmatrača u sistemu S_3 .

Satelit se nalazi u gravitoelektričnom i gravitomagnetnom polju Sunca, tako da će na njega delovati sila u skladu sa jednačinom (2.28). Toj sili treba dodati i Tomsonovu silu. Ako su nam poznate sile koje deluju na satelit mogli bi smo postaviti diferencijalnu jednačina kretanja satelita sa stanovišta posmatrača u sistemu S_3 .

Medjutim prevashodni cilj je dobijanje diferencijalne jednačine kretanja satelita sa stanovišta posmatrača u sistemu S_1 . Da bi to postigao potrebno je najpre odrediti jačinu gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u sistemu S_1 . To se može uraditi korišćenjem jednačine (3.14) i postupka prezentovanog u trećem poglavlju. Ako su nam poznate komponente vektora \vec{A} u sistemu S_3 na osnovu jednačine (3.14) odredićemo komponente tog vektora u sistemu S_1 .

Vektore jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u sistemu S_3 označio sam sa $\vec{E}_{gem s}$ i $\vec{B}_{gem s}$. Naravno i u sistemu S_1 postoji gravitaciono polje. Za opisivanje tog polja sa stanovišta posmatrača u sistemu S_1 koristiću vektore jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja, i te vektore označiću sa $\vec{E}_{gem s 1}$ i $\vec{B}_{gem s 1}$. Indeks 1 je uveden da bi naznačio da su ovi vektori odredjeni u sistemu S_1 . Ovi vektori mogu se izraziti preko svojih komponenata.

$$\vec{E}_{gem s 1} = E_{gem s 1 x} \vec{e}_{x1} + E_{gem s 1 y} \vec{e}_{y1} + E_{gem s 1 z} \vec{e}_{z1} \quad (6.46)$$

$$\vec{B}_{gem s 1} = B_{gem s 1 x} \vec{e}_{x1} + B_{gem s 1 y} \vec{e}_{y1} + B_{gem s 1 z} \vec{e}_{z1} \quad (6.47)$$

Jedinični vektori koordinatnog sistema S_1 su \vec{e}_{x1} , \vec{e}_{y1} i \vec{e}_{z1} .

Komponente vektora $\vec{E}_{gem s}$ poznate su nam. Na osnovu jednačine (3.14) dobijamo

$$\begin{bmatrix} E_{gem s 1 x} \\ E_{gem s 1 y} \\ E_{gem s 1 z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{gem s x} \\ E_{gem s y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

, odnosno

$$E_{gem s 1 x} = E_{gem s x} \quad (6.48)$$

$$E_{gem s 1 y} = E_{gem s y} \cos\psi \quad (6.49)$$

$$E_{gem s 1 z} = -E_{gem s y} \sin\psi \quad (6.50)$$

Koristeći jednačine (6.37) i (6.38) jednačine (6.48-50) dobijaju oblik

$$E_{gem s 1 x} = -\frac{\gamma M_s}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \cos(\omega t) \quad (6.51)$$

$$E_{gem s 1 y} = -\frac{\gamma M_s}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \sin(\omega t) \cos\psi \quad (6.52)$$

$$E_{gem s 1 z} = \frac{\gamma M_s}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \sin(\omega t) \sin\psi \quad (6.53)$$

Vektor $\vec{E}_{gem s 1}$ može se izraziti preko svojih komponenata

$$\vec{E}_{gem\ s\ 1} = -\frac{\gamma M_s}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) [\cos(\omega t) \vec{e}_{x1} + \sin(\omega t) \cos\psi \vec{e}_{y1} - \sin(\omega t) \sin\psi \vec{e}_{z1}] \quad (6.54)$$

Ugao ψ iznosi $23,5^0$. On je definisan u trećem poglavlju. To je ugao između ekvatorijalne ravni Zemlje i ravni ekliptike

Ovakvu proceduru primenićemo i na vektor jačine gravitomagnetnog polja. Komponente vektora $\vec{B}_{gem\ s}$ poznate su nam. Na osnovu jednačine (3.14) dobijam

$$\begin{bmatrix} B_{gem\ s\ 1\ x} \\ B_{gem\ s\ 1\ y} \\ B_{gem\ s\ 1\ z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{gem\ s\ z} \end{bmatrix}$$

, odnosno

$$B_{gem\ s\ 1\ x} = 0$$

$$B_{gem\ s\ 1\ y} = B_{gem\ s\ z} \sin\psi$$

$$B_{gem\ s\ 1\ z} = B_{gem\ s\ z} \cos\psi$$

Korišćenjem jednačine (6.41) dobijam sledeće rezultate

$$B_{gem\ s\ 1\ x} = 0 \quad (6.55)$$

$$B_{gem\ s\ 1\ y} = -\frac{4\gamma M_s \omega}{r_z c^2} \sin\psi \quad (6.56)$$

$$B_{gem\ s\ 1\ z} = -\frac{4\gamma M_s \omega}{r_z c^2} \cos\psi \quad (6.57)$$

Vektor $\vec{B}_{gem\ s\ 1}$ može se izraziti preko svojih komponenta

$$\vec{B}_{gem\ s\ 1} = -\frac{4\gamma M_s \omega}{r_z c^2} [\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}] \quad (6.58)$$

Zemlja se nalazi u gravitacionom polju Sunca, a samim tim i satelit. Sa stanovišta posmatrača u sistemu S_3 Tomsonovo polje određuje se na osnovu jednačine (6.44). Jedino je z komponenta različita od nule. Naravno i u sistemu S_1 postoji Tomsonovo polje. Vektor tog polja označiću sa $\vec{B}_{T\ 1}$. Indeks 1 je uveden da bi naznačio da je ovaj vektor određen u sistemu S_1 . Vektor $\vec{B}_{T\ 1}$ može se izraziti preko svojih komponenta

$$\vec{B}_{T\ 1} = B_{T\ 1\ x} \vec{e}_{x1} + B_{T\ 1\ y} \vec{e}_{y1} + B_{T\ 1\ z} \vec{e}_{z1}$$

Komponente vektora \vec{B}_T poznate su nam. Na osnovu jednačine (3.14) dobijam

$$\begin{bmatrix} B_{T\ 1\ x} \\ B_{T\ 1\ y} \\ B_{T\ 1\ z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{T\ z} \end{bmatrix}$$

, odnosno

$$B_{T\ 1\ x} = 0 \quad (6.59)$$

$$B_{T\ 1\ y} = B_{T\ z} \sin\psi \quad (6.60)$$

$$B_{T\ 1\ z} = B_{T\ z} \cos\psi \quad (6.61)$$

Na osnovu jednačine (6.45) dobijamo rezultat

$$B_{T\ 1\ x} = 0$$

$$B_{T1y} = \frac{\gamma M_s \omega}{r_z c^2} \sin \psi$$

$$B_{T1z} = \frac{\gamma M_s \omega}{r_z c^2} \cos \psi$$

Vektor \vec{B}_{T1} može se izraziti preko svojih komponenta

$$\vec{B}_{T1} = \frac{\gamma M_s \omega}{r_z c^2} (\sin \psi \vec{e}_{y1} + \cos \psi \vec{e}_{z1}) \quad (6.62)$$

Jednačina (6.6) je najuopštenija jednačina kretanja satelita. Ovu jednačinu sam transformisao i dobio sam jednačinu (6.17)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gemz} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + \vec{F}_{gems} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + \vec{F}_{gemm} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

Ovo je diferencijalna jednačina kretanja satelita sa stanovišta posmatrača u sistemu S_1 . U ovom sistemu radijus vektor satelita je označen sa \vec{r} , a vektor brzine sa \vec{v} . Svaka pojedinačna sila koja figuriše u ovoj jednačini sastoji se od više komponenta. U predhodnom tekstu analizirao sam gravitacioni uticaj Zemlje na kretanje satelita. Tada sam zbog jednostavnosti analize privremeno zanemario gravitacioni uticaj Sunca i Meseca na satelit, i jednačinu (6.17) redukovao sam u jednačinu (6.18). Takodje sam odredio i komponente sile \vec{F}_{gemz}

Predhodno navedeni pristup primenjujem i u slučaju analize gravitacioniog uticaj Sunca na kretanje satelita. U skladu sa tim privremeno ću zanemariti gravitacioni uticaj Zemlje i Meseca, pa jednačina (6.17) dobija jednostavniju formu

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gems} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (6.63)$$

Sila \vec{F}_{gemz} sastoji se od tri komponente. U skladu sa tom konstatacijom jednačina (6.63) dobija oblik

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = (\vec{F}_{gems1} + \vec{F}_{gems2} + \vec{F}_{gems3}) \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

, odnosno

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gems1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + \vec{F}_{gems2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + \vec{F}_{gems3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (6.64)$$

Odredio sam vektore \vec{E}_{gems1} , \vec{B}_{gems1} , \vec{B}_{T1} . Satelit se nalazi u gravitoelektričnom polju Sunca i na njega deluje sila. Ta sila određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{F}_{gems1} = m \vec{E}_{gems1} \quad (6.65)$$

To je prva komponenta sile \vec{F}_{gems} .

Satelit se nalazi i u gravitomagnetnom polju Sunca i na njega deluje sila

$$\vec{F}_{gems2} = m \vec{v} \times \vec{B}_{gems1} \quad (6.66)$$

To je druga komponenta sile \vec{F}_{gems} .

Ostalo je da se odredi i treća komponenta. Zemlja se nalazi u Tomsonovom polju (koje potiče od Sunca) a samim tim i satelit. Na osnovu jednačine (5.37) možemo odrediti Tomsonovu silu koja deluje na satelit. Tu silu označiću sa \vec{F}_{gems3} i ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{F}_{gems3} = m \vec{v} \times \vec{B}_{T1} \quad (6.67)$$

Analizirajmo sada pojedine sabirke u jednačini (6.64). Prvi sabirak može se napisati u obliku

$$\vec{F}_{gems1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = m \vec{E}_{gems1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (6.68)$$

Zamenom jednačine (6.54) u jednačinu (6.68) dobijamo

$$\vec{F}_{gem\ s\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = -\frac{\gamma M_s m}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) [\cos(\omega t) \vec{e}_{x1} + \sin(\omega t) \cos\psi \vec{e}_{y1} - \sin(\omega t) \sin\psi \vec{e}_{z1}] \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

Nakon elementarnih algebarskih operacija, i zanemarivanjem člana koji sadrži faktor $1/c^4$ dobijam

$$\vec{F}_{gem\ s\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx -\frac{\gamma m M_s}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) [\cos(\omega t) \vec{e}_{x1} + \sin(\omega t) \cos\psi \vec{e}_{y1} - \sin(\omega t) \sin\psi \vec{e}_{z1}] \quad (6.69)$$

Izraz na desnoj strani jednačine (6.69) prilično je glomazan. Zbog jednostavnosti zapisivanja izraz na desnoj strani jednačine (6.69) označiću sa $\vec{F}_{gem\ 1}$

$$\vec{F}_{gem\ 1} = -\frac{\gamma m M_s}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) [\cos(\omega t) \vec{e}_{x1} + \sin(\omega t) \cos\psi \vec{e}_{y1} - \sin(\omega t) \sin\psi \vec{e}_{z1}] \quad (6.70)$$

Kao posledica ovog pojednostavljivanja jednačina (6.69) dobija oblik

$$\vec{F}_{gem\ s\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx \vec{F}_{gem\ 1} \quad (6.71)$$

Drugi sabirak u jednačini (6.64) može se napisati u obliku

$$\vec{F}_{gem\ s\ 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = m\vec{v} \times \vec{B}_{gem\ s\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (6.72)$$

Zamenom jednačine (6.58) u jednačinu (6.72) dobijamo

$$\vec{F}_{gem\ s\ 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = -\frac{4\gamma m M_s \omega}{r_z c^2} \vec{v} \times [\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}] \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

Nakon što se izvrše elementarne algebarske operacije, i zanemari član koji sadrži faktor $1/c^4$ dobijamo

$$\vec{F}_{gem\ s\ 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx -\frac{4\gamma m M_s \omega}{r_z c^2} \vec{v} \times [\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}] \quad (6.73)$$

Izraz na desnoj strani jednačine (6.73) označiću sa $\vec{F}_{gem\ 2}$

$$\vec{F}_{gem\ 2} = -\frac{4\gamma m M_s \omega}{r_z c^2} \vec{v} \times [\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}] \quad (6.74)$$

, i jednačina (6.73) dobija oblik

$$\vec{F}_{gem\ s\ 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx \vec{F}_{gem\ 2} \quad (6.75)$$

Ostalo je da se izvrši analiza trećeg sabirka u jednačini (6.64). On se može napisati u obliku

$$\vec{F}_{gem\ s\ 3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = m\vec{v} \times \vec{B}_{T\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (6.76)$$

Zamenom jednačine (6.62) u jednačinu (6.76) dobijamo

$$\vec{F}_{gem\ s\ 3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = m\vec{v} \times \frac{\gamma M_s \omega}{r_z c^2} (\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}) \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

I u ovom slučaju izvrše se elementarne algebarske operacije, i zanemari se član koji sadrži faktor $1/c^4$

$$\vec{F}_{gem\ s\ 3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx m\vec{v} \times \frac{\gamma M_s \omega}{r_z c^2} (\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}) \quad (6.77)$$

Izraz na desnoj strani jednačine (6.77) označiću sa $\vec{F}_{gem\ 3}$

$$\vec{F}_{gem\ 3} = m\vec{v} \times \frac{\gamma M_s \omega}{r_z c^2} (\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}) \quad (6.78)$$

, i jednačina (6.77) dobija oblik

$$\vec{F}_{gem\ 3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx \vec{F}_{gem\ 3} \quad (6.79)$$

Zamenom jednačina (6.71), (6.75) i (6.79) u jednačinu (6.64) dobijamo

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{gem\ 1} + \vec{F}_{gem\ 2} + \vec{F}_{gem\ 3} \quad (6.80)$$

Ovo je diferencijalna jednačina kretanja satelita sa stanovišta posmatrača u sistemu S_1 . Ova jednačina opisuje gravitacioni uticaj Sunca na satelit. Sile $\vec{F}_{gem\ 1}$, $\vec{F}_{gem\ 2}$ i $\vec{F}_{gem\ 3}$ određuju se na osnovu jednačina (6.70), (6.74) i (6.78) respektivno.

Sada ću analizirati gravitacioni uticaja Meseca na veštački satelit. U četvrtom poglavlju bilo je reči o gravitoelektričnom i gravitomagnetnom polju koje stvara Mesec. Analiza je vršena sa stanovišta posmatrača u sistemu S_3 . Radi lakše analize uzeo sam da se Mesec kreće po kružnoj putanji. Položaj Meseca u ovom sistemu određen je radijus vektorom \vec{r}_m , a njegova brzina vektorom \vec{v}_m

$$\vec{r}_m(t) = r_m [\cos(\omega_m t) \vec{e}_{x3} + \sin(\omega_m t) \vec{e}_{y3}] \quad (6.81)$$

$$\vec{v}_m(t) = r_m \omega_m [-\sin(\omega_m t) \vec{e}_{x3} + \cos(\omega_m t) \vec{e}_{y3}] \quad (6.82)$$

Sa ω_m označena je ugaona brzina rotacije Meseca oko Zemlje, a sa r_m rastojanje uzmedju Meseca i Zemlje. Intenzitet vektora brzine $\vec{v}_m(t)$ označiću sa v_m i on se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$v_m = \omega_m r_m$$

Jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja Meseca u koordinatnom početku sistema S_3 (sistemu Zemlje) određuju se na osnovu jednačina (4.69) i (4.70). Zbog njihove važnosti ove jednačine ponovu ću napisati

$$\vec{E}_{gem\ m}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma M_m}{r_m^3} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2}\right) \vec{r}_m(t) \quad (6.83)$$

$$\vec{B}_{gem\ m}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_m}{r_m^3} \left[\frac{\vec{r}_m(t) \times \vec{v}_m(t)}{c^2} \right] \quad (6.84)$$

Pri dobijanju ovih jednačina ja sam pojednostavio fizičku situaciju, da bi lakše izvršio matematičke proračune. O tim pojednostavljenjima bilo je reči u četvrtom poglavlju, i ovde ću ponoviti pojedine stvari. Zemlja i Mesec kreću se oko zajedničkog centra mase koji se nalazi na udaljenosti od oko 4600 km od Zemljinog centra. Mesec se kreće oko Zemlje po eliptičnoj orbiti. Ja sam ovu fizičku situaciju pojednostavio. Najpre sam zanemario kretanje Zemlje i Meseca oko zajedničkog centra mase, odnosno uzeo sam da se centar mase ovog binarnog sistema poklapa sa centrom Zemlje. Problem sam dalje pojednostavio time što sam uzeo da se Mesec kreće oko Zemlje po kružnoj putanji. Srednje rastojanje izmedju centara Zemlje i Meseca je oko 385000 km. Ova vrednost rastojanja je oko 60 Zemljinih radijusa. Orbita Meseca nalazi se u ravni koja je nagnuta u odnosu na ravan ekliptike pod uglom od $5,14^\circ$. Ova inklinacija orbite nije velika, i zbog jednostavnosti analize uzeo sam da se Mesečeva orbita nalazi u ravni ekliptike. Na osnovu ovakvih pretpostavki dobio sam jednačine (4.69) i (4.70).

Potrebno je dobiti sa stanovišta posmatrača u sistemu S_1 diferencijalnu jednačinu koja će opisivati gravitacioni uticaj Meseca na veštački satelit. Da bi to postigao najpre ću odrediti komponente vektora $\vec{E}_{gem\ m}$ i $\vec{B}_{gem\ m}$ u sistemu S_3 . Na osnovu jednačine (6.81) jednačina (6.83) može se napisati u obliku

$$\vec{E}_{gem\ m}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma M_m}{r_m^2} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2}\right) [\cos(\omega_m t) \vec{e}_{x3} + \sin(\omega_m t) \vec{e}_{y3}] \quad (6.85)$$

Iz ove jednačine možemo odrediti komponente vektora $\vec{E}_{gem\ m}$. One glase

$$E_{gem\ m\ x} = \frac{\gamma M_m}{r_m^2} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2}\right) \cos(\omega_m t)$$

$$E_{gem\ m\ y} = \frac{\gamma M_m}{r_m^2} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2}\right) \sin(\omega_m t)$$

$$E_{gem\ m\ z} = 0$$

Potrebno je odrediti i komponente vektora jačine gravitomagnetnog polja. Zamenom (6.81) i (6.82) u (6.84) dobijam

$$\vec{B}_{gem\ m}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_m \omega_m}{r_m c^2} \vec{e}_{y3} \quad (6.86)$$

Jedino je z komponenta vektora $\vec{B}_{gem\ m}$ različita od nule.

Naravno i u sistemu S_1 postoji gravitaciono polje koje potiče od Meseca. Za opisivanje tog polja sa stanovišta posmatrača u sistemu S_1 koristiću vektore jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja, i te vektore označiću sa $\vec{E}_{gem\ m\ 1}$ i $\vec{B}_{gem\ m\ 1}$ respektivno. Indeks 1 je uveden da bi naznačio da su ovi vektori određeni u sistemu S_1 . Ovi vektori mogu se izraziti preko svojih komponenta

$$\vec{E}_{gem\ m\ 1} = E_{gem\ m\ 1\ x} \vec{e}_{x1} + E_{gem\ m\ 1\ y} \vec{e}_{y1} + E_{gem\ m\ 1\ z} \vec{e}_{z1} \quad (6.87)$$

$$\vec{B}_{gem\ m\ 1} = B_{gem\ m\ 1\ x} \vec{e}_{x1} + B_{gem\ m\ 1\ y} \vec{e}_{y1} + B_{gem\ m\ 1\ z} \vec{e}_{z1} \quad (6.88)$$

Jedinični vektori koordinatnog sistema S_1 su \vec{e}_{x1} , \vec{e}_{y1} i \vec{e}_{z1} .

Komponente vektora $\vec{E}_{gem\ m}$ poznate su nam. Na osnovu jednačine (3.14) dobijamo

$$\begin{bmatrix} E_{gem\ m\ 1\ x} \\ E_{gem\ m\ 1\ y} \\ E_{gem\ m\ 1\ z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{gem\ m\ x} \\ E_{gem\ m\ y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

, odnosno

$$E_{gem\ m\ 1\ x} = E_{gem\ m\ x} \quad (6.89)$$

$$E_{gem\ m\ 1\ y} = E_{gem\ m\ y} \cos\psi \quad (6.90)$$

$$E_{gem\ m\ 1\ z} = -E_{gem\ m\ y} \sin\psi \quad (6.91)$$

Korišćenjem komponenta vektora $\vec{E}_{gem\ m}$ jednačine (6.79-81) dobijaju oblik

$$E_{gem\ m\ 1\ x} = \frac{\gamma M_m}{r_m^2} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2}\right) \cos(\omega_m t) \quad (6.92)$$

$$E_{gem\ m\ 1\ y} = \frac{\gamma M_m}{r_m^2} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2}\right) \sin(\omega_m t) \cos\psi \quad (6.93)$$

$$E_{gem\ m\ 1\ z} = -\frac{\gamma M_m}{r_m^2} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2}\right) \sin(\omega_m t) \sin\psi \quad (6.94)$$

Vektor $\vec{E}_{gem\ m\ 1}$ može se izraziti preko svojih komponenta

$$\vec{E}_{gem\ 1} = \frac{\gamma M_m}{r_m^2} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2}\right) [\cos(\omega_m t) \vec{e}_{x1} + \sin(\omega_m t) \cos\psi \vec{e}_{y1} - \sin(\omega_m t) \sin\psi \vec{e}_{z1}] \quad (6.95)$$

Ovakvu proceduru primenićemo i na vektor jačine gravitomagnetnog polja. Komponente vektora $\vec{B}_{gem\ m}$ poznate su nam. Na osnovu jednačine (3.14) dobijam

$$\begin{bmatrix} B_{gem\ m\ 1\ x} \\ B_{gem\ m\ 1\ y} \\ B_{gem\ m\ 1\ z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{gem\ m\ z} \end{bmatrix}$$

, odnosno

$$B_{gem\ m\ 1\ x} = 0$$

$$B_{gem\ m\ 1\ y} = B_{gem\ m\ z} \sin\psi$$

$$B_{gem\ m\ 1\ z} = B_{gem\ m\ z} \cos\psi$$

Na osnovu jednačine (6.86) sledi

$$B_{gem\ m\ 1\ x} = 0 \quad (6.96)$$

$$B_{gem\ m\ 1\ y} = -\frac{4\gamma M_m \omega_m}{r_m c^2} \sin\psi \quad (6.97)$$

$$B_{gem\ m\ 1\ z} = -\frac{4\gamma M_m \omega_m}{r_m c^2} \cos\psi \quad (6.98)$$

Vektor $\vec{B}_{gem\ m\ 1}$ može se izraziti preko svojih komponenta

$$\vec{B}_{gem\ m\ 1} = -\frac{4\gamma M_m \omega_m}{r_m c^2} [\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}] \quad (6.99)$$

Jednačina (6.6) je najuopštenija jednačina kretanja satelita. Ovu jednačinu sam transformisao i dobio sam jednačinu (6.17)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gem\ z} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + \vec{F}_{gem\ s} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + \vec{F}_{gem\ m} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

Ovo je diferencijalna jednačina kretanja satelita sa stanovišta posmatrača u sistemu S_1 . U ovom sistemu radijus vektor satelita je označen sa \vec{r} , a vektor brzine sa \vec{v} . Svaka pojedinačna sila koja figuriše u ovoj jednačini sastoji se od više komponenta. U predhodnom tekstu analizirao sam gravitacioni uticaj Zemlje i Sunca na kretanje satelita, i odredio sam komponente sile $\vec{F}_{gem\ z}$ i $\vec{F}_{gem\ s}$

Pristup koji sam koristio za određivanje gravitacionog uticaja Zemlje i Sunca na kretanje satelita primeniću i u slučaju analize gravitacioniog uticaj Meseca na kretanje satelita. U skladu sa tim privremeno ću zanemariti gravitacioni uticaj Sunca i Zemlje, pa jednačina (6.17) dobija jednostavniju formu

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gem\ m} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (6.100)$$

Sila $\vec{F}_{gem\ m}$ sastoji se od dve komponente. U skladu sa tom konstatacijom jednačina (6.100) dobija oblik

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = (\vec{F}_{gem\ m\ 1} + \vec{F}_{gem\ m\ 2}) \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

, odnosno

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gem\ m\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + \vec{F}_{gem\ m\ 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (6.101)$$

Odredio sam vektore $\vec{E}_{gem\ m\ 1}$ i $\vec{B}_{gem\ m\ 1}$. Satelit se nalazi u gravitoelektričnom polju Meseca i na njega deluje sila. Ta sila određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{F}_{gem\ m\ 1} = m \vec{E}_{gem\ m\ 1} \quad (6.102)$$

To je prva komponenta sile $\vec{F}_{gem\ m}$.

Satelit se nalazi i u gravitomagnetnom polju Meseca i na njega deluje sila

$$\vec{F}_{gem\ m\ 2} = m \vec{v} \times \vec{B}_{gem\ m\ 1} \quad (6.103)$$

To je druga komponenta sile $\vec{F}_{gem\ m}$.

Analizirajmo sada pojedine sabirke u jednačini (6.101). Prvi sabirak može se napisati u obliku

$$\vec{F}_{gem\ m\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = m \vec{E}_{gem\ m\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (6.104)$$

Zamenom jednačine (6.95) u jednačinu (6.104) dobijamo

$$\begin{aligned} \vec{F}_{gem\ m\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \\ \frac{\gamma m M_m}{r_m^2} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2}\right) [\cos(\omega_m t) \vec{e}_{x1} + \sin(\omega_m t) \cos\psi \vec{e}_{y1} - \sin(\omega_m t) \sin\psi \vec{e}_{z1}] \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Nakon elementarnih algebarskih operacija, i zanemarivanjem člana koji sadrži faktor $1/c^4$ dobijam

$$\begin{aligned} \vec{F}_{gem\ m\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx \\ \frac{\gamma m M_m}{r_m^2} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) [\cos(\omega_m t) \vec{e}_{x1} + \sin(\omega_m t) \cos\psi \vec{e}_{y1} - \sin(\omega_m t) \sin\psi \vec{e}_{z1}] \end{aligned} \quad (6.105)$$

Izraz na desnoj strani jednačine (6.105) prilično je glomazan. Zbog jednostavnosti zapisivanja izraz na desnoj strani jednačine (6.105) označiću sa $\vec{F}_{gem\ 4}$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{gem\ 4} = \\ \frac{\gamma m M_m}{r_m^2} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) [\cos(\omega_m t) \vec{e}_{x1} + \sin(\omega_m t) \cos\psi \vec{e}_{y1} - \sin(\omega_m t) \sin\psi \vec{e}_{z1}] \end{aligned} \quad (6.106)$$

Kao posledica ovog pojednostavljivanja jednačina (6.105) dobija oblik

$$\vec{F}_{gem\ m\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx \vec{F}_{gem\ 4} \quad (6.107)$$

Drugi sabirak u jednačini (6.101) može se napisati u obliku

$$\vec{F}_{gem\ m\ 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = m \vec{v} \times \vec{B}_{gem\ m\ 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (6.108)$$

Zamenom jednačine (6.99) u jednačinu (6.108) dobijamo

$$\vec{F}_{gem\ m\ 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = -\frac{4\gamma m M_m \omega_m}{r_m c^2} \vec{v} \times [\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}] \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

Nakon što se izvrše elementarne algebarske operacije, i zanemari član koji sadrži faktor $1/c^4$ dobijamo

$$\vec{F}_{gem\ m\ 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx -\frac{4\gamma m M_m \omega_m}{r_m c^2} \vec{v} \times [\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}] \quad (6.109)$$

Izraz na desnoj strani jednačine (6.109) označiću sa $\vec{F}_{gem\ 5}$

$$\vec{F}_{gem\ 5} = -\frac{4\gamma m M_m \omega_m}{r_m c^2} \vec{v} \times [\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}] \quad (6.110)$$

, i jednačina (6.109) dobija oblik

$$\vec{F}_{gem\ 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx \vec{F}_{gem\ 5} \quad (6.111)$$

Zamenom jednačina (6.107) i (6.111) u jednačinu (6.101) dobijamo

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gem\ 4} + \vec{F}_{gem\ 5} \quad (6.112)$$

Ova jednačina opisuje gravitacioni uticaj Meseca na satelit. Sile $\vec{F}_{gem\ 4}$ i $\vec{F}_{gem\ 5}$ određuju se na osnovu jednačina (6.106) i (6.110).

Satelit se nalazi u gravitacionom polju Zemlje, Sunca i Meseca. Analiziran je gravitacioni uticaj svakog od ovih astronomskih tela na veštački satelit i dobijene su jednačine (6.29), (6.80) i (6.112). Leve strane ovih jednačina su iste. Figuriše proizvod mase satelita i drugog izvoda radijus vektora po vremenu koje se meri u sistemu S_1 . Na desnim stranama ovih jednačina figurišu sile koje deluju na satelit. Ukupna sila koja deluje na satelit jednaka je vektorskom zbiru svih sila koje se nalaze na desnim stranama jednačina (6.29), (6.80) i (6.112). U skladu sa tim diferencijalna jednačina kretanja satelita glasi

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + m \vec{v} \times \left\{ -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right] \right\} + 2 \frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} + \frac{\gamma M_z m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) + \vec{F}_{gem\ 1} + \vec{F}_{gem\ 2} + \vec{F}_{gem\ 3} + \vec{F}_{gem\ 4} + \vec{F}_{gem\ 5} \quad (6.113)$$

Ova jednačina opisuje gravitacioni uticaj Zemlje, Sunca i Meseca na veštački satelit, i to je najuopštenija jednačina. Dobijanje ove jednačine bio je glavni zadatak ovog poglavlja.

Zbog preglednosti predstaviću u obliku tabele sile koje figurišu u jednačini (6.113)

Zemlja	$-\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r}$ $m \vec{v} \times \left\{ -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right] \right\}$ $2 \frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r}$ $\frac{\gamma M_z m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v})$
Sunce	$-\frac{\gamma m M_s}{r_z^2} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) [\cos(\omega t) \vec{e}_{x1} + \sin(\omega t) \cos\psi \vec{e}_{y1} - \sin(\omega t) \sin\psi \vec{e}_{z1}]$ $-\frac{4\gamma m M_s \omega}{r_z c^2} \vec{v} \times [\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}]$ $m \vec{v} \times \frac{\gamma M_s \omega}{r_z c^2} (\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1})$
Mesec	$\frac{\gamma m M_m}{r_m^2} \left(1 - \frac{v_m^2}{2c^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) [\cos(\omega_m t) \vec{e}_{x1} + \sin(\omega_m t) \cos\psi \vec{e}_{y1} - \sin(\omega_m t) \sin\psi \vec{e}_{z1}]$ $-\frac{4\gamma m M_m \omega_m}{r_m c^2} \vec{v} \times [\sin\psi \vec{e}_{y1} + \cos\psi \vec{e}_{z1}]$

Tabela 2

Može se procenti maksimalna vrednost svake od ovih perturbujućih sila koje deluju na satelit, i u skladu sa tim odrediti koje perturbujuće sile će imati glavni uticaj na orbitu satelita.

Postavlja se pitanje o eksperimentalnoj proverbi jednačine (6.113). Ovo pitanje je sasvim korektno, ali treba imati na umu da i u slučaju jednačine (3.18) eksperimentalna provera je izuzetno teška. Jednačina (3.18) je dobijena na osnovu opšte teorije relativnosti, i ona glasi

$$\vec{a}_{otr} = \frac{\gamma M_z}{c^2 r^3} \left\{ \left[4 \frac{\gamma M_z}{r} - (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \right] \vec{r} + 4(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}} \right\} +$$

$$2 \frac{\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3}{r^2} (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{L}) + (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \right] +$$

$$3 \left[\dot{\vec{R}} \times \left(-\frac{\gamma M_s \vec{R}}{c^2 R^3} \right) \right] \times \dot{\vec{r}}$$

Ona se može napisati u obliku (jednačina (3.19))

$$\vec{a}_{otr} = \vec{a}_{\text{švarcvild}} + \vec{a}_{LT} + \vec{a}_{de\ siter}$$

Eksperimentalna provera jednačine (3.18) je izuzetno teška, jer ubrzanja su mala. O vrednostima tih ubrzanja bilo je reči u trećem poglavlju.

Glavni doprinos ubrzanju satelita daje Njutnov član. Obeležiću ga sa \vec{a}_{Njutn}

$$\vec{a}_{Njutn} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r}$$

Ako bi satelit bio izložen samo dejstvu Njutnove sile, a Zemlju smatrali idealnom loptom sa homogenom distribucijom mase, satelit bi se kretao po krugu ili elipsi. Svi članovi na desnoj strani jednačine (3.18) predstavljaju perturbacije. Ova dopunska ubrzanja dobijena su na osnovu opšte teorije relativnosti. Ako ta ubrzanja pomnožimo masom satelita dobićemo perturbujuće sile koje deluju na satelit. Zbog njihovog dejstva doći će do malih deformacija orbite satelita. Na satelit deluju i druge perturbujuće sile. To možemo zaključiti na osnovu jednačine (3.2). Te sile takodje izazivaju deformacije orbite satelita, međutim u ovom radu ja sam se prvenstveno zadržao na perturbujućim silama koje se dobijaju na osnovu opšte teorije relativnosti.

Postoje sateliti čija se putanja može precizno pratiti korišćenjem lasera. U tu grupu spadaju sateliti LAGEOS i LAGEOS 2. Oni su po konstrukciji skoro identični. Imaju oblik sfere čiji je prečnik 60 cm. Nemaju senzore i elektroniku. Na njihovim površinama nalaze se po 426 ogledala za refleksiju. Zbog tih ogledala LAGEOS sateliti podsećaju na lopticu za golf. Imaju višestruku namenu. Koriste se za praćenje kretanja Zemljinih tektonskih ploča, za merenje Zemljinog gravitacionog polja i praćenje promene ose rotacije Zemlje. To su primarni ciljevi LAGEOS satelita, međutim mogu se koristiti i za proučavanje efekata iz opšte teorije relativnosti.

Položaj LAGEOS satelita određuje se korišćenjem pulsno lasera. On se nalazi u određenoj stanici na Zemlji. Pulsni laser emituju kratke pulseve koji se kroz teleskop šalju u pravcu satelita. Laserska svetlost se reflektuje od ogledala na satelitu, i vraća ka istoj stanici na Zemlji. Svetlost se fokusira pomoću teleskopa i registruje osetljivim detektorom. Precizno se meri vremenski interval od trenutka emitovanja laserskog pulsa do trenutka kada je registrovan pomoću osetljivog detektora. Na osnovu tog vremenskog intervala određuje se trenutni položaj satelita. Preciznost određivanja položaja satelita ovom metodom je izuzetno velika. Na osnovu takvih merenja zaključeno je da se orbita satelita tokom vremena menja, odnosno menjaju se Keplerovi orbitalni parametri. Uzrok promene orbite satelita su perturbujuće sile koje figurišu u jednačini (3.2).

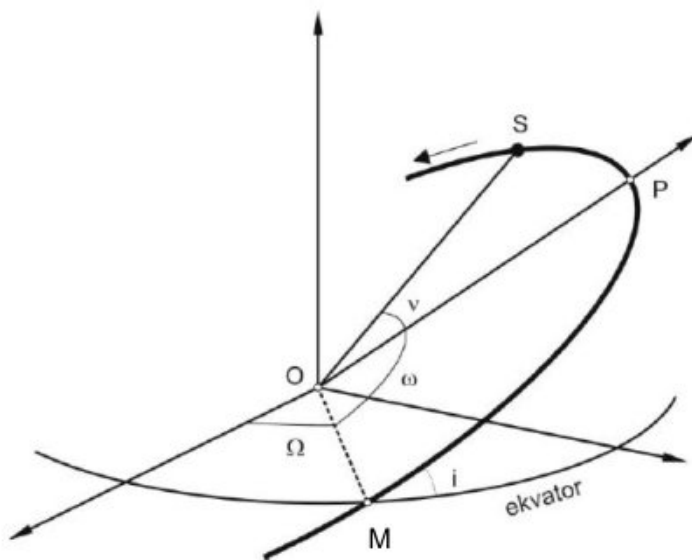
Ovi eksperimentalni podaci o kretanju LAGEOS satelita su iskorišćeni za proučavanje efekata opšte teorije relativnosti. Zadržaću se samo na perturbujućim silama koje se dobijaju na osnovu opšte teorije relativnosti. Ako jednačinu (3.18) pomnožimo masom satelita dobićemo perturbujuće sile koje deluju na satelit

$$\vec{F}_{otr} = \vec{F}_{\text{\textit{Svarcvild}}} + \vec{F}_{LT} + \vec{F}_{de\ Siter} \quad (6.114)$$

Zbog dejstva ovih sila doći će do malih deformacija orbite satelita, odnosno do promena Keplerovih orbitalnih parametara. Švarcvildova sila ($\vec{F}_{\text{\textit{Svarcvild}}}$) izaziva promenu argumenta perihela sa vremenom $\dot{\omega}_{\text{\textit{Svarcvild}}}$. Lens-Tiringova sila (\vec{F}_{LT}) izaziva promenu argumenta perihela sa vremenom $\dot{\omega}_{LT}$ i longitude uzlaznog čvora $\dot{\Omega}_{LT}$. De Siterova sila ($\vec{F}_{de\ Siter}$) izaziva promenu longitude uzlaznog čvora $\dot{\Omega}_{de\ Siter}$. Konkretno jednačine za vremenske promene Keplerovih orbitalnih parametara mogu se naći u literaturi. Ti teorijski rezultati o promeni Keplerovih orbitalnih parametara sa vremenom upoređeni su sa eksperimentalnim rezultatima koji su dobijeni proučavanjem kretanja LAGEOS satelita.

U predhodnom tekstu spomenuti su Keplerovi orbitalni parametri. Da bi ih bolje objasnio moramo se podsetiti Orbitalnog koordinatnog sistema koji sam uveo u četvrtom poglavlju. Taj koordinatni sistem označio sam sa S_4 . Tada sam analizirao kretanje planete po eliptičnoj putanji. Ovaj sistem je prikazan na slici 13. Početak tog koordinatnog sistema nalazi se u centru Sunca koji se poklapa sa jednom od žiža elipse. Osa x ovog sistema se poklapa sa velikom poluosom elipse. Osa y je paralelna sa malom poluosom elipse. Na slici 13 prikazane su i žiže elipse, koje su označene sa F_1 i F_2 .

I u slučaju kretanja satelita oko Zemlje može se uvesti Orbitalni koordinatni sistem. Zbog generalnosti diskusije uzeću da se satelit kreće po eliptičnoj putanji. Na slici 19 prikazan je deo putanje koju opisuje satelit prilikom kretanja. Taj deo putanje označen je punom linijom. Sistemi S_1 i S_4 predstavljeni su na istoj slici. Na slici su označene ose Konvencionalnog inercijalnog sistema. Orbita elipse leži u ravni koja se zove orbitalna ravan. U slučaju dinamike satelita koordinatni početak sistema S_4 nalazi se u centru mase Zemlje koji se poklapa sa žižom elipse. Centar mase Zemlje označen je na slici 19 tačkom O . Osa x Orbitalnog koordinatnog sistema usmerena je ka perihelu koji je na slici 19 označen tačkom P . Osa y normalna je na osu x i paralelna je sa malom poluosom elipse. Osa y nalazi se u orbitalnoj ravni. Trenutni položaj satelita označen je tačkom S . Strelica određuje smer kretanja satelita.



Slika 19

Putanje satelita mogu imati proizvoljan položaj u Konvencionalnom inercijalnom sistemu. Da bi se precizirao položaj satelita uvedeni su Keplerovi orbitalni elementi. To su velika poluosa (a), ekscentricitet (e), inklinacija (i), longituda uzlaznog čvora (Ω), argument perihela (ω) i prava anomalija (v).

Orbita elipse leži u ravni koja se zove orbitalna ravan. Inklinacija (i) je ugao između orbitalne i ekvatorijalne ravni.

Na slici 19 punom linijom je prikazan deo putanja satelita, a strelicom je označen smer kretanja satelita. U određenim trenucima putanja satelita seče ekvatorijalnu ravan. Uzlazni čvor je tačka u kojoj satelit prolazi kroz ekvatorijalnu ravan pri svom kretanju prema severu. Ta tačka je na slici 19 označena sa M . Odgovarajuća tačka na suprotnoj strani zove se silazni čvor. Longituda uzlaznog čvora (Ω), je ugao u ravni ekvatora između x ose Konvencionalnog inercijalnog sistema i prave određene tačkama O i M .

Perihel je na slici označen tačkom P . Tačke O i P formiraju glavnu osu elipse. Argument perihela ω je ugao u orbitalnoj ravni između prave određene tačkama O i M , i glavne ose elipse.

Na slici je označen i ugao v koji se zove prava anomalija. To je ugao u orbitalnoj ravni koji se meri između x ose sistema S_4 i pravca radijus vektora koji opisuje trenutni položaj satelita. Kada se satelit kreće po kružnoj putanji prava anomalija menja se linearno sa vremenom. Kada se satelit kreće po elipsastoj putanji njegova brzina se menja. To ima za posledicu da se prava anomalija ne menja linearno sa vremenom. Zbog toga se alternativno koriste ekscentrična anomalija E i srednja anomalija M .

Vektor položaja satelita u Orbitalnom koordinatnom sistemu može se odrediti korišćenjem prave anomalije (v)

$$\vec{r} = r \cos(v)\vec{e}_{x_4} + r \sin(v)\vec{e}_{y_4}$$

Sa r je označeno trenutno rastojanje između satelita i koordinatnog početka sistema S_4 . Jedinični vektori koordinatnih osa ovog sistema označeni su sa \vec{e}_{x_4} i \vec{e}_{y_4} .

Položaj satelita u Konvencionalnom inercijalnom sistemu određuje se na osnovu jednačine (3.3)

$$\vec{r} = x\vec{e}_{x_1} + y\vec{e}_{y_1} + z\vec{e}_{z_1}$$

Ako bi satelit bio izložen samo dejstvu Njutnove gravitacione sile, a Zemlju smatrali idealnom loptom sa homogenom distribucijom mase onda bi putanja satelita bila kružnica ili elipsa. Putanja bi bila određena odgovarajućim Keplerovim orbitalnim parametrima. U ovom slučaju ti parametri su konstantni, ne menjaju se tokom vremena.

U slučaju kada postoji perturbujuća sila dolazi do promene Keplerovih orbitalnih parametara u toku vremena. Te promene određuju se na osnovu Gausovih planetarnih jednačina. To je sistem od šest diferencijalnih jednačina, i on glasi

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[R \sin(v) + \frac{a(1-e^2)}{r} S \right] \quad (6.115)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[R \sin(v) + \left(\frac{e + \cos(v)}{1 + e \cos(v)} + \cos(v) \right) S \right] \quad (6.116)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-R \cos(v) + \left(1 + \frac{r}{a(1-e^2)} \right) S \sin(v) \right] - \frac{d\Omega}{dt} \cos(i) \quad (6.117)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cos(\omega + v) W \quad (6.118)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\sin(\omega + \nu)}{\sin(i)} W \quad (6.119)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{1}{na} \left[\frac{2r}{a} - \frac{(1-e^2)}{e} \cos(\nu) \right] R - \frac{(1-e^2)}{nae} \left[1 + \frac{r}{a(1-e^2)} \right] S \sin(\nu) \quad (6.120)$$

Veličina n je srednja ugaona brzina satelita, i određuje se na osnovu jednačine

$$n = \frac{2\pi}{T} = a^{-3/2} \sqrt{\gamma M_z} \quad (6.121)$$

Period obilaska satelita oko Zemlje označen je sa T .

Potrebno je objasniti šta predstavljaju veličine R , S i W . Neka na satelit deluje perturbujuća sila \vec{F} . Perturbujuće ubrzanje određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (6.122)$$

Sa m je označena masa satelita.

Komponente perturbujućeg ubrzanja (perturbujuće sile) možemo odrediti u Konvencionalnom inercijalnom sistemu. Medjutim uvodi se jedan lokalni koordinatni sistem. On ima tri ose koje su medjusobno ortogonalne, a jedinične vektore tih osa označiću sa \vec{e}_r , \vec{e}_s i \vec{e}_w . Početak tog lokalnog koordinatnog sistema poklapa se sa trenutnim položajem satelita.

Vektori \vec{e}_r , \vec{e}_s i \vec{e}_w određuju se na osnovu jednačina

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{e}_s = \frac{(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}}{|\vec{r} \times \vec{v}|r}$$

$$\vec{e}_w = \frac{(\vec{r} \times \vec{v})}{|\vec{r} \times \vec{v}|}$$

Veličine R , S i W su komponente vektora perturbujućeg ubrzanja u ovom lokalnom koordinatnom sistemu. One se određuju na osnovu sledećih jednačina

$$R = \vec{e}_r \cdot \vec{a} \quad (6.123)$$

$$S = \vec{e}_s \cdot \vec{a} \quad (6.124)$$

$$W = \vec{e}_w \cdot \vec{a} \quad (6.125)$$

, odnosno

$$R = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{a}$$

$$S = \frac{(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}}{|\vec{r} \times \vec{v}|r} \cdot \vec{a}$$

$$W = \frac{(\vec{r} \times \vec{v})}{|\vec{r} \times \vec{v}|} \cdot \vec{a}$$

Ako nam je poznata perturbujuća sila \vec{F} na osnovu sistema jednačina (6.115-120) određujemo kako se menjaju Keplerovi orbitalni parametri tokom vremena.

Sila \vec{F}_{otr} sastoji se od tri komponente (jednačina (6.114)). Za svaku komponentu može se primeniti sistem jednačina (6.115-120), i naći kako se menjaju Keplerovi orbitalni parametri tokom

vremena. Ja sam u predhodnom tekstu spomenuo te rezultate, ali konkretne jednačine za vremenske promene Keplerovih orbitalnih parametara nisam naveo. Te jednačine mogu se naći u literaturi. Napomenuo sam da su ti teorijski rezultati upoređeni sa eksperimentalnim rezultatima koji su dobijeni pružavanjem kretanja LAGEOS satelita.

Ova procedura može se primeniti i u slučaju jednačine (6.113) koja je dobijena na osnovu gravitoelektromagnetizma. Glavni doprinos ubrzanju satelita daje Njutnova sila. Sve ostale sile u jednačini (6.113) predstavljaju perturbujuće sile. Istakao sam da se može procenti maksimalna vrednost svake od ovih perturbujućih sila koje deluju na satelit, i u skladu sa tim odrediti koje perturbujuće sile će imati glavni uticaj na orbitu satelita. Nakon što odredimo te perturbujuće sile koje imaju glavni uticaj na orbitu satelita možemo primeniti opisanu proceduru za svaku od tih sila i naći promenu Keplerovih orbitalnih parametara sa vremenom. Na taj način mogla bi se potvrditi, ili opovrgnuti validnost jednačine (6.113).

Jednačina (6.113) je prilično komplikovana jer u njoj figurišu dosta perturbujućih sila. To se moglo i očekivati jer se satelit nalazi u gravitacionom polju Zemlje, Sunca i Meseca. Postoje slučajevi kada je analiza i odgovarajuća diferencijalna jednačina kretanja jednostavnija. Kao primer uzeću kretanje Merkura oko Sunca. To je bitan primer jer je u slučaju Merkura najpre zapažena pojava precesije perihela. Ta pojava se javlja i kod drugih planeta Sunčevog sistema, ali je kod Merkura najizraženija.

Da bi analizirao precesiju perihela Merkura i druge eksperimente iz oblasti gravitacione fizike zadržaću se najpre na klasičnoj fizici i analizirati tzv. Keplerov problem.

7. Keplerov problem

Početak sedamnestog veka većina naučnika je prihvatila heliocentrični sistem. Međutim naučnicima toga vremena nisu bili jasni uzroci koji dovode do takvog kretanja planeta oko Sunca. Na osnovu podataka koje je sakupio astronom Tiho Brahe, Johan Kepler je formulisao tri zakona kretanja planeta oko Sunca.

Keplerovi zakoni glase:

Planete se kreću oko Sunca po eliptičnim putanjama. U zajedničkoj žiži tih elipsa nalazi se centar Sunca.

Radijus vektor Sunce-planeta opisuje u jednakim intervalima vremena iste površine.

Kvadrati vremena obilaženja planeta oko Sunca, srazmerni su kubovima velikih poluosa njihovih eliptičnih orbita.

Međutim Johan Kepler nije uspeo da objasni kretanje planeta. Taj problem razrešio je Isak Njutn.

Njutnovog zakona gravitacije glasi:

Intenzitet sile uzajamnog privlačenja bilo kojih dvaju tela, čije su dimenzije zanemarljive u odnosu na rastojanje medju njima, ili izmedju tela koji imaju sferni oblik, srazmeran je proizvodu masa tih tela a obrnuto srazmeran kvdratu rastojanja medju tim telima.

Kao primer uzmimo dve homogene lopte koje imaju mase m_1 i m_2 . Medjusobno rastojanje izmedju centara lopti označimo sa r . Njutnov zakon gravitacije u matematičkoj formi glasi

$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$

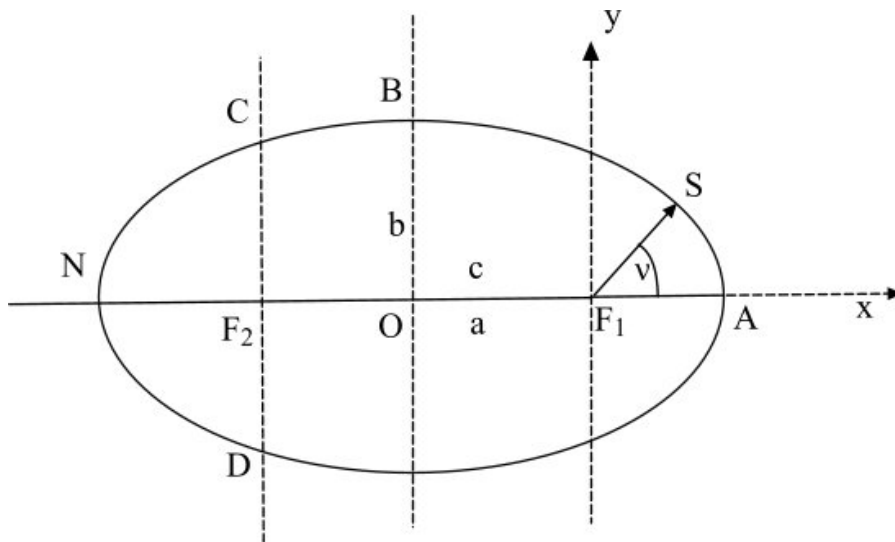
Ja ću najpre prezentovati osnovne rezultate Njutnove mehanike za slučaj kretanja planeta u Sunčevom sistemu, a kasniji ću primenjivati te rezultate na slučaj kretanja veštačkih satelita oko Zemlje. Sa M_s označiću masu Sunca, a sa m masu neke planete. Intenzitet gravitacione sile saglasno Njutnovom zakonu gravitacije ima vrednost

$$F = \frac{\gamma M_s m}{r^2}$$

Potrebno je podsetiti se osnovnih elemenata i jednačina koje opisuju elipsu. Jednačina elipse u Dekartovom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (7.1)$$

Saglasno prvom Keplerovom zakonu centar mase Sunca poklapa se sa jednom žižom elipse. Žiže elipse na slici 20 označene su sa F_1 i F_2 . Uzeću da se centar mase Sunca poklapa sa žižom F_1 . Tačka na eliptičnoj putanji u kojoj je planeta najbliža Suncu naziva se perihel. Njoj suprotna tačka je afel. Perihel je na slici 20 označen tačkom A , afel je označen tačkom N . Velika poluosa elipse na slici je označena sa a , i ona je brojno jednaka dužini duži OA . Sa b je označena mala poluosa elipse. Ona je brojno jednaka dužini duži OB . Iz žiže F_2 možemo povući pravu koja je normalna na x osu. Ova prava seče elipsu u dvema tačkama koje ću označiti sa C i D . Uvedena je veličina p koja se naziva parametar elipse. Numerička vrednost veličine p jednaka je rastojanju izmedju tačaka C i D .



Slika 20

Rastojanje izmedju tačke O (centra elipse) i žiže F_1 označicu sa c

$$OF_1 = c$$

Obzirom da su žiže simetrične u odnosu na tačku O važi i sledeća jednačina

$$OF_2 = c$$

Za opisivanje kretanja planete može se koristiti Dekartov koordinatni sistem. Medjutim mnogo je pogodnije koristiti Orbitalni kordinatni sistem. O njemu je već bilo reči u predhodnom tekstu. Taj sistem je označen sa S_4 . Koordinatni početak sistema S_4 nalazi se u centru mase Sunca koji se poklapa sa žižom F_1 . Osa x Orbitalnog koordinatnog sistema usmerena je ka perihelu koji je na slici 20 označen tačkom A . Osa y je normalna na osu x . Ona prolazi kroz žižu F_1 i paralelna je sa malom poluosom elipse. Ose x i y nalaze se u ravni ekliptike. Trenutni položaj planete označen je tačkom S . Prava anomalija (v) je ugao koji se meri izmedju duži OA i pravca radijus vektora koji određuje trenutni položaj satelita.

Vektor položaja planete u Orbitalnom koordinatnom sistemu može se odrediti korišćenjem prave anomalije (v)

$$\vec{r} = r \cos(v)\vec{e}_{x_4} + r \sin(v)\vec{e}_{y_4} \quad (7.2)$$

Sa r je označeno trenutno rastojanje izmedju planete i koordinatnog početka sistema S_4 . Jedinični vektori koordinatnih osa ovog sistema označeni su sa \vec{e}_{x_4} i \vec{e}_{y_4} .

Radijus vektor u ovom sistemu može se izraziti na način

$$\vec{r} = x\vec{e}_{x_4} + y\vec{e}_{y_4} \quad (7.3)$$

Umesto ugla ν u daljem radu koristiću ugao φ . U skladu sa tom zamenom jednačina (7.2) dobija oblik

$$\vec{r} = r \cos(\varphi)\vec{e}_{x_4} + r \sin(\varphi)\vec{e}_{y_4} \quad (7.4)$$

Jednačina elipse u Dekartovom koordinatnom sistemu određuje se na osnovu jednačine (7.1). U sistemu S_4 jednačina elipse glasi

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (7.5)$$

Ekscentricitet elipse definiše se na osnovu jednačine

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (7.6)$$

On opisuje stepen deformacije elipse tj. odstupanje elipse od kružnice. U slučaju kružne putanje ekscentricitet je jednak nuli.

Kada se planeta nalazi u perihelu onda je ona minimalno udaljena od Sunca. To rastojanje označiću sa r_{min} . Ono se može izračunati na osnovu sledeće jednačine

$$r_{min} = OA - OF_1$$

, odnosno

$$r_{min} = a - c \quad (7.7)$$

Za taj položaj planete ugao φ jednak je nuli. Na osnovu jednačine (7.5) dobijamo

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e} \quad (7.8)$$

Na osnovu jednačina (7.7) i (7.8) sledi

$$a - c = \frac{p}{1 + e} \quad (7.9)$$

Kada se planeta nalazi u afelu onda je ona maksimalno udaljena od Sunca. To rastojanje označiću sa r_{max} . Za afel važi sledeća jednačina

$$r_{max} = a + c \quad (7.10)$$

Kada se planeta nalazi u afelu onda je ugao φ jednak π . Na osnovu jednačine (7.5) sledi

$$r_{max} = \frac{p}{1 - e} \quad (7.11)$$

Izjednačavanjem levih strana jednačina (7.10) i (7.11) dobija se

$$a + c = \frac{p}{1 - e} \quad (7.12)$$

Jednačine (7.9) i (7.12) predstavljaju sistem od dve jednačine sa dve nepoznate veličine. Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijamo

$$p = a(1 - e^2) \quad (7.13)$$

$$c = ae \quad (7.14)$$

Na osnovu jednačine (7.13) jednačina (7.5) može se napisati u obliku

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi} \quad (7.15)$$

Možemo izračunati i rastojanja r_{min} i r_{max}

$$r_{min} = a - c = a - ae = a(1 - e)$$

$$r_{max} = a + c = a + ae = a(1 + e)$$

Lako je pokazati da važe i sledeće jednačine

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$$

$$e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

Velika i mala poluosa elipse mogu se izraziti preko parametra elipse p i ekscentriciteta elipse e

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (7.16)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (7.17)$$

Da bi se pojednostavila analiza kretanja planete uvodi se pretpostavka da je gravitaciona interakcija planete sa ostalim planetama Sunčevog sistema zanemarljiva, odnosno Sunce-planeta čine izolovani sistem. Masa Sunca je mnogo veća od mase planete, i u skladu sa tim centar mase ovog binarnog sistema nalazi se u centru Sunca. Gravitaciona sila je centralna, a potencijalna energija određuje se na osnovu jednačine

$$E_p = -\frac{\gamma M_s m}{r}$$

Za ovaj sistem važi zakon održanja energije. Pored zakona održanja energije važi i zakon održanja momenta impulsa.

Problem kretanja planete matematički mnogo je jednostavnije rešavati u sistemu S_4 i koristiti polarne koordinate. Ugao (ν) (odnosno ugao φ) meri se između duži OA i pravca radijus vektora koji opisuje trenutni položaj planete. Trenutni položaj planete na slici 20 označen je tačkom S . r je trenutno rastojanje između planete i koordinatnog početka sistema S_4 . Položaj planete može se izraziti na osnovu jednačine (7.3), ili jednačine (7.4). Koordinate x i y , i polarne koordinate (r, φ) povezane su jednačinama

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

U analitičkoj mehanici uvodi se tzv. Lagranževa funkcija

$$L = E_k - E_p$$

Za slučaj kretanja planete oko Sunca ona ima oblik

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\gamma M_s m}{r} \quad (7.18)$$

Ojler-Lagranževe jednačine glase

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (7.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.20)$$

Korišćenjem jednačina (7.18-20) dobijamo dve diferencijalne jednačine

$$\frac{d(r^2 \dot{\varphi})}{dt} = 0 \quad (7.21)$$

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = -\frac{\gamma M_s}{r^2} \quad (7.22)$$

Jednačina (7.21) je povezana sa zakonom održanja momenta impulsa. Uvodim integracionu konstantu h , i jednačina (7.21) dobija oblik

$$r^2 \dot{\varphi} = h$$

, odnosno

$$\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2} \quad (7.23)$$

Zamenom veličine $\dot{\varphi}$ u jednačinu (7.22) dobija se sledeća jednačina

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\gamma M_s}{r^2} \quad (7.24)$$

Ova jednačina može se dalje transformisati. Najpre ću transformisati prvi izvod veličine r

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

Na osnovu jednačine (7.23) dobijam

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{h}{r^2} \quad (7.25)$$

Može se transformisati i drugi izvod

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{d\varphi} \frac{h}{r^2} \right) \frac{h}{r^2} \quad (7.26)$$

Cilj ovih transformacija bio je da se izgubi vremenska zavisnost. Na osnovu ovih transformacija dobio sam da veličina r i njeni izvodi ne zavise od vremena nego od ugla φ .

Uvodi se veličina u na način

$$u = \frac{1}{r} \quad (7.27)$$

Odredimo najpre prvi izvod veličine u po uglu φ

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

, odnosno

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r^2 \frac{du}{d\varphi}$$

Na osnovu jednačine (7.27) dobijamo

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \quad (7.28)$$

Zamenom jednačine (7.28) u jednačinu (7.25) dobija se

$$\dot{r} = -\frac{du}{d\varphi} h \quad (7.29)$$

Na osnovu jednačina (7.27) i (7.28) jednačina (7.26) dobija oblik

$$\ddot{r} = -\frac{d^2u}{d\varphi^2} h^2 u^2 \quad (7.30)$$

Nakon zamene jednačine (7.30) u jednačinu (7.24), i elementarnih transformacija dobija se sledeća jednačina

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M_s}{h^2} \quad (7.31)$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine glasi

$$u = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\gamma M_s}{h^2} \quad (7.32)$$

Veličine A i φ_0 su integracione konstante. One se određuju iz početnih uslova. Može se uzeti da je integraciona konstanta φ_0 jednaka nuli, i jednačina (7.32) dobija oblik

$$\frac{1}{r} = A \cos(\varphi) + \frac{\gamma M_s}{h^2}$$

Transformacijom ove jednačine dobija se

$$r = \frac{\frac{h^2}{\gamma M_s}}{1 + \frac{h^2}{\gamma M_s} A \cos(\varphi)} \quad (7.33)$$

Ako uporedimo ovu jednačinu sa jednačinom (7.15) dobijamo

$$\frac{h^2}{\gamma M_s} = a(1 - e^2)$$

$$\frac{h^2}{\gamma M_s} A = e$$

, odnosno

$$h = \sqrt{\gamma M_s a(1 - e^2)} \quad (7.34)$$

$$A = \frac{e\gamma M_s}{h^2} = \frac{e\gamma M_s}{\gamma M_s a(1 - e^2)} = \frac{e}{a(1 - e^2)}$$

Obzirom da se razmatra kretanje planeta po elipsama ekscentricitet može imati vrednosti u intervalu

$$0 < e < 1$$

Jednačina (7.33) predstavlja jednačinu elipse u polarnim koordinatama. Ona je rešenje diferencijalne jednačine (7.31). Ovim postupkom je pokazano da se planete kreću po elipsama, odnosno dobijen je rezultat koji je u saglasnosti sa prvim Keplerovim zakonom.

Potrebno je dati odredjenje komentare u vezi drugog Keplerovog zakona. Položaj planete u Orbitalnom koordinatnom sistemu opisuje se pomoću radijus vektora. Pri tome se može koristiti jednačina (7.2), ili jednačina (7.3). Obzirom da su uvedene polarne koordinate radijus vektor može se izraziti i na sledeći način

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad (7.35)$$

Vektor \vec{e}_r je jedinični vektor i usmeren je od koordinatnog početka sistema S_4 ka trenutnom položaju planete.

Vektor brzine određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (7.36)$$

Vektor \vec{e}_φ je takodje jedinični vektor i njegov pravac normalan je na pravac vektora \vec{e}_r .

Uvodi se i vektor \vec{e}_z . Njegov pravac je normalan na ravan u kojoj se kreće planeta. On sa vektorima \vec{e}_r i \vec{e}_φ čini trijedr desne orijentacije.

Element površine ds u polarnim koordinatama određuje se na osnovu jednačine

$$ds = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

U toku malog vremenskog intervala dt radijus vektor Sunce-planeta prebriše element površine ds . Kepler je ustanovio da radijus vektor Sunce-planeta u jednakim intervalima vremena prebriše iste površine. To znači da veličina ds/dt koja se naziva sektorska brzina je konstantna

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad (7.37)$$

To se može pokazati na sledeći način. Na osnovu jednačine (7.23) dobijam

$$\frac{ds}{dt} = \frac{h}{2} \quad (7.38)$$

Obzirom da je h konstanta sledi da je i sektorska brzina konstantna veličina.

Odredimo sada moment impulsa planete

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{L} = mr\vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi)$$

, odnosno

$$\vec{L} = mr^2\dot{\phi}\vec{e}_z \quad (7.39)$$

Intenzitet vektora momenta impulsa određuje se na osnovu jednačine

$$L = mr^2\dot{\phi} \quad (7.40)$$

Lako je pokazati da se vektor momenta impulsa planete ne menja tokom vremena. Izvod momenta impulsa po vremenu glasi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(m\vec{r} \times \vec{v})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

, odnosno

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \vec{a}$$

Obzirom da je gravitaciona sila centralna možemo napisati sledeću jednačinu

$$\vec{F} = -\frac{\gamma M_s m}{r^3} \vec{r}$$

Na osnovu ove jednačine sledi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \left(-\frac{\gamma M_s m}{r^3} \vec{r} \right)$$

, odnosno

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

Intenzitet, pravac i smer vektora momenta impulsa ne menjaju se tokom vremena.

Na osnovu jednačina (7.37) i (7.40) dobijam

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2m} L \quad (7.41)$$

Na osnovu jednačine (7.41) može se zaključiti da je drugi Keplerov zakon posledica zakona održanja momenta impulsa.

Zamenom jednačine (7.38) u jednačinu (7.41) dobija se

$$L = mh \quad (7.42)$$

Korišćenjem jednačine (7.34) možemo odrediti intenzitet vektora momenta impulsa

$$L = m\sqrt{\gamma M_s a(1 - e^2)} \quad (7.43)$$

, i on ima konstantnu vrednost.

Na osnovu jednačine (7.43) može se dobiti jednačina za određivanje ekscentriciteta elipse ako nam je poznat intenzitet momenta impulsa

$$e = \sqrt{1 - \frac{L^2}{m^2 \gamma M_s a}} \quad (7.44)$$

Sada ću analizirati treći Keplerov zakon. Period kretanja planete oko Sunca označiću sa T . Površina elipse određuje se na osnovu jednačine

$$S = ab\pi$$

Koristeći jednačine (7.16) i (7.17) dobija se sledeća jednačina

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (7.45)$$

U skladu sa ovim rezultatom površina elipse određuje se na osnovu jednačine

$$S = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (7.46)$$

Sektorska brzina je konstantna veličina. U toku jednog perioda T radijus vektor Sunce-planeta opisaće površinu S , i možemo napisati sledeću jednačinu

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T}$$

Zamenom sektorske brzine u jednačinu (7.41) dobijamo

$$\frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T} = \frac{L}{2m} \quad (7.47)$$

Intenzitet momenta impulsa planete određuje se na osnovu jednačine (7.43). Zamenom te vrednosti u jednačinu (7.47) dobija se sledeća jednačina

$$\frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T} = \frac{m \sqrt{\gamma M_s a (1 - e^2)}}{2m}$$

Nakon elementarnih algebarskih transformacija dobija se rezultat

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M_s} \quad (7.48)$$

Veličina na desnoj strani jednačine (7.48) upravo je konstanta proporcionalnosti u trećem Keplerovom zakonu.

Vektor brzine kretanja planete određuje se na osnovu jednačine (7.36)

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (7.49)$$

Ova jednačina zapisuje se i u obliku

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (7.50)$$

Potrebno je odrediti komponente brzine v_r i v_φ . Najpre ću odrediti komponentu v_r . Ona se određuje na osnovu jednačine

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad (7.51)$$

, odnosno

$$v_r = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (7.52)$$

Korišćenjem jednačine (7.15) dobijam prvi izvod veličine r po uglu φ

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a(1 - e^2) e \sin(\varphi)}{(1 + e \cos \varphi)^2} \quad (7.53)$$

Zamenom jednačina (7.53) i (7.23) u jednačinu (7.52) dobijam

$$v_r = \frac{he \sin \varphi}{a(1 - e^2)}$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (7.34)

$$v_r = \sqrt{\frac{\gamma M_s}{a(1 - e^2)}} e \sin \varphi \quad (7.54)$$

Komponenta v_φ određuje se na osnovu jednačine

$$v_\varphi = r \dot{\varphi} \quad (7.55)$$

Na osnovu jednačine (7.23) dobijam

$$v_\varphi = \frac{h}{r} \quad (7.56)$$

Zamenom jednačina (7.15) i (7.34) u jednačinu (7.56) dobija se

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{\gamma M_s}{a(1-e^2)}}(1 + e \cos \varphi) \quad (7.57)$$

Sada ću naći kvadrat brzine kretanja planete. Krenimo od jednačine

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 \quad (7.58)$$

Na osnovu jednačina (7.54) i (7.57) dobija se

$$v^2 = \frac{\gamma M_s}{a(1-e^2)}(e^2 \sin^2 \varphi + (1 + e \cos \varphi)^2)$$

, odnosno

$$v^2 = \frac{\gamma M_s}{a(1-e^2)}(1 + e^2 + 2e \cos \varphi) \quad (7.59)$$

Ova jednačina dalje se transformiše na sledeći način

$$v^2 = \frac{\gamma M_s}{a(1-e^2)}(2 + 2e \cos \varphi + e^2 - 1)$$

$$v^2 = \frac{\gamma M_s}{a(1-e^2)}(2(1 + e \cos \varphi) - (1 - e^2))$$

$$v^2 = \frac{\gamma M_s 2(1 + e \cos \varphi)}{a(1-e^2)} - \frac{\gamma M_s}{a}$$

Na osnovu jednačine (7.15) dobijam

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\gamma M_s}{r} = -\frac{\gamma M_s}{2a}$$

Ako pomnožimo ovu jednačinu masom planete m dobijamo zakon održanja energije

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma M_s m}{r} = -\frac{\gamma M_s m}{2a} \quad (7.60)$$

Intenzitet vektora brzine određujemo na osnovu jednačine (7.61)

$$v = \sqrt{\gamma M_s \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (7.61)$$

Ukupna energija sistema Sunce-planeta je konstantna i određuje se na osnovu jednačine (7.62)

$$E = -\frac{\gamma M_s m}{2a} \quad (7.62)$$

Korisno je odrediti i brzine planete u perihelu i afelu. Da bi to uradio koristiću jednačinu (7.59).

Kada se planeta nalazi u perihelu onda je ugao φ jednak nuli, pa na osnovu jednačine (7.59) dobijam

$$v_{perihel} = \sqrt{\frac{\gamma M_s}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (7.63)$$

Kada se planeta nalazi u afelu onda je ugao φ jednak π i dobija se sledeći rezultat

$$v_{afel} = \sqrt{\frac{\gamma M_s}{a}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad (7.64)$$

Na osnovu jednačine (7.44) određuje se ekscentricitet elipse ako nam je poznat intenzitet momenta impulsa. Medjutim ekscentricitet elipse može se izraziti preko ukupne energije sistema i intenziteta momenta impulsa. Na osnovu jednačine (7.62) može se odrediti velika poluosa elipse

$$a = -\frac{\gamma M_s m}{2E}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (7.44) dobija se

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{2E}{(\gamma M_s)^2 m}} \quad (7.65)$$

Obzirom da se planeta kreće oko Sunca dolazi do promene ugla φ tokom vremena, i možemo definisati ugaonu brzinu

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Medjutim ugaona brzina nije konstantna veličina. Na osnovu jednačina (7.40) i (7.43) dobijam

$$L = L$$

$$mr^2\dot{\varphi} = m\sqrt{\gamma M_s a(1 - e^2)}$$

, odnosno

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r^2} \sqrt{\gamma M_s a(1 - e^2)}$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (7.15), i dobija se zavisnost ugaone brzine od ugla φ

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{\gamma M_s}{a^3}} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e \cos \varphi)^2 \quad (7.66)$$

Korišćenjem trećeg Keplerovog zakona može se definisati i srednja ugaona brzina rotacije planete oko Sunca

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\gamma M_s}{a^3}} \quad (7.67)$$

8. Precesija perihela Merkura

Godine 1859 francuski astronom Urbain Le Verrier ukazao je na anomaliju u precesiji perihela Merkura. On je došao do zaključka da je precesija perihela Merkura veća nego što se može očekivati na osnovu Njutnove teorije. Ovaj rezultat je predstavljao problem za Njutnovu mehaniku. Urbain Le Verrier je do tog rezultata došao koristeći predhodno dobijena astronomska merenja, i vršeci matematičke proračune.

Da bi bolje objasnili ovu pojavu podsetimo se određenih rezultata Njutnove mehanike. Kepler je došao do zaključka da se planete kreću oko Sunca po eliptičnim putanjama. U zajedničkoj žiži tih elipsa nalazi se centar Sunca.

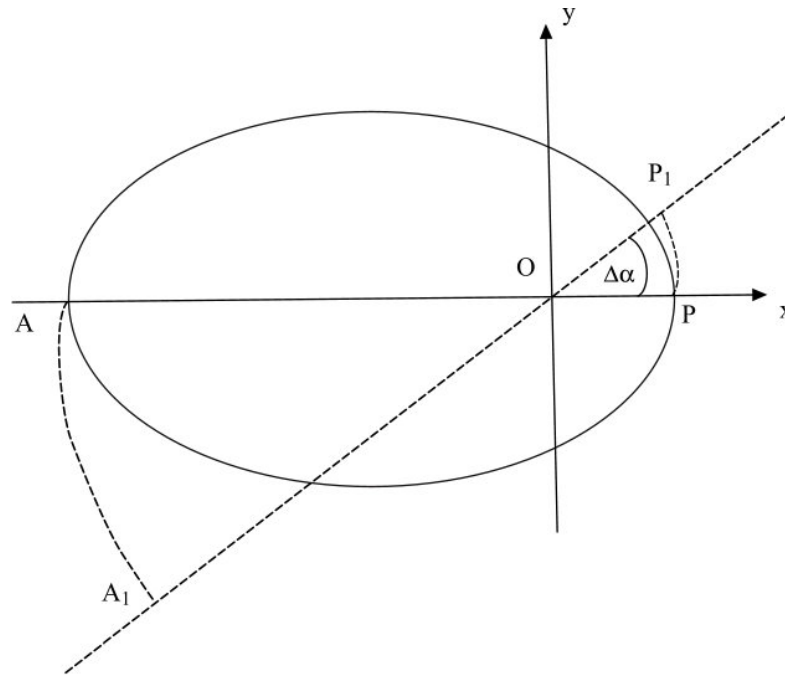
Putanja Zemlje oko Sunca nalazi se u ravni ekliptike. Ravan u kojoj se nalazi orbita planete je orbitalna ravan. Uzmimo na primer planetu Saturn. Nagib orbitalne ravni planete Saturn u odnosu na ravan ekliptike iznosi $2,5^\circ$. I kod drugih planeta Sunčevog sistema inklinacija njihovih orbitalnih ravni u odnosu na ekliptiku nije velika. Malo veće odstupanje je jedino izraženo upravo kod Merkura. Njegova orbitalna ravan nalazi se pod uglom od 7° u odnosu na ravan ekliptike. Obzirom da ovi uglovi nisu veliki može se približno smatrati da se sve planete Sunčevog sistema kreću u ravni ekliptike.

Radi jednostavnosti analize uzeću da se Merkur kreće u ravni ekliptike. Za opisivanje kretanja planete Merkur koristiću sistem S_4 , odnosno Orbitalni kordinatni sistem. O ovom sistemu je već bilo reči u četvrtom poglavlju. Ovaj sistem je prikazan na slici 13. Koordinatni početak sistema S_4 nalazi se u centru mase Sunca koji se poklapa sa jednom žižom elipse. Osa x ovog sistema se poklapa sa velikom poluosom elipse, koja je na slici 13 označena sa a , i usmerena ka γ tački. Osa y je paralelna sa

malom poluosom elipse, i takodje se nalazi u ravni ekliptike. z osa je normalna na ravan ekliptike i usmerena je ka severnom ekliptičkom polu.

Period rotacije Merkura oko Sunca označicu sa T , i on iznosi 87,97 dana. Masu Merkura označicu sa m , a masu Sunca sa M_s . Vektor položaj planete u sistemu S_4 označicu sa \vec{r} , a vektore brzine i ubrzanja sa \vec{v} i \vec{a} .

Neka se Merkur u početnom trenutku nalazi u perihelu. Perihel je na slici 21 označen tačkom P , afel tačkom A .



Slika 21

Primećeno je da se položaj perihela Merkura tokom vremena menja. Nakon dovoljno dugog vremenskog intervala perihel će se naći u tački P_1 , a afel u tački A_1 . Ova pojava naziva se precesija perihela Merkura. Sa slike 21 vidimo da se velika osa elipse zaokrenula za ugao $\Delta\alpha$. Perihel rotira oko tačke O konstantnom ugaonom brzinom. Ta promena položaja perihela je mala, ali je zapažena u astronomskim merenjima. Merenja su pokazala da se za period od 100 godina perihel Merkura pomeri za ugao od 574 lučnih sekundi. Podsetimo se da je jedan stepen jednak 60 lučnih minuta, a jedan lučni minut je jednak 60 lučnih sekundi. Ugaona brzina rotacije perihela Merkura je

$$\omega = 574''/100 \text{ godina}$$

Na osnovu Njutnove mehanike može se dobiti vrednost od 531 lučne sekunde. Glavni uzrok koji izaziva precesiju perihela Merkura sa stanovišta Njutnove mehanike je gravitaciono privlačenje drugih planeta. Najveći doprinos daju Venera, Jupiter i Zemlja. Postoji još jedan uzrok koji izaziva precesiju perihela Merkura, a on potiče od Sunca. Sunce ima oblik elipsoida i gravitaciono polje u tom slučaju razlikuje se od gravitacionom polja kada bi Sunce imalo oblik idealne lopte. Ovaj uticaj izazvan elipsoidnim oblikom Sunca po intenzitetu mnogo je manji od uticaja planeta na precesiju perihela Merkura.

Postoji razlika izmedju izmerene vrednosti ($574''/100 \text{ godina}$) i vrednosti dobijene na osnovu Njutnove mehanike ($531''/100 \text{ godina}$). Astronom Urbain Le Verrier prvi je ukazao na ovu razliku izmedju izmerene i teorijski dobijene vrednosti. Medjutim on je dobio da razlika iznosi 38 lučne sekunde za 100 godina. Astronom Simon Newcomb korigovao je ovaj rezultat i dobio je vrednost od 43 lučne sekunde za 100 godina.

Savremena istraživanja koja se zasnivaju na korišćenju radio talasa daju sledeću vrednost
 $42,56''/100 \text{ godina}$

Postavilo se pitanje kako objasniti ovu anomaliju. Predložene su razne teorije. Neke teorije zasnivale su se na postojanju dopunske materije koja svojim gravitacionim poljem utiče na Merkur i izaziva njegovu precesiju. Razmatrana je mogućnost postojanja međuplanetarne prašine, nepoznate mase blizu Sunca i mogućnost asteroidnog polja u okolini Merkura. Čak je razmatrana i mogućnost postojanja nove planete. Međutim ove pretpostavke bile su odbačene jer se nisu slagale sa astronomskim posmatranjima.

Predložene su i radikalne hipoteze koje su se zasnivale na modifikaciji Njutnovog zakona gravitacije. Međutim ni ovi teorijski modeli nisu bili uspešni.

Objašnjenje precesije perihela Merkura dao je Ajnštajn na osnovu njegove Opšte teorije relativnosti. Njegov rezultat je u dobroj saglasnosti sa astronomskim merenjima. On je izveo sledeću jednačinu

$$\Delta\varphi = 3\pi \frac{R_s}{a(1 - e^2)} \quad (8.1)$$

Veličina R_s je Švarcvildov radijus Sunca, i određuje se na osnovu jednačine

$$R_s = \frac{2\gamma M_s}{c^2} \quad (8.2)$$

Zamenom jednačine (8.2) u jednačinu (8.1) dobija se

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi\gamma M_s}{c^2 a(1 - e^2)} \quad (8.3)$$

Jednačina (8.3) može se dalje transformisati korišćenjem trećeg Keplerovog zakona (jednačina (7.48))

$$\Delta\varphi = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} \quad (8.4)$$

Treba dati dopunska objašnjenja u vezi jednačine (8.3). Zadržimo se najpre na oznakama u jednačini. Sa M_s označena je masa Sunca. Merkur se kreće po eliptičnoj putanji. Velika poluosa njegove eliptične putanje označena je sa a . Ekscentricitet elipse označen je sa e . Na slici 21 prikazano je da se položaj perihela Merkura menja tokom vremena. Ja sam uzeo proizvoljan vremenski interval, i nakon tog vremenskog intervala perihel se nalazi u tački P_1 , a afel u tački A_1 . Velika osa elipse zaokrenula se za ugao $\Delta\alpha$. Rotacija perihela vrši se u smeru kretanja Merkura. Ako uzmemo da je vremenski interval jednak periodu rotacije Merkura oko Sunca ($T = 87,97 \text{ dana}$), onda će se perihel zaokrenuti za ugao $\Delta\varphi$ koji se određuje na osnovu Ajnštajnovе jednačine.

Precesija perihela Merkura predstavlja jedan od klasičnih testova Opšte teorije relativnosti. Ova precesija postoji i kod drugih planeta u Sunčevom sistemu, ali nije toliko izražena kao od Merkura. Precesija se javlja i kod drugih astronomskih objekata. Spomenuću asteroid Ikarus koji je veoma pogodan za proučavanje ovog efekta, jer ima orbitu sa velikim ekscentricitetom i periodično prolazi veoma blizu Sunca.

Da bi još bolje sagledali ovu pojavu zamislimo hipotetičku situaciju da je Merkur jedina planeta u Sunčevom sistemu. Saglasno Njutnovoј mehanici orbita planete bila bi elipsa. Položaj elipse ne bi se menjao tokom vremena. Diferencijalna jednačina kretanja planete glasi

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M_s}{h^2} \quad (8.5)$$

Veličina u uvedena je na osnovu jednačine (7.27)

$$u = \frac{1}{r} \quad (8.6)$$

Postupak rešavanja diferencijalne jednačine (8.5) prezentovan je u predhodnom poglavlju. Jednačina (7.15) predstavlja opšte rešenje diferencijalne jednačine (8.5)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}$$

Ono se može napisati u obliku

$$u = \frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} \quad (8.7)$$

Diferencijalna jednačina kretanja planete sa stanovišta Opšte teorije relativnosti glasi

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M_s}{h^2} + \frac{3\gamma M_s}{c^2} u^2 \quad (8.8)$$

Postupak dobijanja ove diferencijalne jednačine, i način njenog rešavanja prezentovan je u knjizi [7]. Ja ću koristiti te rezultate u cilju analize jednačine (8.8). Kod Merkura postoji precesija koja se meri. Medjutim ta precesija nije toliko velika, i ako se ne zahteva velika astronomska preciznost uzima se da se Merkur kreće po eliptičnoj orbiti. Ta eliptična orbita menja položaj u prostoru, ali taj efekat nije veliki. Ovo nas navodi na zaključak da rešenje diferencijalne jednačine (8.8) možemo potražiti u obliku

$$u = \frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} + \eta \quad (8.9)$$

Funkcija η je nepoznata funkcija, i ona ima malu vrednost. Sa matematičke tačke gledišta ona predstavlja perturbaciju.

Zamenom jednačine (8.9) u jednačinu (8.8) dobijam

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} \right) + \left(\frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} \right) - \frac{\gamma M_s}{h^2} = -\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} - \eta + \frac{3\gamma M_s}{c^2} \left[\frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} + \eta \right]^2 \quad (8.10)$$

Izraz na levoj strani jednačine (8.10) je jednak nuli, jer funkcija data jednačinom (8.7) predstavlja rešenje diferencijalne jednačine (8.5).

Dobija se sledeća diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} + \eta = \frac{3\gamma M_s}{c^2} \left[\frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} + \eta \right]^2$$

Ova diferencijalna jednačina dalje se pojednostavljuje. Veličina η na desnoj strani ove diferencijalne jednačine zanemaruje se, jer je mnogo manja u odnosu na veličinu $(1 + e \cos(\varphi))/p$

$$\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} + \eta = \frac{3\gamma M_s}{c^2} \left[\frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} \right]^2$$

, odnosno

$$\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} + \eta = \frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} [1 + 2e \cos(\varphi) + e^2 \cos^2(\varphi)] \quad (8.11)$$

Ova jednačina može se dalje transformisati korišćenjem trigonometrijskog identiteta

$$\cos^2(\varphi) = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}$$

, odnosno

$$\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} + \eta = \frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{6\gamma M_s e}{c^2 p^2} \cos(\varphi) + \frac{3\gamma M_s e^2}{2c^2 p^2} \cos(2\varphi) \quad (8.12)$$

Uvodim sledeću oznaku

$$\alpha = \frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} \quad (8.13)$$

, i diferencijalna jednačina (8.12) dobija sledeći oblik

$$\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} + \eta = \alpha \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + 2\alpha e \cos(\varphi) + \frac{\alpha e^2}{2} \cos(2\varphi) \quad (8.14)$$

Da bi se rešila ova diferencijalna jednačina može se koristiti metod koji je predložen u radu [8]. Metod se zasniva na tome da opšte rešenje diferencijalne jednačine potražimo u obliku

$$\eta = A + B\varphi\sin(\varphi) + C\cos(2\varphi) \quad (8.15)$$

Veličine A , B i C su nepoznati koeficijenti koje trebamo odrediti.

Drugi izvod veličine η po uglu φ glasi

$$\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} = 2B\cos(2\varphi) - B\varphi\sin(\varphi) - 4C\cos(2\varphi) \quad (8.16)$$

Zamenom jednačina (8.16) i (8.15) u jednačinu (8.14) dobijamo

$$A + 2B\cos(\varphi) - 3C\cos(2\varphi) = \alpha \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2\alpha e \cos(\varphi) + \frac{\alpha e^2}{2} \cos(2\varphi)$$

Upoređivanjem levih i desnih strana ove jednačine dobija se da koeficijenti A , B i C imaju sledeće vrednosti

$$A = \alpha \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$$

$$B = \alpha e$$

$$C = -\alpha \frac{e^2}{6}$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (8.14) glasi

$$\eta = \alpha \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + \alpha e \varphi \sin(\varphi) + \left(-\frac{\alpha e^2}{6}\right) \cos(2\varphi) \quad (8.17)$$

Veličina α ima malu vrednost, i u skladu sa tim svi sabirci u jednačini (8.17) imaju malu vrednost. Prvi sabirak u jednačini (8.17) je konstantan i nije od interesa za dalje proučavanje. U trećem sabirku figuriše funkcija $\cos(2\varphi)$. Ona je periodična i ne može da izazove veću promenu funkcije η . Treći sabirak sadrži i faktor e^2 . Vrednost ekscentriciteta Merkurove orbite je 0,2056. Faktor e^2 ima vrednost 0,042, odnosno treći sabirak je oko 140 puta manji od prvog, i ovaj sabirak zanemarujem. Od interesa je samo proučavanje drugog sabirka u jednačini (8.17). Faktor $\varphi\sin(\varphi)$ u početku ima malu vrednost, ali postepeno raste sa vremenom i postaje značajan. Prvi i treći sabirak u jednačini (8.17) zanemaruju se i dobijamo sledeću jednačinu

$$\eta = \alpha e \varphi \sin(\varphi)$$

, odnosno

$$\eta = \frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} e \varphi \sin(\varphi)$$

Na osnovu jednačine (8.9) dobijamo opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$u = \frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} + \frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} e \varphi \sin(\varphi)$$

, odnosno

$$u = \frac{1}{p} \left[1 + e \cos(\varphi) + \frac{3\gamma M_s}{c^2 p} e \varphi \sin(\varphi) \right]$$

Ovu jednačinu dalje ću transformisati korišćenjem veličine β koja se definiše na sledeći način

$$\beta = \frac{3\gamma M_s}{c^2 p} \quad (8.18)$$

, i dobijam

$$u = \frac{1}{p} [1 + e (\cos(\varphi) + \beta \varphi \sin(\varphi))] \quad (8.19)$$

Da bi ovu jednačinu dalje transformisali koristimo sledeći trigonometrijski identitet

$$\cos(\varphi - \varphi\beta) = \cos(\varphi)\cos(\beta\varphi) + \sin(\varphi)\sin(\beta\varphi)$$

On se može napisati u obliku

$$\cos(\varphi(1 - \beta)) = \cos(\varphi)\cos(\beta\varphi) + \sin(\varphi)\sin(\beta\varphi) \quad (8.20)$$

Obzirom da veličina β ima malu vrednost važe sledeće aproksimacije

$$\cos(\beta\varphi) \approx 1$$

$$\sin(\beta\varphi) \approx \beta\varphi$$

Korišćenjem ovih aproksimacija jednačina (8.20) postaje

$$\cos(\varphi(1 - \beta)) \approx \cos(\varphi) + \beta\varphi\sin(\varphi)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (8.19) dobijam

$$u = \frac{1}{p} [1 + e\cos(\varphi(1 - \beta))] \quad (8.21)$$

Ova jednačina može se napisati i na sledeći način

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\varphi(1 - \beta))} \quad (8.22)$$

, i ona predstavlja rešenje diferencijalne jednačine (8.8).

U slučaju klasične mehanike položaj planete određuje se na osnovu jednačine (7.15)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\varphi}$$

Kada se planeta nalazi u perihelu onda je ona minimalno udaljena od Sunca. To rastojanje označio sam sa r_{min} . Za taj položaj planete ugao φ jednak je nuli, i na osnovu jednačine (7.15) dobija se

$$r_{min} = a(1 - e)$$

Nakon jedne rotacije Merkura oko Sunca ugao φ jednak je 2π i planeta se ponovo nalazi u perihelu.

Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti kretanje Merkura određuje se na osnovu jednačine (8.22). Na slici 21 prikazano je da se položaj perihela Merkura menja tokom vremena. Perihel je na slici 21 označen tačkom P , afel tačkom A . Neka se Merkur u početnom trenutku nalazi u perihelu. Rastojanje između Sunca i Merkura tada je minimalno, i to rastojanje označiću takodje sa r_{min} . U tom početnom trenutku ugao φ jednak je nuli. Rastojanje r_{min} može se odrediti na osnovu jednačine (8.22), i ono ima vrednost

$$r_{min} = a(1 - e)$$

Kada je ugao φ bio jednak nuli rastojanje između Sunca i Merkura bilo je minimalno. Postavlja se pitanje kolika je sledeća vrednost ugla φ za koju će rastojanje između Sunca i Merkura ponovo biti minimalno. Na osnovu jednačine (8.22) zaključujemo da će se to desiti kada je ispunjen sledeći uslov

$$\varphi(1 - \beta) = 2\pi \quad (8.23)$$

Ovaj zaključak možemo i matematički proveriti. Kosinus ugla 2π jednak je jedinici i na osnovu jednačine (8.22) dobijamo

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e}$$

, odnosno

$$r_{min} = a(1 - e)$$

Merkur je ponovo minimalno udaljen od Sunca, ali se on ne nalazi u tački P . Perihel se malo pomerio u odnosu na svoj početni položaj koji je bio određen tačkom P . Došlo je do precesije perihela Merkura. Kretanje perihela je prikazano na slici 21.

Taj novi položaj perihela određuje se na osnovu jednačine (8.23)

$$\varphi = \frac{2\pi}{1 - \beta} \quad (8.24)$$

Obzirom da veličina β ima malu vrednost možemo koristiti sledeću aproksimaciju

$$\frac{1}{1-\beta} \approx 1 + \beta$$

Na osnovu ove aproksimacije jednačina (8.24) dobija oblik

$$\varphi = 2\pi(1 + \beta)$$

, odnosno

$$\varphi = 2\pi + 2\pi\beta$$

U slučaju klasične mehanike planeta opiše ugao 2π i ponovo se nadje u perihelu. Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti planeta opiše ugao 2π plus ugao $2\pi\beta$ da bi se ponovo našla u perihelu. Na osnovu toga možemo zaključiti da se perihel Merkura u odnosu na x osu sistema S_2 zaokrenuo za ugao $2\pi\beta$. Taj ugao označiću sa $\Delta\varphi$ i on se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\Delta\varphi = 2\pi\beta \quad (8.25)$$

Na osnovu jednačine (8.18) dobijam

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi\gamma M_s}{a(1-e^2)c^2}$$

Ovaj rezultat je identičan sa Ajnštajnovim rezultatom. Tokom vremena ovaj proces se ponavlja i dolazi do kretanja perihela Merkura konstantnom ugaonom brzinom.

Sada ću analizirati precesiju perihela Merkura sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. U šestom poglavlju izveo sam jednačinu (6.113). Ova jednačina opisuje gravitacioni uticaj Zemlje, Sunca i Meseca na veštački satelit. Ova jednačina prilično je komplikovana jer u njoj figurišu dosta perturbujućih sila. Diferencijalna jednačina kretanja Merkura imaće jednostavniji matematički oblik u odnosu na jednačinu (6.113). Napomenuo sam da se orbitalna ravan Merkura nalazi pod uglom od 7° u odnosu na ravan ekliptike. Radi jednostavnosti analize uzeću da se Merkur kreće u ravni ekliptike.

Na Merkur deluju i ostale planete Sunčevog sistema. Zbog jednostavnosti analize uzeću da je Merkur jedino izložen gravitacionom dejstvu Sunca, a da je gravitaciono dejstvo ostalih planeta na Merkur zanemarljivo. Takvo pojednostavljenje imali smo i u okviru Opšte teorije relativnosti. Pri dobijanju jednačine (8.3) zanemaren je gravitacioni uticaj ostalih planeta na Merkur.

Prilikom izvodjenja diferencijalne jednačine kretanja Merkura korišću mnoge rezultate i zaključke iz šestog poglavlja.

U šestom poglavlju bilo je reči o efektu vremenske dilatacije. Tada sam razmatrao primer dva identična atomska časovnika, od kojih se jedan nalazio na površini Zemlje, a drugi u GPS satelitu. I u slučaju kretanja Merkura oko Sunca mora se uzeti u obzir efekat vremenske dilatacije. Možemo uvesti dva posmatrača. Jedan od njih je hipotetički posmatrač i nalazi se na Suncu, a drugi se nalazi na Merkuru. Posmatrači imaju identične atomske časovnike. Srednja brzina kretanja Merkura oko Sunca iznosi $47,36 \text{ km/s}$, i saglasno specijalnoj teoriji relativnosti ovi atomski časovnici neće izmeriti isti vremenski interval. Posmatrač koji se nalazi na Merkuru pomoću atomskog časovnika izmerio bi kraći vremenski interval od vremenskog intervala koji bi izmerio hipotetički posmatrač na Suncu. Ako posmatrač na Suncu izmeri vremenski interval Δt_s posmatrač na Merkur izmeriće vremenski interval Δt_{mer} . Saglasno specijalnoj teoriji relativnosti ovi vremenski intervali povezni su jednačinom

$$\Delta t_{mer} = \Delta t_s \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Za infinitezimalne vremenske intervale važi sledeća jednačina

$$dt_{mer} = dt_s \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (8.26)$$

Ja ću najpre napisati jednačinu dinamike Merkura sa stanovišta posmatrača u sistemu Sunca. Najuoštenija jednačina glasi

$$\frac{d}{dt_s} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] = \vec{F}_{gem s} \quad (8.27)$$

Sila koja potiče od gravitacionog dejstva Sunca označio sam sa $\vec{F}_{gem s}$. Ova sila biće određena sa stanovišta gravitoelektromagnetizma.

U daljem tekstu biće pokazano da se sila $\vec{F}_{gem s}$ sastoji od više komponentata, i jednačina (8.27) dobija sledeći oblik

$$\frac{d}{dt_s} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] = \vec{F}_{gem s 1} + \vec{F}_{gem s 2} + \vec{F}_{gem s 3} \quad (8.28)$$

Ovo je jednačina dinamike Merkura sa stanovišta hipotetičkog posmatrača koji se nalazi na Suncu.

Mogu napisati i odgovarajuće jednačine sa stanovišta posmatrača na Meku. Najuopštenija jednačina glasi

$$\frac{d}{dt_{mer}} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] = \vec{F}_{gem s} \quad (8.29)$$

Jednačina (8.29) može se napisati i u sledećem obliku

$$\frac{d}{dt_{mer}} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] = \vec{F}_{gem s 1} + \vec{F}_{gem s 2} + \vec{F}_{gem s 3} \quad (8.30)$$

Jednačina (8.30) je posledica predhodne konstatacije da se sila $\vec{F}_{gem s}$ sastoji od više komponentata.

Upoređivanjem jednačina (8.27) i (8.29) vidimo da imaju identičan matematički oblik, ali postoji jedna suštinska razlika. U jednačini (8.27) figuriše vreme koje se meri u sistemu Sunca i ono je označeno sa t_s , a u jednačini (8.29) figuriše vreme koje se meri u sistemu Merkura i označeno je sa t_{mer} .

Za posmatrača u sistemu Sunca sile $\vec{F}_{gem s 1}$, $\vec{F}_{gem s 2}$ i $\vec{F}_{gem s 3}$ imaju određenu matematičku formu. Medjutim ja sam uzeo da i za posmatrača u sistemu Merkura sile $\vec{F}_{gem s 1}$, $\vec{F}_{gem s 2}$ i $\vec{F}_{gem s 3}$ imaju istu matematičku formu kao i sa stanovišta posmatrača u sistemu Sunca.

Postavlja se jedno izuzetno bitno pitanje, a to je da li koristiti jednačinu (8.27) ili jednačinu (8.29) za opisivanje kretanja Merkura. U šestom poglavlju bila je slična dilema da li koristiti jednačinu (6.4) ili jednačinu (6.6) za opisivanje kretanja satelita. Ja sam se tada odlučio za korišćenje jednačine (6.6). U slučaju Merkura polazna jednačina biće jednačina (8.29). Ovu jednačinu ću transformisati i dobiću jednačinu u kojoj figuriše vreme koje se meri u sistemu Sunca. Prilikom tih transformacija viša puta ću koristiti jednačinu (8.26).

Najpre ću transformisati levu stranu jednačine (8.29) bez uzimanja u obzir efekta vremenske dilatacije. Taj postupak je već prezentovan u šestom poglavlju.

Korišćenjem Lorencovog faktora γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

leva strana jednačine (8.29) može se napisati na sledeći način

$$\frac{d}{dt_{mer}} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] = \frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{mer}}$$

Nakon diferenciranja dobijamo

$$\frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{mer}} = m \frac{d\vec{v}}{dt_{mer}} \gamma + m\vec{v} \frac{d\gamma}{dt_{mer}}$$

Ovaj izraz dalje se transformiše na sledeći način

$$\frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{mer}} = m \frac{d\vec{v}}{dt_{mer}} \gamma + m\vec{v} \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{dt_{mer}} \quad (8.31)$$

Izvod γ faktora po brzini je

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{v}{c^2} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-3/2}$$

, odnosno

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{v}{c^2} \gamma^3$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (8.31) dobijamo

$$\frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{mer}} = m \frac{d\vec{v}}{dt_{mer}} \gamma + m\vec{v} \left(\frac{dv}{dt_{mer}}\right) \frac{v}{c^2} \gamma^3 \quad (8.32)$$

U drugom sabirku na desnoj strani jednačine (8.32) figuriše faktor $1/c^2$, i taj sabirak možemo zanemariti. U skladu sa tim jednačina (8.32) dobija oblik

$$\frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{mer}} = m \frac{d\vec{v}}{dt_{mer}} \gamma$$

Ona se može zapisati i na sledeći način

$$\frac{d(m\vec{v}\gamma)}{dt_{mer}} = m \frac{d\vec{v}}{dt_{mer}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (8.33)$$

Na osnovu ovog rezultata jednačina (8.30) može se napisati u obliku

$$m \frac{d\vec{v}}{dt_{mer}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \vec{F}_{gem\ s\ 1} + \vec{F}_{gem\ s\ 2} + \vec{F}_{gem\ s\ 3}$$

, odnosno

$$m \frac{d\vec{v}}{dt_{mer}} = (\vec{F}_{gem\ s\ 1} + \vec{F}_{gem\ s\ 2} + \vec{F}_{gem\ s\ 3}) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (8.34)$$

Jednačina (8.34) je dobijena bez uzimanja u obzir efekta vremenske dilatacije. Potrebno je transformisati ovu jednačinu i dobiti diferencijalnu jednačinu u kojoj će figurisati vreme u sistemu Sunca. To će biti uradjeno u daljem tekstu, a da bi se to postiglo potrebno je koristi jednačinu (8.26).

Na osnovu jednačine (8.26) dobijamo

$$m \frac{d\vec{v}}{dt_s \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = (\vec{F}_{gem\ s\ 1} + \vec{F}_{gem\ s\ 2} + \vec{F}_{gem\ s\ 3}) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

, odnosno

$$m \frac{d\vec{v}}{dt_s} = (\vec{F}_{gem\ s\ 1} + \vec{F}_{gem\ s\ 2} + \vec{F}_{gem\ s\ 3}) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (8.35)$$

Brzina kretanja Merkura sa stanovišta posmatrača u sistemu Merkura određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt_{mer}}$$

Korišćenjem ovog rezultata jednačina (8.35) dobija oblik

$$m \frac{d}{dt_s} \left(\frac{d\vec{r}}{dt_m} \right) = (\vec{F}_{gem s 1} + \vec{F}_{gem s 2} + \vec{F}_{gem s 3}) \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)$$

Ova jednačina dalje se transformiše primenom jednačine (8.26)

$$m \frac{d}{dt_s} \left(\frac{d\vec{r}}{dt_s \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \right) = (\vec{F}_{gem s 1} + \vec{F}_{gem s 2} + \vec{F}_{gem s 3}) \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \quad (8.36)$$

Dobijena je jednačina u kojoj samo figuriše vreme koje se meri u sistemu Sunca.

Potrebno je diferencirati izraz na levoj strani jednačine (8.36). Taj postupak već je prezentovan u dosadašnjem tekstu, i neću ga ponavljati. Korišćenjem jednačine (6.10) dobijam

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_s^2} \gamma + m \vec{v} \left(\frac{dv}{dt_s} \right) \frac{v}{c^2} \gamma^3 = (\vec{F}_{gem s 1} + \vec{F}_{gem s 2} + \vec{F}_{gem s 3}) \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \quad (8.37)$$

U drugom sabirku na levoj strani jednačine (8.37) figuriše faktor $1/c^2$, i taj sabirak možemo zanemariti. U skladu sa tim jednačina (8.37) dobija oblik

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_s^2} \gamma = (\vec{F}_{gem s 1} + \vec{F}_{gem s 2} + \vec{F}_{gem s 3}) \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)$$

Ona se može napisati i na sledeći način

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_s^2} = (\vec{F}_{gem s 1} + \vec{F}_{gem s 2} + \vec{F}_{gem s 3}) \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{3/2} \quad (8.38)$$

Obzirom da je brzina Merkura mnogo manja od c važi sledeća aproksimacija

$$\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{3/2} \approx 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

Njenim korišćenjem jednačina (8.38) dobija oblik

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = (\vec{F}_{gem s 1} + \vec{F}_{gem s 2} + \vec{F}_{gem s 3}) \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)$$

, odnosno

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gem s 1} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) + \vec{F}_{gem s 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) + \vec{F}_{gem s 3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \quad (8.39)$$

U ovoj jednačini figurišu tri sile. Najpre ću odrediti silu $\vec{F}_{gem s 1}$. U trećem poglavlju objasnio sam da Zemlja u prostoru oko sebe stvara gravitomagnetno polje zbog svoje rotacije. Jačina gravitomagnetnog polja Zemlje određuje se na osnovu jednačine (3.60). Ovaj rezultat je dobijen pod pretpostavkom da je Zemlja idealna lopta sa homogenom distribucijom mase. U slučaju Sunca situacija je dosta komplikovanija. Sunce ne rotira kao kruto telo. Po hemijskom sastavu 75 procenata mase Sunca čini vodonik, dok je ostatak uglavnom helijum. Manje od 2 procenta čine teži elementi kao što su kiseonik, ugljenik i gvoždje. Sunce je u plazmenom stanju i njegov period rotacije oko vlastite ose varira sa latitudom. Period rotacije Sunca u ekvatorijalnoj oblasti je oko 25 dana, a na polovima oko 35 dana. Situacija se komplikuje i time što unutrašnji slojevi Sunca rotiraju različitim brzinama u odnosu na spoljašnje slojeve Sunca. Kretanje sunčeve plazme je prilično komplikovano, ali Sunce zbog kretanja njegove materije stvara gravitomagnetno polje. Problem izračunavanja tog gravitomagnetnog polja bio bi prilično komplikovan.

Pretpostavimo da smo odedili vektor jačine gravitomagnetnog polja koji ću označiti sa $\vec{B}_{gem s}$. Sunce stvara gravitomagnetno polje. Oko Sunca kreće se Merkur i saglasno jednačini (2.28) na njega će delovati sila $\vec{F}_{gem s 1}$

$$\vec{F}_{gem s 1} = m\vec{v} \times \vec{B}_{gem s} \quad (8.40)$$

Ova sila figuriše u jednačini (8.39). Medjutim kasnije ću pokazati da je sila $\vec{F}_{gem s 1}$ po intenzitetu mnogo manja od Tomsonove sile, i može se zanemariti. Na taj način možemo izbegnuti problem tačnog određivanja gravitomagnetnog polja Sunca.

Da bi procenio intenzitet sile $\vec{F}_{gem s 1}$ složeni problem kretanja sunčeve plazme pojednostaviću na taj način što ću uzeti da Sunce rotira kao kruto telo. Sunce ću smatrati idealnom loptom sa homogenom distribucijom mase. U skladu sa tim moment inercije Sunca određujemo na osnovu jednačine

$$I = \frac{2}{5} M_s R_s^2$$

Sa R_s je označen poluprečnik Sunca.

Obzirom da se ugaona brzina rotacije sunčeve plazme menja sa latitudom potrebno je uvesti srednju vrednost ugaone brzine rotacije Sunca koju ću označiti sa ω_s . Uzeću da ona ima vrednost

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{27 \text{ dan}}$$

Sa $\vec{\omega}_s$ označen je vektor ugaone brzine rotacije Sunca.

Moment impulsa Sunca može se izraziti na način

$$\vec{L} = I\vec{\omega}_s = \frac{2}{5} M_s R_s^2 \vec{\omega}_s$$

Na osnovu jednačine (3.60) dobijam vektor jačine gravitomagnetnog polja Sunca

$$\vec{B}_{gem s} = -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right]$$

Obzirom da se Merkur kreće u gravitomagnetnom polju na njega će delovati sila

$$\vec{F}_{gem s 1} = m\vec{v} \times \left\{ -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right] \right\} \quad (8.41)$$

Ovo je prva komponenta sile $\vec{F}_{gem s}$.

Silu $\vec{F}_{gem s 2}$ možemo jednostavno dobiti. To je Tomsonova sila (jednačina (5.37))

$$\vec{F}_{gem s 2} = \frac{\gamma M_s m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (8.42)$$

Napomenuo sam da je sila $\vec{F}_{gem s 1}$ po intenzitetu mnogo manja od Tomsonove sile. Sada ću to pokazati. Zbog jednostavnosti analize uzeću da se Merkur kreće po kružnoj putanji. Srednja brzina kretanja Merkura oko Sunca iznosi 47,36 km/s, a srednje rastojanje između Sunca i Merkura je 57321000 km. Poluprečnik Sunca iznosi $6,955 \cdot 10^5$ km. Upoređiću vrednosti intenziteta sile $\vec{F}_{gem s 1}$ i $\vec{F}_{gem s 2}$.

Merkur se kreće u ravni ekliptike i skalarni proizvod vektora \vec{r} i \vec{L} jednak je nuli. U skladu sa tim jednačina (8.41) dobija oblik

$$\vec{F}_{gem s 1} = \frac{2\gamma m}{c^2 r^3} \vec{v} \times \vec{L}$$

Intenzitet ove sile ima vrednost

$$F_{gem s 1} = \frac{4\gamma m v M_s R_s^2 \omega_s}{5 c^2 r^3} \quad (8.43)$$

Zbog jednostavnosti analize uzeo sam da se Merkur kreće po kružnoj putanji. U skladu sa tim intenzitet Tomsonove sile ima vrednost

$$F_{gem s 2} = \frac{\gamma M_s m v^2}{r^2 c^2} \quad (8.44)$$

Možemo formirati količnik intenziteta sila

$$\frac{F_{gem s 2}}{F_{gem s 1}} = \frac{5vr}{4R_s^2 \omega_s} \quad (8.45)$$

Zamenom odgovarajućih brojnih vrednosti u jednačinu (8.45) dobijam da je Tomsonova sila 2609 puta veća od sile $\vec{F}_{gem s 1}$. Ovim je pokazano da je opravdano zanemarivanje sile $\vec{F}_{gem s 1}$. Zbog ovog rezultata jednačina (8.39) dobija oblik

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = \vec{F}_{gem s 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + \vec{F}_{gem s 3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (8.46)$$

Ostalo je još da se odredi sila $\vec{F}_{gem s 3}$. Da bi to uradio moramo se najpre podsetiti određenih rezultata i metoda iz četvrtog poglavlja. Zemlja se kreće po eliptičnoj putanji oko Sunca, ali sam zbog jednostavnosti proračuna u tom poglavlju najpre analizirao slučaj kretanja Zemlje po kružnoj putanji. Koristio sam Heliocentrični ekliptički koordinatni sistem. Radijus vektora brzine Zemlje u tom koordinatnom sistemu označio sam sa $\vec{r}_z(t)$, a vektor brzine sa \vec{v}_z . Intenzitet vektora brzine Zemlje označio sam sa v_z . Najpre sam dobio jednačine (4.31) i (4.34). One se koriste se za određivanje jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u centru Sunca. Ovo gravitaciono polje stvara Zemlja.

U daljoj analizi uveo sam posmatrača na Zemlji (u sistemu S_3). On može tvrditi da Zemlja miruje, a da se Sunce kreće oko nje. Sa stanovišta posmatrača u sistemu Zemlje (sistemu S_3) položaj Sunca određuje se na osnovu jednačine (4.54) ili jednačine (4.51), a brzina na osnovu jednačine (4.55). Sa njegovog stanovišta Sunce se kreće po kružnici i stvara gravitoelektrično i gravitomagnetno polje u njegovom sistemu. Pokazao sam da se jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_3 (sistemu Zemlje) određuju se na osnovu jednačina (4.63) i (4.64). Zbog važnosti ovih jednačina za dalju analizu ponovo ih navodim

$$\vec{E}_{gem s}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma M_s}{r_z^3} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \vec{r}_z(t)$$

$$\vec{B}_{gem s}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_s}{r_z^3} \left[\frac{\vec{r}_z(t) \times \vec{v}_z(t)}{c^2} \right]$$

Pokazao sam da se ove jednačine mogu koristiti i za opisivanje gravitacionog polja u okolini Zemlje.

Na osnovu jednačine (4.63) dobio sam silu koja deluje na planetu Zemlju sa stanovišta posmatrača u sistemu Zemlje (jednačina (4.68))

$$\vec{F}_{gem u} = -\frac{\gamma M_s M_z}{r_z^3} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2}\right) \vec{r}_z(t)$$

Koristeći ove rezultate i metode prezentovane u četvrtom poglavlju može se dobiti sila koja deluje na planetu Merkur. U četvrtom poglavlju koristio sam Heliocentrični ekliptički koordinatni sistem. Sada koristim Orbitalni kordinatni sistem (sistem S_4). Vektor položaj planete u sistemu S_4 označio sam sa \vec{r} , a vektore brzine i ubrzanja sa \vec{v} i \vec{a} . Moram napomenuti da su ova dva sistema veoma slična.

Merkur se kreće po eliptičnoj putanji. Ekscentricitet njegove orbite iznosi 0,206. U slučaju eliptičnih orbita izračunavanje odgovarajućih jačina gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja je matematički veoma komplikovano. Da bi izbegao taj problem, ja ću pretpostaviti da se Merkur kreće po kružnoj putanji. Takvo pojednostavljenje imali smo i u slučaju kretanja Zemlje oko Sunca. Dalja analiza biće identična sa onom prezentovanom u četvrtom poglavlju. Merkur prilikom kretanja stvara

gravitoelektrično i gravitomagnetno polje. Primenjujući već prezentovanr metode može se odrediti jačina gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u centru Sunca. Ovo gravitaciono polje stvara Merkur. U slučaju kretanja Zemlje oko Sunca dobio sam jednačine (4.31) i (4.34).

Odredjivanje gravitacionog polja koje stvara Merkur u okolini Sunca nije nam od presudnog interesa, i zato se primenjuje pristup koji je prezentovan u četvrtom poglavlju. Taj pristup se sastoji u uvodjenju posmatrača na Merkur. On može tvrditi da Merkur miruje, a da se Sunce kreće oko njega. Sa njegovog stanovišta Sunce se kreće po kružnici i stvara gravitoelektrično i gravitomagnetno polje u njegovom sistemu. Uslučaju kretanja Zemlje oko Sunca primenjujući ovaj pristup dobijene su jednačine (4.63) i (4.64). Potrebno je dobiti odgovarajuće jednačine za slučaj kretanja Merkura oko Sunca. Pretpostavio sam da se Merkur kreće oko Sunca po kružnoj putanji, i mogu se primeniti iste metode kao u slučaju kretanja Zemlje oko Sunca. Ovom prilikom opet ponavljam da za analizu kretanja Merkura koristim Orbitalni kordinatni sistem (sistem S_4). Vektor položaj planete Merkur u sistemu S_4 označio sam sa \vec{r} , a vektore brzine i ubrzanja sa \vec{v} i \vec{a} . Ako primenim iste metode kao u četvrtom poglavlju dobiću da se jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u sistemu Merkura odredjuju se na osnovu sledećih jednačina

$$\vec{E}_{gem s}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma M_s}{r^3} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \vec{r}(t) \quad (8.47)$$

$$\vec{B}_{gem s}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_s}{r^3} \left[\frac{\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)}{c^2} \right] \quad (8.48)$$

Ovo gravitaciono polje potiče od Sunca.

Moram napomenuti da se jednačine (8.47) i (8.48) mogu direktno dobiti iz jednačina (4.63) i (4.64), na taj način što se vektori \vec{r}_z i \vec{v}_z , zamene vektorima \vec{r} i \vec{v} , a veličine r_z i v_z veličinama r i v .

Ako iskoristimo jednačinu (8.47) i postupak prezentovan u četvrtom poglavlju dobićemo silu koja deluje na planetu Merkur. Ta sila se izračunava na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{F}_{gem s 3} = -\frac{\gamma M_s m}{r^3} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \vec{r} \quad (8.49)$$

Odredjena je i sila $\vec{F}_{gem s 3}$.

Jednačina (8.49) može se napisati u obliku

$$\vec{F}_{gem s 3} = -\frac{\gamma M_s m}{r^3} \vec{r} + \frac{\gamma M_s m}{r^3} \frac{v^2}{2c^2} \vec{r} \quad (8.50)$$

Vidimo da pored Njutnovog člana u jednačini (8.50) figuriše i dopunski član. To je perturbativni član.

Analizirajmo sada pojedine sabirke u jednačini (8.46). Prvi sabirak se može napisati u obliku

$$\vec{F}_{gem s 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \frac{\gamma M_s m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) - \frac{\gamma M_s m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (8.51)$$

U drugom članu na desnoj strani jednačine (8.51) figuriše faktor $1/c^4$, i taj član se zanemaruje. U skladu sa tim jednačina (8.51) dobija sledeću formu

$$\vec{F}_{gem s 2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx \frac{\gamma M_s m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (8.52)$$

Drugi sabirak u jednačini (8.46) može se napisati u obliku

$$\vec{F}_{gem s 3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = -\frac{\gamma M_s m}{r^3} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \vec{r} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

Nakon elementarnih algebarskih transformacija dobijam

$$\vec{F}_{gem s 3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = -\frac{\gamma M_s m}{r^3} \vec{r} + \frac{\gamma M_s m}{r^3} \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} + \frac{\gamma M_s m}{r^3} \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} - \frac{\gamma M_s m}{r^3} \frac{3}{4} \left(\frac{v}{c}\right)^4 \vec{r}$$

Poslednji član u ovoj jednačini sadrži faktor $1/c^4$ i njega ću zanemariti

$$\vec{F}_{gem s 3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx -\frac{\gamma M_s m}{r^3} \vec{r} + \frac{\gamma M_s m}{r^3} \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} + \frac{\gamma M_s m}{r^3} \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r}$$

, odnosno

$$\vec{F}_{gem s 3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \approx -\frac{\gamma M_s m}{r^3} \vec{r} + 2 \frac{\gamma M_s m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} \quad (8.53)$$

Zamenom jednačina (8.52) i (8.53) u jednačinu (8.46) dobijamo

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_s^2} = -\frac{\gamma M_s m}{r^3} \vec{r} + 2 \frac{\gamma M_s m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} + \frac{\gamma M_s m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (8.54)$$

Ovo je diferencijalna jednačina kretanja Merkura sa stanovišta gravitoelektromagnetizma.

Jednačina (8.54) može se dalje transformisati korišćenjem dvostrukog vektorskog proizvoda

$$\vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} v^2 - \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{r})$$

, odnosno

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_s^2} = -\frac{\gamma M_s m}{r^3} \vec{r} + 3 \frac{\gamma M_s m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} - \frac{\gamma M_s m}{r^3 c^2} \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{r}) \quad (8.55)$$

Da bi rešio ovu diferencijalnu jednačinu koristiću polarne koordinate. Radijus vektor i vektor brzine određuju se na osnovu jednačina (7.35) i (7.36)

$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

Vektor ubrzanja određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi}) \vec{e}_\phi \quad (8.56)$$

Najpre ću transformisati desnu stranu jednačine (8.55)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_s^2} = -\frac{\gamma M_s m}{r^2} \vec{e}_r + 3 \frac{\gamma M_s m}{c^2 r^2} v^2 \vec{e}_r - \frac{\gamma M_s m}{c^2 r^3} (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi) [(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi) \cdot (r \vec{e}_r)]$$

, odnosno

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_s^2} = -\frac{\gamma M_s m}{r^2} \vec{e}_r + 3 \frac{\gamma M_s m}{c^2 r^2} v^2 \vec{e}_r - \frac{\gamma M_s m}{c^2 r^3} (r \dot{r}^2 \vec{e}_r + r^2 \dot{r} \dot{\phi} \vec{e}_\phi)$$

Korišćenjem jednačine (8.56) dobijam sledeću jednačinu

$$m(\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \vec{e}_r + m(r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi}) \vec{e}_\phi = -\frac{\gamma M_s m}{r^2} \vec{e}_r + 3 \frac{\gamma M_s m}{c^2 r^2} v^2 \vec{e}_r - \frac{\gamma M_s m}{c^2 r^3} (r \dot{r}^2 \vec{e}_r + r^2 \dot{r} \dot{\phi} \vec{e}_\phi)$$

Na osnovu ove vektorske jednačine dobijaju se dve diferencijalne jednačine

$$\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 = -\frac{\gamma M_s}{r^2} + 3 \frac{\gamma M_s}{c^2 r^2} v^2 - \frac{\gamma M_s}{c^2 r^2} \dot{r}^2 \quad (8.57)$$

$$r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi} = -\frac{\gamma M_s m}{c^2 r} \dot{r} \dot{\phi} \quad (8.58)$$

Desna strana jednačine (8.58) ima malu vrednost. Iz tog razloga desnu stranu jednačine (8.58) izjednačicu sa nulom i dobijam sledeću jednačinu

$$r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi} = 0$$

Ona se može napisati u sledećem obliku

$$\frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\phi})}{dt_s} = 0$$

, odnosno

$$\frac{d(r^2 \dot{\phi})}{dt_s} = 0$$

Ovaj rezultat je identičan sa rezultatom iz klasične mehanike. Može se uvesti integraciona konstanta h i dobijam sledeću jednačinu

$$r^2 \dot{\varphi} = h$$

, odnosno

$$\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2} \quad (8.59)$$

Na osnovu jednačine (7.36) može se dobiti kvadrat intenziteta vektora brzine

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (8.60)$$

Zamenom jednačine (8.60) u jednačinu (8.57) dobija se

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\gamma M_s}{r^2} + 3\frac{\gamma M_s}{c^2 r^2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\gamma M_s}{c^2 r^2} \dot{r}^2$$

, odnosno

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\gamma M_s}{r^2} + 3\frac{\gamma M_s}{c^2} \dot{\varphi}^2 + 2\frac{\gamma M_s}{c^2 r^2} \dot{r}^2 \quad (8.61)$$

Jednačina (8.61) transformiše se korišćenjem jednačine (8.59), i dobijam

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{\gamma M_s}{r^2} = 3\frac{\gamma M_s}{c^2 r^4} h^2 + 2\frac{\gamma M_s}{c^2 r^2} \dot{r}^2 \quad (8.62)$$

Da bi se transformisala jednačina (8.62) uvodi se smena

$$u = \frac{1}{r}$$

, i koriste se jednačine (7.29) i (7.30)

$$\dot{r} = -\frac{du}{d\varphi} h$$

$$\ddot{r} = -\frac{d^2 u}{d\varphi^2} h^2 u^2$$

Nakon elementarnih algebarskih transformacija iz jednačine (8.62) dobija se jednačina (8.63)

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{\gamma M_s}{h^2} = -3\frac{\gamma M_s}{c^2} u^2 - 2\frac{\gamma M_s}{c^2} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 \quad (8.63)$$

Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti diferencijalna jednačina kretanja planete određuje se na osnovu jednačine (8.8)

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M_s}{h^2} + \frac{3\gamma M_s}{c^2} u^2$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine ima oblik

$$u = \frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} + \eta$$

Funkcija η ima malu vrednost. Istakao sam da sa matematičke tačke gledišta ona predstavlja perturbaciju.

Analogno postupku iz Opšte teorije relativnosti rešenje diferencijalne jednačine (8.63) tražiću u obliku

$$u = \frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} + \zeta \quad (8.64)$$

Funkcija ζ je nepoznata funkcija, i ona predstavlja perturbaciju.

Zamenom jednačine (8.64) u jednačinu (8.63) dobija se

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} \right) + \left(\frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} \right) - \frac{\gamma M_s}{h^2} = -\frac{d^2 \zeta}{d\varphi^2} - \zeta - 3\frac{\gamma M_s}{c^2} u^2 - 2\frac{\gamma M_s}{c^2} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 \quad (8.65)$$

Izraz na levoj strani jednačine (8.65) jednak je nuli, jer funkcija data jednačinom (8.7) predstavlja rešenje diferencijalne jednačine (8.5).

Dobija se sledeća diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} + \zeta = -\frac{3\gamma M_s}{c^2} \left[\frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} + \zeta \right]^2 - 2 \frac{\gamma M_s}{c^2} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} \right) + \frac{d}{d\varphi} \zeta \right]^2$$

, odnosno

$$\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} + \zeta = -\frac{3\gamma M_s}{c^2} \left[\frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} + \zeta \right]^2 - 2 \frac{\gamma M_s}{c^2} \left[-\frac{e \sin(\varphi)}{p} + \frac{d}{d\varphi} \zeta \right]^2$$

Ova diferencijalna jednačina dalje se pojednostavljuje. Veličina ζ i njen prvi izvod na desnoj strani ove diferencijalne jednačine zanemaruju se jer su mnogo manje u odnosu na veličine $(1 + e \cos(\varphi)/p)$ i $e \sin(\varphi)/p$

$$\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} + \zeta = -\frac{3\gamma M_s}{c^2} \left[\frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} \right]^2 - 2 \frac{\gamma M_s}{c^2} \left[-\frac{e \sin(\varphi)}{p} \right]^2$$

, odnosno

$$\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} + \zeta = -\frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} - \frac{2\gamma M_s}{c^2 p^2} e^2 - \frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} 2e \cos(\varphi) - \frac{\gamma M_s}{c^2 p^2} e^2 \cos^2(\varphi)$$

Ova jednačina može se dalje transformisati korišćenjem trigonometrijskog identiteta

$$\cos^2(\varphi) = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} + \zeta = -\frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} - \frac{5\gamma M_s}{2c^2 p^2} e^2 - \frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} 2e \cos(\varphi) - \frac{\gamma M_s}{2c^2 p^2} e^2 \cos(2\varphi) \quad (8.66)$$

Metod rešavanja diferencijalne jednačine (8.14) predložen je u radu [8]. Metod se zasniva na tome da opšte rešenje diferencijalne jednačine (8.14) tražimo u obliku

$$\eta = A + B\varphi \sin(\varphi) + C \cos(2\varphi)$$

Pokazao sam kako se određuju koeficijenti A , B i C .

Isti metod primeniću i za rešavanje diferencijalne jednačine (8.66). Opšte rešenje diferencijalne jednačine (8.66) tražim u obliku

$$\zeta = \bar{A} + \bar{B}\varphi \sin(\varphi) + \bar{C} \cos(2\varphi) \quad (8.67)$$

Veličine \bar{A} , \bar{B} i \bar{C} su nepoznati koeficijenti koje trebamo odrediti.

Drugi izvod veličine ζ po uglu φ glasi

$$\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} = 2\bar{B} \cos(2\varphi) - \bar{B}\varphi \sin(\varphi) - 4\bar{C} \cos(2\varphi) \quad (8.68)$$

Zamenom jednačina (8.68) i (8.67) u jednačinu (8.66) dobijam

$$\bar{A} + 2\bar{B} \cos(\varphi) - 3\bar{C} \cos(2\varphi) = -\frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} - \frac{5\gamma M_s}{2c^2 p^2} e^2 - \frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} 2e \cos(\varphi) - \frac{\gamma M_s}{2c^2 p^2} e^2 \cos(2\varphi)$$

Upoređivanjem levih i desnih strana ove jednačine dobija se da koeficijenti \bar{A} , \bar{B} i \bar{C} imaju sledeće vrednosti

$$\bar{A} = -\frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} - \frac{5\gamma M_s}{2c^2 p^2} e^2$$

$$\bar{B} = -\frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} e$$

$$\bar{C} = \frac{\gamma M_s}{6c^2 p^2} e^2$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (8.66) glasi

$$\zeta = \bar{A} + \bar{B}\varphi \sin(\varphi) + \bar{C} \cos(2\varphi)$$

Analiza ove jednačine slična je kao u slučaju Opšte teorije relativnosti. Prvi sabirak u jednačini (8.67) je konstantan i nije od interesa za dalje proučavanje. U trećem sabirku figuriše funkcija $\cos(2\varphi)$. Ona je periodična i ne može da izazove veću promenu funkcije ζ . Kao i u slučaju Opšte teorije relativnosti od interesa je samo proučavanje drugog sabirka u jednačini (8.67). Faktor $\varphi \sin(\varphi)$ u početku ima malu vrednost, ali postepeno raste sa vremenom i postaje značajan. Prvi i treći sabirak u jednačini (8.67) zanemaruju se i dobijamo sledeću jednačinu

$$\zeta = \bar{B}\varphi \sin(\varphi)$$

, odnosno

$$\zeta = -\frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} e\varphi \sin(\varphi) \quad (8.69)$$

Vidimo da se funkcije ζ i η razlikuju po predznaku.

Na osnovu jednačina (8.64) i (8.69) dobijamo

$$u = \frac{1 + e \cos(\varphi)}{p} - \frac{3\gamma M_s}{c^2 p^2} e\varphi \sin(\varphi) \quad (8.70)$$

, i to je opšte rešenje diferencijalne jednačine (8.63)

Postupak transformacije ove jednačine zasniva se na već prezentovanom postupku iz Opšte teorije relativnosti. Najpre ću jednačinu (8.70) zapisati u obliku

$$u = \frac{1}{p} \left[1 + e \cos(\varphi) - \frac{3\gamma M_s}{c^2 p} e\varphi \sin(\varphi) \right] \quad (8.71)$$

Kao i u slučaju Opšte teorije relativnosti uvodim oznaku β (jednačina (8.18))

$$\beta = \frac{3\gamma M_s}{c^2 p}$$

, i jednačina (8.71) dobija sledeći oblik

$$u = \frac{1}{p} [1 + e (\cos(\varphi) - \beta\varphi \sin(\varphi))] \quad (8.72)$$

Da bi ovu jednačinu dalje transformisali koristimo sledeći trigonometrijski identitet

$$\cos(\varphi + \beta\varphi) = \cos(\varphi) \cos(\beta\varphi) - \sin(\varphi) \sin(\beta\varphi)$$

On se može napisati u obliku

$$\cos(\varphi(1 + \beta)) = \cos(\varphi) \cos(\beta\varphi) - \sin(\varphi) \sin(\beta\varphi) \quad (8.73)$$

Obzirom da veličina β ima malu vrednost važe sledeće aproksimacije

$$\cos(\beta\varphi) \approx 1$$

$$\sin(\beta\varphi) \approx \beta\varphi$$

Korišćenjem ovih aproksimacija jednačina (8.73) postaje

$$\cos(\varphi(1 + \beta)) \approx \cos(\varphi) - \beta\varphi \sin(\varphi)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (8.72) dobijam

$$u = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\varphi(1 + \beta))] \quad (8.74)$$

Ova jednačina može se napisati i na sledeći način

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi(1 + \beta))} \quad (8.75)$$

, i ona predstavlja rešenje diferencijalne jednačine (8.63).

Jednačina (8.75) nije identična sa jednačinom (8.22) koja je dobijena na osnovu Opšte teorije relativnosti. Postavlja se pitanje da li na osnovu jednačine (8.75) može da se opiše efekat precesije perihela Merkura.

Na slici 21 prikazano je da se položaj perihela Merkura menja tokom vremena. Perihel je na slici 21 označen tačkom P , afel tačkom A . U okviru predhodno prezentovane analize koja pripada Opštoj teoriji relativnosti uzeo sam da se Merkur u početnom trenutku nalazi u perihelu. Rastojanje

između Sunca i Merkura tada je minimalno, i to rastojanje označio sam sa r_{min} . U tom početnom trenutku ugao φ jednak je nuli. Rastojanje r_{min} može se odrediti na osnovu jednačine (8.22), i ono ima vrednost

$$r_{min} = a(1 - e)$$

U slučaju klasične mehanike planeta opiše ugao 2π i ponovo se nadje u perihelu. Pokazao sam da sa stanovišta Opšte teorije relativnosti Merkur opiše ugao φ

$$\varphi = 2\pi + 2\pi\beta \quad (8.76)$$

, da bi se ponovo našao u perihelu. Na osnovu toga zaključio sam da se perihel Merkura u odnosu na x osu sistema S_2 zaokrenuo za ugao $2\pi\beta$. Taj ugao označio sam sa $\Delta\varphi$, i on se određuje na osnovu jednačine (8.25)

$$\Delta\varphi = 2\pi\beta$$

I u slučaju jednačine (8.75) koja je dobijena na osnovu gravitoelektromagnetizma možemo primeniti sličan pristup. Neka se Merkur u početnom trenutku nalazi u perihelu. Ugao φ tada je jednak nuli. Rastojanje između Sunca i Merkura tada je minimalno, i ono ima vrednost

$$r_{min} = a(1 - e)$$

Postavlja se pitanje kolika je sledeća vrednost ugla φ za koju će rastojanje između Sunca i Merkura ponovo biti minimalno. Na osnovu jednačine (8.75) zaključujemo da će se to desiti kada je ispunjen sledeći uslov

$$\varphi(1 + \beta) = 2\pi \quad (8.77)$$

Ovaj zaključak možemo i matematički proveriti. Kosinus je tada jednak jedinici i na osnovu jednačine (8.75) dobijamo

$$r_{min} = a(1 - e)$$

Merkur je ponovo minimalno udaljen od Sunca, ali se on ne nalazi u tački P . Perihel se malo pomerio u odnosu na svoj početni položaj koji je bio određen tačkom P . Taj novi položaj perihela možemo odrediti korišćenjem jednačine (8.77)

$$\varphi = \frac{2\pi}{1 + \beta} \quad (8.78)$$

Obzirom da veličina β ima malu vrednost možemo koristiti sledeću aproksimaciju

$$\frac{1}{1 + \beta} \approx 1 - \beta$$

Na osnovu ove aproksimacije jednačina (8.78) dobija oblik

$$\varphi = 2\pi(1 - \beta)$$

, odnosno

$$\varphi = 2\pi - 2\pi\beta \quad (8.79)$$

Ovaj rezultat razlikuje se od rezultata iz Opšte teorije relativnosti (jednačina (8.76)). Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti Merkur opiše ugao 2π plus ugao $2\pi\beta$ da bi se ponovo našao u perihelu. Međutim sa stanovišta gravitoelektromagnetizma Merkur opiše ugao 2π minus $2\pi\beta$ da bi se ponovo našao u perihelu. Postoji neslaganje između jednačina (8.76) i (8.79), ali i sa stanovišta gravitoelektromagnetizma sledi postojanje precesije perihela Merkura.

Da bi dalje analizirali primenu ovih teorija na precesiju perihela Merkura primeniću sledeći pristup. Sa stanovišta klasične mehanike rastojanje između Sunca i Merkura određuje se na osnovu jednačine (7.15)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\varphi}$$

, a sa stanovišta Opšte teorije relativnosti na osnovu jednačine (8.22)

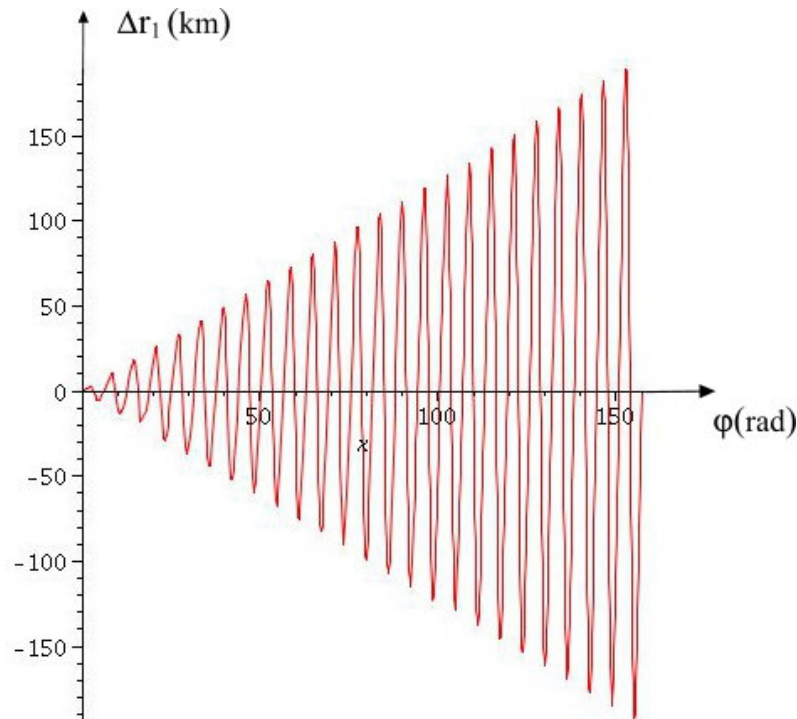
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\varphi(1 - \beta))}$$

Ove jednačine nisu identične. Za istu vrednost ugla φ jednačine (7.15) i (8.22) daju različite vrednosti za rastojanje između Sunca i Merkura. Da bi se bolje sagledala ta razlika može se nacrtati i odgovarajući grafik.

Najpre ću formirati razliku jednačina (7.15) i (8.22), i tu razliku ću označiti sa Δr_1

$$\Delta r_1 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi} - \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi(1 - \beta))}$$

Vrednost ekscentriciteta Merkurorove orbite je 0,2056. Faktor e^2 ima vrednost 0,042. Velika poluosa iznosi 57909050 km, a veličina β ima vrednost 10^{-7} . Ove podatke iskoristiću da dobijem grafik koji će pokazati kako se menja Δr_1 u funkciji ugla φ . Grafik je predstavljen na slici 22. Ugao φ menja se u intervalu od 0 do 50π .



Slika 22

Na slici 22 uočava se da postoji linearno povećanje razlike Δr_1 kada ugao φ raste. Ako se uzme i mnogo veća vrednost za ugao φ od vrednosti 50π opet postoji to linearno povećanje razlike Δr_1 sa uglom φ .

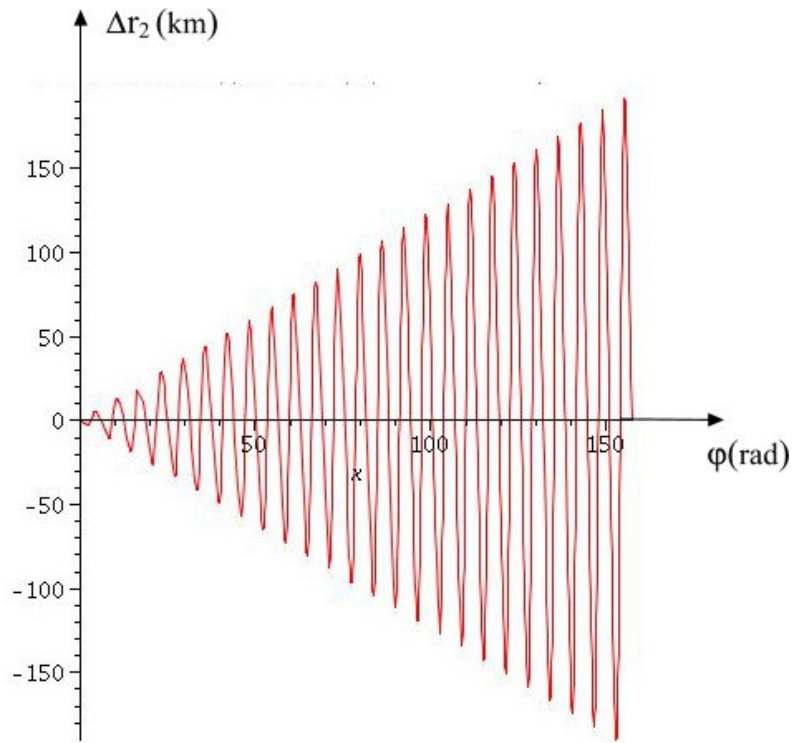
I u slučaju gravitoelektromagnetizma može se formirati odgovarajući grafik. Sa stanovišta klasične mehanike rastojanje između Sunca i Merkura određuje se na osnovu jednačine (7.15), a sa stanovišta gravitoelektromagnetizma na osnovu jednačine (8.75)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi(1 + \beta))}$$

Formiraću razliku jednačina (7.15) i (8.75), i tu razliku označiću sa Δr_2

$$\Delta r_2 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi} - \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi(1 + \beta))}$$

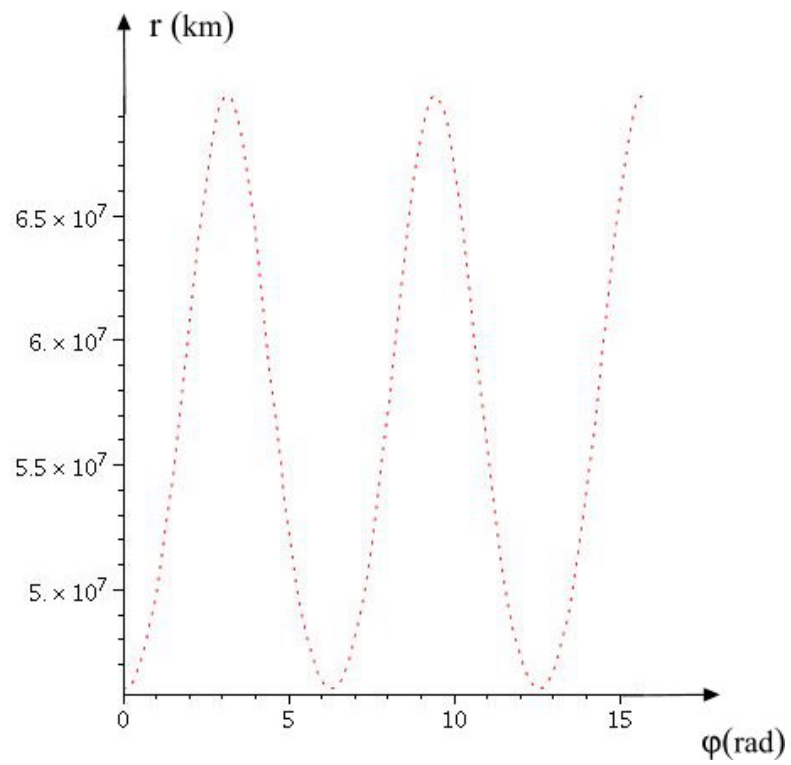
Na slici 23 predstavljen je grafik koji pokazuje kako se menja Δr_2 u funkciji ugla φ . Ugao φ takodje se menja u intervalu od 0 do 50π .



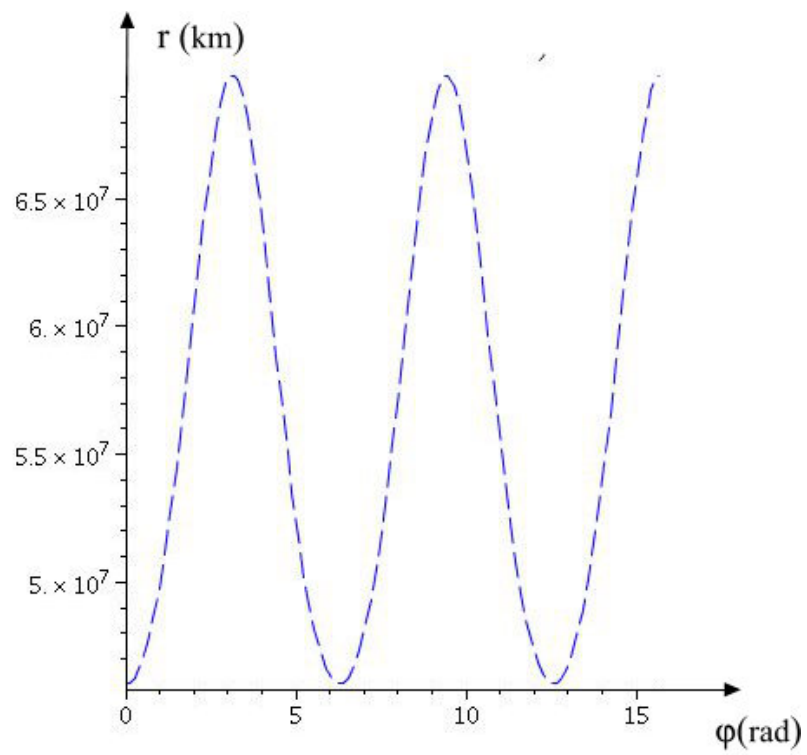
Slika 23

I na slici 23 uočava se da postoji linearno povećanje razlike Δr_2 kada ugao φ raste. Ako se uporede grafici predstavljeni na slikama 22 i 23 primećuje se da su oni veoma slični. To me navodi na zaključak da jednačina (8.75) koja je dobijena na osnovu gravitoelektromagnetizma može da se koristi za objašnjenje precesije perihela Merkura.

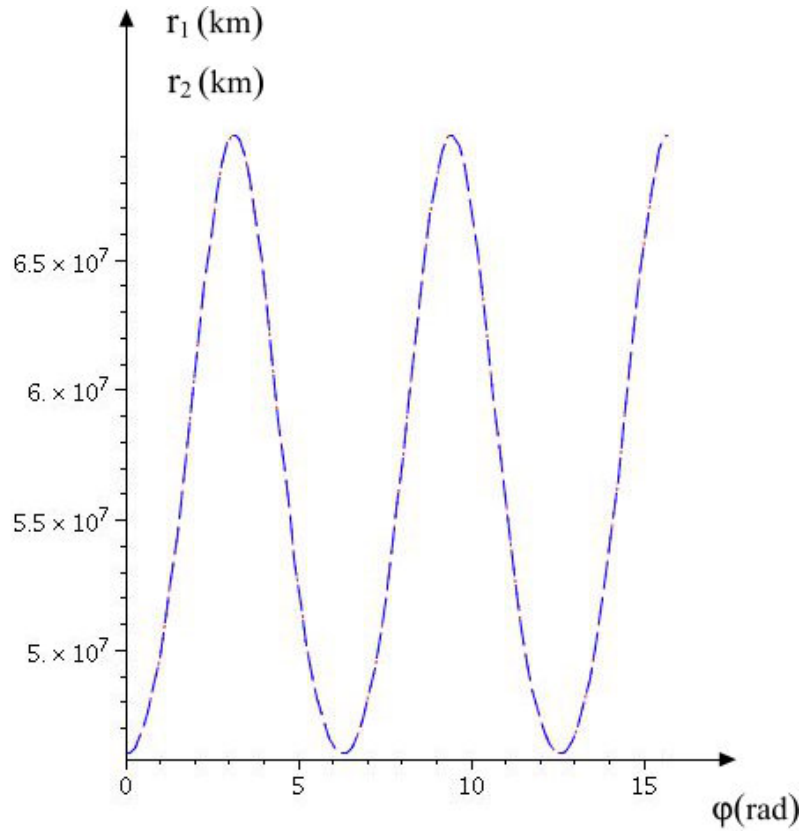
Predstaviću još nekoliko grafika koji idu u prilog ovoj mojoj tvrdnji. Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti rastojanje između Sunca i Merkura određuje se na osnovu jednačine (8.22), a sa stanovišta gravitoelektromagnetizma na osnovu jednačine (8.75). Grafik jednačine (8.22) predstavljen je na slici 24 a. Grafik jednačine (8.75) predstavljen je na slici 24 b. Grafik jednačine (8.22) predstavljen je pomoću crvenih tačkica, a grafik jednačine (8.75) predstavljen je pomoću plavih linija. Zbog preglednosti slika ugao φ menja se u intervalu od 0 do 5π . U cilju upoređivanja rezultata gravitoelektromagnetizma sa rezultatom Opšte teorije relativnosti na istom grafiku predstavio sam jednačine (8.22) i (8.75) (slika 24 c).



Slika 24 a



Slika 24 b



Slika 24 c

Jednačine (8.22) i (8.75) nisu identične. Za neku konkretnu vrednost ugla φ na osnovu ovih jednačina dobićemo različite vrednosti za rastojanje između Sunca i Merkura. Međutim sa slike 24 c primećujemo da grafici funkcija koji su dobijeni na osnovu jednačina (8.22) i (8.75) imaju isti oblik.

U šestom poglavlju analizirao sam gravitacioni uticaj Zemlje, Sunca i Meseca na veštački Zemljin satelit i dobio sam jednačinu (6.113). Ovde ću analizu pojednostaviti i razmatraču samo gravitacioni uticaj Zemlje. Gravitacioni uticaj Sunca i Meseca zanemaruje se, i za ovakav slučaj važi jednačina (6.29)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + m \vec{v} \times \left\{ -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right] \right\} + 2 \frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \vec{r} + \frac{\gamma M_z m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v})$$

U slučaju precesije perihela Merkura analizirao sam eliptičnu putanju. Sada ću analizirati slučaj kretanja veštačkog satelita oko Zemlje po kružnoj putanji. Neka se satelit kreće po kružnoj putanji koja se nalazi u ekvatorijalnoj ravni Zemlji. Poluprečnik kružne putanje označiću sa r . Intenzitet brzine ne menja se tokom vremena, i označen je sa v . Vreme koje figuriše u jednačini (6.29) meri se u sistemu Zemlje (u sistemu S_1) i označeno je sa t_z .

Moment impulsa Zemlje \vec{L} određuje se na osnovu jednačine (3.61).

$$\vec{L} = I \vec{\omega} = \frac{2}{5} M_z R_z^2 \vec{\omega}_z \quad (8.80)$$

Sa R_z je označen poluprečnik Zemlje, a masa Zemlje je označena sa M_z .

Ako se koriste polarne koordinate radijus vektor i vektor brzine određuju se na osnovu jednačina (7.35) i (7.36)

$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

, a vektor ubrzanja na osnovu jednačine (8.56)

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\vec{e}_\phi$$

Satelit se kreće u ekvatorijalnoj ravni Zemlje. To ima za posledicu da je skalarni proizvod vektora \vec{r} i \vec{L} jednak nuli, i jednačina (6.29) dobija sledeći oblik

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt_z^2} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + \frac{2\gamma m}{c^2 r^3} \vec{v} \times \vec{L} + 2 \frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} + \frac{\gamma M_z m}{r^3 c^2} \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (8.81)$$

Ova jednačina može se dalje transformisati korišćenjem dvostrukog vektorskog proizvoda

$$\vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r}v^2 - \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{r})$$

, odnosno

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt_z^2} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + \frac{2\gamma m}{c^2 r^3} \vec{v} \times \vec{L} + 3 \frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} - \frac{\gamma M_z m}{r^3 c^2} \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{r}) \quad (8.82)$$

U slučaju kružnog kretanja ugao između vektora \vec{r} i \vec{v} jednak je 90° . Skalarni proizvod vektora \vec{r} i \vec{v} jednak je nuli, i jednačina (8.82) dobija sledeći oblik

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt_z^2} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + \frac{2\gamma m}{c^2 r^3} \vec{v} \times \vec{L} + 3 \frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} \quad (8.83)$$

Vektor brzine u polarnim koordinatama određuju se na osnovu jednačine (7.36)

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

Obzirom da se satelit kreće po kružnici veličina \dot{r} jednaka je nuli i vektor brzine dobija sledeći oblik

$$\vec{v} = r\dot{\phi}\vec{e}_\phi \quad (8.84)$$

Izvod ugla ϕ po vremenu t_z je ugaona brzina satelita

$$\omega = \frac{d\phi}{dt_z} \quad (8.85)$$

, i ona ima konstantnu vrednost.

Na osnovu jednačina (8.84) i (8.85) jednostavno je odrediti intenzitet vektora brzine

$$v = \omega r \quad (8.86)$$

Uzeću najpre slučaj da se satelit kreće u smeru rotacije Zemlje. Vektorski proizvod vektora \vec{v} i \vec{L} određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{v} \times \vec{L} = \omega r \vec{e}_\phi \times \frac{2}{5} M_z R_z^2 \omega_z \vec{e}_z$$

, odnosno

$$\vec{v} \times \vec{L} = \frac{2}{5} \omega r M_z R_z^2 \omega_z \vec{e}_r \quad (8.87)$$

Zamenom jednačina (7.35), (8.86) i (8.87) u jednačinu (8.83) dobijamo

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt_z^2} = -\frac{\gamma M_z m}{r^2} \vec{e}_r + \frac{4\gamma M_z m \omega R_z^2 \omega_z}{c^2 r^2} \vec{e}_r + 3 \frac{\gamma M_z m \omega^2}{c^2} \vec{e}_r$$

Levu stranu ove jednačine transformišemo korišćenjem jednačine (8.56)

$$m((\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\vec{e}_\phi) = -\frac{\gamma M_z m}{r^2} \vec{e}_r + \frac{4\gamma M_z m \omega R_z^2 \omega_z}{c^2 r^2} \vec{e}_r + 3 \frac{\gamma M_z m \omega^2}{c^2} \vec{e}_r$$

Na osnovu ove jednačine dobijamo dve diferencijalne jednačine

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\gamma M_z}{r^2} + \frac{4\gamma M_z \omega R_z^2 \omega_z}{c^2 r^2} + 3 \frac{\gamma M_z \omega^2}{c^2} \quad (8.88)$$

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0 \quad (8.89)$$

Jednačina (8.89) može se napisati u sledećem obliku

$$\frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\phi})}{dt_z} = 0$$

, odnosno

$$\frac{d(r^2 \dot{\phi})}{dt_z} = 0$$

Ovaj rezultat je identičan sa rezultatom iz klasične mehanike. Uvodi se integraciona konstanta h i dobijam sledeće jednačine

$$r^2 \dot{\phi} = h$$

$$\dot{\phi} = \frac{h}{r^2} \quad (8.90)$$

Satelit se kreće po kružnoj putanji poluprečnika r koji ima konstantnu vrednost. Iz tog razloga prvi i drugi izvod poluprečnika r po vremenu jednaki su nuli, i jednačina (8.88) dobija sledeći oblik

$$r\omega^2 = \frac{\gamma M_z}{r^2} - \frac{4\gamma M_z \omega R_z^2 \omega_z}{5c^2 r^2} - 3\frac{\gamma M_z \omega^2}{c^2}$$

, odnosno

$$\omega^2 = \frac{\gamma M_z}{r^3} - \frac{4\gamma M_z \omega R_z^2 \omega_z}{5c^2 r^3} - 3\frac{\gamma M_z \omega^2}{rc^2} \quad (8.91)$$

Na osnovu ove jednačine za datu vrednost r može se odrediti ugaona brzina rotacije satelita.

Na osnovu Njutnove mehanike ugaona brzina rotacije satelita određuje se na osnovu jednakosti centripetalne i gravitacione sile

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{\gamma M_z m}{r^2} \quad (8.92)$$

Obzirom da se problem razmatra sa stanovišta klasične mehanike ugaonu brzinu rotacije satelita označiću sa ω_k .

Intenzitet orbitalne brzine i ugaone brzine ω_k povezani su sledećom jednačinom

$$v = \omega_k r \quad (8.93)$$

Na osnovu jednačina (8.92) i (8.93) dobijam

$$\omega_k^2 = \frac{\gamma M_z}{r^3} \quad (8.94)$$

Korišćenjem ovog rezultata jednačina (8.91) dobija oblik

$$\omega^2 = \omega_k^2 - \frac{4\omega_k^2 \omega R_z^2 \omega_z}{5c^2} - 3\frac{\omega_k^2 r^2 \omega^2}{c^2} \quad (8.95)$$

Ova jednačina povezuje ugaonu brzinu ω rotacije satelita oko Zemlje koja je dobijena na osnovu gravitoelektromagnetizma sa ugaonom brzinom ω_k koja je dobijena na osnovu klasične mehanike.

Razmatrao sam slučaj satelita koji rotira u smeru rotacije Zemlje i dobio sam jednačinu (8.95). Sada ću analizirati slučaj da satelit rotira u smeru suprotnom od smera rotacije Zemlje. Za ovaj slučaj vektor brzine ima sledeći oblik

$$\vec{v} = -r\dot{\phi}\vec{e}_\varphi$$

, odnosno

$$\vec{v} = -r\omega\vec{e}_\varphi \quad (8.96)$$

Intenzitet vektora brzine ima vrednost

$$v = \omega r \quad (8.97)$$

Naravno i za ovakav smer kretanja satelita važi jednačina (8.83). Da bi transformisali ovu jednačinu odredimo najpre vektorski proizvod vektora \vec{v} i \vec{L}

$$\vec{v} \times \vec{L} = -\omega r \vec{e}_\varphi \times \frac{2}{5} M_z R_z^2 \omega_z \vec{e}_z$$

, odnosno

$$\vec{v} \times \vec{L} = -\frac{2}{5} \omega r M_z R_z^2 \omega_z \vec{e}_r \quad (8.98)$$

Zamenom jednačina (7.35), (8.97) i (8.98) u jednačinu (8.83) dobijamo

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = -\frac{\gamma M_z m}{r^2} \vec{e}_r - \frac{4 \gamma M_z m \omega R_z^2 \omega_z}{5 c^2 r^2} \vec{e}_r + 3 \frac{\gamma M_z m \omega^2}{c^2} \vec{e}_r$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (8.56) i dobijamo dve diferencijalne jednačine

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\gamma M_z}{r^2} - \frac{4 \gamma M_z \omega R_z^2 \omega_z}{5 c^2 r^2} + 3 \frac{\gamma M_z \omega^2}{c^2} \quad (8.99)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

Obzirom da r ima konstantnu vrednost prvi i drugi izvod poluprečnika r po vremenu jednaki su nuli, i jednačina (8.99) dobija sledeći oblik

$$\omega^2 = \frac{\gamma M_z}{r^3} + \frac{4 \gamma M_z \omega R_z^2 \omega_z}{5 c^2 r^3} - 3 \frac{\gamma M_z \omega^2}{r c^2} \quad (8.100)$$

Korišćenjem jednačine (8.94) dobijamo jednačinu koja povezuje ugaonu brzinu ω sa ugaonom brzinom ω_k

$$\omega^2 = \omega_k^2 + \frac{4 \omega_k^2 \omega R_z^2 \omega_z}{5 c^2} - 3 \frac{\omega_k^2 r^2 \omega^2}{c^2} \quad (8.101)$$

Ako uporedimo jednačine (8.101) i (8.95) vidimo da one nisu identične. Razlikuju se po predznaku ispred drugog sabirka, ali razlika između ugaonih brzina koje se određuju na osnovu jednačina (8.95) i (8.101) nije velika.

Zamislimo sada hipotetičku situaciju da Zemlja ne rotira. U tom slučaju moment impulsa Zemlje jednak je nuli i jednačina (8.83) dobija sledeći oblik

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_z^2} = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + 3 \frac{\gamma M_z m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} \quad (8.102)$$

Potrebno je odrediti ugaonu brzinu rotacije satelita. Intenzitet vektora brzine ima vrednost

$$v = \omega r \quad (8.103)$$

Zamenom jednačina (8.56) i (8.103) u jednačinu (8.102) dobijamo

$$m((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi) = -\frac{\gamma M_z m}{r^3} \vec{r} + 3 \frac{\gamma M_z m \omega^2}{c^2 r} \vec{r}$$

Ova jednačina dalje se transformiše na osnovu jednačine (7.35)

$$m((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi) = -\frac{\gamma M_z m}{r^2} \vec{e}_r + 3 \frac{\gamma M_z m \omega^2}{c^2} \vec{e}_r \quad (8.104)$$

Na osnovu jednačine (8.104) dobijamo dve diferencijalne jednačine

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\gamma M_z}{r^2} + 3 \frac{\gamma M_z \omega^2}{c^2} \quad (8.105)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

Obzirom da je drugi izvod poluprečnika r po vremenu jednak nuli jednačina (8.105) dobija sledeći oblik

$$\omega^2 = \frac{\gamma M_z}{r^3} - 3 \frac{\gamma M_z \omega^2}{r c^2} \quad (8.106)$$

Korišćenjem jednačine (8.94) dobijamo jednačinu koja povezuje ugaonu brzinu ω sa ugaonom brzinom ω_k

$$\omega^2 = \omega_k^2 - 3 \frac{\omega_k^2 r^2 \omega^2}{c^2} \quad (8.107)$$

9. Eksperiment Gravity Probe B

Postoji određeni skup eksperimenata koji čine eksperimentalnu osnovu opšte teorije relativnosti. U dosadašnjem radu istakao sam da postoji veliki problem u vezi ove problematike, a to je da efekti koje predviđa opšta teorija relativnosti su veoma mali i teško ih je eksperimentalno proveriti.

U ovom radu dosta se pozivam na elektrodinamiku, i u skladu sa tim napraviću jedno poredjenje između elektrodinamike i opšte teorije relativnosti u vezi eksperimentalne provere teorijskih predviđanja. U slučaju elektrodinamike eksperimentalna provera može se lako izvršiti u većini slučajeva. Međutim kod opšte teorije relativnosti to nije slučaj.

Leonard Šif (Leonard Schiff) u radu prezentovanom na međunarodnoj konferenciji o teoriji relativnosti i gravitaciji održanoj 1962 godine u Varšavi između ostalo ukazao je na mali broj eksperimenata iz opšte teorije relativnosti:

”Postoji upadljiva razlika između eksperimentalnih osnova specijalne i opšte teorije relativnosti. Specijalna teorija relativnosti je opširno potvrđena u nekoliko aspekata...Situacija je kompletno različita sa opštom teorijom relativnosti. Do sada postoje samo tri tako zvana ”krucijalna testa”: gravitacioni crveni pomeraj, skretanje svetlosti kada prolazi blizu Sunca, i precesija perihela orbita unutrašnjih planeta, posebno Merkura”.

Da bi se prevazišlo ovo stanje Leonard Šif je preuzeo i konkretne korake. Objavio je rad koji je publikovan februara 1960 godine. U tom radu on predlaže da se koriste orbitirajući žiroskopi radi testiranja opšte teorije relativnosti. Međutim ovakav predlog imao je i Džordž Pju (George Pugh). Njegov rad je objavljen u novembru 1959 godine.

Ovde treba istaći jednu činjenicu. I u slučaju Leonarda Šifa i Džordža Pjua desio se fenomen koji se povremeno pojavljuje u nauci, a to je da pojedini naučnici nezavisno jedan od drugog dodju do istih rezultata.

Radovi pomenitih naučnika predstavljaju teorijsku osnovu za eksperiment Gravity Probe B. Naučnik Vilijam Ferbank (William Fairbank) jednom je primetio:

”Misija ne može biti jednostavnija od Gravity Probe B. To je samo zvezda, teleskop i rotirajuća sfera”.

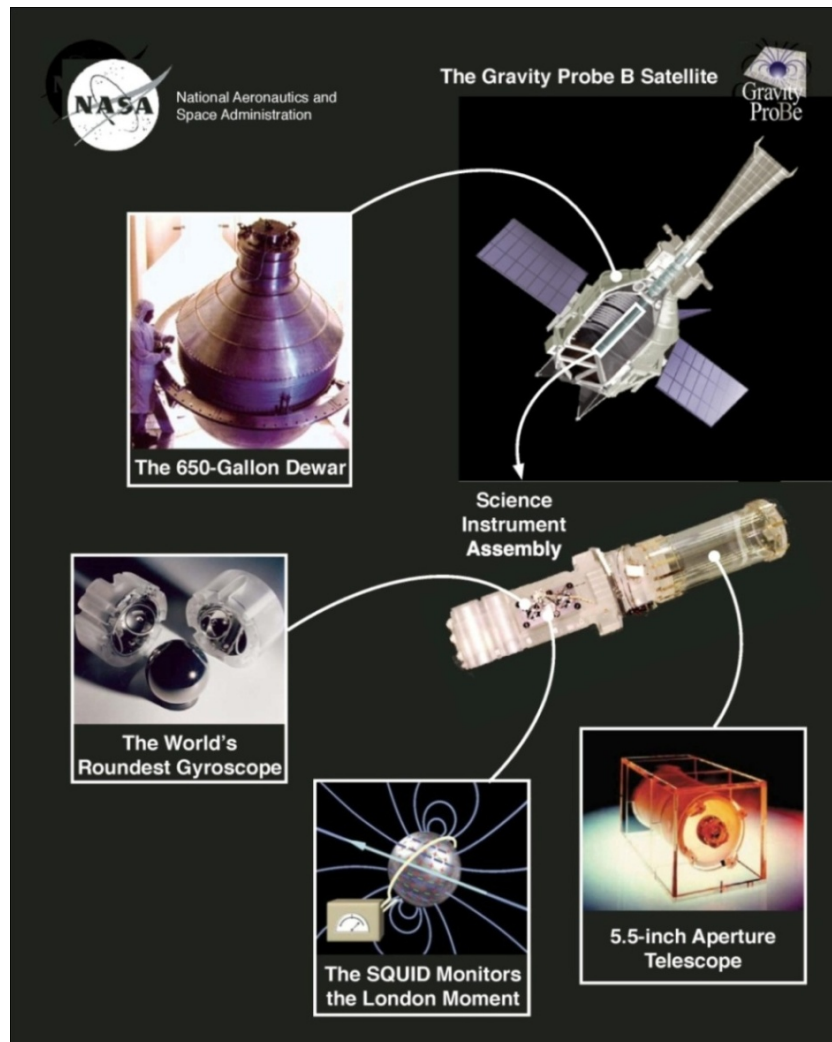
Međutim od Leonardovog rada do objavljivanja konačnih rezultata misije proteklo je 47 godina, i uloženo je oko 750 miliona dolara za realizaciju eksperimenta Gravity Probe B. Da bi se realizovao ovaj eksperiment bilo je potrebno razviti nove tehnologije.

Istakao sam da je Leonard Šif predožio korišćenje orbitirajućih žiroskopa u cilju provere opšte teorije relativnosti. Kada se spomene žiroskop obično prva asocijacija nam je dečija igračka zvana čigra. Međutim u eksperimentu Gravity Probe B kuglice od kvarca poluprečnika 38 mm korišćene su kao žiroskopi. U satelitu se nalaze četiri identične kvarcne kuglice. Svaka kuglica može da rotira oko neke ose koja prolazi kroz njen centar, i u skladu sa tim kuglica poseduje moment impulsa.

Proizvodnja ovih kuglica bila je pravi tehnološki poduhvat. Morale su biti razvijene potpuno nove tehnologije i metode za brušenje i poliranje kuglica, kao i novi instrumenti za merenje prečnika i stepena sferičnosti kuglica. Za izradu kuglica poslužio je kvarc. On je izabran zato što je to stabilan materijal i jednobrazno se skuplja na hladnoći. Ove kuglice su obložene hemijski čistim slojem metala niobijuma. Debljina sloja je 1270 nm.

Kuglice su skoro savršene sfere. Da bi smo shvatili kolika je sferičnost zamislimo da se poluprečnik kuglice poveća više od devedeset miliona puta. Ona bi tada imala veličinu Zemljinog meseca. Ako bi smo posmatrali njenu površinu primetili bi smo da je razdaljina između najviše tačke na njenoj površini i najniže tačke manja od 0,6 m. Ovo poredjenje nam jasno ukazuje na izuzetnu sferičnost koja je postignuta kod ovih kuglica.

Na slici 25 prikazan je satelit i njegovi glavni delovi. Na slici uočavamo deo koji se naziva Science Instrument Assembly. On ima oblik pravougaonog bloka. Većina materijala koji je korišćen za izradu ovog dela je kvarc, i sastoji se iz više delova. Na jednoj strani nalazi se teleskop. Na drugoj strani su četiri kvarcna kućišta u kojima su smeštene kvarcne kuglice. Svaka kvarcna kuglica se nalazi u posebnom kvarcnom kućištu. Svako kvarcno kućište sastoji se od dve identične polovine. Unutar kućišta nalaze se tri para elektroda. Na slici 25 prikazana je kvarcna kuglica, jedno kućište i elektrode koje se nalaze u njemu.

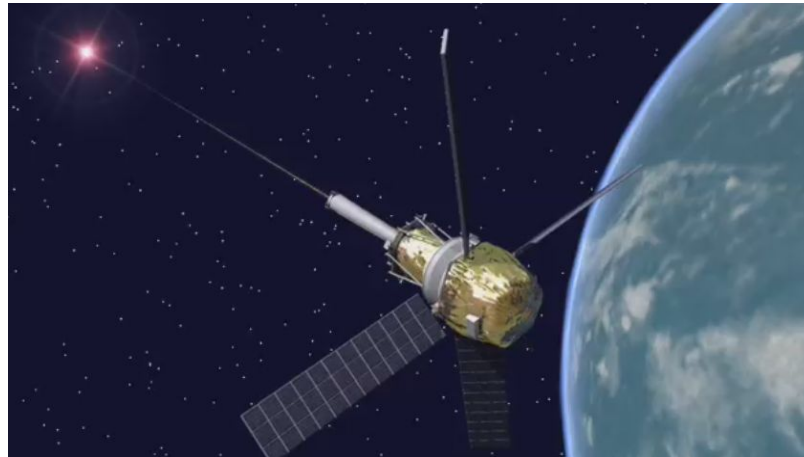


Slika 25

Oko svake kuglice nalazi se prsten koji je napravljen od niobijuma. Ovaj metal je superprovodnik. Taj prsten je povezan sa uređajem koji nosi naziv SQUID (Superconducting Quantum Interference Device). Na slici 25 prikazana je jedna kvarcna kuglica, superprovodni prsten i SQUID.

Ovi naučni instrumenti se nalaze u uređaju koji nosi naziv dewar. Naziv dewar potiče od imena škotskog naučnika James Dewar koji je prvi stvorio takav uređaj. Pomoću svog uređaja on je uspeo da ohladi helijum na $-254^{\circ}C$. Umesto naziva dewar može se koristiti i mnogo poznatiji naziv termos.

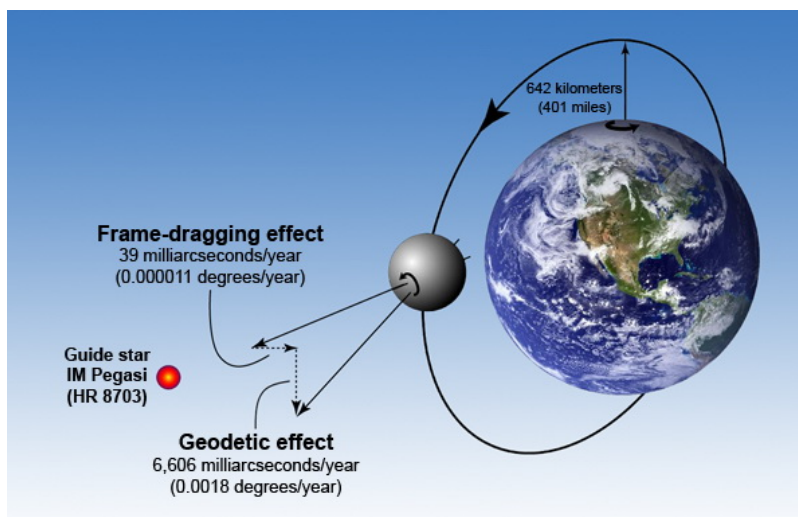
Teleskop odnosno satelit u svakom trenutku misije bio je usmeren ka zvezdi IM Pegasus. Usmerenost satelita ka zvezdi postignuta je pomoću teleskopa i pogonskih motora. Teleskop je morao biti fokusiran ka centru zvezde. Žižna daljina teleskopa je 3,8 m. Teleskop je montiran unutar satelita, a osa teleskopa se poklapa sa centralnom osom satelita i uređaja dewar (slika 30). Ovo usmeravanje teleskopa (satelita) ka zvezdi IM Pegasus prikazano je na slici 26. (Slike 26, 28, 29, 31, 32 i 33 dobijene su korišćenjem video materijala koji se može naći na sajtu [9])



Slika 26

Ovde treba napraviti jednu digresiju u vezi zvezde. Ono što mi nazivamo IM Pegasus je ustvari sistem od dve zvezde koje orbitiraju oko centra mase. Pošto je rastojanje između zvezda malo mi ovaj binarni sistem pomoću teleskopa vidimo kao jednu zvezdu. Jedino korišćenjem moćnih teleskopa možemo razdvojiti svaku individualnu zvezdu u ovom binarnom sistemu.

Zbog određenih razloga odlučeno je da orbita satelita bude polarna. Satelit se nalazi na visini od 642 kilometara. Putanja satelita prikazana je punom linijom na slici 27.

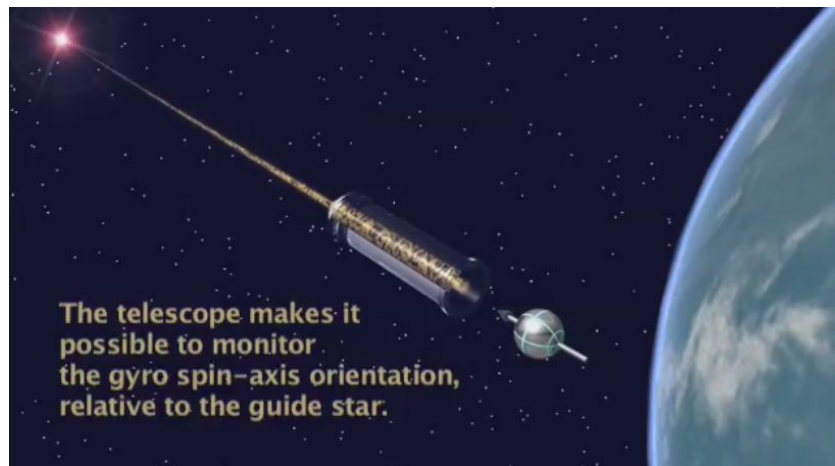


Slika 27

Na slici 27 prikazana je jedna od četiri kuglice. Istakao sam da se kuglice nalaze u svojim kućištima. U toku misije kuglice lebde i rotiraju unutar kvarenih kućišta. Lebđenje je postignuto primenom napona od 100 mV na tri para elektroda koje se nalaze u unutrašnjosti kućišta.

Rotacija kuglica postignuta je na sledeći način. Kroz specijalno dizajnirani kanal u kućištu i preko kuglica proteran je gasoviti helijum brzinom bliskom brzini zvuka. Nakon dovodjenja kuglica u stanje rotacije, helijum se izbacuje napolje, a kuglice nastavljaju da nesmetano rotiraju u vakuumu. Nakon izbacivanja helijuma u kućištu se ostvaruje toliko nizak pritisak da bi kuglica mogla da rotira narednih 1000 godina uz gubitak od jedva jednog procenta početne brzine. Frekvencije rotacije kuglica bile su u intervalu od 61,8 Hz do 82,1 Hz.

Istakao sam da je teleskop odnosno satelit u svakom trenutku misije bio usmeren ka zvezdi IM Pegasus. U jednom trenutku misije koji možemo nazvati i početnim trenutkom ose rotacije kuglica bile su takodje usmerene ka zvezdi IM Pegasus. Ta početna orijentacija ose rotacije kuglice prikazana je na slici 28. Zbog preglednosti na slici 28 prikazan je samo teleskop i rotirajuća kuglica.



Slika 28

Tokom misije satelit je stalno bio usmeren ka zvezdi IM Pegasus, ali osa rotacije kuglice tokom vremena menjala je svoj položaj. Nakon izvesnog vremena osa rotacije kuglice imala je položaj prikazan na slici 29.



Slika 29

Ovu pojavu precesije predvideli su Leonard Šif i Džordž Pjui korišćenjem opšte teorije relativnosti. Ova promena ose rotacije kuglice praćena je 50 nedelja u toku misije. 15 avgusta 2005 godine tim misije Gravity Probe B završio je sakupljanje podataka i počeo je skup kalibracionih testova žiroskopa (kuglica), teleskopa i uređaja SQUID. Ovaj proces trajao je do kraja septembra 2005 godine. Konačni rezultati misije objavljeni su 2007 godine, znači 47 godina od Lenardovog rada.

Ja sam slikovito objasnio da dolazi do promene ose rotacije kuglice tokom vremena, međutim postavlja se pitanje kako meriti ovu promenu ose rotacije. Da bi se to postiglo koristi se superprovodljivost. Pojavu superprovodljivosti otkrio je 1911 godine holandski fizičar Kamerling Onnes (Kammerlingh Onnes) koji je proučavao ponašanje metala na niskim temperaturama. Prilikom svojih istraživanja on je primetio da električni otpor izuzetno čiste žive postaje jednak nuli na temperaturi od 4,2 K. Pojavu totalnog gubitka električnog otpora Kamerling Onnes kasnije je registrovao i kod drugih metala kada ih je ohladio na temperaturama nekoliko stepeni iznad apsolutne nule.

Temperatura na kojoj supstanca prelazi u superprovodno stanje naziva se kritična temperatura i obeležava se sa T_c . Kada električna struja protiče kroz provodnik recimo bakarnu žicu na sobnoj temperaturi postoji električni otpor. Međutim kada se određeni elementi (legure) ohlade ispod kritične temperature oni prelaze u superprovodno stanje. Tada kroz njih struja protiče bez ikakvog otpora, odnosno njihov električni otpor je jednak nuli. Ako bi smo u prstenu koji se nalazi u superprovodnom stanju indukovali električnu struju ona bi u njemu kružila bez ikakvih gubitaka sve do trenutka dok se ne naruši superprovodno stanje.

Superprovodnici pokazuju neke interesantne karakteristike. Za primenu superprovodnika u eksperimentu Gravity Probe B bitno je istraživanje fizičara Frica Londona (Fritz London). On je otkrio da ako se metalna lopta ohladi ispod kritične temperature i zarotira ona će u prostoru oko sebe stvoriti magnetno polje. Magnetno polje stvoriće superprovodni materijal i drugog oblika, pod uslovom da se nalazi u stanju kretanja.

Istakao sam da su kvarcne kuglice obložene slojem metala niobijuma. Niobijum je superprovodnik, a njegova kritična temperatura je 8,9 K. Ove kvarcne kuglice smeštene su u kvarcnim kućištima koje se nalaze u delu satelita koji nosi naziv Science Instrument Assembly. Ovaj deo se sastoji od više naučnih instrumenata, a nalazi se u uređaju koji nosi naziv dewar (slika 25). Zapremina uređaja dewar je 2441 litara, a visina je 2,7 m. Ovaj uređaj prikazan je na slici 30.

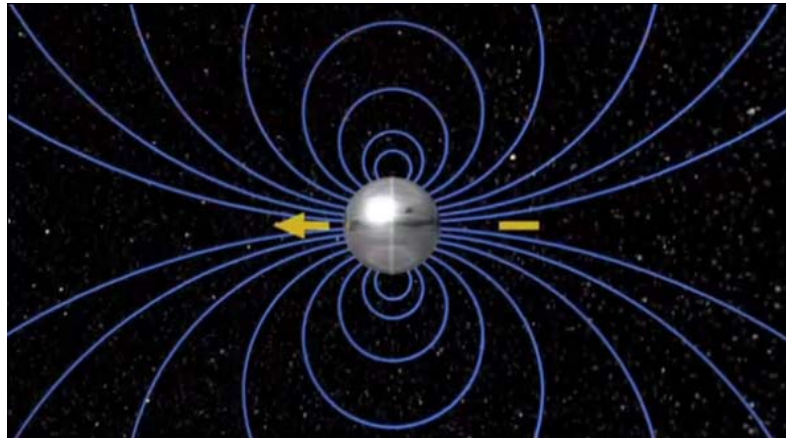


Slika 30

Na slici 30 može se uočiti teleskop i tzv. Science Instrument Assembly. U dosadašnjem tekstu već sam istakao, ali ponovo navodim da se osa teleskopa poklapa sa centralnom osom uredjaja dewar.

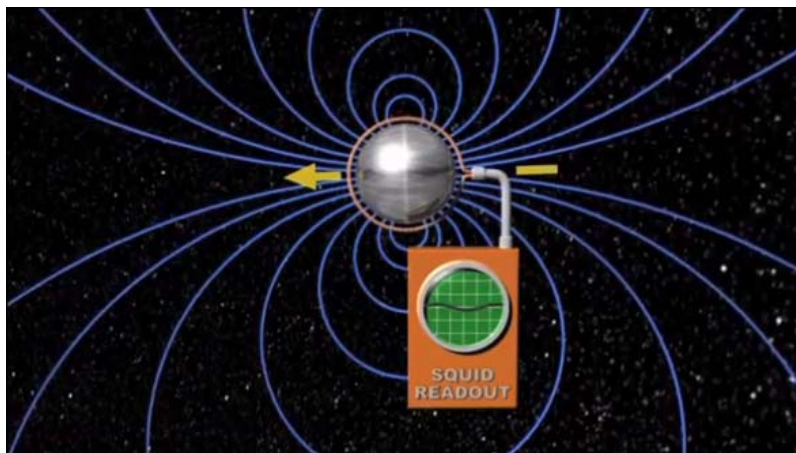
U unutrašnjosti uredjaja postignuta je kriogena temperatura od $2,3\text{ K}$. Ovakva temperatura morala je biti održavana najmanje 16 meseci, što je predstavljalo tehnički izazov. Održavanje kriogene temperature je postignuto korišćenjem tečnog helijuma i određenih uredjaja namenjenih u tu svrhu.

Obzirom da je temperatura u unutrašnjosti uredjaja dewar $2,3\text{ K}$ a kritična temperatura za niobijum je $9,8\text{ K}$ ovaj metal prešao je u superprovodno stanje. Svaka kuglica nalazi se u stanju rotacije i pokrivena je slojem niobijuma koji je superprovodnik. Ovo ima za posledicu da se oko svake kuglice stvara magnetno polje. Osa magnetnog polja tačno se poklapa sa osom rotacije kuglice. Ovo poklapanje ose magnetnog polja i ose rotacije kuglice prikazano je na slici 31.



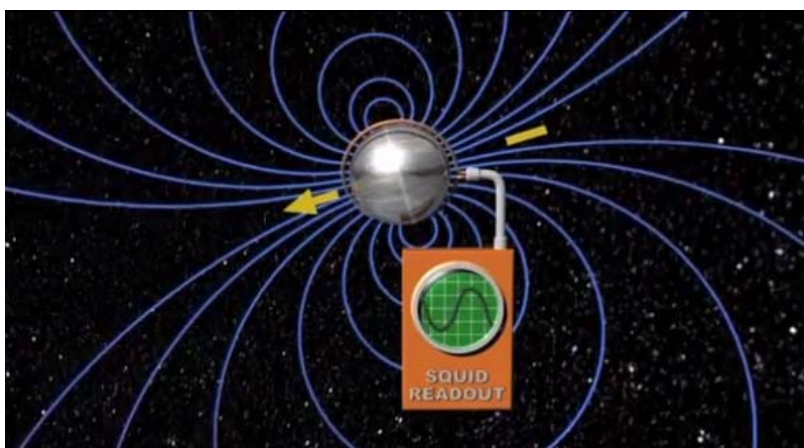
Slika 31

Prilikom diskusije o konstrukciji satelita istakao sam da se oko svakog kućišta nalazi prsten od superprovodnog niobijuma koji je fiksiran za kućište. Superprovodni prsten je povezan sa uredjajem SQUID. Osa rotacije kuglice tokom vremena menjala je svoj položaj u odnosu na kućište, odnosno superprovodni prsten. Na slici 32 prikazana je rotirajuća kuglica, superprovodni prsten i uredjaj SQUID.



Slika 32

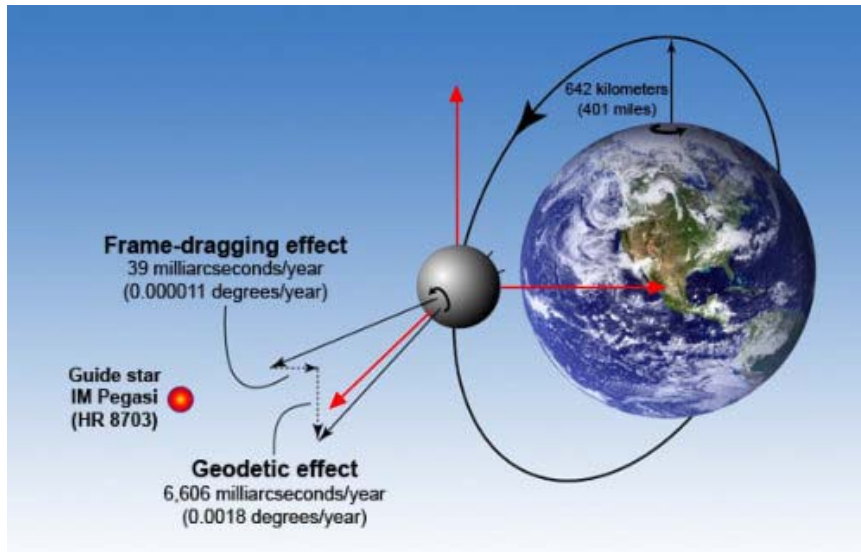
U nekom kasnijem trenutku osa rotacije kuglice imala je položaj prikazan na slici 33.



Slika 33

Rotirajuća kuglica stvara magnetno polje i postoji magnetni fluks kroz površinu prstena. Ovaj magnetni fluks menjao se tokom vremena, jer se položaj ose magnetnog polja menjao tokom vremena. Promenljivi magnetni fluks izazvao je nastanak napona, odnosno električne struje u superprovodnom prstenu. Napon je meren pomoću izuzetno osetljivog uređaja SQUID. Na taj način je postignuto da se merenjem napona u stvari meri promena ose magnetnog polja, odnosno promena pravca ose rotacije kuglice u odnosu na superprovodni prsten (kvarcno kućište, satelit).

Potrebno je matematički opisati kretanje kuglice (žiroskopa). Da bi to postigli moramo uvesti koordinatni sistem. Koordinatni sistem koji se može koristiti za tu svrhu definisan je u radu [10]. U tom radu uveden je pokretni, ali ne rotirajući ortogonalni koordinatni sistem. Koordinatne ose tog sistema definisane su na sledeći način. z osa je paralelna sa pravcem vektora momenta impulsa Zemlje. Na slici 27 punom linijom prikazana je putanja satelita. Ovakvu putanju opisuje i centar svake kuglice. Ravan u kojoj se nalazi putanja satelita naziva se orbitalna ravan. U radu [10] je naznačeno da x osa koordinatnog sistema pripada orbitalnoj ravni. y osa se uvodi na taj način da se dobije sistem desne (leve) orijentacije. y osa je normalna na orbitalnu ravan. U radu [10] naznačeno je da se orijentacija osa tokom vremena ne menja, bez obzira što je sistem pokretan. Ovaj sistem označiću sa S_5 . Ovaj koordinatni sistem predstavljen je na slici 34. Sliku 27 modifikovao sam na taj način što sam nacrtao koordinatne ose sistema S_5 i dobijena je slika 34.



Slika 34

Ja ću prihvatiti orijentaciju osa prezentovanu u radu [10] i činjenicu da je reč o pokretnom sistemu, ali ću razrešiti neke nedoumice o koordinatnom početku sistema S_5 . Koordinatni početak sistema S_5 mogao bi se poklopiti sa bilo kojom tačkom unutar satelita, međutim zbog pogodnosti uzeću da se koordinatni početak sistema poklapa sa centrom jedne kuglice. Na slici 27 punom linijom prikazana je putanja satelita. Takvu putanju opisuje i centar svake kuglice. Početak koordinatnog sistema S_5 takodje se kreće po toj punoj liniji prikazanoj na slici 27. Ovo proizilazi iz činjenice da se početak koordinatnog sistema poklapa sa centrom kuglice. Satelit ravnomerno kruži oko Zemlje, i u skladu sa tim koordinatni sistem vrši ravnomerno kružno kretanje, ali njegove ose zadržavaju fiksirani pravac tokom vremena.

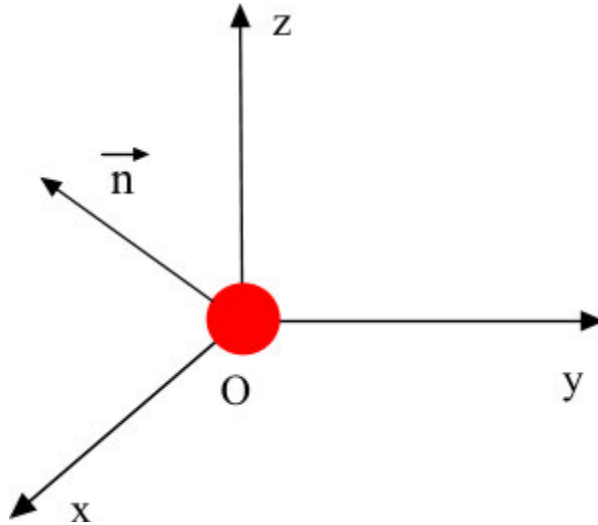
Kuglice rotiraju i poseduju moment impulsa. Dovoljno je izvršiti analizu za jednu kuglicu. Poluprečnik kuglice označiću sa r_k i on ima vrednost 38 mm. Masu kuglice označiću sa m_k , a njenu ugaonu brzinu sa ω_k . Moment inercije kuglice odredjujemo na osnovu jednačine

$$I_k = \frac{2}{5} m_k r_k^2$$

, a intenzitet vektora momenta impulsa na osnovu sledeće jednačine

$$L_k = I_k \omega_k$$

Na slici 35 prikazan je koordinatni sistem S_5 . Početak koordinatnog sistema koji je označen sa O poklapa se sa centrom kuglice.



Slika 35

Teleskop odnosno satelit je u svakom trenutku misije bio usmeren ka zvezdi IM Pegasus. Na slici 35 sa \vec{n} označen je jedinični vektor. Pravac vektora \vec{n} poklapa se sa pravcem svetlosnog zraka koji dolazi sa zvezde IM Pegasus, odnosno optička osa teleskopa poklapa se sa pravcem jediničnog vektora \vec{n} . U ovom koordinatnom sistemu vektor \vec{n} je konstantan, odnosno ne menja intenzitet, pravac i smer tokom vremena.

U jednom trenutku misije, koji sam nazvao početnim trenutkom misije osa rotacije kuglice bila je usmerena ka zvezdi IM Pegasus (slika 28). Osa rotacije kuglice poklapa se sa pravcem vektora momenta impulsa. Ako koristimo predhodno uvedene vektore, to bi značilo da su u početnom trenutku misije vektori \vec{n} i \vec{L}_k imali paralelne pravce. Medjutim tokom vremena osa rotacije kuglice menjala je svoj položaj, odnosno vršila je precesiono kretanje. Ovo precesiono kretanje su u svojim radovima predvideli Leonard Šif i Džordž Pjui koristeći opštu teoriju relativnosti.

Sa stanovišta opšte teorije relativnosti pokazuje se da se intenzitet vektora momenta impulsa žiroskopa (kuglice) tokom vremena ne menja, ali se menja njegov pravac. U koordinatnom sistemu S_5 promena vektora \vec{L}_k određuje se na osnovu sledeće jednačine.

$$\frac{d\vec{L}_k}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_k \quad (9.1)$$

Veličina $\vec{\Omega}$ određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{\Omega} = \frac{\gamma I}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{\omega}_z \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\omega}_z \right] + \frac{3\gamma M_z}{2c^2 r^3} \vec{r} \times \vec{v} \quad (9.2)$$

Potrebno je objasniti pojedine veličine koje figurišu u jednačini (9.2). Sa I i ω_z označeni su respektivno moment inercije i ugaona brzina Zemlje. Radijus vektor i brzina satelita označeni su sa \vec{r} i \vec{v} . Medjutim moramo precizirati u kom koordinatnom sistemu se određuju ovi vektori. Uveden je sistem S_5 i objašnjena je orijentacija njegovih osa. Sistem koji ću koristiti za opisivanje kretanja satelita označiću sa S_6 . Koordinatne ose sistema S_6 paralelne su koordinatnim osama sistema S_5 . Koordinatni početak sistema S_6 poklapa se sa centrom Zemlje. z osa ovog sistema je paralelna sa pravcem vektora momenta impulsa Zemlje. x osa sistema S_6 prolazi kroz centar Zemlje i dobija se kao presek orbitalne ravni satelita i ekvatorijalne ravni Zemlje. Ova osa za razliku od x ose sistema S_5 tokom vremena ne menja svoj položaj. y osa se uvodi na način da se dobije sistem desne (leve) orijentacije. Iz ovog zahteva sledi da se y osa nalazi u ekvatorijalnoj ravni Zemlje, i da je normalna na orbitalnu ravan satelita.

U ovako uvedenom sistemu satelit se kreće u xOz ravni. Ekscentricitet orbite je veoma mali, iznosi svega 0,0014 i možemo smatrati da se satelit kreće po kružnoj putanji. Sa \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} označimo jedinične vektore koordinatnih osa sistema S_6 . Obzirom da se satelit kreće u xOz ravni sistema S_6 , i vrši ravnomerno kružno kretanje radijus vektor satelita možemo izraziti na sledeći način

$$\vec{r} = r(\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{k}) \quad (9.3)$$

Vektor brzine satelita određujemo na osnovu jednačine

$$\vec{v} = r\omega(-\sin(\omega t)\vec{i} + \cos(\omega t)\vec{k}) \quad (9.4)$$

Sa ω označena je ugaona brzina rotacije satelita. Ona se jednostavno dobija primenom klasične mehanike

$$\frac{m(\omega r)^2}{r} = \frac{\gamma M_z m}{r^2} \quad (9.5)$$

, odnosno

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M_z}{r^3}}$$

U jednačini (9.5) sa m je označena masa satelita.

Vektor ugaone brzine Zemlje $\vec{\omega}_z$ u sistemu S_6 može se izraziti na sledeći način

$$\vec{\omega}_z = \omega_z \vec{k} \quad (9.6)$$

Veličina $\vec{\Omega}$ može se napisati kao zbir dva člana

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{LT} + \vec{\Omega}_{de\ Sitter} \quad (9.7)$$

Član $\vec{\Omega}_{de\ Sitter}$ naziva se de Sitterova (de Sitter) precesija ili geodetska precesija, i određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{\Omega}_{de\ Sitter} = \frac{3\gamma M_z}{2c^2 r^3} \vec{r} \times \vec{v} \quad (9.8)$$

Iz ove jednačine zaključujemo da je vektor $\vec{\Omega}_{de\ Sitter}$ normalan na orbitalnu ravan satelita.

Član $\vec{\Omega}_{LT}$ je povezan sa Lens-Tirigovim efektom (Lense-Thirring) i naziva se gravitomagnetna precesija. On se određuje na osnovu jednačine

$$\vec{\Omega}_{LT} = \frac{\gamma I}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{\omega}_z \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\omega}_z \right] \quad (9.9)$$

Korišćenjem jednačina (9.3), (9.4) i (9.8) jednostavno se dobija sledeći rezultat

$$\vec{\Omega}_{de\ Sitter} = -\frac{3\gamma M_z \omega}{2c^2 r} \vec{j} \quad (9.10)$$

Na osnovu jednačine (9.10) zaključujemo da se intenzitet, pravac i smer vektora $\vec{\Omega}_{de\ Sitter}$ tokom vremena ne menjaju.

Medjutim u slučaju vektora $\vec{\Omega}_{LT}$ postoji vremenska zavisnost. To se jasno uočava ako analiziramo faktor $(\vec{\omega}_z \cdot \vec{r})\vec{r}$ koji figuriše u jednačini (9.9). Na osnovu jednačina (9.3) i (9.6) dobijamo

$$(\vec{\omega}_z \cdot \vec{r})\vec{r} = \omega_z r^2 (\cos(\omega t)\sin(\omega t)\vec{i} + \sin^2(\omega t)\vec{k}) \quad (9.11)$$

Zamenom jednačine (9.11) u (9.9) dobijamo

$$\vec{\Omega}_{LT} = \frac{\gamma I \omega_z}{c^2 r^3} [3 \cos(\omega t)\sin(\omega t)\vec{i} + 3\sin^2(\omega t)\vec{k} - \vec{k}]$$

Obzirom da postoji vremenska zavisnost potrebno je naći srednju vrednost pojedinih članova koji figurišu u ovoj jednačini. Ako imamo neku funkciju $f(t)$ koja zavisi od vremena srednja vrednost te funkcije u vremenskom intervalu Δt ($\Delta t = t_2 - t_1$) određuje se na osnovu jednačine

$$\langle f(t) \rangle = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt}$$

, odnosno

$$\langle f(t) \rangle = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt}{t_2 - t_1}$$

Potrebno je odrediti srednje vrednosti funkcija

$$f_1 = \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

$$f_2 = \sin^2(\omega t)$$

Vremenski interval Δt za koji se određuje srednja vrednost funkcija f_1 i f_2 je period rotacije satelita oko Zemlje. Taj period označicu sa T i on je povezan sa ugaonom brzinom rotacije satelita oko Zemlje sledećom jednačinom

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Odredimo najpre srednju vrednost funkcije f_1

$$\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = \frac{\int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt}{T}$$

Jednostavno je pokazati da važi sledeća jednačina

$$\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$$

Za slučaj funkcije f_2 dobijamo sledeći rezultat

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{\int_0^T \sin^2(\omega t) dt}{T}$$

, odnosno

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

Srednja vrednost vektora gravitomagnetne precesije određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\langle \vec{\Omega}_{LT} \rangle = \frac{\gamma I \omega_z}{c^2 r^3} [3 \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle \vec{i} + 3 \langle \sin^2(\omega t) \rangle \vec{k} - \vec{k}]$$

Korišćenjem predhodno dobijenih rezultata o srednjim vrednostima dobijamo sledeći rezultat

$$\langle \vec{\Omega}_{LT} \rangle = \frac{\gamma I \omega_z}{2c^2 r^3} \vec{k} \quad (9.11)$$

Rezultati dati jednačinama (9.1) i (9.2) dobijeni su na osnovu opšte teorije relativnosti. Vektori $\vec{\Omega}_{de\ Sitter}$ i $\langle \vec{\Omega}_{LT} \rangle$ medjusobno su ortogonalni.

Intenzitete vektora $\vec{\Omega}_{de\ Sitter}$ i $\langle \vec{\Omega}_{LT} \rangle$ označicu sa $\Omega_{de\ Sitter}$ i Ω_{LT} . Oni se određuju na osnovu sledećih jednačina

$$\Omega_{de\ Sitter} = \frac{3\gamma M_z \omega}{2c^2 r} \quad (9.12)$$

$$\Omega_{LT} = \frac{\gamma I \omega_z}{2c^2 r^3} \quad (9.13)$$

U skladu sa ovim definicijama jednačine (9.10) i (9.11) mogu se napisati u obliku

$$\vec{\Omega}_{de\ Sitter} = -\Omega_{de\ Sitter} \vec{j}$$

$$\langle \vec{\Omega}_{LT} \rangle = \Omega_{LT} \vec{k}$$

U jednačini (9.12) sa ω označena je ugaona brzina rotacije satelita. Ona se dobija na osnovu jednačine (9.5)

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M_z}{r^3}} \quad (9.14)$$

Zamenom jednačine (9.14) u (9.12) dobijamo

$$\Omega_{de\ Sitter} = \frac{3}{2c^2} \frac{(\gamma M_z)^{3/2}}{r^{5/2}} \quad (9.15)$$

Vrednosti veličina $\Omega_{de\ Sitter}$ i Ω_{LT} su izuzetno male, i njihovo merenje predstavljalo je pravi tehnološki poduhvat.

Zamenom odgovarajućih brojnih vrednosti u jednačine (9.15) i (9.13) možemo dobiti vrednosti veličina $\Omega_{de\ Sitter}$ i Ω_{LT} . Medjutim pre nego što to uradim moramo se podsetiti određenih definicija za uglove. Jedan stepen jednak je 60 lučnih minuta

$$1^\circ = 60'$$

Jedna lučna minuta jednaka je 60 lučnih sekundi

$$1' = 60''$$

Na osnovu ovih definicija sledi da je jedan stepen jednak 3600 lučnih sekundi

$$1^\circ = 3600''$$

Jedna lučna sekunda može se izraziti na sledeći način

$$1'' = \frac{1}{3600} 1^\circ \quad (9.16)$$

, odnosno jedna lučna sekunda je 3600-ti deo jednog stepena.

Često se jedna lučna sekunda zapisuje kao 1 *arcsecond*

$$1'' = 1 \text{ arcsecond} \quad (9.17)$$

Na osnovu definicija (9.16) i (9.17) sledi

$$1 \text{ arcsecond} = \frac{1}{3600} 1^\circ \quad (9.18)$$

Veličina 1 *miliarcsecond* definiše se na sledeći način

$$1 \text{ miliarcsecond} = \frac{1}{1000} \text{ arcsecond} \quad (9.19)$$

Veličina *miliarcsecond* često se označava sa *mas*, odnosno

$$1 \text{ mas} = 1 \text{ miliarcsecond} \quad (9.20)$$

Korišćenjem definicija (9.18), (9.19) i (9.20) dobijamo

$$1 \text{ mas} = \frac{1}{1000} \frac{1}{3600} 1^\circ \quad (9.21)$$

Ove definicije za uglove potrebne su nam da bi izrazili konkretne vrednosti za $\Omega_{de\ Sitter}$ i Ω_{LT} . Satelit se kreće po kružnici poluprečnika 642 km. Zamenom odgovarajućih brojnih vrednosti u jednačine (9.13) i (9.15) dobijamo

$$\Omega_{de\ Sitter} = 6606,1 \frac{\text{mas}}{\text{god}} \quad (9.22)$$

$$\Omega_{LT} = 39,2 \frac{\text{mas}}{\text{god}} \quad (9.23)$$

mas je jedinica za ugao (definicija (9.21)). Sa *god* u jednačinama (9.22) i (9.23) je označen vremenski interval od jedne godine. Veličine $\Omega_{de\ Sitter}$ i Ω_{LT} mogu se izraziti i na sledeći način

$$\Omega_{de\ Sitter} = 0,0018 \frac{1^\circ}{\text{god}} \quad (9.24)$$

$$\Omega_{LT} = 0,000011 \frac{1^\circ}{\text{god}} \quad (9.25)$$

Na osnovu jednačina (9.24) i (9.25) zaključujemo da veličine $\Omega_{de\ Sitter}$ i Ω_{LT} imaju dimenzije ugaone brzine. Ove veličine su izuzetno male i njihovo merenje predstavljalo je pravi tehnološki

poduhvat. Analizom podataka sakupljenih u eksperimentu Gravity Probe B dobijene su sledeće vrednosti

$$\Omega_{de\ Sitter} = 6601,8 \pm 18,3 \frac{mas}{god} \quad (9.26)$$

$$\Omega_{LT} = 37,2 \pm 7,2 \frac{mas}{god} \quad (9.27)$$

Ovi rezultati prezentovani su u radu [11]. Ove eksperimentalno određene vrednosti su u izuzetno dobroj saglasnosti sa rezultatima opšte teorije relativnosti.

Sada ću analizirati eksperiment Gravity Probe B sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Da bi to uradio potrebno je da se podsetimo pojedinih rezultata iz elektrodinamike i mehanike.

U trećem poglavlju prezentovao sam jedan primer iz elektrodinamike. Uveo sam u razmatranje jednu zapreminski naelektrisanu loptu poluprečnika R . Naelektrisanje lopte je Q , a njena masa M (slika 12). Lopta rotira oko jednog svog prečnika konstantnom ugaonom brzinom ω , i zbog rotacije lopte nastaje magnetno polje unutar i van lopte. Izvršio sam analizu samo za magnetno polje van lopte. Jačina magnetnog polja van lopte u nekoj tački određenoj radijus vektorom \vec{r} određuje se na osnovu jednačine

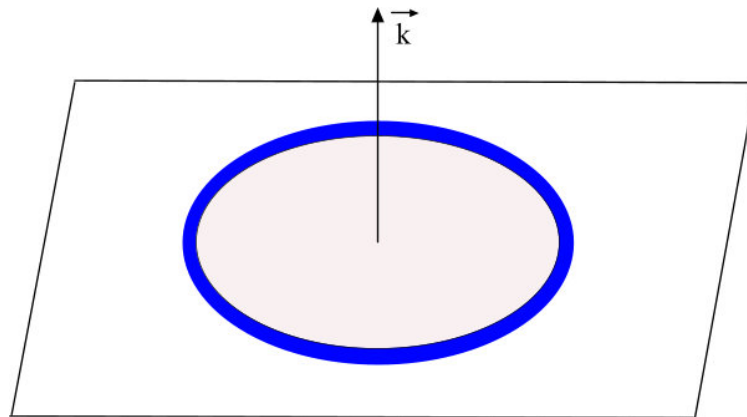
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right]$$

Veličina \vec{m} naziva se magnetni moment i određuje se na osnovu jednačine (3.35)

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV'$$

U jednačini (3.35) integracija se vrši po zapremini u kojoj je lokalizovano naelektrisanje. U ovom primeru naelektrisanje je lokalizovano unutar lopte zapremine V' . Vektor \vec{r}' određuje položaje tačaka unutar zapremine V' .

Na slici 36 prikazana je kružna provodna kontura. Ova kontura se nalazi u ravni. Jedinični vektor čiji je pravac normalan na ovu ravan označiću sa \vec{k} . Poluprečnik kružne konture je r . Kroz ovu konturu protiče struja čiji se intenzitet i smer tokom vremena ne menjaju. Intenzitet struje označiću sa I . Poprečni presek strujne konture označiću sa \vec{S} .



Slika 36

Primenom jednačine (3.35) za slučaj strujne konture prikazane na slici 36 dobija se sledeći rezultat

$$\vec{m} = Ir^2\pi\vec{k} \quad (9.28)$$

Površinu koja je obuhvaćena strujnom konturom označicu sa S . U ovom slučaju površina S jednaka je površini kruga

$$S = r^2\pi \quad (9.29)$$

Zamenom jednačine (9.29) u (9.28) dobijamo

$$\vec{m} = IS\vec{k} \quad (9.30)$$

Može se uvesti vektor \vec{S} na sledeći način

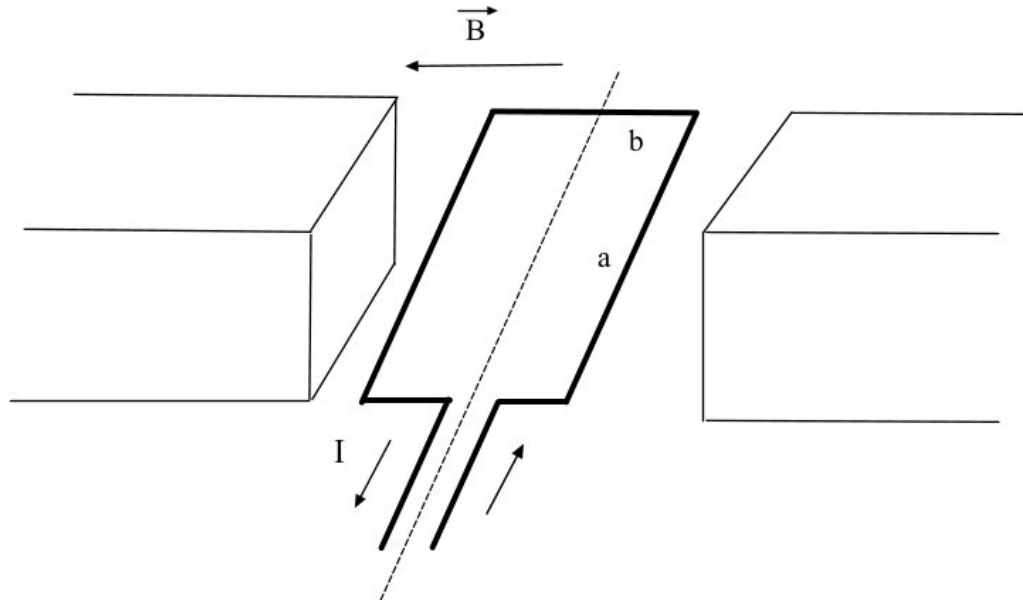
$$\vec{S} = S\vec{k}$$

U skladu sa ovom definicijom jednačina (9.30) dobija oblik

$$\vec{m} = I\vec{S} \quad (9.31)$$

Ovde sam analizirao kružnu provodnu konturu. Medjutim jednačina (9.31) važi za bilo kakav oblik strujne konture koja se nalazi u ravni. Ako se strujna kontura postavi u magnetno polje u opštem slučaju na konturu će delovati sila i moment sile. Za dalju analizu veoma je bitno dati dodatna objašnjenja u vezi momenta sile koji deluje na strujnu konturu.

Na slici 37 prikazana je strujna kontura koja se nalazi u homogenom magnetnom polju. Strujna kontura ima oblik pravougaonika. Dužu stranicu pravougaonika označicu sa a . Kraću stranicu pravougaonika označicu sa b , i ona se poklapa sa linijama sila magnetnog polja. Kontura je pričvršćena na odgovarajuću osovinu. Kontura može da rotira oko ose koja je prikazana isprekidanom linijom na slici 37



Slika 37

Kada kroz konturu protiče jednosmerna struja intenziteta I na stranice provodne konture delovaće Amperova sila. Na slici 37 prikazan je smer kretanja struje. Ove Amperove sile stvoriće moment sile i ram počinje da rotira. Moment sile koji deluje na ram određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (9.32)$$

Obzirom da provodna kontura ima oblik pravougaonika magnetni moment određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{m} = abI\vec{k}$$

Vektor \vec{k} je jedinični vektor čiji je pravac normalan na površinu provodne konture.

Prilikom analize primera iz elektrodinamike prikazanog na slici 12 dobio sam jednačinu (3.46). Ovu jednačinu ponovo navodim

$$\int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dV' = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV'$$

Magnetni moment određuje se na osnovu jednačine (3.35). Koristeći ovu veličinu jednačinu (3.46) transformisao sam i dobio sam sledeći rezultat

$$\int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dV' = \vec{m} \times \vec{r}$$

Ovaj primer iz elektrodinamike bio mi je potreban da bi lakše odredio jačinu gravitomagnetnog polja koje stvara lopta mase M koja rotira oko jednog svog prečnika konstantnom ugaonom brzinom ω . Lopta ima homogenu distribuciju mase. Poluprečnik lopte označio sam sa R . Koristio sam koordinatni sistem koji je prikazan na slici 12. Zbog rotacije lopte nastaje gravitomagnetno polje unutar i van lopte. Analizirao sam samo gravitomagnetno polje van lopte.

Prilikom te analize dobio sam jednačinu (3.58)

$$\int_{V'} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}_m(\vec{r}') dV' = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{j}_m(\vec{r}') dV'$$

Jednačina (3.58) po svojoj formi veoma je slična jednačini (3.46). Jednačinu (3.46) transformisao sam korišćenjem definicije magnetnog momenta.

Obzirom da se gravitoelektromagnetizam zasniva na formalnoj analogiji sa elektrodinamikom uvešću veličinu koja je analogna magnetnom momentu iz elektrodinamike. Tu veličinu označiću sa \vec{m}_{gem} i nazvaću je gravitacioni magnetni moment. Ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{m}_{gem} = \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{j}_m(\vec{r}') dV' \quad (9.33)$$

Ako uporedimo jednačinu (9.33) sa jednačinom (3.35)

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV'$$

vidimo da postoji formalna sličnost izmedju njih.

Integral koji se pojavljuje na desnoj strani jednačine (9.33) možemo zameniti odgovarajućom sumom

$$\int_{V'} \vec{r}' \times \vec{j}_m(\vec{r}') dV' = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i)$$

Ova suma predstavlja moment impulsa tela

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i)$$

U skladu sa tim dobijam sledeći rezultat za veličinu \vec{m}_{gem}

$$\vec{m}_{gem} = \frac{1}{2} \vec{L} \quad (9.34)$$

Ako se gravitacioni magnetni moment nadje u gravitomagnetnom polju na njega će delovati moment sile

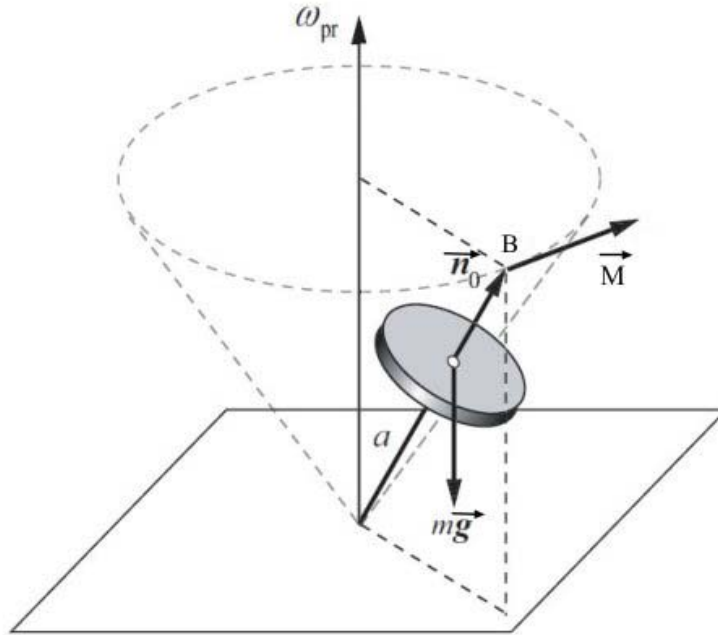
$$\vec{M} = \vec{m}_{gem} \times \vec{B}_{gem} \quad (9.35)$$

I ova jednačina je dobijena po analogiji sa elektrodinamikom.

Zamenom jednačine (9.34) u jednačinu (9.35) dobijamo

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \vec{L} \times \vec{B}_{gem} \quad (9.36)$$

Potrebno je podsetiti se i određenih rezultata iz mehanike. Na slici 38 prikazan je žiroskop. On se sastoji od masivnog diska i osovine. Kontakt osovine i podloge ostvaruje se u tački A . Žiroskop može da menja položaj u prostoru. Trenje koje se javlja izmedju osovine i podloge može se zanemariti.



Slika 38

Na slici 38 označeno je i rastojanje a . Ono se određuje od tačke A do centra mase diska. Masu diska označicu sa m , a njegov poluprečnik sa R . Žiroskop rotira oko ose simetrije diska. Pravac ose rotacije diska poklapa se sa osovinom. Moment inercije diska određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

Masa diska je mnogo veća od mase osovine, i moment inercije diska je mnogo veći od momenta inercije osovine. Iz tog razloga ja ću zanemariti moment inercije osovine, i u skladu sa tim moment inercije žiroskopa jednak je momentu inercije diska. Ugaonu brzinu rotacije žiroskopa oko ose simetrije označicu sa ω . Zbog rotacije žiroskopa oko ose simetrije on poseduje moment impulsa koji se određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{L} = I\omega\vec{n}_0 \quad (9.37)$$

Sa \vec{n}_0 označen je jedinični vektor. On je prikazan na slici 38. Pravac vektora \vec{n}_0 poklapa se sa osom rotacije žiroskopa.

Na slici 38 prikazan je rotirajući žiroskop čija je osa pod nekim uglom u odnosu na vertikalu. Kraj vektora \vec{n}_0 označen je tačkom B . Obzirom da se žiroskop nalazi u gravitacionom polju očekivalo bi se da padne, međjutim rotirajući žiroskop pokazuje pojavu precesije. Kraj vektora \vec{n}_0 kretaće se po kružnici konstantnom ugaonom brzinom. Ta ugaona brzina naziva se ugaona brzina precesije i označicu je sa ω_{pr} . Kružnica po kojoj se kreće kraj vektora \vec{n}_0 prikazana je na slici 38 isprekidanom linijom. Prilikom pojave precesije ugao između ose rotacije žiroskopa i vertikale ostaje stalan, odnosno osa rotacije žiroskopa opisuje konus.

Žiroskop usled rotacije oko ose simetrije poseduje moment impulsa koji se određuje na osnovu jednačine (9.37). Zbog pojave precesije žiroskop rotira oko vertikalne ose ugaonom brzinom ω_{pr} . Zbog ove rotacije žiroskop poseduje dopunski moment impulsa koji ću označiti sa $\Delta\vec{L}$. Ugaona brzina precesije (ω_{pr}) je mnogo manja od ugaone brzine rotacije žiroskopa oko ose simetrije. Kao posledicu toga imamo da je intenzitet vektora $\Delta\vec{L}$ mnogo manji od intenziteta vektora \vec{L} , odnosno dopunski

moment impulsa ($\Delta\vec{L}$) može se zanemariti. Pošto smo zanemarili veličinu $\Delta\vec{L}$ moment impulsa žiroskopa određuje se na osnovu jednačine (9.37)

$$\vec{L} = I\omega\vec{n}_0$$

Jednačina dinamike rotacije čvrstog tela glasi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (9.38)$$

U jednačini (9.38) sa \vec{M} je označen ukupni moment sile koji deluje na žiroskop.

Radijus vektor centra mase određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{r} = a\vec{n}_0 \quad (9.39)$$

, a moment sile na osnovu jednačine

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9.40)$$

Obzirom da se žiroskop nalazi u gravitacionom polju sila koja deluje na žiroskop određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (9.41)$$

Zamenom jednačina (9.39) i (9.41) u jednačinu (9.40) dobijamo

$$\vec{M} = a\vec{n}_0 \times m\vec{g} \quad (9.42)$$

Vektor \vec{M} prikazan je na slici 38. Pravac vektora \vec{M} uvek se poklapa sa pravcem tangente na kružnicu koja je prikazana isprekidanom linijom na slici 38.

Zamenom jednačine (9.42) u jednačinu (9.38) dobijamo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = a\vec{n}_0 \times m\vec{g} \quad (9.43)$$

Na osnovu jednačine (9.43) može se odrediti ugaona brzina precesije žiroskopa. Da bi smo to postigli napišimo najpre jednačinu (9.43) na sledeći način

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -m\vec{g} \times a\vec{n}_0$$

Ovu jednačinu dalje transformišemo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\left(\frac{am}{I\omega}\vec{g}\right) \times (I\omega\vec{n}_0)$$

, i na osnovu jednačine (9.37) dobijamo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\left(\frac{am}{I\omega}\vec{g}\right) \times \vec{L} \quad (9.44)$$

Vektor ugaone brzine precesije određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{\Omega}_{pr} = -\frac{am}{I\omega}\vec{g} \quad (9.45)$$

Korišćenjem veličine $\vec{\Omega}_{pr}$ jednačina (9.44) može se napisati na sledeći način

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega}_{pr} \times \vec{L} \quad (9.46)$$

Sa sličnom jednačinom već smo se susreli u dosadašnjem tekstu, to je bila jednačina (9.1). Ona opisuje pojavu precesije kvarcne kuglice. Jednačinu (9.1) ovde ponovo navodim

$$\frac{d\vec{L}_k}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_k$$

Vektor $\vec{\Omega}$ određen je na osnovu opšte teorije relativnosti. Sa \vec{L}_k označen je vektor momenta impulsa kuglice. Poluprečnik kuglice označio sam sa r_k , masu kuglice sa m_k , a njenu ugaonu brzinu sa ω_k . Moment inercije kuglice određuje se na osnovu jednačine

$$I_k = \frac{2}{5}m_k r_k^2$$

, a intenzitet vektora momenta impulsa na osnovu sledeće jednačine

$$L_k = I_k \omega_k$$

U slučaju žiroskopa postoji kontakt između žiroskopa i podloge. Kontakt se ostvaruje u tački A. U eksperimentu Gravity Probe B kvarcne kuglice predstavljaju žiroskope. U ovom slučaju kvarcne kuglice (žiroskopi) lebde unutar kvarcnih kućišta. Ne postoji kontakt između kuglice i kvarcnog kućišta.

Kvarcna kuglica usled rotacije ima moment impulsa, i sa stanovišta gravitoelektromagnetizma poseduje gravitacioni magnetni moment. Na osnovu jednačine (9.34) dobijamo

$$\vec{m}_{gem} = \frac{1}{2} \vec{L}_k \quad (9.47)$$

Kuglica se nalazi u gravitomagnetnom polju. Na nju će delovati moment sile, i dolazi do pojave precesije. Moment sile koji deluje na kuglicu možemo dobiti na osnovu jednačine (9.36)

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \vec{L}_k \times \vec{B}_{gem} \quad (9.48)$$

Primenom jednačine (9.38) na slučaj kretanja kvarcne kuglice dobijamo sledeću jednačinu

$$\frac{d\vec{L}_k}{dt} = \vec{M} \quad (9.49)$$

Zamenom jednačine (9.48) u jednačinu (9.49) dobijamo

$$\frac{d\vec{L}_k}{dt} = \frac{1}{2} \vec{L}_k \times \vec{B}_{gem}$$

Ova jednačina može se napisati u obliku

$$\frac{d\vec{L}_k}{dt} = -\frac{1}{2} \vec{B}_{gem} \times \vec{L}_k \quad (9.50)$$

Iz ove jednačine možemo odrediti vektor ugaone brzine precesije kvarcne kuglice sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Tu veličinu označiću sa $\vec{\Omega}_{gem}$. Ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{\Omega}_{gem} = -\frac{1}{2} \vec{B}_{gem} \quad (9.51)$$

Zamenom jednačine (9.51) u jednačinu (9.50) dobijamo

$$\frac{d\vec{L}_k}{dt} = \vec{\Omega}_{gem} \times \vec{L}_k \quad (9.52)$$

Ova jednačina je po formi identična jednačini (9.46) odnosno jednačini (9.1).

Da bi smo odredili veličinu $\vec{\Omega}_{gem}$ potrebno je odrediti jačinu gravitomagnetnog polja u sistemu S_5 . Treba napomenuti da jednačina (9.52) važi sa stanovišta posmatrača u sistemu S_5 . O tom sistemu je već bilo reči u predhodnom tekstu. Taj sistem je prikazan na slici 34. Sistem S_5 je pokretan ali orijentacija njegovih osa tokom vremena ne menja se.

Pokazaću u daljem tekstu da se jačina gravitomagnetnog polja u sistemu S_5 sastoji od tri komponente

$$\vec{B}_{gem} = \vec{B}_{gem 1} + \vec{B}_{gem 2} + \vec{B}_{gem 3} \quad (9.53)$$

Zamenom jednačine (9.53) u jednačinu (9.51) dobijamo

$$\vec{\Omega}_{gem} = -\frac{1}{2} (\vec{B}_{gem 1} + \vec{B}_{gem 2} + \vec{B}_{gem 3}) \quad (9.54)$$

Definisao sam i sistem S_6 . Koordinatne ose sistema S_6 paralelne su koordinatnim osama sistema S_5 . Koordinatni početak sistema S_6 poklapa se sa centrom Zemlje, a koordinatni početak sistema S_5 poklapa se sa centrom jedne kvarcne kuglice.

Bilo je potrebno objasniti pojedine veličine koje figurišu u jednačini (9.2). Radijus vektor i brzina satelita označeni su sa \vec{r} i \vec{v} . Ovi vektori određeni su u sistemu S_6 . Satelit se u sistemu S_6 kreće

u xOz ravni. Istakao sam da je ekscentricitet orbite satelita veoma mali, iznosi svega 0,0014 i možemo smatrati da se satelit kreće po kružnoj putanji. Sa \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} označio sam jedinične vektore koordinatnih osa sistema S_6 . Radijus vektor satelita određuje se na osnovu jednačine (9.3), a vektor brzine satelita na osnovu jednačine (9.4).

Zbog pogodnosti u daljem radu jedinične vektore koordinatnih osa sistema S_6 označiću sa \vec{e}_{x6} , \vec{e}_{y6} i \vec{e}_{z6} , odnosno važe sledeći identiteti

$$\vec{i} = \vec{e}_{x6}$$

$$\vec{j} = \vec{e}_{y6}$$

$$\vec{k} = \vec{e}_{z6}$$

Jedinične vektore koordinatnih osa sistema S_5 označiću sa \vec{e}_{x5} , \vec{e}_{y5} i \vec{e}_{z5} . Obzirom da su koordinatne ose sistema S_5 i S_6 paralelne u svakom trenutku vremena važe sledeće jednačine

$$\vec{e}_{x5} = \vec{e}_{x6} \quad (9.55)$$

$$\vec{e}_{y5} = \vec{e}_{y6} \quad (9.56)$$

$$\vec{e}_{z5} = \vec{e}_{z6} \quad (9.57)$$

Neka je u sistemu S_6 dat vektor \vec{A}

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_{x6} + A_y \vec{e}_{y6} + A_z \vec{e}_{z6} \quad (9.58)$$

Početak vektora \vec{A} poklapa se sa koordinatnim početkom sistema S_6 . Sistem S_5 je pokretan, ali fiksirajmo njegov položaj u odnosu na sistem S_6 u nekom proizvoljnom trenutku vremena. Uzećemo da je vektor \vec{A} slobodan vektor, odnosno on se može pomeriti iz koordinatnog početka sistema S_6 u koordinatni početak sistema S_5 . Prilikom tog pomeranja vektor \vec{A} nije promenio intenzitet, pravac i smer. Vektor \vec{A} se sada nalazi u sistemu S_5 i može se izraziti preko svojih komponentata

$$\vec{A} = \bar{A}_x \vec{e}_{x5} + \bar{A}_y \vec{e}_{y5} + \bar{A}_z \vec{e}_{z5} \quad (9.59)$$

Možemo postaviti pitanje kolike su komponente vektora \vec{A} u sistemu S_5 . Da bi smo našli komponente vektora \vec{A} u sistemu S_5 krenimo najpre od identiteta

$$\vec{A} = \vec{A}$$

Na osnovu jednačina (9.58) i (9.59) dobijamo

$$\bar{A}_x \vec{e}_{x5} + \bar{A}_y \vec{e}_{y5} + \bar{A}_z \vec{e}_{z5} = A_x \vec{e}_{x6} + A_y \vec{e}_{y6} + A_z \vec{e}_{z6}$$

Korišćenjem jednačina (9.55-57) dobijamo sledeće rezultate

$$A_x = \bar{A}_x \quad (9.60)$$

$$A_y = \bar{A}_y \quad (9.61)$$

$$A_z = \bar{A}_z \quad (9.62)$$

Rezultati dati jednačinama (9.55-57) i (9.60-62) imaju veliki značaj za dalju analizu.

Sada ću odrediti veličinu \vec{B}_{gem1} koja figuriše u jednačini (9.54). Ako pretpostavimo da je Zemlja idealna lopta sa homogenom distribucijom mase jačina gravitomagnetnog polja određuje se na osnovu jednačine (3.60). Posmatrač iz sistema S_6 određuje ovo gravitomagnetno polje. Da bi naznačio ovu činjenicu uvodim indeks S_6 . U skladu sa ovom malom korekcijom jednačina (3.60) dobija oblik

$$\vec{B}_{gem S_6} = -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right] \quad (9.63)$$

Odredjena je jačina gravitomagnetnog polja sa stanovišta posmatrača iz sistema S_6 , međjutim potrebno je odrediti jačinu gravitomagnetnog polja sa stanovišta posmatrača iz sistema S_5 . Vektor $\vec{B}_{gem\ S_6}$ ima komponente u sistemu S_6 , međjutim te komponente imaju istu vrednost i u sistemu S_5 . Ova konstatacija je direktna posledica jednačina (9.60-62). Obzirom da pored jednačina (9.60-62) važe i jednačine (9.55-57) dobijamo sledeći rezultat

$$\vec{B}_{gem\ 1} = \vec{B}_{gem\ S_6}$$

, odnosno

$$\vec{B}_{gem\ 1} = -\frac{2\gamma}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{L} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{L} \right] \quad (9.64)$$

U jednačini (9.64) sa \vec{L} označen je moment impulsa Zemlje. On se može izraziti na sledeći način

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}_z \quad (9.65)$$

Moment inercije Zemlje označen je sa I_z a vektor ugaone brzine rotacije Zemlje sa $\vec{\omega}_z$.

Zamenom jednačine (9.65) u jednačinu (9.64) dobijamo

$$\vec{B}_{gem\ 1} = -\frac{2\gamma I_z}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{\omega}_z \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\omega}_z \right] \quad (9.66)$$

Sada ću odrediti komponentu $\vec{B}_{gem\ 2}$. U petom poglavlju bilo je reči o Tomsonovoj precesiji. U tom poglavlju konstatovano je postojanje Tomsonovog polja (jednačina (5.36)). Ovo polje određuje posmatrač iz sistema S_6 . Da bi to naznačio kao i u predhodnom slučaju uvodim indeks S_6 , i u skladu sa ovom malom korekcijom jednačina (5.36) dobija oblik

$$\vec{B}_{T\ S_6} = \frac{\gamma M_z}{r^3 c^2} \vec{r} \times \vec{v} \quad (9.67)$$

Posmatrač u sistemu S_5 takodje konstatuje postojanje Tomsonovog polja. Jačinu Tomsonovog polja sa stanovišta posmatrača iz sistema S_5 označiću sa $\vec{B}_{gem\ 2}$. Da bi smo odredili veličinu $\vec{B}_{gem\ 2}$ primenjujemo predhodno opisanu proceduru i dolazimo najpre do rezultata

$$\vec{B}_{gem\ 2} = \vec{B}_{T\ S_6}$$

Korišćenjem jednačine (9.67) dobijam sledeći rezultat

$$\vec{B}_{gem\ 2} = \frac{\gamma M_z}{r^3 c^2} \vec{r} \times \vec{v} \quad (9.68)$$

Odredjena je i komponenta $\vec{B}_{gem\ 2}$. Preostaje da se odredi komponenta $\vec{B}_{gem\ 3}$. Da bi to postigli potrebno je najpre da se podsetimo određenih metoda i rezultata prezentovanih u četvrtom poglavlju. Zemlja zbog svog kretanja u prostoru oko sebe stvara gravitoelektrično i gravitomagnetno polje. Jačine ovih polja u koordinatnom početku sistema S_2 određuju se na osnovu jednačina (4.31) i (4.34). Sistem S_2 je Heliocentrični ekliptički koordinatni sistem, i prikazan je na slici 6. Koordinatni početak tog sistema nalazi se u centru Sunca. Zemljina putanja na slici 6 prikazana je isprekidanom linijom. Putanja Zemlje se nalazi u ravni ekliptike. Zemlja se kreće po eliptičnoj putanji, međjutim zbog jednostavnosti proračuna uzeo sam da se Zemlja kreće po kružnoj putanji, i nakon izvršene analize dobio sam jednačine (4.31) i (4.34).

Zemlja se nalazi u gravitacionom polju Sunca, i bilo je potrebno opisati gravitacioni uticaj Sunca na Zemlju. Prilikom te analize dobio sam jednačine (4.63) i (4.64) koje zbog njihove važnosti ponovo navodim

$$\vec{E}_{gem\ s}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma M_s}{r_z^3} \left(1 - \frac{v_z^2}{2c^2} \right) \vec{r}_z(t)$$

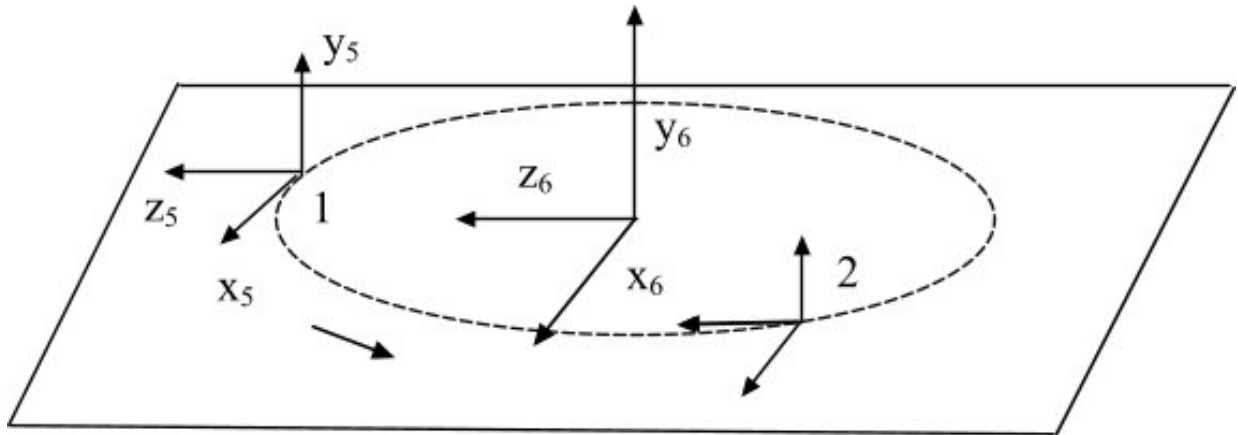
$$\vec{B}_{gem_s}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_s}{r_z^3} \left[\frac{\vec{r}_z(t) \times \vec{v}_z(t)}{c^2} \right]$$

Na osnovu jednačina (4.63) i (4.64) određujemo jačinu gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_3 (sistemu Zemlje). Sistema S_3 je Geocentrični ekliptički inercijalni koordinatni sistem. On je definisan u trećem poglavlju, i prikazan je na slici 9. U daljem radu pokazao sam da se jednačine (4.63) i (4.64) mogu koristiti ne samo za određivanje jačine gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_3 već i u određenoj oblasti oko Zemlje. Odredio sam i gravitacionu silu kojom Sunce deluje na Zemlju (jednačina (4.68)).

Prilikom izvodjenja jednačina (4.63) i (4.64) koristio sam i sliku 14. Na slici 14 prikazano je kretanje Zemlje oko Sunca. Prikazana su dva položaja Zemlje. Ona su označena sa 1 i 2. Na slici je označen i smer kretanja Zemlje oko Sunca. Na slici su predstavljena i dva Geocentrična ekliptička inercijalna koordinatna sistema koja se nalaze u položajima 1 i 2. Na slici je predstavljen i Heliocentrični ekliptički koordinatni sistem. Sa slike se uočava da su koordinatne ose sistema S_2 i S_3 medjusobno paralelne u svakom trenutku vremena.

Ovo obnavljanje je od velike koristi za određivanje veličine \vec{B}_{gem_3} koja figuriše u jednačini (9.54). Koordinatne ose sistema S_5 označiću sa x_5 , y_5 i z_5 , a koordinatne ose sistema S_6 sa x_6 , y_6 i z_6 . Na slici 34 predstavljeno je kretanje kvarcne kuglice (satelita) oko Zemlje. Prilikom definisanja sistema S_5 naveo sam da se koordinatni početak ovog sistema poklapa sa centrom kvarcne kuglice. Koordinatni početak sistema S_6 poklapa se sa centrom Zemlje.

Na slici 39 prikazan je koordinatni sistem S_6 i označene su njegove koordinatne ose. Kružna putanja kvarcne kuglice (satelita) oko Zemlje prikazana je isprekidanom linijom na slici 39. Na slici je naznačen i smer kretanja kvarcne kuglice oko Zemlje.



Slika 39

Brojevima 1 i 2 označena su dva položaja kvarcne kuglice u kojima će se ona naći prilikom svog kretanja oko Zemlje. Na slici je predstavljen sistem S_5 kada se nalazi u položaju 1, i kada se nalazi u položaju 2. Zbog preglednosti slike koordinatne ose sistema S_5 označio sam samo za položaj 1.

Satelit se nalazi u gravitacionom polju Zemlje. Potrebno je odrediti jačinu gravitomagnetnog polja u sistemu S_5 . To gravitomagnetno polje je u stvari veličina \vec{B}_{gem_3} . Možemo konstatovati sličnost slike 39 sa slikom 14. Ovde sam ukratko obnovio postupak dobijanja jednačina (4.63) i (4.64). Da bi dobio veličinu \vec{B}_{gem_3} bilo bi potrebno izvršiti analizu koja je veoma slična analizi koja je izvršena u postupku dobijanja jednačina (4.63) i (4.64). Ja tu analizu neću ponavljati iz prostog razloga jer je fizička situacija prikazana na slici 39 gotovo identična fizičkoj situaciji prikazanoj na slici 14. Položaj satelita u sistemu S_6 određen je radijus vektorom \vec{r} (jednačina (9.3)), a vektor brzine satelita

određujemo na osnovu jednačine (9.4). Intenzitete vektora \vec{r} i \vec{v} označicu sa r i v . U jednačini (4.64) vektori \vec{r}_z i \vec{v}_z određuju položaj i brzinu Zemlje u Heliocentričnom ekliptičkom koordinatnom sistemu (sistemu S_2). U jednačini (4.63) sa r_z označen je intenzitet vektora \vec{r}_z , a sa v_z označen je intenzitet vektora \vec{v}_z .

Satelit se nalazi u gravitacionom polju Zemlje, i potrebno je odrediti jačinu gravitomagnetnog polja u sistemu S_5 . Zbog izuzetne sličnosti fizičke situacije prikazane na slici 39 sa fizičkom situacijom prikazanom na slici 14 jačinu gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_5 određujem korišćenjem jednačina (4.63) i (4.64) i to na sledeći način. Vektore \vec{r}_z i \vec{v}_z koji figurušu u jednačinama (4.63) i (4.64) zameniće vektorima \vec{r} i \vec{v} . Veličine r_z i v_z zameniće veličinama r i v . Masu Sunca M_s zameniće masom Zemlje M_z . Nakon ovih formalnih transformacija jednačina (4.63) i (4.64) dobijam sledeće jednačine

$$\vec{E}_{gemz}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma M_z}{r^3} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \vec{r} \quad (9.69)$$

$$\vec{B}_{gemz}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma M_z}{r^3} \left[\frac{\vec{r} \times \vec{v}}{c^2} \right] \quad (9.70)$$

Na osnovu jednačina (9.69) i (9.70) određujemo jačinu gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja u koordinatnom početku sistema S_5 . Vektori \vec{r} i \vec{v} određuju položaj i brzinu satelita u sistemu S_6 .

Jačina gravitomagnetnog polja koja je određena jednačinom (9.70) je u stvari veličina \vec{B}_{gem3}

$$\vec{B}_{gem3} = -\frac{4\gamma M_z}{r^3} \left[\frac{\vec{r} \times \vec{v}}{c^2} \right] \quad (9.71)$$

Zamenom jednačina (9.66), (9.68) i (9.71) u jednačinu (9.54) dobijamo

$$\vec{\Omega}_{gem} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{2\gamma I_z}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{\omega}_z \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\omega}_z \right] - \frac{3\gamma M_z}{r^3 c^2} \vec{r} \times \vec{v} \right)$$

, odnosno

$$\vec{\Omega}_{gem} = \frac{\gamma I_z}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{\omega}_z \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\omega}_z \right] + \frac{3\gamma M_z}{2r^3 c^2} \vec{r} \times \vec{v} \quad (9.72)$$

Jednačina (9.72) je identična jednačini (9.2) koja je dobijena na osnovu opšte teorije relativnosti.

10. Problem dva tela

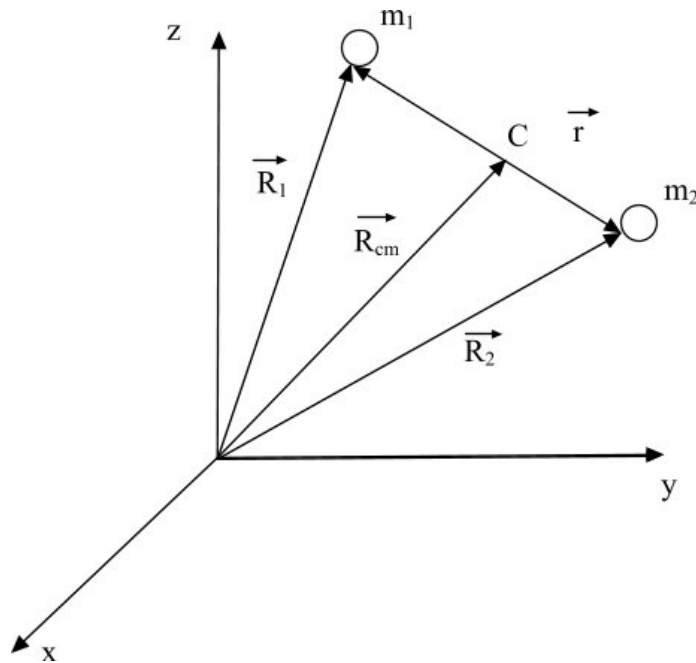
Da bi smo analizirali problem dva tela u mehanici podsetimo se najpre primera kretanja satelita oko Zemlje. Za opisivanje kretanja satelita koriste se jednačine prezentovane u sedmom poglavlju. U tom poglavlju razmatrao sam tzv. Keplerov problem. Masa satelita je mnogo manja od mase Zemlje, i centar mase ovog sistema se poklapa sa centrom mase Zemlje. Problem postaje komplikovaniji ako imamo sistem od dva tela koja međusobno deluju gravitacionom silom, ali su im mase uporedive. Dobar primer za ovakav sistem je binarni zvezdani sistem. Binarni sistem se sastoji od dve zvezde koje se kreću oko zajedničkog centra mase. Ovakva binarni sistemi veoma su zastupljeni u svemiru, i predmet su proučavanja u astronomiji i astrofizici. Ako su putanje zvezda kružnice matematička analiza njihovog kretanja nije komplikovana. Medjutim ako se zvezde kreću po elipsastim putanjama, što je najčešće slučaj, potrebna je opširnija matematička analiza. U ovom poglavlju ja ću analizirati kretanje zvezda samo sa stanovišta Njutnove mehanike. U toj analizi korišću rezultate prezentovane u sedmom poglavlju.

U cilju pojednostavljivanja problema analiziraću kretanje dva tela koja se mogu smatrati materijalnim tačkama. Masu prvog tela označiću sa m_1 , a masa drugog sa m_2 . Tela se nalaze u inercijalnom sistemu koji ću nazvati laboratorijski inercijalni sistem. Položaj prvog tela određen je radijus vektorom \vec{R}_1 , a položaj drugog tela određen je radijus vektorom \vec{R}_2 (slika 40).

Uvešću i vektor relativnog položaja

$$\vec{r} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2 \quad (10.1)$$

Intenzitet vektora \vec{r} označiću sa r



Slika 40

Vektor brzine relativnog kretanja \vec{v} određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

, odnosno

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}}_1 - \dot{\vec{R}}_2 \quad (10.2)$$

Tela međusobno deluju samo gravitacionom silom, i u skladu sa tim ovo je izolovani sistem. Intenzitet gravitacione sile određuje se na osnovu Njutnovog zakona gravitacije

$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$

Jednačine kretanja tela glase

$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (10.3)$$

$$m_2 \ddot{\vec{R}}_2 = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (10.4)$$

Ako saberemo jednačine (10.3) i (10.4) dobijamo

$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 + m_2 \ddot{\vec{R}}_2 = 0 \quad (10.5)$$

Ova jednačina je posledica činjenice da je gravitaciona sila centralna.

Centar mase određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2}{m_1 + m_2} \quad (10.6)$$

Kraj vektora \vec{R}_{cm} poklapa se sa tačkom C (slika 40)

Brzina centra mase određuje se na osnovu sledeće jednačine.

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_1 \dot{\vec{R}}_1 + m_2 \dot{\vec{R}}_2}{m_1 + m_2} \quad (10.7)$$

, a ubrzanje centra mase na osnovu jednačine (10.8)

$$\vec{A}_{cm} = \frac{m_1 \ddot{\vec{R}}_1 + m_2 \ddot{\vec{R}}_2}{m_1 + m_2} \quad (10.8)$$

Ako zamenimo jednačinu (10.5) u jednačinu (10.8) dobićemo da je ubrzanje centra mase jednako nuli, odnosno centar mase se kreće konstantnom brzinom. Za posmatrača u laboratorijskom sistemu tačka C kreće se konstantnom brzinom po pravoj liniji. U daljem radu biće prezentovana jednačina kretanja ove tačke.

Brzine koje tela imaju u početnom trenutku označicu sa \vec{V}_{10} i \vec{V}_{20} . Na osnovu jednačine (10.7) dobijamo

$$\vec{V}_{cm0} = \frac{m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20}}{m_1 + m_2}$$

Ova brzina ne menja se tokom vremena. Indeks 0 je uveden da bi se naznačilo da je reč o početnom trenutku.

U početnom trenutku položaji tela određeni su radijus vektorima \vec{R}_{10} i \vec{R}_{20} . Korišćenjem jednačine (10.6) položaj centra mase u početnom trenutku određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{R}_{cm0} = \frac{m_1 \vec{R}_{10} + m_2 \vec{R}_{20}}{m_1 + m_2}$$

Jednačina kretanja centra mase za posmatrača u laboratorijskom sistemu glasi

$$\vec{R}_{cm}(t) = \vec{R}_{cm0} + \vec{V}_{cm0}t \quad (10.9)$$

Ovo je jednačina prave data u vektorskoj formi, odnosno centar mase se kreće po inerciji.

Na osnovu jednačina (10.1) i (10.6) dobijamo sledeće jednačine

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (10.10)$$

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (10.11)$$

Vektor \vec{R}_{cm} određuje se na osnovu jednačine (10.9). Ako želimo da rešimo problem kretanja dva tela, odnosno da odredimo vektore \vec{R}_1 i \vec{R}_2 potrebno je odrediti i vektor \vec{r} . Na osnovu jednačina (10.3) i (10.4) dobijamo

$$\ddot{\vec{R}}_1 = -\frac{\gamma m_2}{r^3} \vec{r}$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 = \frac{\gamma m_1}{r^3} \vec{r}$$

Oduzimanjem ovih jednačina dobijamo

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \quad (10.12)$$

Ovo je jednačina za određivanje vektora relativnog položaja. Vektori \vec{R}_1 i \vec{R}_2 mogu se izraziti preko svojih komponentata

$$\vec{R}_1 = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$$

$$\vec{R}_2 = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}$$

Vektor relativnog položaja određuje se na osnovu jednačine (10.1). On se može izraziti i preko komponenta vektora \vec{R}_1 i \vec{R}_2

$$\vec{r} = (X_1 - X_2)\vec{i} + (Y_1 - Y_2)\vec{j} + (Z_1 - Z_2)\vec{k}$$

Uvešću sledeće veličine

$$X_r = X_1 - X_2$$

$$Y_r = Y_1 - Y_2$$

$$Z_r = Z_1 - Z_2$$

Korišćenjem ovih veličina vektor relativnog položaja može se izraziti na sledeći način

$$\vec{r} = X_r\vec{i} + Y_r\vec{j} + Z_r\vec{k} \quad (10.13)$$

Na osnovu jednačine (10.12) dobija se sistem od tri diferencijalne jednačine drugog reda

$$\ddot{X}_r = -\frac{\gamma(m_1 + m_2)X_r}{(X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2)^{3/2}} \quad (10.14)$$

$$\ddot{Y}_r = -\frac{\gamma(m_1 + m_2)Y_r}{(X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2)^{3/2}} \quad (10.15)$$

$$\ddot{Z}_r = -\frac{\gamma(m_1 + m_2)Z_r}{(X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2)^{3/2}} \quad (10.16)$$

Da bi rešili ovaj sistem diferencijalnih jednačina potrebni su nam i početni uslovi. U početnom trenutku položaji tela određeni su radijus vektorima \vec{R}_{10} i \vec{R}_{20} . Preko komponenta ovi vektori mogu se izraziti na sledeći način

$$\vec{R}_{10} = X_{10}\vec{i} + Y_{10}\vec{j} + Z_{10}\vec{k}$$

$$\vec{R}_{20} = X_{20}\vec{i} + Y_{20}\vec{j} + Z_{20}\vec{k}$$

Indeks 0 je uveden da bi se naznačilo da je reč o početnom trenutku. Pomoću ovih vektora može se dobiti i vektor relativnog položaja u početnom trenutku. Taj vektor označiću sa \vec{r}_0 i on se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{r}_0 = \vec{R}_{10} - \vec{R}_{20}$$

Vektor brzine relativnog kretanja određuje se na osnovu jednačine (10.2). U početnom trenutku tela imaju brzine \vec{V}_{10} i \vec{V}_{20} . Korišćenjem jednačine (10.2) dobijamo da se vektor brzine relativnog kretanja u početnom trenutku određuje na osnovu sledeće jednačine

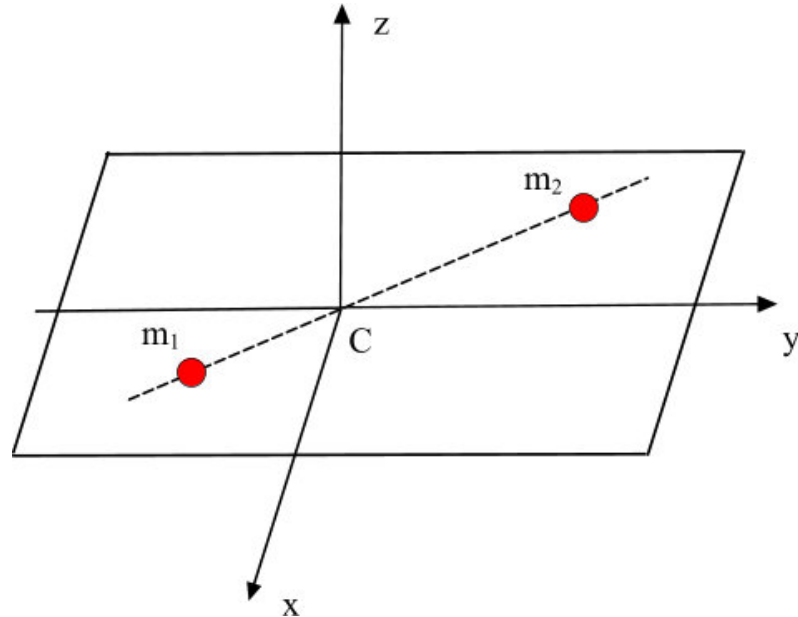
$$\vec{v}_0 = \vec{V}_{10} - \vec{V}_{20}$$

Vektori \vec{r}_0 i \vec{v}_0 odnosno njihove komponente određuju početne uslove. Ako su nam poznati početni uslovi sistem diferencijalnih jednačina (10.14-16) u principu mogao bi se rešiti. U određenim slučajevima morale bi se primenjivati i numeričke metode. Recimo da nakon određene matematičke procedure rešimo sistem diferencijalnih jednačina (10.14-16), i kao rešenje dobijemo funkcije $X_r(t)$, $Y_r(t)$ i $Z_r(t)$. Ove funkcije predstavljaju komponente vektora relativnog položaja. U skladu sa jednačinom (10.13) taj vektor može se izraziti na sledeći način

$$\vec{r} = X_r(t)\vec{i} + Y_r(t)\vec{j} + Z_r(t)\vec{k} \quad (10.17)$$

Odredili smo vektore \vec{r} i $\vec{R}_{cm}(t)$. Zamenom ovih vektora u jednačine (10.10) i (10.11) dobijamo vektore \vec{R}_1 i \vec{R}_2 . Oni opisuju položaje tela u laboratorijskom inercijalnom sistemu, i možemo smatrati da je problem kretanja dva tela rešen.

Opisana procedura može se koristiti za proučavanje kretanja dva tela, ali se u praksi zbog jednostavnosti primenjuje drugačiji pristup. Sada ću objasniti taj jednostavniji pristup. Konstatovali smo da se centar mase (tačka C) kreće po inerciji. Ta činjenica nam omogućuje da uvedemo jedan inercijalni sistem. Tačka C poklapa se sa početkom tog inercijalnog sistema. Za primenu je bitan slučaj kada se materijalne tačke kreću u istoj ravni. Ta ravan biće XY ravan koordinatnog sistema. Vektor relativnog položaja pripada XY ravni. Taj inercijalni sistem nazvaću sistem centra mase. Ovaj sistem označiću sa S_7 i prikazan je na slici 41.



Slika 41

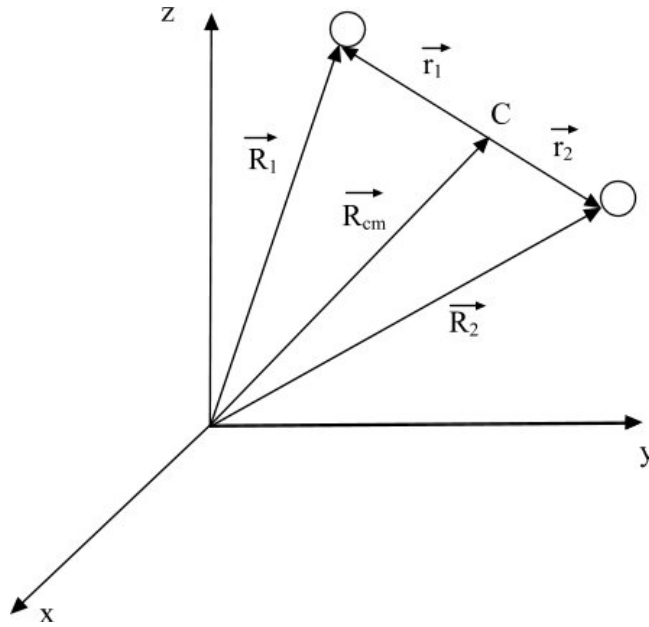
Postavlja se pitanje kako orjentisati ose ovog koordinatnog sistema. Osu x proizvoljno ću orjentisati. Osa y je ortogonalna na osu x , a z osa je odredjena uslovom da sa osama x i y čine trijedr desne orjentacije.

U laboratorijskom inercijalnom sistemu položaji materijalnih tačaka odredjeni su vektorima \vec{R}_1 i \vec{R}_2 . U sistemu centra mase položaji materijalnih tačaka odredjeni su sledećim vektorima

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_1 - \vec{R}_{cm} \quad (10.18)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_2 - \vec{R}_{cm} \quad (10.19)$$

Ovi vektori predstavljeni su na slici 42.



Slika 42

Zamenom jednačine (10.6) u jednačine (10.18) i (10.19), i nakon elementarnih algebarskih transformacija dobijaju se sledeći rezultati

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \vec{r} \quad (10.20)$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \vec{r} \quad (10.21)$$

Možemo napisati i odgovarajuće jednačine koje povezuju intenzitete vektora

$$r_1 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} r \quad (10.22)$$

$$r_2 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} r \quad (10.23)$$

Ako jednačinu (10.20) pomnožimo sa m_1 , a jednačinu (10.21) pomnožimo sa m_2 i tako dobijene jednačine saberemo dobićemo

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$$

, odnosno

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2 \quad (10.24)$$

Važi i sledeća jednačina

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad (10.25)$$

Vektori \vec{r}_1 i \vec{r}_2 uvek se nalaze na istoj pravoj. Ta prava povezuje materijalne tačke, i uvek prolazi kroz centar mase, odnosno početak koordinatnog sistema (slika 41).

Na osnovu jednačina (10.18) i (10.19) jednostavno je dokazati sledeću jednačinu

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$$

, odnosno

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r} \quad (10.26)$$

U laboratorijskom sistemu jednačina kretanja tela mase m_1 glasi

$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (10.27)$$

Ovu jednačinu transformisau na način da u njoj figuriše samo vektor \vec{r}_1 . Na osnovu jednačine (10.18) dobijam

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{R}}_1 - \ddot{\vec{R}}_{cm} \quad (10.28)$$

Ubrzanje centra mase jednako je nuli, i kao posledica te činjenice jednačina (10.28) postaje

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{R}}_1 \quad (10.29)$$

Zamenom jednačine (10.29) u jednačinu (10.27) dobijamo

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\gamma m_2}{r^3} \vec{r} \quad (10.30)$$

Potrebno je transformisati i desnu stranu jednačine (10.30). Da bi to uradio koristiću jednačine (10.20) i (10.22). Na osnovu tih jednačina dobijam sledeće jednačine

$$\vec{r} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{r}_1 \quad (10.31)$$

$$r = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1 \quad (10.32)$$

Zamenom jednačina (10.31) i (10.32) u jednačinu (10.30) i nakon elementarnih algebarskih transformacija dobijam sledeći rezultat

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\gamma m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \quad (10.33)$$

Možemo primeniti analognu proceduru i za drugo telo. U ovom slučaju polazi se od jednačine (10.4). Koriste se jednačine (10.21) i (10.23) i dobija se sledeći rezultat

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{\gamma m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \quad (10.34)$$

U cilju konciznijeg pisanja jednačina (10.33) i (10.34) uvodim sledeće veličine

$$\mu_1 = \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \quad (10.35)$$

$$\mu_2 = \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \quad (10.36)$$

Korišćenjem ovih veličina jednačine (10.33) i (10.34) dobijaju sledeću formu

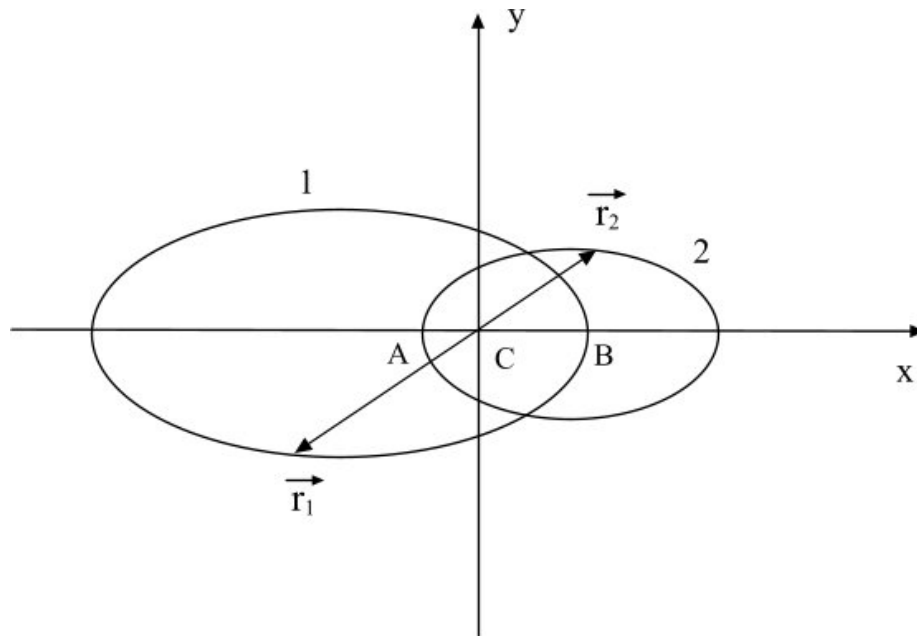
$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\gamma \mu_1}{r_1^3} \vec{r}_1 \quad (10.37)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{\gamma \mu_2}{r_2^3} \vec{r}_2 \quad (10.38)$$

Prezentovani pristup zasniva se na uvođenju sistema centra mase. Primenom ovog pristupa dobijene su jednačine (10.37) i (10.38). Ja sam se ograničio na slučaj kretanja materijalnih tačaka u istoj ravni. Prilikom analize Keplerovog problema pokazuje se da putanja tela može biti krug, elipsa, parabola ili hiperbola. Medjutim u slučaju sistema dva tela putanje materijalnih tačaka u sistemu centra mase (odnosno u laboratorijskom sistemu) mogu biti veoma složene. Ja ovde analiziram binarne zvezdane sisteme i ograničiću se samo na jednu klasu rešenja jednačina (10.37) i (10.38) koje imaju veliku primenu u astronomiji i astrofizici. Ta rešenja se odnose na slučaj kada su putanje zvezda u sistemu centra mase kružnice ili elipse.

Analiziraću najpre najgeneralniji slučaj kada se obe zvezde (materijalne tačke) kreću po elipsastim putanjama. Zvezde se kreću u istoj ravni. To je XY ravan sistema S_7 (slika 41). Svaka elipsa ima dve žiže. Za primenu je veoma bitan slučaj kada se žiže dveju elipsi nalaze na istoj pravoj. Pored

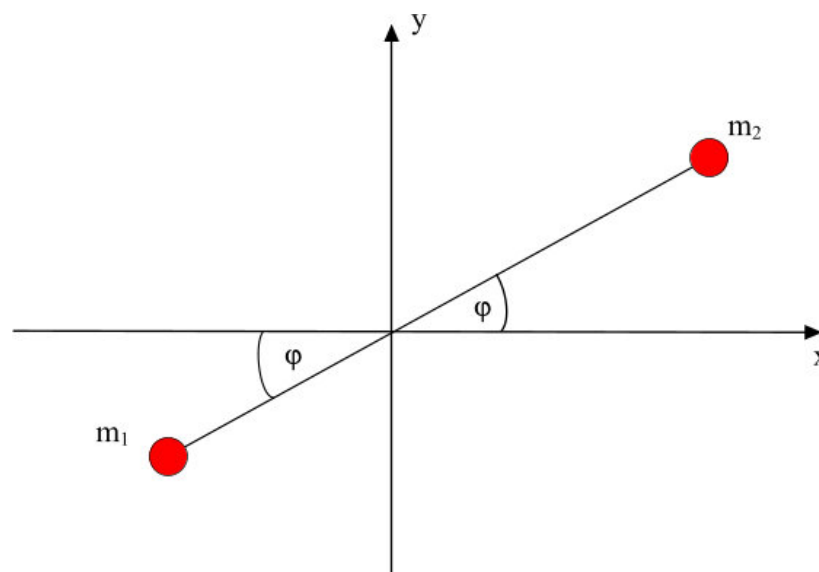
ovog uslova ispunjen je i zahtev da elipse imaju jednu zajedničku žižu koja se poklapa sa centrom mase sistema. Tačka gde se žiže poklapaju označena je sa C na slici 43.



Slika 43

x osa sistema centra mase prolazi kroz sve žiže elipse, a koordinatni početak sistema centra mase poklapa se sa tačkom C (slika 43). Istakao sam da se zvezde kreću oko zajedničkog centra mase, i da su njihovi položaji u sistemu centra mase određeni radijus vektorima \vec{r}_1 i \vec{r}_2 . Ovi vektori prikazani su na slici 43, i uvek se nalaze na istoj pravoj koja prolazi kroz centar mase sistema. Posmatranja pokazuju da predhodno opisana kretanja zaista postoje kod binarnih sistema. Ovakva kretanja treba dobiti matematičkim postupkom korišćenjem jednačina (10.37) i (10.38).

Na slici 44 prikazan je sistem centra mase i trenutni položaji materijalnih tačaka (zvezda), ali zbog preglednosti slike nisu nacrtane elipse. Jednačine (10.37) i (10.38) su u vektorskoj formi. Medjutim mnogo je podesnije za analizu binarnih sistema koristiti metode analitičke mehanike. Sa r_1 i r_2 označicu intenzitete radijus vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 respektivno.



Slika 44

Na slici 43 prikazane su dve elipse. Zbog generalnosti diskusije uzeo sam da elipse imaju različite velike poluose i ekscentricitete. Elipsa koja ima veću veliku poluosu označena je brojem 1 na slici 43. Telo mase m_1 kreće se po elipsi označenoj brojem 1, a telo mase m_2 kreće po elipsi označenoj brojem 2. Veliku poluosu elipse 1 označiću sa a_1 , a veliku poluosu elipse 2 sa a_2 . U jednom trenutku telo mase m_1 naći će se u položaju određenom tačkom B . Obzirom da se vektori \vec{r}_1 i \vec{r}_2 nalaze na istoj pravoj telo mase m_2 naći će se u položaju određenom tačkom A . U tom trenutku rastojanje između materijalnih tačaka (zvezda) je minimalno. To minimalno rastojanje označiću sa d i kasnije ću prezentovati jednačinu na osnovu koje se ono izračunava.

Zadržimo se najpre na kretanju tela mase m_1 . Na slici 44 označen je ugao φ . Pošto želim primeniti metode analitičke mehanike potrebne su mi generalisane koordinate i Lagranževa funkcija. Generalisane koordinate su r_1 i φ , a Lagranževa funkcija određena je razlikom kinetičke i potencijalne energije

$$L = E_k - E_p \quad (10.39)$$

Lagranževu funkciju za telo mase m_1 označiću sa L_1 . U skladu sa jednačinom (10.39) ona se može napisati na sledeći način

$$L_1 = E_{k1} - E_{p1}$$

Sa E_{k1} označena je kinetička energija tela mase m_1 , a sa E_{p1} njegova potencijalna energija. Korišćenjem generalisanih koordinata r_1 i φ jednostavno je dobiti kinetičku energiju. Ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\varphi}^2)$$

Da bi smo dobili potencijalnu energiju podsetimo se pojedinih rezultata iz sedmog poglavlja. U tom poglavlju analizirao sam kretanje planete oko Sunca. Lagranževa funkcija za taj slučaj ima oblik (jednačina (7.18))

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\gamma M_s m}{r} \quad (10.40)$$

Na osnovu ove jednačine konstatujemo da se potencijalna energija E_p određuje na osnovu sledeće jednačine

$$E_p = -\frac{\gamma M_s m}{r}$$

Masa planete označena je sa m , a masa Sunca sa M_s .

Jednačina (10.37) može se napisati u ekvivalentnom obliku

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\gamma \mu_1 m_1}{r_1^3} \vec{r}_1 \quad (10.41)$$

Jednačina (10.41) predstavlja jednačinu kretanja tela mase m_1 u sistemu centra mase. Jednačinu (10.41) možemo tumačiti na način da se telo mase m_1 kreće oko centra mase (tačke C), a da se u toj tački nalazi telo mase μ_1 . Sila na desnoj strani jednačine (10.41) ima matematičku formu koja odgovara matematičkoj formi gravitacione sile, i u skladu sa tim možemo uvesti gravitacionu potencijalnu energiju

$$E_{p1} = -\frac{\gamma m_1 \mu_1}{r_1}$$

Može se uspostaviti analogija sa primerom analiziranim u sedmom poglavlju. Tamo smo imali da planeta mase m orbitira oko Sunca, a ovde imamo da telo mase m_1 orbitira oko tela mase μ_1 .

Pošto smo odredili kinetičku i potencijalnu energiju jednostavno je dobiti Lagranževu funkciju za telo mase m_1 . Ona glasi

$$L_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\gamma m_1 \mu_1}{r_1} \quad (10.42)$$

Na osnovu ove Lagranževe funkcije dobijaju se dve diferencijalne jednačine

$$\ddot{r}_1 - r_1\dot{\varphi}^2 = -\frac{\gamma\mu_1}{r_1^2} \quad (10.43)$$

$$\frac{d(r_1^2\dot{\varphi})}{dt} = 0 \quad (10.44)$$

Uvodi se integraciona konstanta h_1 i jednačina (10.44) postaje

$$r_1^2\dot{\varphi} = h_1$$

, odnosno

$$\dot{\varphi} = \frac{h_1}{r_1^2}$$

Zamenom veličine $\dot{\varphi}$ u jednačinu (10.43) i nakon algebarskih transformacija dobija se sledeća jednačina

$$\ddot{r}_1 + \frac{\gamma\mu_1}{r_1^2} = \frac{h_1^2}{r_1^3}$$

Potrebno je rešiti ovu diferencijalnu jednačinu. Primenjujući metode prezentovane u sedmom poglavlju dobija se rezultat

$$r_1 = \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos(\varphi)} \quad (10.45)$$

Na osnovu ove jednačine zaključujemo da se telo mase m_1 kreće oko centra mase po elipsi. Veliku poluosu elipse označio sam sa a_1 , a ekscentricitet elipse sa e_1 .

Telo mase m_1 kreće se po elipsi i poseduje moment impulsa. Primenjujući metode prezentovane u sedmom poglavlju može se pokazati da se intenzitet vektora momenta impulsa određuje na osnovu jednačine

$$L_1 = m_1\sqrt{\gamma\mu_1 a_1(1 - e_1^2)} \quad (10.46)$$

Takodje se može pokazati da se ukupna energija tela mase m_1 određuje na osnovu jednačine

$$E_1 = -\frac{\gamma\mu_1 m_1}{2a_1} \quad (10.47)$$

, a ekscentricitet elipse na osnovu sledeće jednačine

$$e_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{L_1}{m_1}\right)^2 \frac{2E_1}{(\gamma\mu_1)^2 m_1}} \quad (10.48)$$

Potrebno je izvršiti analizu kretanja tela mase m_2 u sistemu centra mase. Zvezde se kreću oko zajedničkog centra mase i njihovi položaji u sistemu centra mase određeni su radijus vektorima \vec{r}_1 i \vec{r}_2 . Ovi vektori uvek se nalaze na istoj pravoj koja prolazi kroz centar mase (slika 43). Za opisivanje kretanja tela mase m_1 uvedene su generalisane koordinate r_1 i φ . Generalisane koordinate koje će se koristiti za opisivanje kretanja tela mase m_2 su r_2 i φ , i one su prikazane na slici 44. Lagranževu funkciju za telo mase m_2 označiću sa L_2 .

Jednačinu (10.41) tumačio sam na način da se telo mase m_1 kreće oko centra mase (tačke C), a da se u toj tački nalazi telo mase μ_1 . Daljom analizom dobio sam odgovarajuću potencijalnu energiju. Znajući potencijalnu energiju jednostavno je bilo dobiti Lagranževu funkciju L_1 . Sličan postupak primeniću i za kretanje tela mase m_2 . Jednačina (10.38) može se napisati u ekvivalentnom obliku

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{\gamma m_2 \mu_2}{r_2^3} \vec{r}_2 \quad (10.49)$$

Jednačinu (10.49) možemo tumačiti na način da se telo mase m_2 kreće oko centra mase (tačke C), a da se u toj tački nalazi telo mase μ_2 . Ako primenimo analizu koja je izvršena kod tela mase m_1 dobićemo da se potencijalna energija tela mase m_2 određuje na osnovu sledeće jednačine

$$E_{p2} = -\frac{\gamma m_2 \mu_2}{r_2}$$

Lagranževa funkcija za telo mase m_2 glasi

$$L_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\gamma m_2 \mu_2}{r_2} \quad (10.50)$$

Na osnovu ove Lagranževe funkcije dobijamo da se telo mase m_2 kreće oko centra mase po elipsi. Jednačina kretanja tela u polarnim koordinatama glasi

$$r_2 = \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos(\varphi)} \quad (10.51)$$

Veliku poluosu elipse označio sam sa a_2 , a ekscentricitet elipse sa e_2 .

Primenjujući metode prezentovane u sedmom poglavlju može se pokazati da se intenzitet vektora momenta impulsa tela mase m_2 određuje na osnovu jednačine

$$L_2 = m_2 \sqrt{\gamma \mu_2 a_2 (1 - e_2^2)} \quad (10.52)$$

Ukupna energija tela mase m_2 i ekscentricitet elipse određuju se na osnovu sledećih jednačina

$$E_2 = -\frac{\gamma \mu_2 m_2}{2a_2} \quad (10.53)$$

$$e_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{L_2}{m_2}\right)^2 \frac{2E_2}{(\gamma \mu_2)^2 m_2}} \quad (10.54)$$

Rastojanje između zvezda (materijalnih tačaka) određuje se na osnovu jednačine

$$r = r_1 + r_2 \quad (10.55)$$

Korišćenjem jednačina (10.45) i (10.51) dobijamo

$$r = \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos(\varphi)} + \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos(\varphi)} \quad (10.56)$$

U slučaju kada su ekscentriciteti elipsa jednaki

$$e_1 = e_2 = e$$

jednačina (10.56) dobija jednostavniju formu

$$r = \frac{(a_1 + a_2)(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi)} \quad (10.57)$$

U analizi kretanja dva tela često se koristi veličina a koja je definisana na sledeći način

$$a = a_1 + a_2 \quad (10.58)$$

, i jednačina (10.57) dobija sledeću formu

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi)} \quad (10.59)$$

Zvezde (materijalne tačke) kreću se po eliptičnim putanjama. Na slici 43 prikazane su dve elipse i označene su brojevima 1 i 2. U jednom trenutku rastojanje između zvezda imaće minimalnu vrednost. Položaji zvezda u tom trenutku označeni su tačkama A i B na slici 43. To minimalno rastojanje označio sam sa d . Sa slike 43 možemo zaključiti da se rastojanje d određuje na osnovu jednačine

$$d = CA + CB$$

Zvezde orbitiraju oko centra mase odnosno oko tačke C . Tačka C se poklapa sa žižom elipse 1 i sa žižom elipse 2. Veliku poluosu elipse 1 označio sam sa a_1 , a veliku poluosu elipse 2 sa a_2 . U trenutku kada je minimalno rastojanje između zvezda one se tada nalaze u perihelima eliptičnih orbita,

odnosno one su tada minimalno udaljene od žiže koja se poklapa sa tačkom C . Korišćenjem rezultata prezentovanih u sedmom poglavlju dobijamo sledeće jednačine

$$CB = a_1(1 - e_1)$$

$$CA = a_2(1 - e_2)$$

, odnosno

$$d = a_1(1 - e_1) + a_2(1 - e_2)$$

U slučaju kada elipse imaju jednake ekscentricitete

$$e_1 = e_2 = e$$

rastojanje d određuje se na osnovu jednačine

$$d = (a_1 + a_2)(1 - e) \quad (10.60)$$

Zamenom jednačine (10.58) u jednačinu (10.60) dobijamo

$$d = a(1 - e) \quad (10.61)$$

Ova jednačina može se dobiti i korišćenjem jednačine (10.59). U jednačini (10.59) figuriše ugao φ . Ugao φ prikazan je na slici 44. Kada su zvezde minimalno udaljene jedna od druge ugao φ jednak je nuli, a rastojanje r jednako je d . Korišćenjem ovih zaključaka na osnovu jednačine (10.59) dobijamo

$$d = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(0)}$$

, odnosno

$$d = a(1 - e)$$

Ovaj rezultat je identičan sa predhodno prezentovanim rezultatom za izračunavanje minimalnog rastojanja između zvezda.

Sada ću odrediti periode obilaska zvezda oko centra mase. Da bi to uradio potrebno je najpre da se podsetimo pojedinih rezultata iz sedmog poglavlja. U sedmom poglavlju analizirano je kretanje planete oko Sunca i matematički je dokazan treći Keplerov zakon (jednačina (7.48))

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M_s}$$

Sa M_s označena je masa Sunca, a sa T period obilaska planete oko Sunca. Velika poluosa eliptične orbite označena je sa a .

Odredimo najpre period obilaska zvezde mase m_1 oko centra mase. Taj period označiću sa T_1 . Već sam konstatovao da jednačinu (10.41) možemo tumačiti na način da se telo mase m_1 kreće oko centra mase (tačke C), a da se u toj tački nalazi telo mase μ_1 . Telo mase m_1 kreće se po eliptičnoj orbiti, a sila na desnoj strani jednačine (10.41) ima matematičku formu koja odgovara matematičkoj formi gravitacione sile. Ove činjenice navode nas na zaključak da za kretanje tela mase m_1 oko centra mase možemo primeniti treći Keplerov zakon. Primenom trećeg Keplerovog zakona dobijamo

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 a_1^3}{\gamma \mu_1} \quad (10.62)$$

Zamenom jednačine (10.35) u jednačinu (10.62) dobijamo

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 a_1^3 (m_1 + m_2)^2}{\gamma m_2^3} \quad (10.63)$$

I u ovom slučaju može se uspostaviti analogija sa primerom analiziranim u sedmom poglavlju. U tom poglavlju dat je primer planete mase m koja orbitira oko Sunca, a ovde imamo da telo mase m_1 orbitira oko tela mase μ_1 .

Potrebno je odrediti i period obilaska tela mase m_2 oko centra mase. Taj period označiću sa T_2 . U ovom slučaju polazna jednačina je jednačina (10.49). Primenjujući analognu proceduru kao kod tela mase m_1 može se pokazati da i za slučaj kretanja tela mase m_2 može se primeniti treći Keplerov zakon

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2 a_2^3}{\gamma \mu_2} \quad (10.64)$$

Zamenom jednačine (10.36) u jednačinu (10.64) dobijamo

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2 a_2^3 (m_1 + m_2)^2}{\gamma m_1^3} \quad (10.65)$$

Sada ću odrediti uslov koji treba da bude ispunjen da bi periodi bili jednaki. Polazim od jednačine

$$T_1^2 = T_2^2$$

Na osnovu jednačina (10.63) i (10.65) dobijamo

$$\frac{4\pi^2 a_1^3 (m_1 + m_2)^2}{\gamma m_2^3} = \frac{4\pi^2 a_2^3 (m_1 + m_2)^2}{\gamma m_1^3}$$

, odnosno

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad (10.66)$$

Ovo je uslov koji treba biti ispunjen da bi periodi bili jednaki.

U predhodnom tekstu uvedena je veličina a (jednačina (10.58)). Na osnovu jednačina (10.58) i (10.66) dobijamo sledeće jednačine

$$a_1 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} a \quad (10.67)$$

$$a_2 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} a \quad (10.68)$$

Ukupnu masu binarnog sistema označiću sa M i ona se određuje na osnovu jednačine

$$M = m_1 + m_2 \quad (10.69)$$

Sada ću pokazati da se period T_1 može izraziti preko veličina a i M . Zamenom jednačine (10.67) u jednačinu (10.63) dobija se

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma (m_1 + m_2)}$$

, odnosno

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M} \quad (10.70)$$

Period T_2 određuje se na osnovu jednačine (10.65). Ova jednačina može se transformisati korišćenjem jednačina (10.68) i (10.69), i dobija se rezultat

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M} \quad (10.71)$$

Na osnovu jednačina (10.70) i (10.71) zaključujemo da su periodi kretanja zvezda (materijalnih tačaka) oko centra mase jednaki

$$T_1 = T_2$$

Ovu jednačinu napisaću u obliku

$$T_1 = T_2 = T$$

Sa T je označen period kretanja tela mase m_1 (odnosno tela mase m_2) oko centra mase. U skladu sa tim jednačinu (10.70) ili jednačinu (10.71) možemo napisati u obliku

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M} \quad (10.72)$$

Ekscentriciteti elipsa određuju se na osnovu jednačina (10.48) i (10.54)

$$e_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{L_1}{m_1}\right)^2 \frac{2E_1}{(\gamma \mu_1)^2 m_1}}$$

$$e_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{L_2}{m_2}\right)^2 \frac{2E_2}{(\gamma\mu_2)^2 m_2}}$$

Određiću uslov koji treba biti ispunjen da bi ekscentriciteti elipsa bili jednaki

$$e_1 = e_2 \quad (10.73)$$

Zamenom jednačina (10.48) i (10.54) u jednačinu (10.73) dobijamo

$$\left(\frac{L_1}{m_1}\right)^2 \frac{2E_1}{(\gamma\mu_1)^2 m_1} = \left(\frac{L_2}{m_2}\right)^2 \frac{2E_2}{(\gamma\mu_2)^2 m_2}$$

Ovu jednačinu dalje transformišemo korišćenjem jednačina (10.47) i (10.53), i dobijamo sledeći rezultat

$$\left(\frac{L_1}{m_1}\right)^2 \frac{1}{\gamma\mu_1 a_1} = \left(\frac{L_2}{m_2}\right)^2 \frac{1}{\gamma\mu_2 a_2}$$

Zamenom jednačina (10.35) i (10.36) u ovu jednačinu dobija se rezultat

$$\frac{L_2^2}{L_1^2} = \frac{m_1 a_2}{m_2 a_1} \quad (10.74)$$

Na osnovu jednačine (10.66) dobijamo

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (10.74) dobija se

$$\frac{L_2^2}{L_1^2} = \frac{m_1^2}{m_2^2}$$

, odnosno

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{m_1}{m_2} \quad (10.75)$$

Ovo je uslov koji treba biti ispunjen da bi ekscentriciteti elipsa bili jednaki.

Ukupna energija tela mase m_1 određuje se na osnovu jednačine (10.47), a ukupna energija tela mase m_2 na osnovu jednačine (10.53). Ukupnu energiju ovog binarnog sistema označiću sa E . Ona je konstantna veličina jer je sistem izolovan, i jednaka je zbiru energija E_1 i E_2

$$E = E_1 + E_2$$

, odnosno

$$E = -\frac{\gamma m_1 \mu_1}{2a_1} + \left(-\frac{\gamma m_2 \mu_2}{2a_2}\right) \quad (10.76)$$

Zamenom jednačina (10.35), (10.36), (10.67) i (10.68) u jednačinu (10.76) i nakon niza algebarskih transformacija dobija se rezultat

$$E = -\frac{\gamma m_1 m_2}{2a} \quad (10.77)$$

Zvezde (materijalne tačke) kreću se po eliptičnim putanjama (slika 43). Te putanje nalaze se u XY ravni sistema centra mase. z osa sistema centra mase normalna je na ravan XY , a njen smer određen je uslovom da se dobije sistem desne orijentacije. Jedinični vektor z ose označiću sa \vec{k} . Intenzitet vektora momenta impulsa tela mase m_1 određuje se na osnovu jednačine (10.46), a intenzitet vektora momenta impulsa tela mase m_2 određuje se na osnovu jednačine (10.52). Zbog važnosti ovih jednačina za dalju analizu ponovo ih navodim

$$L_1 = m_1 \sqrt{\gamma \mu_1 a_1 (1 - e_1^2)}$$

$$L_2 = m_2 \sqrt{\gamma \mu_2 a_2 (1 - e_2^2)}$$

Obzirom da se zvezde kreću u XY ravni pravci vektora \vec{L}_1 i \vec{L}_2 normalni su na tu ravan. Ja ću izabrati takav smer kretanja zvezda da kao posledica toga vektor \vec{L}_1 i \vec{L}_2 imaju isti smer kao i jedinični vektor \vec{k} . U skladu sa tom konstatacijom važe sledeće jednačine

$$\vec{L}_1 = m_1 \sqrt{\gamma \mu_1 a_1 (1 - e_1^2)} \vec{k} \quad (10.78)$$

$$\vec{L}_2 = m_2 \sqrt{\gamma \mu_2 a_2 (1 - e_2^2)} \vec{k} \quad (10.79)$$

Ukupni moment impulsa ovog binarnog sistema koji ću označiti sa \vec{L} jednak je zbiru vektora \vec{L}_1 i \vec{L}_2

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \quad (10.80)$$

U slučaju kada elipse imaju iste ekscentricitete jednačine (10.78) i (10.79) postaju

$$\vec{L}_1 = m_1 \sqrt{\gamma \mu_1 a_1 (1 - e^2)} \vec{k} \quad (10.81)$$

$$\vec{L}_2 = m_2 \sqrt{\gamma \mu_2 a_2 (1 - e^2)} \vec{k} \quad (10.82)$$

Odrediću intenzitet vektora \vec{L} u slučaju kada elipse imaju iste ekscentricitete. Da bi to postigao najpre ću iskoristiti sledeći identitet

$$\vec{L} \cdot \vec{L} = (\vec{L}_1 + \vec{L}_2) \cdot (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)$$

, odnosno

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2$$

Vektor \vec{L}_1 i \vec{L}_2 su kolinearni, i predhodna jednačina dobija sledeći oblik

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \quad (10.83)$$

Kvadrat intenziteta vektora \vec{L}_1 određuje se na osnovu jednačine

$$L_1^2 = m_1^2 \gamma \mu_1 a_1 (1 - e^2) \quad (10.84)$$

Zamenom jednačina (10.35) i (10.67) u jednačinu (10.84) i nakon niza algebarskih transformacija dobija se sledeći rezultat

$$L_1^2 = \gamma a (1 - e^2) \frac{m_1^2 m_2^4}{(m_1 + m_2)^3} \quad (10.85)$$

Potrebno je odrediti i kvadrat intenziteta vektora \vec{L}_2 . Kvadriranjem jednačine (10.82) dobijam

$$L_2^2 = m_2^2 \gamma \mu_2 a_2 (1 - e^2) \quad (10.86)$$

Zamenom jednačina (10.36) i (10.68) u jednačinu (10.86) dobija se sledeći rezultat

$$L_2^2 = \gamma a (1 - e^2) \frac{m_2^2 m_1^4}{(m_1 + m_2)^3} \quad (10.87)$$

Sabiranjem jednačina (10.85) i (10.87) dobijamo

$$L_1^2 + L_2^2 = \gamma a (1 - e^2) \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1^2 + m_2^2)}{(m_1 + m_2)^3} \quad (10.88)$$

Treba odrediti i faktor $2L_1 L_2$. Na osnovu jednačina (10.81) i (10.82) dobijamo

$$2L_1 L_2 = 2m_1 m_2 \sqrt{\gamma \mu_1 a_1 (1 - e^2)} \sqrt{\gamma \mu_2 a_2 (1 - e^2)} \quad (10.89)$$

Zamenom jednačina (10.35), (10.36), (10.67) i (10.68) u jednačinu (10.89), i nakon niza algebarskih transformacija dobija se rezultat

$$2L_1 L_2 = 2m_1 m_2 \gamma a (1 - e^2) \frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^3} \quad (10.90)$$

Zamenom jednačina (10.88) i (10.90) u jednačinu (10.83) dobijamo

$$L^2 = \gamma a (1 - e^2) \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1^2 + m_2^2)}{(m_1 + m_2)^3} + 2m_1 m_2 \gamma a (1 - e^2) \frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^3}$$

, odnosno

$$L^2 = \gamma a(1 - e^2) \frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^3} (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2)$$

Ova jednačina dalje se pojednostavljuje korišćenjem definicije kvadrata binoma

$$L^2 = \gamma a(1 - e^2) \frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^3} (m_1 + m_2)^2$$

, odnosno

$$L^2 = \gamma a(1 - e^2) \frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)} \quad (10.91)$$

Intenzitet vektora \vec{L} u slučaju kada elipse imaju iste ekscentricitete određuje se na osnovu jednačine

$$L = m_1 m_2 \sqrt{\frac{\gamma a(1 - e^2)}{m_1 + m_2}} \quad (10.92)$$

Vektor \vec{L} možemo zapisati na sledeći način

$$\vec{L} = L \vec{k}$$

, odnosno

$$\vec{L} = m_1 m_2 \sqrt{\frac{\gamma a(1 - e^2)}{m_1 + m_2}} \vec{k} \quad (10.93)$$

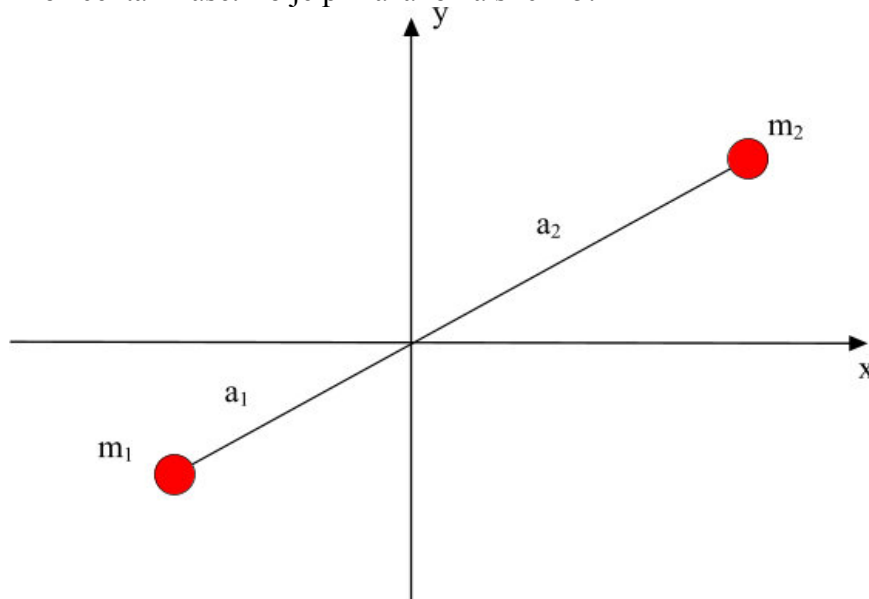
Intenzitet vektora \vec{L} možemo povezati sa periodom T koji se određuje na osnovu jednačine (10.72)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M}$$

Na osnovu jednačina (10.92) i (10.72) dobija se sledeći rezultat

$$L = \frac{\gamma m_1 m_2 T}{2\pi a} \sqrt{1 - e^2} \quad (10.94)$$

U dosadašnjem tekstu prezentovao sam analizu za slučaj kretanja materijalnih tačaka (zvezda) po eliptičnim putanjama. U slučaju kada se materijalne tačke (zvezde) kreću po kružnicama analiza je dosta jednostavnija. Analiza biće izvršena za kretanje materijalnih tačaka u sistemu centra mase. Poluprečnike kružnica označiću sa a_1 i a_2 . Kao i u slučaju kretanja tela po eliptičnim putanjama prava koja spaja tela prolazi kroz centar mase. To je prikazano na slici 45.



Slika 45

Tela imaju istu ugaonu brzinu koju ću označiti sa ω . Brzine materijalnih tačaka određuju se na osnovu jednačina

$$v_1 = a_1 \omega \quad (10.95)$$

$$v_2 = a_2 \omega \quad (10.96)$$

Intenzitet gravitacione sile koja deluje na tela iznosi

$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{(a_1 + a_2)^2}$$

Analizirajmo najpre kretanje tela mase m_1 . Potrebno je izjednačiti centripetalnu i gravitacionu silu

$$\frac{m_1 v_1^2}{a_1} = \frac{\gamma m_1 m_2}{(a_1 + a_2)^2} \quad (10.97)$$

Zamenom jednačine (10.95) u jednačinu (10.97) dobijamo sledeći rezultat

$$a_1 \omega^2 = \frac{\gamma m_2}{(a_1 + a_2)^2} \quad (10.98)$$

I u slučaju tela mase m_2 takodje izjednačujemo centripetalnu i gravitacionu silu

$$\frac{m_2 v_2^2}{a_2} = \frac{\gamma m_1 m_2}{(a_1 + a_2)^2} \quad (10.99)$$

Zamenom jednačine (10.96) u jednačinu (10.99) dobijamo rezultat

$$a_2 \omega^2 = \frac{\gamma m_1}{(a_1 + a_2)^2} \quad (10.100)$$

Da bi smo dobili ugaonu brzinu saberimo najpre jednačine (10.98) i (10.100)

$$\omega^2 (a_1 + a_2) = \frac{\gamma (m_1 + m_2)}{(a_1 + a_2)^2}$$

Iz ove jednačine jednostavno je odredi ugaonu brzinu

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma (m_1 + m_2)}{(a_1 + a_2)^3}} \quad (10.101)$$

Period rotacije materijalnih tačaka oko centra mase i ugaona brzina povezani su sledećom jednačinom

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Zamenom ove jednačine u jednačinu (10.101) i nakon algebarskih transformacija dobijam rezultat

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (a_1 + a_2)^3}{\gamma (m_1 + m_2)}$$

, odnosno

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M} \quad (10.102)$$

Ova jednačina predstavlja treći Keplerov zakon.

U sedmom poglavlju analizirao sam Keplerov problem. Na slici 20 prikazano je kretanje planete oko Sunca. Planeta se kreće po eliptičnoj putanji. Rastojanje izmedju Sunca i planete označio sam sa r . Promena rastojanja r u zavisnosti od ugla φ određuje se na osnovu jednačine (7.15).

Obzirom da se planeta kreće oko Sunca ugao φ menja se tokom vremena. U skladu sa tim definisao sam ugaonu brzinu

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Zavisnost veličine $\dot{\varphi}$ od ugla φ određuje se na osnovu jednačine (7.66). Zbog potrebe dalje analize ovu jednačinu ponovo navodim

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{\gamma M_s}{a^3}} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e \cos \varphi)^2$$

U slučaju binarnog sistema prikazanog na slici 43 može se izvršiti slična analiza. Na slici 43 prikazan je slučaj kretanja zvezda po elipsastim putanjama. Zvezde se kreću u istoj ravni. Elipse imaju jednu zajedničku žižu koja se poklapa sa centrom mase sistema. Tačka gde se žiže poklapaju označena je sa C . Zbog jednostavnosti analize uzeću da elipse imaju iste ekscentricitete. Položaji zvezda određeni su radijus vektorima \vec{r}_1 i \vec{r}_2 . Ovi vektori prikazani su na slici 43, i uvek se nalaze na istoj pravoj koja prolazi kroz centar mase sistema.

U dosadašnjem tekstu uveo sam orbitalni koordinatni sistem. Označio sam ga sa S_4 , i on je prikazan na slici 13. U cilju analize binarnog sistema prikazanog na slici 43 potrebno je koristiti orbitalni koordinatni sistem. Uzeću da se početak sistema S_4 poklapa sa tačkom C . Na slici 43 označene su ose x i y . To su koordinatne ose sistema S_4 . Položaji zvezda u sistemu S_4 određeni su radijus vektorima \vec{r}_1 i \vec{r}_2 . Intenzitete radijus vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 označiću sa r_1 i r_2 respektivno.

Na slici 44 ponovo je prikazan binarni sistem, ali zbog preglednosti slike nisu nacrtane elipse. Na slici je označen i ugao φ . Zvezde se kreću oko centra mase i ugao φ menja se tokom vremena. Može se definisati ugaona brzina

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Cilj ove analize je određivanje zavisnosti veličine $\dot{\varphi}$ od ugla φ .

Veličine r_1 i φ predstavljaju polarne koordinate. U skladu sa tim radijus vektor \vec{r}_2 može se napisati na sledeći način

$$\vec{r}_2 = r_2 \vec{e}_r \quad (10.103)$$

U dosadašnjem tekstu istakao sam da je \vec{e}_r jedinični vektor, i da je usmeren od koordinatnog početka sistema S_4 ka trenutnom položaju materijalne tačke, u ovom slučaju zvezde. Prilikom korišćenja polarnih koordinata uvodi se i vektor \vec{e}_φ . On je takodje jedinični vektor i njegov pravac normalan je na pravac vektora \vec{e}_r . Može se pokazati da važi sledeća jednačina

$$\vec{e}_\varphi = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \quad (10.104)$$

Uvodi se i vektor \vec{e}_z . Njegov pravac je normalan na ravan u kojoj se kreće materijalna tačka. On sa vektorima \vec{e}_r i \vec{e}_φ čini trijedar desne orijentacije.

Istakao sam da se radijus vektori \vec{r}_1 i \vec{r}_2 uvek nalaze na istoj pravoj koja prolazi kroz centar mase sistema. Za ove vektore važi jednačina (10.24)

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2$$

Na osnovu jednačine (10.24) i jednačine (10.103) dobija se sledeći rezultat

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} r_2 \vec{e}_r \quad (10.105)$$

Na osnovu jednačine (10.103) dobijam

$$\vec{v}_2 = \frac{d(r_2 \vec{e}_r)}{dt}$$

, odnosno

$$\vec{v}_2 = \frac{dr_2}{dt} \vec{e}_r + r_2 \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Ova jednačina dalje se transformiše na sledeći način

$$\vec{v}_2 = \frac{dr_2}{dt} \vec{e}_r + r_2 \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

Korišćenjem jednačine (10.104) dobijam rezultat

$$\vec{v}_2 = \dot{r}_2 \vec{e}_r + r_2 \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (10.106)$$

Vektor brzine \vec{v}_1 dobija se korišćenjem jednačine (10.105), jednačine (10.104) i primenom predhodno opisane procedure

$$\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} (\dot{r}_2 \vec{e}_r + r_2 \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) \quad (10.107)$$

Da bi odredio promenu veličine $\dot{\varphi}$ od ugla φ potrebno je prezentovati dodatne jednačine za ukupni moment impulsa binarnog sistema. Ukupni moment impulsa binarnog sistema određuje se na osnovu jednačine (10.80). Sa \vec{L}_1 označen je moment impulsa zvezde mase m_1 , a sa \vec{L}_2 označen je moment impulsa zvezde mase m_2 .

Vektor \vec{L}_2 određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{L}_2 = m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \quad (10.108)$$

Zamenom jednačina (10.103) i (10.106) u jednačinu (10.108) dobijam

$$\vec{L}_2 = m_2 (r_2 \vec{e}_r) \times (\dot{r}_2 \vec{e}_r + r_2 \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)$$

, odnosno

$$\vec{L}_2 = m_2 (r_2)^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \quad (10.109)$$

Vektor \vec{L}_1 određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{L}_1 = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 \quad (10.110)$$

Zamenom jednačina (10.105) i (10.107) u jednačinu (10.110) dobijam

$$\vec{L}_1 = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 (r_2 \vec{e}_r) \times (\dot{r}_2 \vec{e}_r + r_2 \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)$$

, odnosno

$$\vec{L}_1 = \frac{(m_2)^2}{m_1} (r_2)^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \quad (10.111)$$

Zamenom jednačina (10.109) i (10.111) u jednačinu (10.80) dobijam sledeći rezultat

$$\vec{L} = \left[m_2 (r_2)^2 + \frac{(m_2)^2}{m_1} (r_2)^2 \right] \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (10.23) i dobijam rezultat

$$\vec{L} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \quad (10.112)$$

Ukupni moment impulsa binarnog sistema određuje se i na osnovu jednačine (10.93). Izjednačavanjem jednačine (10.112) sa jednačinom (10.93) dobijam sledeći rezultat

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \dot{\varphi} = m_1 m_2 \sqrt{\frac{\gamma a (1 - e^2)}{m_1 + m_2}}$$

, odnosno

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r^2} \sqrt{m_1 + m_2} \sqrt{\gamma a (1 - e^2)} \quad (10.113)$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (10.59) i dobija se zavisnosti veličine $\dot{\varphi}$ od ugla φ

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{a^3}} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e \cos \phi)^2 \quad (10.114)$$

11. Gravitacioni talasi

Jedno od predviđanja opšte teorije relativnosti su gravitacioni talasi. Ajnštajn je u svom radu iz 1918 godine analizirao gravitacione talase i prezentovao je tzv. kvadropolnu formulu. Da bi smo bolje shvatili gravitacione talase, podsetimo se određenih rezultata iz elektrodinamike. Ako se naelektrisane čestice kreću ubrzano one emituju elektromagnetne talase. Zbog emisije elektromagnetnih talasa sistem gubi energiju. Sličnu situaciju imamo i u okviru opšte teorije relativnosti. Ja ovom prilikom neću navoditi konkretne matematičke jednačine koje opisuju gravitacione talase, i uslove koji moraju biti ispunjeni da bi došlo do emisije gravitacionih talasa, ali ću iskoristiti predhodno navedeni rezultat iz elektrodinamike u vezi emisije elektromagnetnih talasa. Može se uvesti analogija sa elektrodinamikom i očekivati da čestice koje imaju masu i kreću se ubrzano emituju gravitacione talase. Zbog emisije gravitacionih talasa čestice gube energiju, a snaga gravitacione radijacije određuje se korišćenjem Ajnštajnovih kvadropolnih formula.

U dosadašnjem tekstu više puta sam ukazao na problem koji je karakterističan za opštu teoriju relativnosti. Taj problem je u tome da efekti koje predviđa opšta teorija relativnosti su veoma mali, i teško ih je eksperimentalno proveriti. Ovo ima za posledicu da postoji mali broj eksperimenata koji čine eksperimentalnu osnovu opšte teorije relativnosti.

I u slučaju gravitacionih talasa opet smo suočeni sa ovim problemom. Gravitacioni talasi veoma slabo interaguju sa materijom kroz koju prolaze. U današnje vreme ulaže se dosta napora i finansijskih sredstava u cilju detekcije gravitacionih talasa, ali do sada nije ostvarena direktna detekcija gravitacionih talasa. Postoji jedino indirektni dokaz postojanja gravitacionih talasa. Centralno mesto u tom indirektnom dokazivanju egzistencije gravitacione radijacije pripada binarnom zvezdanom sistemu koji se sastoji od pulsara PSR 1913+16 i neutronske zvezde. Rasel i Tejlor (Russell Hulse, Joseph Taylor) najpre su detektovali pulsar iz ovog binarnog sistema, a kasnije su analizom podataka utvrdili i postojanje neutronske zvezde. Ovaj binarni sistem predstavlja pravu laboratoriju za proučavanje efekata koje predviđa opšta teorija relativnosti. Ja ću ga nazvati Rasel – Tejlorov binarni sistem.

Pulsari su neutronske zvezde poluprečnika oko 10 km. Pulsari izuzetno brzo rotiraju. Periodi rotacije otkrivenih pulsara pripadaju intervalu od 0,00139 sekundi (PSR J1748-2446 ad) do 11,77894 sekunde (PSR J1841-0456). Pulsar PSR J1748-2446 ad napravi oko 719 obrtaja u sekundi. Za pulsare je karakteristično da imaju veoma jako magnetno polje, i da im je gustina izuzetno velika. Pravac ose rotacije pulsara i pravac magnetnog polja u opštem slučaju ne poklapaju se. Pulsari u pravcu ose svog magnetnog polja emituju elektromagnetno zračenje. Većina pulsara su tzv. radio pulsari, odnosno najveći deo elektromagnetnog zračenja koje emituju pripada oblasti radio talasa. Međutim kod pojedinih pulsara astronomi su uspeli da pored radio talasa detektuju i vidljivu svetlost, X zrake i γ zrake. Detekcija radio talasa u slučaju pulsara je najjednostavnija. Analizom podataka dobijenih metodama radioastronomije dobijeno je mnogo dragocenih informacija o ovim astronomskim objektima. Kada radio talas pogodi detektor na Zemlji onda mi registrujemo jedan kratkotrajni impuls. Nakon vremena koje je jednako periodu rotacije pulsara detektuje se sledeći impuls, i na taj način registruje se veoma veliki broj kratkotrajnih radio impulsa. I u slučaju Rasel – Tejlorovog binarnog sistema registrovani su ovi impulsi. Analizom tih radio impulsa određene su sa izuzetno visokom preciznošću karakteristike orbita pulsara PSR 1913+16 i neutronske zvezde. Merenja ovog binarnog

sistema vršena su preko 30 godina. Utvrđeno je da masa pulsara iznosi 1,441 mase Sunca, a masa neutronske zvezde iznosi 1,387 mase Sunca.

Pulsar i neutronska zvezda kreću se po eliptičnim orbitama oko zajedničkog centra mase. Binarne zvezdane sisteme analizirao sam u desetom poglavlju sa stanovišta Njutnove mehanike. Na slici 43 prikazane su putanje dveju zvezda koje se kreću oko zajedničkog centra mase. Zbog generalnosti diskusije tom prilikom uzeo sam da elipse koje su prikazane na slici 43 imaju različite ekscentricitete. Konstatovao sam da u jednom trenutku rastojanje između zvezda ima minimalnu vrednost. Položaji zvezda u tom trenutku označeni su tačkama A i B na slici 43. To minimalno rastojanje označio sam sa d . Veliku poluosu elipse 1 označio sam sa a_1 , a veliku poluosu elipse 2 sa a_2 . Pokazao sam da se minimalno rastojanje u slučaju kada elipse imaju ekscentricitete e_1 i e_2 određuje na osnovu jednačine

$$d = a_1(1 - e_1) + a_2(1 - e_2)$$

U slučaju kada elipse imaju jednake ekscentricitete

$$e_1 = e_2 = e$$

rastojanje d određuje se na osnovu jednačine (10.60)

$$d = (a_1 + a_2)(1 - e)$$

, odnosno jednačine (10.61)

$$d = a(1 - e)$$

Pulsar PSR 1913+16 i neutronska zvezda koji čine Rasel – Tejlorov binarni sistema takodje se kreću oko centra mase. Za dalju analizu možemo koristiti sliku 43, ali moram učiniti jednu digresiju. Digresija se sastoji u sledećem. Slika 43 odnosi se na najgeneralniji slučaj kada elipse imaju različite ekscentricitete. U slučaju Rasel – Tejlorovog binarnog sistema elipse po kojima se kreću pulsar i neutronska zvezda imaju jednake ekscentricitete. Vrednost ekscentriciteta iznosi 0,617 i ona je određena analizom radio pulseva. U skladu sa tim rastojanje d određuje se na osnovu jednačine (10.61).

Medjutim kako ovu analizu povezati sa konstatacijom da je proučavanjem ovog binarnog sistema indirektno dokazana egzistencija gravitacionih talasa. Da bi smo to postigli koristićemo analogiju sa elektrodinamikom. Na slici 43 prikazane su putanje kretanja dveju zvezda oko centra mase. Zamislimo sada kretanje dve naelektrisane čestice oko centra mase. Njihovo kretanje je ubrzano i dolazi do emisije elektromagnetnih talasa.

Koristeći ovaj primer iz elektrodinamike Rasel – Tejlorov binarni sistem možemo posmatrati na sledeći način. Pulsar i neutronska zvezda kreću se ubrzano i dolazi do emisije gravitacionih talasa, i usled toga se smanjuje energija ovog sistema. To ima za posledicu da se smanjuje rastojanje d , ali se smanjuje i period rotacije pulsara (neutronske zvezde) oko centra mase. Ovaj period se u literaturi obično označava sa T . Njegova vrednost iznosi 7,753 časova. Karakteristike ovog binarnog sistema (a među njima i period rotacije) praćene su preko trideset godina, i utvrđeno je da se period rotacije smanji 0,0000765 sekundi za jednu godinu. Ova promena perioda rotacije je u izuzetnoj saglasnosti sa predviđanjima opšte teorije relativnosti. Analiza podataka dobijenih proučavanjem Rasel – Tejlorovog binarnog sistema pružila je indirektni dokaz o postojanju gravitacionih talasa. O ovom binarnom sistemu i karakteristikama pulsara biće još reči kada se vrši detaljnija analiza ovog sistema sa stanovišta opšte teorije relativnosti i gravitoelektromagnetizma.

Na osnovu kvadropolne formule sledi da snaga gravitacione radijacije zavisi od mase i brzine tela. Jedino astrofizički objekti mogu predstavljati značajne izvore gravitacione radijacije, jer oni imaju veliku masu, a pojedini se kreću i relativističkim brzinama. U pojedinim slučajevima snaga gravitacione radijacije je mala, dok u pojedinim slučajevima može imati značajnu vrednost. Kao ilustraciju ove tvrdnje uzmimo najpre primer sistema kojeg čine Sunce i Zemlja. Zemlja se kreće po eliptičnoj putanji oko Sunca. Njeno kretanje je ubrzano, i u skladu sa opštom teorijom relativnosti Zemlja emituje gravitacione talase, ali snaga gravitacione radijacije je svega 200 W. Ovo je u

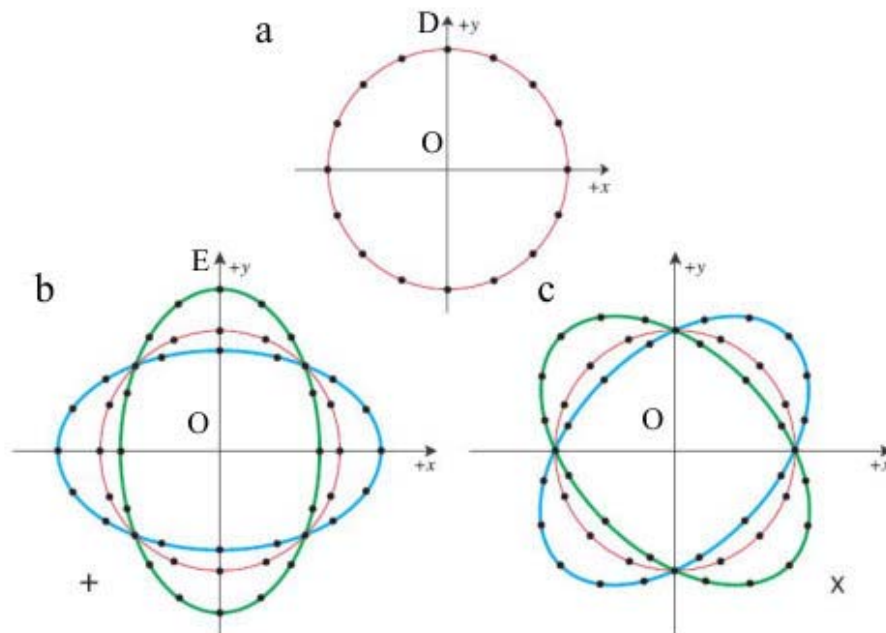
potpunosti zanemarljivo u poredjenju sa snagom totalne elektromagnetne radijacije koju emituje Sunce, i čija vrednost je oko $3,86 \cdot 10^{26} W$.

Istakao sam da u pojedinim slučajevima snaga gravitacione radijacije može imati značajnu vrednost. Kao ilustraciju te tvrdnje razmotrimo sledeći primer. Neka se binarni sistem sastoji od dve neutronske zvezde koje orbitiraju oko zajedničkog centra mase. Neka se neutronske zvezde kreću po kružnim putanjama, a rastojanje izmedju njih neka iznosi $1,89 \cdot 10^8 m$. Uzeću da neutronske zvezde imaju jednake mase, a masa pojedinačne zvezde iznosi dve sunčeve mase. Korišćenjem ovih podataka i na osnovu opšte teorije relativnosti dobija se da je snaga izvora gravitacione radijacije $1,38 \cdot 10^{28} W$. Ova vrednost je oko 100 puta veća od snage totalne elektromagnetske radijacije koju emituje Sunce. Vidimo da u pojedinim slučajevima snaga gravitacione radijacije je velika, pa u skladu sa tim postavlja se pitanje zašto nismo u mogućnosti da detektujemo gravitacione talase, već moramo povećavati osetljivost postojećih mernih instrumenata i proizvoditi nove instrumente za merenje.

Postoji nekoliko faktora koji ograničavaju mogućnost detekcije gravitacionih talasa. Najpre ću dati određene napomene u vezi snage izvora gravitacione radijacije. U razmatranom slučaju binarnog sistema snaga izvora gravitacione radijacije bila je $1,38 \cdot 10^{28} W$, odnosno u toku jedne sekunde ovaj binarni sistem emituje energiju od $1,38 \cdot 10^{28} J$. Veliku vrednost energije gravitacionih talasa detektovali bi smo u slučaju da se nalazimo na maloj udaljenosti od ovog binarnog sistema. Na velikim rastojanjima od izvora možemo smatrati da gravitacioni talasi imaju formu sfernih talasa, i prostiru se u svim pravcima ravnopravno. Astronomski objekti koji emituju gravitacionu radijaciju nalaze se na velikim rastojanjima od Zemlje. Velika vrednost energije gravitacionih talasa bila bi merena kada bi smo se nalazili u neposrednoj okolini binarnog sistema koji emituje gravitacione talase. Medjutim mi se nalazimo na velikom rastojanju od izvora gravitacionih talasa, a sa druge strane naš detektor ima malu površinu, tako da bi smo mi registrovali malu vrednost energije gravitacione radijacije.

U vezi sa detekcijom gravitacionih talasa bitna veličina je talasna amplituda. Obeležava se sa h , i dobijena je na osnovu opšte teorije relativnosti. Ona je obrnuto proporcionalna rastojanju izmedju detektora na Zemlji i izvora gravitacionih talasa, i u skladu sa tim ima izuzetno malu vrednost.

Kada gravitacioni talas prolazi kroz materiju on izuzetno slabo interaguje sa njom. Efekat delovanja gravitacionih talasa na čestice može biti vizuelizovan na sledeći način. Na slici 46 a prikazan je sistem čestica koje se nalaze u stanju mirovanja. Kada na ovaj sistem naidje gravitacioni talas on će uzrokovati pomeranje čestica. Uzećemo da se gravitacioni talas kreće duž linije koja je normalna na ravan u kojoj se nalaze čestice. Način oscilovanja čestica zavisi od polarizacije gravitacionih talasa. Kod elektromagnetnih talasa postoji pojava polarizacije. Medjutim ova pojava se javlja i kod gravitacionih talasa. U opštoj teoriji relativnosti pokazuje se da postoje dve polarizacije gravitacionih talasa. Te polarizacije se označavaju sa $+$ i \times . Kada na sistem čestica prikazan na slici 46 a naidje gravitacioni talas koji se kreće duž z ose, i koji se nalazi u stanju $+$ polarizacije čestica će se kretati na način prikazan na slici 46 b. Ako na sistem čestica naidje talas koji se nalazi u stanju \times polarizacije, čestice će se kretati na način prikazan na slici 46 c. Kretanje čestica predstavljeno na slici 46 c suštinski je isto sa kretanjem čestica predstavljeno na slici 46 b. Slika 46 c dobija se pomoću slike 46 b na taj način što se slika 46 b zarotira za ugao od 45° .



Slika 46

Označimo sa L poluprečnik kruga koji je prikazan na slici 46 a. Veličina L je ravnotežno rastojanje. Pod dejstvom gravitacionog talasa dolazi do pomeranja čestica iz ravnotežnog položaja. Posmatrajmo česticu čiji je položaj na slici 46 a označen sa D . Centar kružnice označen je sa O . U skladu sa ovim oznakama ravnotežno rastojanje L jednako je dužini duži OD . Pod dejstvom gravitacionog talasa čestica će se pomeriti iz ravnotežnog položaja. U jednom trenutku ona će biti maksimalno udaljena od tačke O , i naći će se u položaju određenom tačkom E . Dužinu duži DE označiću sa ΔL . Na osnovu veličina ΔL i L možemo definisati relativnu promenu ravnotežnog rastojanja na sledeći način

$$\delta = \frac{\Delta L}{L}$$

Relativnu promenu ravnotežnog rastojanja označio sam sa δ . Veličina $\Delta L/L$ jednaka je talasnoj amplitudi koja je označena sa h . Istakao sam da je veličina h obrnuto proporcionalna rastojanju između detektora na Zemlji i izvora gravitacionih talasa, i u skladu sa tim ima izuzetno malu vrednost. Obzirom da je veličina $\Delta L/L$ jednaka veličini h , sledi da i δ ima izuzetno malu vrednost. Ako želimo da detektujemo gravitacione talase moramo eksperimentalno odrediti veličinu $\Delta L/L$. Ona obično ima vrednost oko 10^{-20} , ali može imati i manju vrednost od ove. Na osnovu ovih podataka vidimo sa kakvim problemom su suočeni naučnici koji se bave detekcijom gravitacionih talasa.

Gravitacioni talasi veoma slabo interaguju sa materijom. To predstavlja nedostatak, ali ima i svojih prednosti, jer gravitacioni talasi mogu preći ogromna rastojanja, a da im se ne promene karakteristike. Na taj način oni nam omogućuju da dobijemo informacije o veoma udaljenim astrofizičkim objektima koji su izvor gravitacionih talasa. Gravitacioni talasi predstavljaju moćno sredstvo za proučavanje astrofizičkih objekata. Saradnjom gravitacione astronomije sa astrofizikom dobićemo potpuniji uvid o astrofizičkim objektima i prirodi samog svemira.

Postoji određeni broj izvora gravitacione radijacije. Razvoj astrofizike i kosmologije otkriće nove izvore gravitacione radijacije. Oni će biti otkriveni ne samo na osnovu astronomskih posmatranja, već i na osnovu razvoja teorijskih modela. Ovom prilikom spomenuću nekoliko izvora gravitacione radijacije. Krenimo najpre od slučaja kada pojedinačna zvezda predstavlja izvor gravitacione radijacije.

Zvezda koja ima masu simetrično distribuiranu oko njene ose rotacije neće emitovati gravitacione talase. Ako distribucija mase oko ose rotacije zvezde nije simetrična zvezda će emitovati gravitacionu radijaciju. Na primer pulsari i neutronske zvezde mogu emitovati gravitacione talase.

Posebno mesto među izvorima gravitacione radijacije zauzimaju binarni zvezdani sistemi. Ovi sistemi se sastoje od belih patuljaka, neutronskih zvezda i crnih rupa. Već sam spomenuo čuveni primer binarnog sistema PSR 1913+16. Ovaj binarni sistem se sastoji od pulsara i neutronske zvezde. Proučavanjem ovog sistema došlo se do prvog indirektnog dokaza o postojanju gravitacionih talasa.

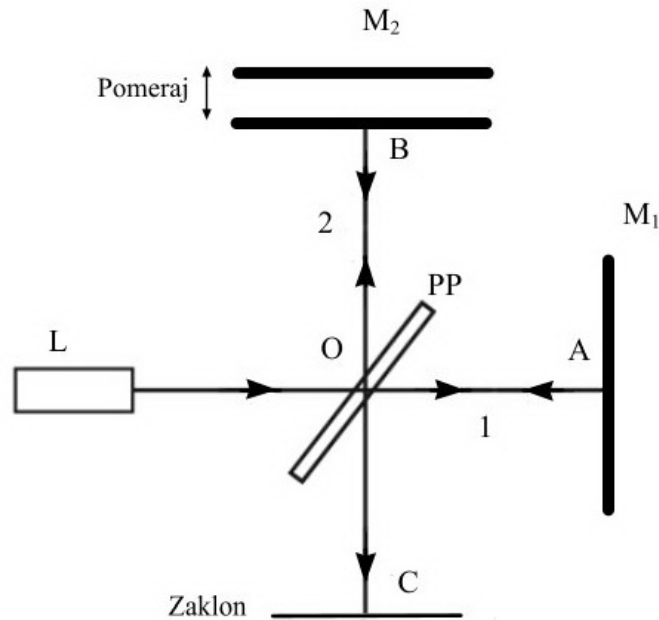
Zbog emisije gravitacionih talasa dolazi do smanjenja rastojanja između zvezda u binarnom sistemu, i u konačnoj fazi dolazi do spajanja ovih zvezda. Distribucija mase kod ove novoformirane zvezde nije simetrična, i zvezda emituje gravitacionu radijaciju. Kao primer binarnog sistema možemo uzeti sistem koji se sastoji od dve crne rupe. I u ovom slučaju može doći do spajanja i formiranja jedne veoma deformisane crne rupe koja smanjuje njen deformitet emisijom gravitacionih talasa.

Postoje dokazi da se kod mnogih galaksija u njihovim centrima nalaze tzv. supermasivne crne rupe. Astronomska posmatranja su pokazala da se u centru naše Galaksije nalazi supermasivna crna rupa. Njena masa je oko četiri miliona puta veća od mase Sunca. Galaksija Andromeda, koja je najveća galaksija u našoj okolini takodje sadrži supermasivnu crnu rupu. Kada dodje do sudara galaksija supermasivne crne rupe kreću se jedna oko druge, i dolazi do izuzetno velike emisije gravitacione radijacije. Detekcijom *X* zračenja koje dolazi sa galaksije NGC 6240 otkriveno je da ona sadrži dve supermasivne crne rupe. Smatra se da je ova galaksija nastala kao rezultat sudara dveju galaksija, od kojih je svaka imala supermasivnu crnu rupu.

U daljem tekstu navešću najbitnije detektore gravitacionih talasa, njihov princip rada i ukratko ću objasniti njihovu konstrukciju. Zadržaću se isključivo na detektorima čiji se rad zasniva na korišćenju optičke interferometrije, odnosno na korišćenju Majkelsonovog interferometra. Ove detektore možemo podeliti u dve grupe. Jednu grupu detektora predstavljaju detektori koji se nalaze na Zemlji. To su LIGO, VIRGO, GEO 600 i TAMA 300.

Drugu grupu detektora čine detektori za koje je planirano da budu stacionirani u svemiru. Jedan od takvih detektora nosi naziv LISA (Laser Interferometer Space Antenna). Projekat LISA bio je zajednički projekat NASA i ESA (Evropska Svemirska Agencija). Zbog nedostatka finansijskih sredstava NASA je odustala od ovog projekta. Evropska Svemirska Agencija (ESA) je samostalno nastavila ovaj projekat, i ona će u potpunosti sama snositi finansijske troškove. Naziv njenog projekta (detektora gravitacionih talasa) je eLISA (Evolved Laser Interferometer Space Antenna). Projekat eLISA se u mnogome zasniva na projektu LISA, ali postoje i određene razlike. Detektor gravitacionih talasa eLISA sastoji se od tri satelita, i njihovo lansiranje planirano je za 2020 godinu.

O svim ovim detektorima gravitacionih talasa biće reči u narednom tekstu. Istakao sam da se princip rada ovih detektora zasniva na optičkoj interferometriji, odnosno na Majkelsonovom interferometru. U skladu sa tim potrebno je da se podsetimo konstrukcije i principa rada Majkelsonovog interferometra. Na slici 47 prikazan je ovaj interferometar.



Slika 47

On se sastoji od dva ogledala M_1 i M_2 , i polupropustljivog ogledala koje je na slici 47 označeno sa PP . Princip rada Majkelsonovog interferometra zasniva se na korišćenju interferencije svetlosti. Izvor svetlosti je laser, i on je na slici 47 označen sa L . Ogledalo M_1 je fiksirano, ali ogledalo M_2 može da se pomera. Pomeranje ogledala vrši se na takav način da ono ostaje uvek paralelno samom sebi. Ovo pomeranje ogledala M_2 vrši se pomoću finog zavrtnja.

Pravac prostiranja laserskog zraka i ogledalo PP zaklapaju ugao od 45° . Intenzitet upadnog laserskog zraka označicu sa I_0 . Nakon prolaska upadnog laserskog zraka kroz ogledalo PP dobijaju se dva zraka. Jedan zrak kreće se ka ogledalu M_1 , a drugi ka ogledalu M_2 . Zrak koji se kreće ka ogledalu M_1 označicu sa 1, a zrak koji se kreće ka ogledalu M_2 označicu sa 2. Obzirom da se koristi polupropustljivo ogledalo intenziteti zraka 1 i 2 imaju istu vrednost, i on iznosi $I_0/2$. Tačku gde svetlosni zrak 1 pogadja ogledalo M_1 označicu sa A , a tačku gde svetlosni zrak 2 pogadja ogledalo M_2 označicu sa B . Nakon prolaska upadnog laserskog zraka kroz ogledalo PP dobijaju se dva koherentna zraka. Rastojanje izmedju tačaka O i A označicu sa L_1 , a rastojanje izmedju tačaka O i B označicu sa L_2 . Zrak 1 kreće se od ogledala PP ka ogledalu M_1 . Nakon refleksije od ogledala M_1 zrak 1 kreće se ka ogledalu PP . Zrak 1 biva reflektovan od ogledala PP , i nakon refleksije kreće se ka zaklonu gde pogadja tačku C . Rastojanje OC označicu sa L_3 . Na zaklonu se dobija interferenciona slika. Umesto zaklona za posmatranje interferencione slike možemo koristiti durbin. Zrak 2 kreće se od ogledala PP ka ogledalu M_2 . Nakon refleksije od ogledala M_2 kreće se ka ogledalu PP , a nakon prolaska kroz ogledalo PP pogadja zaklon u tački C .

Zraci 1 i 2 su koherentni i na zaklonu se dobija interferenciona slika. Zrak 1 prelazi put $OAOC$. Dužina puta određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$s_1 = L_1 + L_1 + L_3 \quad (11.1)$$

Zrak 2 prelazi put $OBOC$, a dužina tog puta je

$$s_2 = L_2 + L_2 + L_3 \quad (11.2)$$

U tački C dobiće se konstruktivna interferencija, odnosno intenzitet svetlosti imaće maksimalnu vrednost ako je ispunjen sledeći uslov

$$s_2 - s_1 = m\lambda \quad (11.3)$$

Sa λ je označena talasna dužina laserske svetlosti, a m je ceo broj, i može imati vrednosti 0,1,2...

U tački C dobiće se destruktivna interferencija, odnosno intenzitet svetlosti imaće minimalnu vrednost ako je ispunjen sledeći uslov

$$s_2 - s_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (11.4)$$

Korišćenjem jednačina (11.1) i (11.2) jednačine (11.3) i (11.4) dobijaju oblik

$$2(L_2 - L_1) = m\lambda$$

$$2(L_2 - L_1) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Može se pokazati da se intenzitet svetlosti na zaklonu, u tački C određuje na osnovu sledeće jednačine

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{k(s_2 - s_1)}{2} \right) \quad (11.5)$$

Sa k je označen tzv. talasni broj, i on se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Korišćenjem jednačina (11.1) i (11.2) dobijamo

$$I = I_0 \cos^2(k(L_2 - L_1))$$

, odnosno

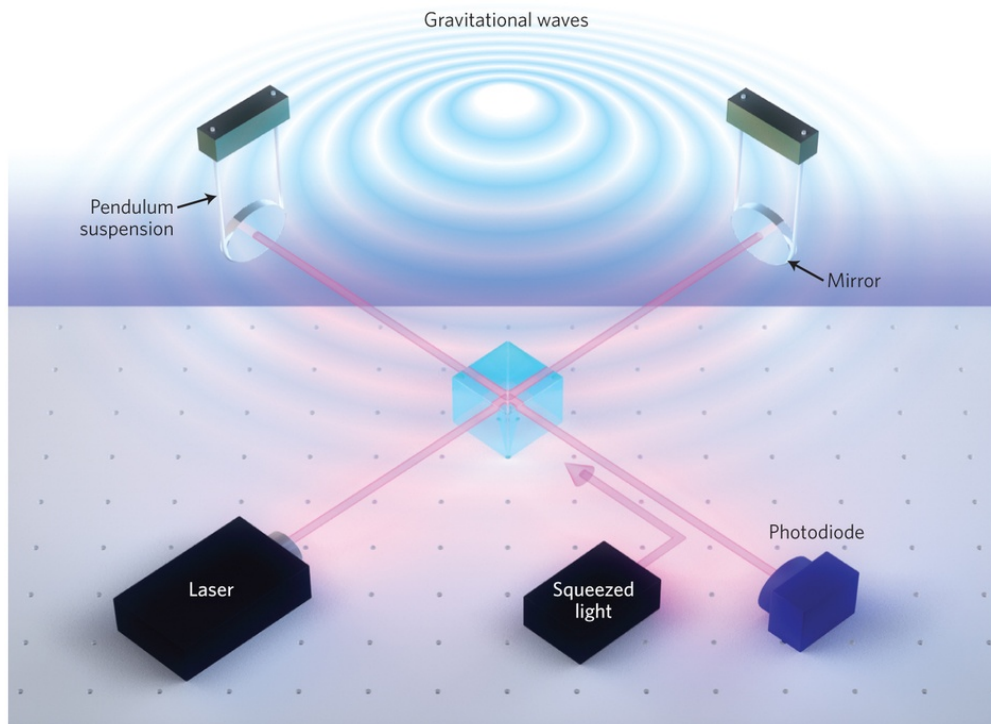
$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} (L_2 - L_1) \right) \quad (11.6)$$

Rastojanje L_1 je fiksirano, ali rastojanje L_2 može se menjati pomeranjem ogledala M_2 . Na osnovu jednačine (11.6) zaključujemo da ako se menja rastojanje L_2 menjaće se intenzitet svetlosti u tački C .

Majkelsonov interferometar ima i svoju praktičnu primenu. Korišćenjem Majkelsonovog inreferometra može se ostvariti izuzetno precizno merenje dužine. Koristi se i za određivanje talasne dužine monohromatske svetlosti, i za merenja vrlo malih promena dimenzija tela. Korišćenjem Majkelsonovog interferometra može se odrediti indeks prelamanja neke supstance.

Sada ću objasniti princip rada detektora gravitacionih talasa koji koriste optičku interferometriju, odnosno Majkelsonov interferometar. Na slici 47 prikazan je Majkelsonov interferometar. Pojava interferencije svetlosti posmatra se na zaklonu, ili pomoću durbina. Intenzitet svetlosti u tački C može se meriti pomoću fotodetektora. Pod dejstvom gravitacionih talasa doći će do promene dužina L_1 i L_2 . Kako će se ove dužine menjati tokom vremena zavisi između ostalog od ugla između pravca prostiranja gravitacionog talasa i ravni u kojoj se nalazi interferometar. Sa stanovišta opšte teorije relativnosti postoje dve polarizacije gravitacionih talasa. Promene dužina L_1 i L_2 sa vremenom zavisiće i od polarizacije gravitacionog talasa. Ove promene rastojanja L_1 i L_2 su izuzetno male, ali saglasno jednačini (11.6) ove promene rastojanja treba da izazovu promenu intenziteta laserske svetlosti u tački C . Intenzitet laserske svetlosti meri se pomoću fotodetektora. U sažetoj formi prezentovao sam princip rada detektora gravitacionih talasa. Da bi se ova ideja realizovala u praksi bilo je potrebno da se postigne odgovarajući nivo u oblasti lasera i optičke tehnologije. Ovaj koncept detekcije gravitacionih talasa je veoma privlačan jer nudi mogućnost veoma visoke osetljivosti detektora i to u širokom domenu frekvencija gravitacionih talasa.

Korišćenjem slike 48 može se još detaljnije objasniti princip rada detektora gravitacionih talasa.



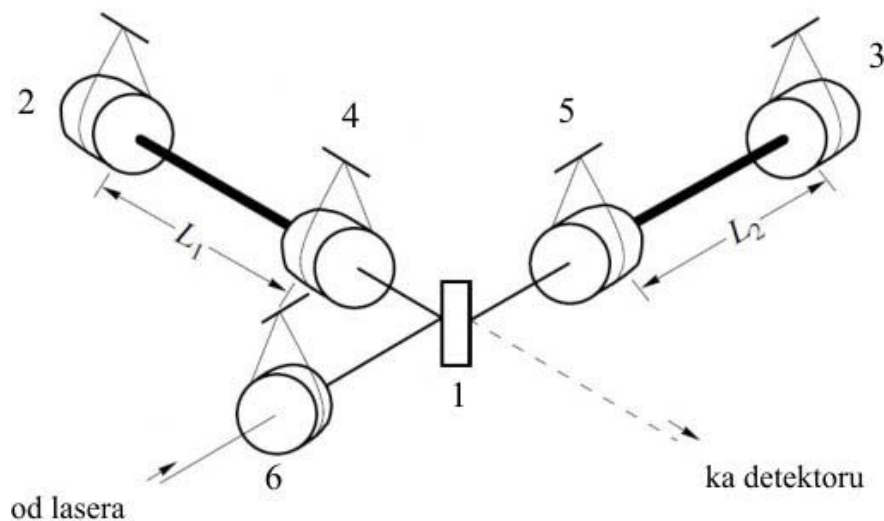
Slika 48

Na slici 48 prikazan je laser. Kocka ima ulogu polupropustljivog ogledala. Ona deli upadni laserski zrak na dva zraka koji se kreću ka ogledalima. Za razliku od ogledala u Majkelsonovom interferometru, ogledala i svi glavni optički sistemi u detektorima gravitacionih talasa vise u gravitacionom polju poput klatna. Ovo vešanje ogledala je postignuto korišćenjem tehničkih inovacija. Zbog toga što klatna vise ona su delimično izolovana od vibracija tla i mehaničkih oscilacija koja postoje u detektorima gravitacionih talasa. Pod dejstvom gravitacionih talasa menjaće se rastojanja izmedju ogledala i kocke. Ova promena rastojanja izaziva promenu intenziteta laserske svetlosti koja se meri pomoću fotodetektora.

LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) je projekat čiji je cilj direktna detekcija gravitacionih talasa. Postoje dve observatorije. Jedna se nalazi u Hanfordu u državi Vašington, a druga u Livingstonu u državi Luizijana. Udaljenost izmedju ovih observatorija je 3030 km. Rad LIGO detektora zasniva se na principima koji su prezentovani u predhodnom tekstu. Na slici 47 prikazan je Majkelsonov interferometar. Ugao izmedju zraka 1 i 2 iznosi 90° . Zbog lakšeg opisivanja Majkelsonovog interferometra, odnosno detektora gravitacionih talasa čiji se rad zasniva na optičkoj interferometriji koristićemo termin grana interferometra. Jednu granu Majkelsonovog interferometra čini PP ogledalo i ogledalo M_1 , a drugu granu čini PP ogledalo i ogledalo M_2 . Ugao izmedju ovih grana interferometra je 90° .

U observatoriji u Livingstonu nalazi se jedan interferometar. Grane ovog interferometra imaju dužinu 4 km, a ugao izmedju grana interferometra je 90° . U opservatoriji koja se nalazi u Hanfordu postoje dva interferometra. Dužine grana jednog interferometra iznose 4 km, a dužine grana drugog interferometra iznose 2 km.

Na slici 49 prikazana je šema LIGO interferometra. Slika 49 nastala je na taj način što sam preuzeo sliku iz rada [12], a potom sam je malo modifikovao za potrebe moje analize. Ogledala sam označio brojevima od 1 do 6.



Slika 49

Ako uporedimo sliku 49 sa slikom 47, ili sa slikom 48 primećujemo da postoje dopunska ogledala. Ta dopunska ogledala označena su brojevima 4, 5 i 6. Ogledala 2, 3, 4, 5 i 6 vise u gravitacionom polju poput klatna. Razvijeni su posebni sistemi za vešanje klatna. Zbog toga što klatna vise ona su delimično izolovana od vibracija tla i mehaničkih oscilacija koja postoje u detektorima gravitacionih talasa. Izvor svetlosti je laser. Pre nego što laserski zrak dospe do ogledala 1 koje ima ulogu polupropustljivog ogledala, laserski zrak se modifikuje različitim optičkim elementima i dobija se snop izuzetno visoke uniformnosti i stabilnosti. Ogledala se nalaze u vakuumskim komorama čije su dužine 4 km. Te komore su u obliku cevi. Prečnik cevi je 1,3 m. Cevi su izradjene od čelika, a debljina zida cevi je 3 mm. Ogledala 2, 3, 4 i 5 nazivaju se probne mase. Na slici 49 rastojanje izmedju ogledala 2 i 4 označeno je sa L_1 , a rastojanje izmedju ogledala 3 i 5 označeno je sa L_2 . Rastojanja L_1 i L_2 imaju približno iste vrednosti. Pod dejstvom gravitacionih talasa doći će do promene rastojanja L_1 i L_2 . Ova promena rastojanja L_1 i L_2 izazvaće promenu intenziteta laserske svetlosti koja stiže do fotodetektora.

Kod LIGO interferometra postoji veći broj ogledala nego kod Majkelsonovog interferometra. Ta dopunska ogledala na slici 49 označena su brojevima 4, 5, i 6. Ogledala 2 i 3 u potpunosti reflektuju svetlost. Ogledala 4 i 5 su dizajnirana tako da određeni procenat upadne svetlosti propuštaju, a određeni procenat upadne svetlosti reflektuju. Ogledala 2 i 4 (odnosno ogledala 3 i 5) formiraju tzv. Febri-Perot rezonantnu optičku šupljinu (Fabry-Pérot cavity). Uloga rezonantne optičke šupljine je da poveća vreme boravka svetlosti u optičkoj grani. Korišćenjem Febri-Perot rezonantne optičke šupljine svetlost se više puta odbija od ogledala 2 i 4 (odnosno ogledala 3 i 5) pre nego što napusti granu interferometra.

Potrebno je objasniti i ulogu ogledala 6 (recycling mirror). Ovo ogledalo je postavljeno izmedju lasera i ogledala 1. Njegova uloga je da svetlost koja je prošla kroz ogledalo 1 i krenula ka laseru vrati u interferometar. Korišćenjem ogledala 6 povećava se efikasnost interferometra.

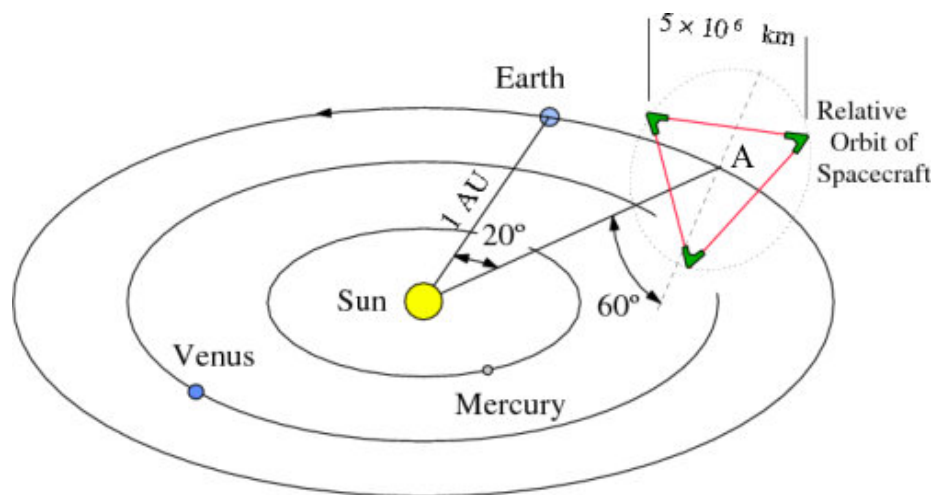
Pored detektora LIGO postoje i drugi detektori gravitacionih talasa, a to su VIRGO, GEO 600 i TAMA 300. Ove detektore sam već spomenuo u predhodnoj diskusiji. Svi ovi detektori rade na istom principu, i koriste metode optičke interferometrije.

Detektor GEO 600 nalazi se blizu Hanovera u Nemačkoj. Dužina interferencione grane iznosi 600 metara. Ovaj detektor je dizajniran da registruje gravitacione talase čije frekvence pripadaju oblasti od $50 H_z$ do $1,5 kH_z$. Snaga lasera je $14 W$. I u slučaju detektora GEO 600 optika se nalazi u ultravisokom vakuumu. Pritisak u cevima u kojima se nalaze optički elementi je $10^{-6} P_a$.

TAMA 300 je detektor gravitacionih talasa koji se nalazi pri Nacionalnoj astronomskoj opservatoriji u Japanu. Dužine grana interferometra iznose 300 metara. Projekat TAMA 300 je počeo 1995 godine. Cilj projekta je da se razviju napredne tehnologije za buduće kilometarske interferometre, i da se detektuju gravitacioni talasi koji potiču iz lokalnih grupa galaksija.

Predhodno analizirani detektori pripadaju grupi detektora koji se nalaze na Zemlji. Istakao sam da postoje projekti da se određeni detektori gravitacionih talasa postave u svemiru. Projekat LISA (Laser Interferometer Space Antenna) bio je zajednički projekat NASA i ESA. Zbog nedostatka finansijskih sredstava NASA je odustala od ovog projekta. Evropska Svemirska Agencija (ESA) nastavila je da radi na ovom projektu, i odlučila je da samostalno razvija i finansira misiju koja nosi naziv eLISA (Evolved Laser Interferometer Space Antenna). Projekat eLISA u mnogome se zasniva na rezultatima istraživanja i tehničkim rešenjima dobijenim u projektu LISA, ali postoje i određene razlike između ta dva projekta. Te razlike dobrim delom proističu iz potrebe Evropske Svemirske Agencije da smanji troškove misije. Bez obzira što je eLISA projekat čija se realizacija očekuje u bliskoj budućnosti, ja ću povremeno prezentovati i osnovne koncepte LISA misije. Ovakav pristup je potreban jer LISA projekat predstavlja osnovu eLISA projekta, i iz tog razloga ne možemo zanemariti LISA projekat u daljoj diskusiji.

eLISA opservatorija se sastoji od tri satelita. Sateliti su prikazani na slici 50. Medjusobno rastojanje između satelita iznosi milion kilometara, i sateliti formiraju jednakostranični trougao. Centar ovog jednakostraničnog trougla je na slici 50 označen sa *A*.



Slika 50

Sa slike vidimo da se tačka *A*, ne poklapa sa centrom Zemlje, odnosno sateliti ne orbitiraju oko Zemlje. Smer kretanja Zemlje oko Sunca prikazan je na slici 50. Konstalacija satelita prati Zemlju. Na slici 50 prikazan je ugao od 20° . U toku misije ovaj ugao imaće vrednosti u intervalu od 10° do 25° . Zbog promene ovog ugla sa vremenom menja će se rastojanje između tačke *A* i Zemlje.

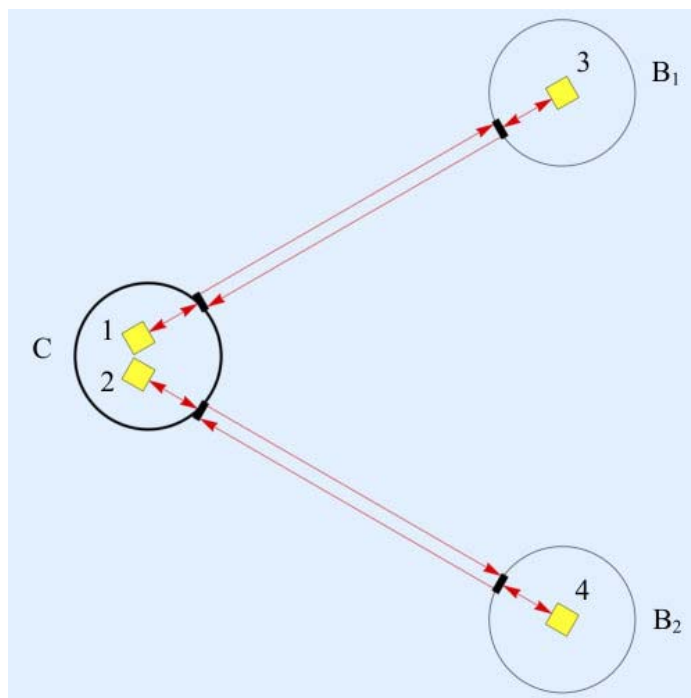
Ugao između ravni koju formiraju sateliti i ravni ekliptike iznosi 60° . Putanja koju opisuje tačka *A* prilikom kretanja konstalacije satelita oko Sunca poklapa se sa putanjom koju opisuje Zemlja prilikom njenog kretanja oko Sunca.

I u slučaju projekta LISA razmatrana je konstalacija od tri satelita koji se nalaze na medjusobno jednakom rastojanju. Ovi sateliti prilikom svog kretanja takodje prate Zemlju. U slučaju LISA misije rastojanje između satelita trebalo je da bude pet miliona kilometara. Konstatovao sam da će u toku eLISA misije rastojanje između tačke *A* i Zemlje varirati u toku vremena, odnosno ugao će se menjati u intervalu od 10° do 25° . U slučaju LISA misije tačka *A* trebala je da bude na konstantnoj udaljenosti od Zemlje, odnosno odgovarajući ugao imao bi konstantnu vrednost. Bilo je predviđeno da ugao iznosi

20°. Treba napomenuti da i kod jedne i kod druge misije dozvoljena je mogućnost da sateliti rotiraju oko tačke A konstantnom ugaonom brzinom, ali prilikom te rotacije međusobno rastojanje između satelita se ne menja.

Potrebno je dati osnovne informacije o konstrukciji satelita. Konstrukcija satelita u okviru LISA misije razlikuje se malo od konstrukcije satelita u okviru eLISA misije, ali princip rada i način detekcije gravitacionih talasa isti je za obe misije. Istakao sam da Evropska Svemirska Agencija samostalno realizuje projekat eLISA, i da se on u mnogome zasniva na projektu LISA. U daljem tekstu objasniću konstrukciju satelita koja je bila predviđena projektom LISA.

Na slici 51 prikazana su tri LISA satelita. Oni su na slici prikazani kao krugovi. Satelit koji je na slici 51 označen sa C predstavlja tzv. centralni satelit. On se po konstrukciji razlikuje od satelita B_1 i B_2 . Satelite koji su na slici označeni sa B_1 i B_2 nazvaću bočnim satelitima. Oni su međusobno identični.



Slika 51

Sateliti imaju oblik paka za hokej. Njihov prečnik je 1,8 m, a visina 0,48 m. Primarna struktura satelita je cilindar na kome se nalaze solarni paneli. Svaki satelit ima lasere. Snaga lasera je 1 W, i oni emituju infracrvenu svetlost talasne dužine $1064 \mu\text{m}$. Na slici 51 ljubičastim linijama prikazani su laserski zraci. Posmatrajući sliku 51 možemo zaključiti da centralni satelit (koji je označen slovom C) razmenjuje laserske signale sa bočnim satelitima, koji su na slici označeni sa B_1 i B_2 . Sateliti imaju teleskope kroz koje prolazi laserska svetlost. Svaki satelit sadrži i optičku klupe, na kojoj se nalaze optičke komponente. Optička interferometrija realizuje se korišćenjem tih optičkih komponenata. Na slici 51 kratkim crvenim linijama označeni su optički interferometri.

Sateliti B_1 i B_2 imaju identične optičke klupe. Unutar svake optičke klupe postoji po jedna šupljina u kojoj je postignut visoki vakuum. Na jednom zidu šupljine postoji prozor napravljen od kvarca kroz koji može da prolazi infracrvena svetlost. U svakoj od šupljina nalazi se po jedno probno telo. Centralni satelit ima dve šupljine u optičkoj klupi, i u svakoj se nalazi po jedno probno telo. Probno telo ima oblik kocke. Iвица kocke je 46 mm. Kocka je napravljena od legure koju čine zlato i platina. Na slici 51 žuti kvadrati predstavljaju probna tela. Probna tela su na slici označena brojevima

od 1 do 4. Da bi se detektovali gravitacioni talasi kocka ne sme da dodirne stranice šupljine, odnosno ona mora da lebdi unutar šupljine. Postoje posebne metode koje se koriste za praćenje relativnog kretanja izmedju probnog tela i šupljine.

Postavlja se pitanje kako bi se detektovao gravitacioni talas korišćenjem LISA (eLISA) satelita. Princip detekcije gravitacionih talasa kod LISA (eLISA) satelita je veoma sličan principu detekcije koji se koristi kod detektora koji su stacionirani na Zemlji. Da bi obrazložio ovu konstataciju pogledajmo sliku 48. Na slici su prikazana dva ogledala koja vise u gravitacionom polju Zemlje. Pod dejstvom gravitacionih talasa ova ogledala se pomeraju. Pomeranje ogledala izaziva promenu intenziteta laserske svetlosti koja se registruje pomoću fotodetektora.

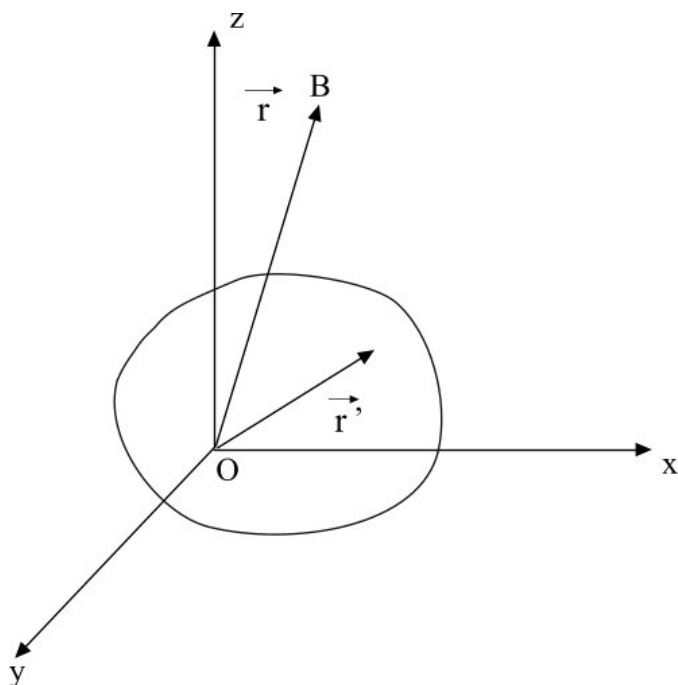
Slična situacija je i u svemiru. Posmatrajmo satelit C i satelit B_1 . Obzirom da su sateliti B_1 i B_2 identični rezultati koji će biti prezentovani za satelite C i B_1 važiće i za satelite C i B_2 . Analiziram satelite C i B_1 , i u skladu sa tim posmatrajmo probna tela označena brojevima 1 i 3. Pod dejstvom gravitacionih talasa dolazi do promene rastojanja izmedju probnih tela 1 i 3. Ako uspemo da registrujemo promenu rastojanja izmedju probnih tela 1 i 3, onda mi direktno detektujemo gravitacione talase.

Sada ću ukratko objasniti kako se meri rastojanje izmedju probnih tela 1 i 3. Laser koji se nalazi u satelitu C emituje infracrvenu svetlost. Ova svetlost prolazi kroz teleskop, prelazi rastojanje od pet miliona kilometara i dospeva do satelita B_1 . Prolazi kroz teleskop koji se nalazi na satelitu B_1 i pomoću optičkih komponenata dovodi se do kvarcnog prozora. Infracrvena svetlost prolazi kroz kvarcni prozor dospeva u šupljinu, i odbija se od probnog tela. Nakon refleksije od probnog tela infracrvena svetlost ponovo prolazi kroz kvarcni prozor i napušta šupljinu. Medjutim postoji jedan problem. Intenzitet ove svetlosti ima izuzetno malu vrednost. Smanjenje intenziteta laserske svetlosti nastaje iz sledećeg razloga. Laserski snop koji polazi sa satelita C ima izuzetno malu širinu, ali nakon što laserski snop predje rastojanje od pet miliona kilometara širina laserskog snopa poveća se na 20 kilometara. Ovaj difrakcioni efekat zajedno sa drugim gubicima dovodi do toga da samo mali deo energije laserkog snopa dolazi do satelita, odnosno do probnog tela. Da bi se pojačao intenzitet laserske svetlosti koristi se posebna metoda i laser koji se nalazi na satelitu B_1 . Prilikom razvoja metode za pojačavanje intenziteta laserske svetlosti korišćen je princip koji se primenjuje za pojačavanje intenziteta radio talasa. Nakon što je intenzitet laserskog snopa pojačan, ovaj laserski zrak se upućuje ka satelitu C . Ovaj laserski zrak nakon izvesnog vremena dospeva do satelita C . Upoređivanjem ovog laserskog snopa sa laserskim snopom koji je prvobitno emitovan iz satelita C određuje se sa izuzetnom preciznošću rastojanje izmedju probnih masa. Prilikom ove diskusije proizvoljno sam izabrao satelit B_1 i prezentovao sam postupak kako se određuje rastojanje izmedju probnih tela 1 i 3. Obzirom da su sateliti B_1 i B_2 identični, postupak određivanja rastojanja izmedju probnih tela 2 i 4 u potpunosti je identičan sa prezentovanim postupkom.

Na osnovu gravitoelektromagnetizma dobio sam određene rezultate o gravitacionim talasima, koje ću prezentovati u narednom tekstu. Elektromagnetni talasi predstavljaju izuzetno bitan rezultat elektrodinamike. Oni imaju veliku praktičnu primenu. Kada se naelektrisana čestica kreće ubrzano ona emituje elektromagnetne talase. Više puta sam istakao da se gravitoelektromagnetizam zasniva na formalnoj analogiji sa elektrodinamikom. U skladu sa ovim konstatacijama možemo očekivati da čestice koje imaju masu, i koje se kreću ubrzano emituju gravitacione talase. Da bi dobio konkretne jednačine za gravitacione talase, potrebno je koristiti određene rezultate i jednačine elektrodinamike. Koristiću sledeći pristup. Postepeno ću izvoditi odgovarajuće jednačine elektrodinamike, a prilikom izvođenja tih jednačina prezentovaću i odgovarajuće jednačine gravitoelektromagnetizma. Postupak izvođenja jednačina elektrodinamike u mnogome se zasniva na postupku koji je prezentovan u knjizi [13].

Na slici 52 prikazana je oblast prostora zapremine V' . Unutar te zapremine kreću se naelektrisane čestice. Početak koordinatnog sistema označen je tačkom O . Unutar zapremine V' nalazi

se veliki broj naelektrisanih čestica. Raspodela naelektrisanja je kontinualna. Gustinu naelektrisanja označicu sa ρ . Položaj elementa zapremine dV' u odnosu na tačku O označicu radijus vektorom \vec{r}' .



Slika 52

Na slici 52 prikazana je i tačka B . Radijus vektor tačke B označicu sa \vec{r} . Tačka B se nalazi na velikoj udaljenosti od sistema naelektrisanih čestica, i u skladu sa tim ispunjen je sledeći uslov

$$|\vec{r}'| \ll |\vec{r}| \quad (11.7)$$

Kada se naelektrisane čestice kreću ubrzano one emituju elektromagnetne talase. Cilj mi je da odredim elektromagnetno polje u tački B . Obzirom da je ispunjen uslov (11.7) elektromagnetno polje određuje se u tzv. talasnoj zoni. Naelektrisane čestice se kreću i u skladu sa tim potrebno je pored skalarnog polja gustine naelektrisanja uvesti i vektorsko polje gustine struje. Vektor gustine struje označava se sa \vec{j} . Da bi smo odredili elektromagnetno polje u tački B , potrebno je naći skalarni i vektorski potencijal u tački B . Diferencijalne jednačine za određivanje ovih veličina glase

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

Jednačine (2.83) i (2.84) predstavljaju fizički prihvatljiva rešenja ovih diferencijalnih jednačina. Zbog važnosti ovih jednačina za dalju analizu ponovo ih navodim

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (11.8)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (11.9)$$

Primenjujući analogiju koja postoji između gravitoelektromagnetizma i elektrodinamike konstatovao sam da jednačine (2.85) i (2.86) predstavljaju fizički prihvatljiva rešenja diferencijalnih jednačina (2.80) i (2.81). Zbog važnosti jednačina (2.85) i (2.86) za dalju analizu ponovo ih navodim

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\gamma \int_{V'} \frac{\rho_m(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (11.10)$$

$$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma}{c^2} \int_{V'} \frac{\vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (11.11)$$

Potrebno je naći elektromagnetno polje u tački B . Tačka B nalazi se na velikoj udaljenosti od sistema naelektrisanih čestica, i u skladu sa tim ispunjen je uslov (11.7). U trećem poglavlju takodje sam analizirao primer iz elektrodinamike. Na slici 12 prikazana je zapreminski naelektrisana lopta poluprečnika R koja rotira oko jednog svog prečnika konstantnom ugaonom brzinom. Zbog rotacije naelektrisane lopte nastaje magnetno polje unutar i van lopte. Analizirao sam samo magnetno polje van lopte. Odredio sam vektorski potencijal (jačinu magnetnog polja) u tački B . Tačka B se nalazi na velikoj udaljenosti od zapremine V' , i ispunjen je uslov (3.38). Pokazao sam da se veličina $|\vec{r} - \vec{r}'|$ zbog uslova (3.38) može izraziti u sledećem obliku

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \quad (11.12)$$

Uslov (3.38) je identičan sa uslovom (11.7), i jednačinu (11.12) možemo koristiti u cilju transformacije jednačina (11.8) i (11.9). Uvodim jedinični vektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (11.13)$$

Na osnovu jednačina (11.12) i (11.13) dobijam

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r - \vec{n} \cdot \vec{r}' \quad (11.14)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačine (11.8) i (11.9) dobijam sledeće rezultate

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\vec{n} \cdot \vec{r}') dV'}{r - \vec{n} \cdot \vec{r}'} \quad (11.15)$$

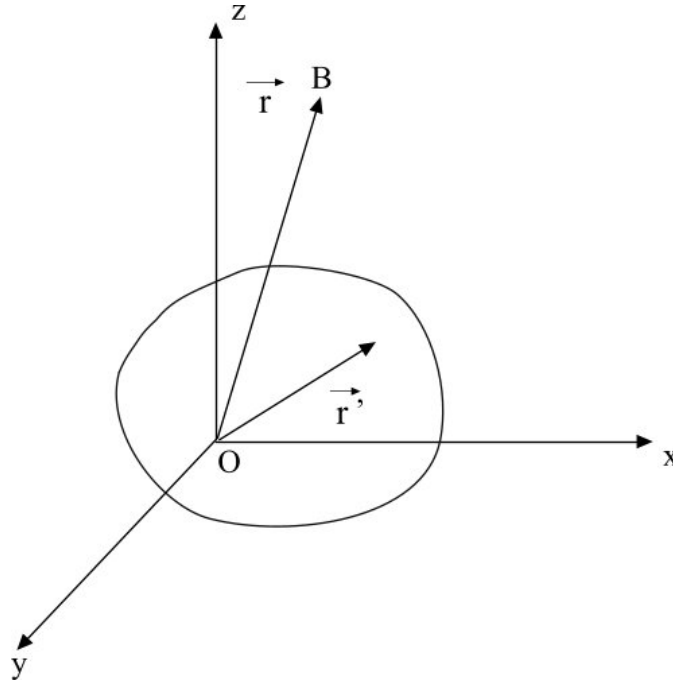
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\vec{n} \cdot \vec{r}') dV'}{r - \vec{n} \cdot \vec{r}'} \quad (11.16)$$

Zbog uslova (11.7) veličinu $\vec{n} \cdot \vec{r}'$ mogu zanemariti u imeniocima gornjih izraza. Veličina $(\vec{n} \cdot \vec{r}')/c$ ima dimenziju vremena i figuriše u brojiocima jednačina (11.15) i (11.16). Ova veličina ima malu vrednost, ali se ne može zanemariti, jer u toku vremenskog intervala koji je brojno jednak $(\vec{n} \cdot \vec{r}')/c$ gustina naelektrisanja i gustina struje mogu se znatno izmeniti. Na osnovu ovih zaključaka jednačine (11.15) i (11.16) dobijaju sledeću formu

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V'} \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\vec{n} \cdot \vec{r}'\right) dV' \quad (11.17)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V'} \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\vec{n} \cdot \vec{r}'\right) dV' \quad (11.18)$$

Uporedo sa ovim elektrodinamičkim problemom analiziraću veoma sličan problem koji pripada oblasti gravitoelektromagnetizma. Ponovo uvodim oblast prostora zapremine V' . Unutar te zapremine kreću se čestice. Početak koordinatnog sistema označen je tačkom O na slici 53.



Slika 53

Unutar zapremine V nalazi se veliki broj čestica. Raspodela mase je kontinualna. Gustinu mase označicu sa ρ_m . Položaj elementa zapremine dV' u odnosu na tačku O označicu radijus vektorom \vec{r}' .

Sa stanovišta elektrodinamike kada se naelektrisane čestice kreću ubrzano one emituju elektromagnetne talase. Smatram da kada se čestice sa masom kreću ubrzano one emituju gravitacione talase. U daljem tekstu prezentovaću jednačine sa stanovišta gravitoelektromagnetizma koje opisuju gravitacione talase.

Čestice se kreću, i u skladu sa tim potrebno je pored skalarnog polja gustine mase uvesti i vektorsko polje masene gustine struje. Vektor masene gustine struje označio sam sa \vec{J}_m . Potrebno je naći gravitacioni skalarni i gravitacioni vektorski potencijal u tački B . I u ovom primeru tačka B nalazi se na velikoj udaljenosti od sistema čestica. Obzirom da je ispunjen uslov (11.7) karakteristike gravitacionih talasa određuje se u tzv. talasnoj zoni. Termin talasna zona je već uveden prilikom diskusije primera iz elektrodinamike. I u slučaju primera koji pripada oblasti gravitoelektromagnetizma ispunjen je uslov (11.7), i može se koristiti jednačina (11.14).

Proceduru koja je korišćena u postupku dobijanja jednačina (11.17) i (11.18) primeniću na navedeni primer iz gravitoelektromagnetizma, i kao rezultat dobijaju se sledeće jednačine

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma}{r} \int_{V'} \rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}') dV' \quad (11.19)$$

$$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma}{c^2 r} \int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}') dV' \quad (11.20)$$

Radi konciznijeg pisanja jednačina uvodi se veličina τ . Ona se definiše na sledeći način

$$\tau = t - \frac{r}{c}$$

U skladu sa ovom definicijom jednačine (11.17) i (11.18) dobijaju sledeći oblik

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V'} \rho(\vec{r}', \tau + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}') dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \vec{j}\left(\vec{r}', \tau + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}'\right) dV,$$

Potrebno je dalje transformisati jednačine (11.17) i (11.18). Istakao da ću postepeno izvoditi određene jednačine iz elektrodinamike, i da se postupak izvođenja tih jednačina u mnogome zasniva na postupku koji je prezentovan u knjizi [13]. U skladu sa procedurom prezentovanom u knjizi [13] jednačine (11.17) i (11.18) najpre se zapisuju u obliku

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}'\right)}{r} dV, \quad (11.21)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}'\right)}{r} dV, \quad (11.22)$$

, a potom se podintegralne funkcije u ovim jednačinama razvijaju u Tejlorov red. U slučaju skalarnog potencijala dobija se sledeći rezultat

$$\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}'\right)}{r} \approx \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right)$$

Zbog uslova (11.7) uzeta su samo dva člana u razvoju podintegralne funkcije. Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.21) dobijamo

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V (\vec{n} \cdot \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right) dV,$$

Saglasno proceduri prezentovanoj u knjizi [13] ova jednačina transformiše se na sledeći način.

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV \right]$$

U drugom članu u ovoj jednačini izvlači se vektor \vec{n} ispred znaka integrala, i dobijamo sledeći rezultat

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) \vec{r}' dV \right] \quad (11.23)$$

Prvi integral predstavlja ukupnu količinu naelektrisanja posmatranog sistema u trenutku $t - r/c$

$$Q\left(t - \frac{r}{c}\right) = \int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV, \quad (11.24)$$

Drugi integral predstavlja električni dipolni moment posmatranog sistema u trenutku $t - r/c$

$$\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) \vec{r}' dV, \quad (11.25)$$

Zamenom jednačina (11.24) i (11.25) u jednačinu (11.23) dobijamo

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{Q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right] \quad (11.26)$$

U pojedinim slučajevima ukupna količina naelektrisanja može biti jednaka nuli, i jednačina (11.26) dobija jednostavniji oblik

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right] \quad (11.27)$$

Na osnovu jednačine (11.27) zaključujemo da komponente vektora \vec{p} zavise od veličine $t - r/c$. Vektor \vec{p} može se izraziti preko svojih komponentata na sledeći način

$$\vec{p} = p_x \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{i} + p_y \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{j} + p_z \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{k} \quad (11.28)$$

Svaka komponenta je funkcija dve nezavisne promenjive t i r .

Radi generalnosti diskusije uvešću vektor \vec{l} . Uzeću da komponente vektora \vec{l} takodje zavise od veličine $t - r/c$, odnosno svaka komponenta vektora \vec{l} je funkcija dve nezavisne promenjive t i r .

Vektor \vec{l} može se izraziti na sledeći način

$$\vec{l} = l_x \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{i} + l_y \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{j} + l_z \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{k} \quad (11.29)$$

Rezultate koje dobijem za vektor \vec{l} važiće i za vektor \vec{p} , ali i za druge vektore kod kojih je ispunjen uslov da su njihove komponente funkcije dve nezavisne promenjive t i r .

Odrediću najpre divergenciju vektora \vec{l}

$$\text{div}(\vec{l}) = \frac{\partial l_x}{\partial x} + \frac{\partial l_y}{\partial y} + \frac{\partial l_z}{\partial z}$$

Ova jednačina dalje se transformiše na sledeći način

$$\text{div}(\vec{l}) = \frac{\partial l_x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial l_y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial l_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z}$$

Lako je pokazati da važe sledeće jednačine

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Na osnovu ovih rezultata dobijamo da se divergencija vektora \vec{l} određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\text{div}(\vec{l}) = \left(\frac{\partial \vec{l}}{\partial r}\right) \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

, odnosno

$$\text{div}(\vec{l}) = \vec{n} \cdot \left(\frac{\partial \vec{l}}{\partial r}\right) \quad (11.30)$$

Na osnovu ovog rezultata jednačina (11.27) postaje

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{div} \left(\frac{\vec{p} \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right) \quad (11.31)$$

Ova jednačina dalje se transformiše na sledeći način

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{n} \cdot \vec{p} \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \text{div}(\vec{p} \left(t - \frac{r}{c}\right))$$

Istakao sam da se tačka B nalazi na velikoj udaljenosti od sistema naelektrisanih čestica. U skladu sa tim može se zanemariti prvi član u predhodnoj jednačini i dobijamo sledeći rezultat

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \text{div}(\vec{p} \left(t - \frac{r}{c}\right))$$

Ovu jednačinu dalje transformišemo korišćenjem jednačine (11.30)

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \vec{n} \cdot \left(\frac{\partial \vec{p}(t - \frac{r}{c})}{\partial r} \right) \quad (11.32)$$

Da bismo dalje transformisali ovaj izraz potrebne su nam opšte jednačine. U skladu sa tim neku komponentu vektora \vec{l} označimo sa f . Uzeću proizvoljno da je

$$l_x = f$$

Rezultate koje dobijem za komponentu l_x važiće i za ostale dve komponente vektora \vec{l} . f je funkcija dve nezavisne promenljive t i r

$$f = f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Na osnovu jednačine $\tau = t - r/c$ funkcija f može se napisati u obliku

$$f = f(\tau)$$

Potražimo sada parcijalni izvod funkcije $f(\tau)$ po promenljivoj r

$$\frac{\partial f(\tau)}{\partial r} = \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{\partial f(\tau)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r} \quad (11.33)$$

Lako je pokazati da važe sledeće jednačine

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = -\frac{1}{c} \quad (11.34)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1 \quad (11.35)$$

Zamenom ovih rezultata u jednačinu (11.33) dobijamo

$$\frac{\partial f(\tau)}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f(\tau)}{\partial t} \quad (11.36)$$

Potražimo sada parcijalni izvod funkcije $f(\tau)$ po promenljivoj t

$$\frac{\partial f(\tau)}{\partial t} = \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

Na osnovu jednačine (11.35) dobijamo

$$\frac{\partial f(\tau)}{\partial t} = \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \quad (11.37)$$

Parcijalni izvod vektora \vec{l} po promenljivoj r određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial r} = \frac{\partial l_x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial l_y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial l_z}{\partial r} \vec{k}$$

Na osnovu jednačine (11.36) dobijamo sledeći rezultat

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} \quad (11.38)$$

Ovo je opšti rezultat i može se primeniti na vektor \vec{p}

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \quad (11.39)$$

Zamenom jednačine (11.39) u jednačinu (11.32) dobijamo

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r} \vec{n} \cdot \left(\frac{\partial \vec{p}(t - \frac{r}{c})}{\partial t} \right)$$

, odnosno

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (11.40)$$

Sada ću primeniti predhodno opisanu proceduru u cilju dobijanja odgovarajućeg izraza za gravitacioni skalarni potencijal. Polazim od jednačine (11.19). Ova jednačina može se napisati u obliku

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\gamma \int_{V'} \frac{\rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}')}{r} dV', \quad (11.41)$$

Primenjujući proceduru opisanu u knjizi [13] podintegralnu funkciju u jednačini (11.41) razvijamo u Tejlorov red

$$\frac{\rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}')}{r} \approx \rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) - (\vec{n} \cdot \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} \right)$$

Zbog uslova (11.7) uzeta su samo dva člana u razvoju podintegralne funkcije. Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.41) dobijamo

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\gamma \int_{V'} \frac{\rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} dV' + \gamma \int_{V'} (\vec{n} \cdot \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} \right) dV'$$

Ako koristimo proceduru prezentovanu u knjizi [13] ova jednačina transformiše se na sledeći način

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma}{r} \int_{V'} \rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' + \gamma \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_{V'} \rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \right]$$

U drugom članu u ovoj jednačini izvlači se vektor \vec{n} ispred znaka integrala, i dobijamo sledeći rezultat

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma}{r} \int_{V'} \rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' + \gamma \vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_{V'} \rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' dV' \right] \quad (11.42)$$

Prvi integral predstavlja ukupnu masu posmatranog sistema u trenutku $t - r/c$

$$M\left(t - \frac{r}{c}\right) = \int_{V'} \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' \quad (11.43)$$

Na osnovu jednačine (11.43) zaključujemo da se ukupna masa sistema može menjati tokom vremena. Sa stanovišta gravitoelektromagnetizma mogu se analizirati sistemi čija se ukupna masa menja tokom vremena. Medjutim u daljem radu ja ću se zadržati samo na sistemima kod kojih je ukupna masa konstantna, odnosno ne menja se tokom vremena. Takvu masu sistema označiću sa M .

Prvi član u jednačini (11.42) je potencijal gravitacionog polja koji se dobija na osnovu klasične (Njutnove) mehanike. Taj potencijal obeležiću sa φ_0 , i on se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\varphi_0 = -\frac{\gamma M}{r} \quad (11.44)$$

Da bi smo izvršili analizu drugog integrala u jednačini (11.42) podesno je preći sa kontinualne raspodele mase na diskretnu raspodelu mase

$$\int_{V'} \rho_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' dV' = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}'_i \quad (11.45)$$

U elektrodinamici postoji veličina električni dipolni moment sistema. U trećem poglavlju uveo sam veličinu \vec{p}_{gem} (jednačina (3.52))

$$\vec{p}_{gem} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}'_i \quad (11.46)$$

Ovu veličinu nazvao sam maseni dipolni moment sistema. Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.45) dobijam

$$\int_{V'} \rho_m \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) \vec{r}' dV' = \vec{p}_{gem}$$

, odnosno

$$\int_{V'} \rho_m \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) \vec{r}' dV' = \vec{p}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (11.47)$$

Zamenom jednačina (11.44) i (11.47) u jednačinu (11.42) dobijam

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = \varphi_0 + \gamma \vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\vec{p}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right] \quad (11.48)$$

Drugi sabirak u jednačini (11.48) obeležiću sa $\varphi_{gem d}$ i nazvaću ga gravitacioni dipolni skalarni potencijal

$$\varphi_{gem d} = \gamma \vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\vec{p}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right] \quad (11.49)$$

U skladu sa ovom definicijom jednačina (11.48) dobija oblik

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = \varphi_0 + \varphi_{gem d} \quad (11.50)$$

Potrebno je transformisati veličinu $\varphi_{gem d}$. Korišćenjem jednačine (11.30) jednačina (11.49) dobija oblik

$$\varphi_{gem d} = \gamma \operatorname{div} \left(\frac{\vec{p}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right)$$

Ova jednačina dalje se transformiše na sledeći način

$$\varphi_{gem d} = -\gamma \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} \operatorname{div}(\vec{p}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right))$$

Istakao sam da se tačka B nalazi na velikoj udaljenosti od sistema čestica. U skladu sa tim može se zanemariti prvi član u predhodnoj jednačini i dobijam sledeći rezultat

$$\varphi_{gem d} = \frac{\gamma}{r} \operatorname{div}(\vec{p}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right))$$

Ovu jednačinu dalje transformišem korišćenjem jednačine (11.30)

$$\varphi_{gem d} = \frac{\gamma}{r} \vec{n} \cdot \left(\frac{\partial \vec{p}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\partial r} \right) \quad (11.51)$$

Na osnovu jednačine (11.38) dobijam sledeći rezultat

$$\frac{\partial \vec{p}_{gem}}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{p}_{gem}}{\partial t} \quad (11.52)$$

Zamenom jednačine (11.52) u jednačinu (11.51) dobijam

$$\varphi_{gem d} = -\frac{\gamma}{cr} \vec{n} \cdot \left(\frac{\partial \vec{p}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t} \right)$$

, odnosno

$$\varphi_{gem d} = -\frac{\gamma}{cr} \vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (11.53)$$

Zamenom jednačina (11.44) i (11.53) u jednačinu (11.50) dobijam

$$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma M}{r} - \frac{\gamma}{c} \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \quad (11.54)$$

Sada ću izvršiti analizu vektorskog potencijala. Biće pokazano da se vektorski potencijal može prikazati kao suma tri sabirka

$$\vec{A} = \vec{A}_d + \vec{A}_m + \vec{A}_k \quad (11.56)$$

Naelektrisane čestice koje se nalaze u zapremini V' , i kreću se ubrzano predstavljaju izvor elektromagnetnih talasa. U pojedinim slučajevima u talasnoj zoni elektromagnetno zračenje sastoji se od tri komponente. Te komponente nose naziv električno dipolno zračenje, magnetno dipolno zračenje i električno kvadropolno zračenje. Mogući su slučajevi da postoji samo jedna komponenta elektromagnetnog zračenja, ali postoje i slučajevi kada istovremeno egzistiraju dve komponente elektromagnetnog zračenja.

U slučaju da postoji električno dipolno zračenje onda je to zračenje najdominantnija komponenta elektromagnetnog zračenja. U pojedinim slučajevima ova komponenta izostaje. Tada se elektromagnetno zračenje može sastojati od preostale dve komponente, ali postoje i fizičke situacije da se elektromagnetno zračenje sastoji samo od magnetnog dipolnog zračenja, ili se sastoji samo od električnog kvadropolnog zračenja.

Vektorski potencijal koji je povezan sa električnim dipolnim zračenjem obeležio sam sa \vec{A}_d . Vektorski potencijal koji je povezan sa magnetnim dipolnim zračenjem obeležio sam sa \vec{A}_m . Sa \vec{A}_k obeležio sam vektorski potencijal koji je povezan sa električnim kvadropolnim zračenjem.

Da bi izvršio analizu vektorskog potencijala primeniću postupak koji se u mnogome zasniva na postupku koji je prezentovan u knjizi [13]. Najpre ću izvršiti razvoj podintegralne funkcije iz jednačine (11.22) u Tejlorov red

$$\frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}')}{r} \approx \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} \right)$$

Zbog uslova (11.7) uzeta su samo dva člana u razvoju podintegralne funkcije. Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.22) dobijamo

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} (\vec{n} \cdot \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} \right) dV'$$

Saglasno proceduri prezentovanoj u knjizi [13] ova jednačina transformiše se na sledeći način.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \right] \quad (11.57)$$

Sličnu proceduru mali smo i prilikom analize skalarnog potencijala.

Da bi smo transformisali prvi član u jednačini (11.57) prvo ćemo transformisati podintegralni izraz koristeći definiciju gustine struje

$$\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c} r) dV' = \int_{V'} \rho \vec{v}' dV'$$

, a potom ćemo preći sa kontinualne raspodele naelektrisanja na diskretnu

$$\int_{V'} \rho \vec{v}' dV' = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{v}'_i$$

Nakon ovih transformacija dobili smo sledeći rezultat

$$\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c} r) dV' = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{v}'_i \quad (11.58)$$

Električni dipolni moment sistema određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{r}'_i$$

Potražimo sada vremensku promenu ove veličine

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{r}'_i = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \frac{d\vec{r}'_i}{dt} = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{v}'_i$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.58) dobijamo

$$\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (11.59)$$

, odnosno

$$\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' = \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \quad (11.60)$$

Zamenom jednačine (11.60) u (11.57) dobijamo

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \right] \quad (11.61)$$

Prvi član u jednačini (11.61) označiću sa \vec{A}_d

$$\vec{A}_d = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} \quad (11.62)$$

Vektorski potencijal može se prikazati kao suma tri sabirka (jednačina (11.56)). Da bi smo odredili ostale dve komponente vektorskog potencijala potrebno je transformisati drugi član u jednačini (11.61). Postupak dobijanja tih komponenta biće prezentovan u narednom tekstu.

Sada ću analizirati slučaj kada se vektorski potencijal sastoji samo od komponente \vec{A}_d . U tom slučaju jednačina (11.56) dobija oblik

$$\vec{A} = \vec{A}_d \quad (11.63)$$

U ovom slučaju postoji samo električno dipolno zračenje. Skalarni potencijal određuje se na osnovu jednačine (11.40), a vektorski potencijal na osnovu jednačine (11.62). Pošto su nam poznati potencijali na osnovu jednačina (2.9) i (2.10) (odnosno jednačina (11.64) i (11.65)) možemo odrediti jačinu električnog i jačinu magnetnog polja

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (11.64)$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (11.65)$$

Konkretne jednačine glase

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{2\vec{n} [\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \vec{n}] - \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r^2} \quad (11.66)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r^2} \quad (11.67)$$

U talasnoj zoni, odnosno u oblasti koja je veoma udaljena od zapremine V' možemo zanemariti sabirke u jednačinama (11.66) i (11.67) koji sadrže faktor $1/r^2$. U skladu sa tim jednačine (11.66) i (11.67) dobijaju formu

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} \quad (11.68)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} \quad (11.69)$$

Iz jednačina (11.68) i (11.69) možemo zaključiti da su u talasnoj zoni vektori \vec{E} i \vec{B} međusobno ortogonalni. Vektori \vec{E} i \vec{B} ortogonalni su na vektor \vec{n} , i važi sledeća jednačina

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = c[\vec{B}(\vec{r}, t) \times \vec{n}] \quad (11.70)$$

Ja ću sada dokazati jednačinu (11.67). Zamenom jednačine (11.62) u jednačinu (11.64) dobijamo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} \right) \quad (11.71)$$

U predhodnom tekstu je pokazano da važi jednačina (11.30). Može se pokazati da važi i sledeća jednačina

$$\text{rot}(\vec{l}) = \vec{n} \times \left(\frac{\partial \vec{l}}{\partial r} \right) \quad (11.72)$$

Jednačinu (11.71) dalje transformišemo korišćenjem jednačine (11.72)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{1}{c}r)}{r} \right)$$

, odnosno

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{1}{c}r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{1}{c}r \right) \right) \right] \quad (11.73)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama može se dalje pojednostaviti korišćenjem jednačine (11.38)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{1}{c}r \right) \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{1}{c}r \right) \right)$$

, odnosno

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{1}{c}r \right) \right) = -\frac{1}{c} \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.73) dobijamo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{1}{c}r \right) - \frac{1}{rc} \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

, odnosno

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r^2}$$

U talasnoj zoni možemo zanemariti sabirak koji sadrži faktor $1/r^2$, i dobijamo sledeći rezultat

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r}$$

Ovim postupkom dokazao sam jednačine (11.67) i (11.69).

Na osnovu jednačine (11.69) određuje se jačina magnetnog polja u talasnoj zoni. Korišćenjem odgovarajuće Maksvelove jednačine, i jednačine (11.69) određiću jačinu električnog polja u talasnoj zoni.

Sledeća Maksvelova jednačina činu osnovu dalje analize

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Naelektrisane čestice kreću se samo unutar zapremine V' . Izvan zapremine V' ne postoje naelektrisane čestice, i u skladu sa tim gustina struje jednaka je nuli. Ovaj zaključak važi i za talasnu zonu, pa Maksimalna jednačina dobija jednostavniju formu

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (11.74)$$

Da bi našao jačinu električnog polja potrebno je najpre odrediti rotor jačine magnetnog polja

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \text{rot} \left(\frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} \right)$$

Primenom jednačine (11.72) dobijam

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} \right)$$

, odnosno

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) \right] \quad (11.75)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama transformišem na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) \frac{\partial \tau}{\partial r}$$

Korišćenjem jednačine (11.34) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Ovaj izraz može se dalje transformisati na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) \frac{\partial t}{\partial \tau} \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Korišćenjem jednačine (11.35) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

, odnosno

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.75) dobijam

$$\text{rot} \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \vec{n} \times \left[\frac{1}{r^2} \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} + \frac{1}{rc} \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right]$$

Pošto se razmatranja vrše u talasnoj zoni zanemariću prvi sabirak u uglastim zagradama i dobijam

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi rc^2} \left[\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Ovaj rezultat zamenjuje se u jednačinu (11.74)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Nakon integracije po vremenu dobija se jačina električnog polja

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r}$$

, odnosno

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\left[\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r}$$

Ovaj rezultat je identičan sa jednačinom (11.68).

Na osnovu jednačine (11.62) određujemo komponentu vektorskog potencijala \vec{A}_d . Vektorski potencijal može se prikazati kao suma tri sabirka (jednačina (11.56)). Da bi smo odredili ostale dve komponente vektorskog potencijala potrebno je transformisati drugi član u jednačini (11.61). Taj član obeležiću sa \vec{A}'

$$\vec{A}' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \right] \quad (11.76)$$

On je jednak zbiru komponenata \vec{A}_m i \vec{A}_k

$$\vec{A}' = \vec{A}_m + \vec{A}_k \quad (11.77)$$

Postupak dobijanja komponenata \vec{A}_m i \vec{A}_k zasniva se na proceduri koja je prezentovana u knjizi [13]. Izvršimo najpre diferenciranje po r u jednačini (11.76)

$$\vec{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \quad (11.78)$$

Drugi sabirak transformišemo korišćenjem jednačine (11.36)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV'$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.78) dobijamo

$$\vec{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV'$$

Možemo zanemariti prvi sabirak u ovoj jednačini jer sadrži faktor $1/r^2$. U skladu sa tim dobijamo sledeći rezultat

$$\vec{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \quad (11.79)$$

Da bi smo transformisali ovu jednačinu prelazimo sa kontinualne raspodele naelektrisanja na diskretnu. U skladu sa tim integral može se napisati na sledeći način

$$\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' = \sum_{i=1}^N (q_i \cdot \vec{v}'_i) (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.79) dobijamo

$$\vec{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N (q_i \cdot \vec{v}'_i) (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) \quad (11.80)$$

Radijus vektor \vec{r}' određuje položaj elementa zapremine dV' . Vektor \vec{v}' je prvi izvod radijus vektora \vec{r}' po vremenu

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

I u slučaju diskretne raspodele naelektrisanja veličine \vec{r}' i \vec{v}' treba odrediti u trenutku $t - r/c$.

Izraz pod znakom sume u jednačini (11.80) može se transformisati na sledeći način

$$\vec{v}'_i (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{d}{dt} (\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)) - \vec{r}'_i (\vec{n} \cdot \vec{v}'_i)$$

Ova jednačina može se proveriti neposrednim računom. Pri tome treba imati u vidu da je \vec{n} konstantan vektor.

Podelimo predhodnu jednačinu sa dva

$$\frac{1}{2} \vec{v}'_i (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)) - \frac{1}{2} \vec{r}'_i (\vec{n} \cdot \vec{v}'_i)$$

, a potom izraz na levoj strani zapišimo na sledeći način

$$\vec{v}_i(\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) - \frac{1}{2} \dot{\vec{v}}_i(\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)) - \frac{1}{2} \vec{r}'_i(\vec{n} \cdot \dot{\vec{v}}_i)$$

, odnosno

$$\dot{\vec{v}}_i(\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{1}{2} \dot{\vec{v}}_i(\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)) - \frac{1}{2} \vec{r}'_i(\vec{n} \cdot \dot{\vec{v}}_i)$$

Prvi i treći član zajedno možemo prikazati u obliku dvostrukog vektorskog proizvoda

$$\dot{\vec{v}}_i(\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{1}{2} \vec{n} \times (\dot{\vec{v}}_i \times \vec{r}'_i) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i))$$

Suma koja figuriše u jednačini (11.80) dobija oblik

$$\sum_{i=1}^N (q_i \dot{\vec{v}}_i)(\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \vec{n} \times (\dot{\vec{v}}_i \times \vec{r}'_i) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.80) dobijamo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \vec{n} \times (\dot{\vec{v}}_i \times \vec{r}'_i) \right] + \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) \right] \quad (11.81)$$

Istakao sam da je veličina \vec{A} jednaka zbiru komponentata \vec{A}_m i \vec{A}_k

$$\vec{A} = \vec{A}_m + \vec{A}_k$$

Veličine \vec{A}_m i \vec{A}_k određuju se na osnovu sledećih jednačina

$$\vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \vec{n} \times (\dot{\vec{v}}_i \times \vec{r}'_i) \right] \quad (11.82)$$

$$\vec{A}_k = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) \right] \quad (11.83)$$

Najpre ću analizirati veličinu \vec{A}_m i magnetno dipolno zračenje. U jednačini (11.82) izvrši se izmena redosleda množitelja u dvostrukom vektorskom proizvodu i dobija se sledeća jednačina

$$\vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i (\vec{r}'_i \times \dot{\vec{v}}_i) \right] \times \vec{n} \quad (11.84)$$

Izraz u zagradi predstavlja magnetni dipolni moment sistema u trenutku $t - r/c$

$$\vec{m}(t - \frac{r}{c}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i (\vec{r}'_i \times \dot{\vec{v}}_i) \quad (11.85)$$

Zamenom jednačine (11.85) u jednačinu (11.84) dobijamo

$$\vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\dot{\vec{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} \quad (11.86)$$

Korišćenjem jednačine (11.64) možemo odrediti jačinu magnetnog polja. Postupak dobijanja odgovarajuće jačine magnetnog polja je veoma sličan postupku koji je korišćen za dobijanje jednačine (11.69).

Zamenom jednačine (11.86) u jednačinu (11.64) dobijamo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \text{rot} \left(\frac{\dot{\vec{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} \right)$$

Ovu jednačinu dalje transformišemo korišćenjem jednačine (11.72)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{\vec{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} \right)$$

, odnosno

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \dot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \right] \quad (11.87)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama može se dalje pojednostaviti korišćenjem jednačine (11.38)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right)$$

Prilikom diferenciranja izraza u zagradi po vremenu treba imati na umu da je vektor \vec{n} konstantan vektor. U skladu sa tom konstatacijom dobijam sledeći rezultat

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} \ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.87) dobijam

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \dot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} - \frac{1}{rc} \ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right]$$

, odnosno

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\left[\dot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \frac{\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r}$$

U talasnoj zoni možemo zanemariti sabirak koji sadrži faktor $1/r^2$, i dobijam sledeći rezultat

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \frac{\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} \quad (11.88)$$

Na osnovu jednačine (11.88) određuje se jačina magnetnog polja u talasnoj zoni. Potrebno je odrediti i jačinu električnog polja u talasnoj zoni. Postupak dobijanja jačine električnog polja u talasnoj zoni biće veoma sličan postupku koji je korišćen prilikom analize električnog dipolnog zračenja. Taj postupak se zasniva na korišćenju jednačine (11.74). Zamenom jednačine (11.88) u jednačinu (11.74) dobijam

$$\frac{\mu_0}{4\pi c^2} \text{rot} \left(\frac{\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Da bi našao jačinu električnog polja potrebno je najpre odrediti rotor jačine magnetnog polja

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \text{rot} \left(\frac{\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} \right)$$

Primenom jednačine (11.72) dobijam

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} \right)$$

, odnosno

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) \right] \quad (11.89)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama transformišem na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) \frac{\partial \tau}{\partial r}$$

Korišćenjem jednačine (11.34) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Ovaj izraz može se dalje transformisati na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) \frac{\partial t}{\partial \tau} \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Korišćenjem jednačine (11.34) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

, odnosno

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} \left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.89) dobijam

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} - \frac{1}{rc} \left[\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right]$$

Pošto se razmatranja vrše u talasnoj zoni zanemariću prvi sabirak u uglastim zagradama i dobijam

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r c^3} \left[\left(\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Ovaj rezultat zamenjuje se u jednačinu (11.74)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \left[\left(\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Nakon integracije po vremenu dobija se jačina električnog polja

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \left[\left(\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

, odnosno

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\left[\left(\ddot{\vec{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} \quad (11.90)$$

Na osnovu jednačina (11.88) i (11.90) vidi se da su u talasnoj zoni vektori \vec{E} i \vec{B} međusobno ortogonalni. Vektori \vec{E} i \vec{B} ortogonalni su na vektor \vec{n} , i važi sledeća jednačina

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = c [\vec{B}(\vec{r}, t) \times \vec{n}] \quad (11.91)$$

Sada ću analizirati električno kvadropolno zračenje. Vektorski potencijal koji je povezan sa ovim zračenjem označio sam sa \vec{A}_k , i on se određuje na osnovu jednačine (11.83). Zbog važnosti ove jednačine za dalju analizu ponovo ću je zapisati

$$\vec{A}_k = \frac{\mu_0}{8\pi c r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{i=1}^N q_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) \right] \quad (11.92)$$

Procedura transformacije ove jednačine je prezentovana u knjizi [13]. Kada nam je poznat vektorski potencijal \vec{A}_k jačinu magnetnog polja određujemo na osnovu jednačine (11.64)

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}_k$$

Izrazu na desnoj strani jednačine (11.92) možemo dodati vektorsku funkciju oblika $f(r) \cdot \vec{n}$. Funkcija $f(r)$ glasi

$$f(r) = -\frac{\mu_0}{24\pi c r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^N q_i r_i^2$$

Dodavanje vektorske funkciju $f(r) \cdot \vec{n}$ izrazu na desnoj strani jednačine (11.92) neće promeniti jačinu magnetnog polja, jer je rotor vektorske funkciju $f(r) \cdot \vec{n}$ jednak nuli. U skladu sa ovim konstatacijama jednačina (11.92) dobija oblik

$$\vec{A}_k = \frac{\mu_0}{8\pi cr} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{i=1}^N q_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) \right] - \frac{\mu_0}{24\pi cr} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^n q_i r'^2 \vec{n}$$

, odnosno

$$\vec{A}_k = \frac{\mu_0}{24\pi cr} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{i=1}^N q_i (3 \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) - r'^2 \vec{n}) \right] \quad (11.93)$$

Jednačina (11.93) može se napisati na sledeći način

$$\vec{A}_k = \frac{\mu_0}{24\pi cr} \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (11.94)$$

Vektor \vec{D} definiše se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \sum_{i=1}^N q_i (3 \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) - r'^2 \vec{n})$$

Ovaj vektor može se izraziti na sledeći način

$$\vec{D} = D \vec{n} \quad (11.95)$$

Veličina D je tenzor kvadropolnog momenta. Komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ određuju se na osnovu sledeće jednačine

$$D_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N q_i (3 x'_{i\mu} x'_{i\nu} - r'^2 \delta_{\mu\nu}) \quad (11.96)$$

Indeks i uzima vrednosti od 1 do N . Sa N je označen broj čestica u sistemu. U okviru gravitoelektromagnetizma dobiću tenzor koji je po matematičkoj formi veoma sličan tenzoru D . Tada ću na konkretnim primerima iz gravitoelektromagnetizma određivati komponente tog tenzora. Iz tog razloga ovom prilikom izostaviću analizu tenzora D , ali mogu napomenuti da se komponente ovog tenzora određuju za diskretnu raspodelu naelektrisanja.

U slučaju kontinualne raspodele naelektrisanja komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ određuju se na osnovu sledeće jednačine

$$D_{\mu\nu} = \int (3 x'_{\mu} x'_{\nu} - r'^2 \delta_{\mu\nu}) \rho dV' \quad (11.97)$$

Na slici 52 prikazana je oblast prostora zapremine V' . Početak koordinatnog sistema označen je tačkom O . Unutar zapremine V' nalaze se naelektrisane čestice. Raspodela naelektrisanja je kontinualna. Gustina naelektrisanja je označena sa ρ . Da bi smo dobili komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ potrebno je izračunati odgovarajuće integrale. Ako koristimo Dekartove koordinate (x', y', z') važe sledeće jednačine

$$x'_1 = x'$$

$$x'_2 = y'$$

$$x'_3 = z'$$

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Nakon procesa integracije dobijaju se komponente tenzora $D_{\mu\nu}$. Tenzor D može se prikazati i u matricnoj formi

$$D_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \quad (11.98)$$

Treba napomenuti da sve komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ moraju biti određene za vremenski trenutak $t - r/c$.

Na slici 52 prikazana je i tačka B . Radijus vektor tačke B označio sam sa \vec{r} . Uveo sam jedinični vektor \vec{n} . On se može izraziti preko svojih komponentata

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \quad (11.99)$$

Vektori \vec{n} i \vec{D} mogu se predstaviti kao matrice vrste

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (11.100)$$

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} \quad (11.101)$$

Zamenom jednačina (11.98), (11.100) i (11.101) u jednačinu (11.95) dobijam

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (11.102)$$

Vektorski potencijal \vec{A}_k određuje se na osnovu jednačine (11.94). Da bi smo odredili jačinu magnetnog polja koristićemo metode koje su već prezentovane u dosadašnjem tekstu. Zamenom jednačine (11.94) u jednačinu (11.64) dobijam

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{24\pi c} \text{rot} \left(\frac{\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c})}{r} \right)$$

Ovu jednačinu dalje transformišem korišćenjem jednačine (11.72)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{24\pi c} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c})}{r} \right)$$

, odnosno

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{24\pi c} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right] \quad (11.103)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama može se dalje pojednostaviti korišćenjem jednačine (11.38)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{1}{c} r \right) \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{1}{c} r \right) \right)$$

, odnosno

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{1}{c} r \right) \right) = -\frac{1}{c} \dddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.103) dobijam

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{24\pi c} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{1}{c} r \right) - \frac{1}{rc} \dddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

, odnosno

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{24\pi c^2} \frac{\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r} + \frac{\mu_0}{24\pi c} \frac{\dddot{\vec{D}} \left(t - \frac{1}{c} r \right) \times \vec{n}}{r^2}$$

U talasnoj zoni možemo zanemariti sabirak koji sadrži faktor $1/r^2$, i dobijam sledeći rezultat

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{24\pi c^2} \frac{\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r} \quad (11.104)$$

I u slučaju određivanja jačine električnog polja koristiću metode koje su već prezentovane u dosadašnjem tekstu. Polazim od jednačine (11.74)

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Da bi našao jačinu električnog polja potrebno je najpre odrediti rotor jačine magnetnog polja

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{\mu_0}{24\pi c^2} \text{rot} \left(\frac{\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r} \right)$$

Primenom jednačine (11.72) dobijam

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{\mu_0}{24\pi c^2} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r} \right)$$

, odnosno

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{\mu_0}{24\pi c^2} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \right] \quad (11.105)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama transformišem na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \frac{\partial \tau}{\partial r}$$

Korišćenjem jednačine (11.34) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Ovaj izraz može se dalje transformisati na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \frac{\partial t}{\partial \tau} \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Korišćenjem jednačine (11.34) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

, odnosno

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial^4 \vec{D} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^4} \times \vec{n}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.105) dobijam

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{\mu_0}{24\pi c^2} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} - \frac{1}{rc} \frac{\partial^4 \vec{D} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^4} \times \vec{n} \right]$$

Pošto se razmatranja vrše u talasnoj zoni zanemariću prvi sabirak u uglastim zagradama i dobijam

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{\mu_0}{24\pi r c^3} \left[\frac{\partial^4 \vec{D} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^4} \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Ovaj rezultat zamenjuje se u jednačinu (11.74)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{24\pi r c} \left[\frac{\partial^4 \vec{D} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^4} \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Nakon integracije po vremenu dobija se jačina električnog polja

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{24\pi c} \frac{\left[\overset{\text{iii}}{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} \quad (11.106)$$

Na osnovu jednačina (11.104) i (11.106) zaključujemo da su u talasnoj zoni vektori \vec{E} i \vec{B} medjusobno ortogonalni. Vektori \vec{E} i \vec{B} ortogonalni su na vektor \vec{n} , i važi sledeća jednačina

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = c[\vec{B}(\vec{r}, t) \times \vec{n}] \quad (11.107)$$

Vektorski potencijal u elektrodinamici u opštem slučaju može se prikazati kao suma tri sabirka

$$\vec{A} = \vec{A}_d + \vec{A}_m + \vec{A}_k$$

Kada sistem naelektrisanih čestica koji se nalazi u zapremini V emituje elektromagnetne talase u pojedinim slučajevima u talasnoj zoni elektromagnetno zračenje sastoji se od tri komponente. Te komponente nose naziv električno dipolno zračenje, magnetno dipolno zračenje i električno kvadropolno zračenje. Istakao sam da su mogući i slučajevi da postoji samo jedna komponenta elektromagnetnog zračenja, ali postoje i slučajevi kada istovremeno egzistiraju dve komponente elektromagnetnog zračenja. U slučaju da postoji električno dipolno zračenje onda je to zračenje najdominantnija komponenta elektromagnetnog zračenja.

Vektorski potencijal koji je povezan sa električnim dipolnim zračenjem obeležio sam sa \vec{A}_d . Vektorski potencijal koji je povezan sa magnetnim dipolnim zračenjem obeležio sam sa \vec{A}_m . Sa \vec{A}_k obeležio sam vektorski potencijal koji je povezan sa električnim kvadropolnim zračenjem.

Analiziraću najpre slučaj kada postoje sve tri komponente vektorskog potencijala. Zamenom jednačina (11.62), (11.86) i (11.94) u jednačinu (11.56) dobijamo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\dot{\vec{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} + \frac{\mu_0}{24\pi c r} \ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \quad (11.108)$$

Ukupno magnetno polje u talasnoj zoni takodje se sastoji od tri komponente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \frac{[\dot{\vec{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} + \frac{\mu_0}{24\pi c^2} \frac{\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} \quad (11.109)$$

Ovaj rezultat sam dobio korišćenjem jednačina (11.69), (11.88) i (11.104).

Ukupno električno polje u talasnoj zoni takodje se sastoji od tri komponente

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{[(\dot{\vec{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} + \frac{\mu_0}{24\pi c} \frac{[\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r}$$

Ovaj rezultat sam dobio korišćenjem jednačina (11.68), (11.90) i (11.106).

Lako je pokazati da u talasnoj važi sledeća jednačina

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = c[\vec{B}(\vec{r}, t) \times \vec{n}] \quad (11.110)$$

Ova jednačina je posledica jednačina (11.70), (11.91) i (11.107).

Prezentovao sam odgovarajuće jednačine kada postoje sve tri komponente elektromagnetnog zračenja. Sada ću analizirati slučaj kada postoji samo električno dipolno zračenje, i za ovaj slučaj odrediću Pointingov vektor. U ovom slučaju jačina magnetnog polja određuje se na osnovu jednačine (11.69), a jačina električnog polja na osnovu jednačine (11.68). Pointingov vektor definiše se na osnovu jednačine (2.103)

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (11.111)$$

Zamenom jednačine (11.70) u jednačinu (11.111) dobijamo

$$\vec{P} = \frac{c}{\mu_0} (\vec{B} \times \vec{n}) \times \vec{B}$$

, odnosno

$$\vec{P} = \frac{c}{\mu_0} [\vec{n}(\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{n} \cdot \vec{B})]$$

Vektor \vec{n} je ortogonalan na vektor \vec{B} i u skladu sa tim predhodna jednačina dobija oblik

$$\vec{P} = \frac{c}{\mu_0} |\vec{B}|^2 \vec{n} \quad (11.112)$$

Zamenom jednačine (11.69) u jednačinu (11.112) dobijamo

$$\vec{p} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{[\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}]^2}{r^2} \vec{n} \quad (11.113)$$

Korišćenjem Pointingovog vektora može se odrediti ukupna energija koju izrača dipol u jedinici vremena.

U dosadašnjem tekstu analizirao sam gravitacioni skalarni potencijal, i dobio sam jednačine (11.50) i (11.54). Preostaje da izvršim analizu gravitacionog vektorskog potencijala. Ta analiza u mnogome se zasniva na prezentovanoj analizi iz elektrodinamike. Pokazaću da se gravitacioni vektorski potencijal može prikazati kao suma tri sabirka

$$\vec{A}_{gem} = \vec{A}_{gem d} + \vec{A}_{gem m} + \vec{A}_{gem k} \quad (11.114)$$

U slučaju elektrodinamike pokazano je da se u talasnoj zoni elektromagnetno zračenje može sastojati od tri komponente. Te komponente nose naziv električno dipolno zračenje, magnetno dipolno zračenje i električno kvadropolno zračenje. Slična je situacija i kod gravitoelektromagnetizma. Na slici 53 prikazana je oblast prostora zapremine V' . Unutar zapremine V' nalazi se veliki broj čestica. Kada se čestice sa masom kreću ubrzano one emituju gravitacione talase. Pokazaću da se u talasnoj zoni gravitaciono zračenje može sastojati od tri komponente. Komponente gravitacionog zračenja nazvao sam gravitaciono dipolno zračenje, gravitaciono magnetno dipolno zračenje i gravitaciono kvadropolno zračenje.

Gravitacioni vektorski potencijal koji je povezan sa gravitacionim dipolnim zračenjem u jednačini (11.114) obeležio sam sa $\vec{A}_{gem d}$. Gravitacioni vektorski potencijal koji je povezan sa gravitacionim magnetnim dipolnim zračenjem obeležio sam sa $\vec{A}_{gem m}$. Sa $\vec{A}_{gem k}$ obeležio sam gravitacioni vektorski potencijal koji je povezan sa gravitacionim kvadropolnim zračenjem.

Osnovu za analizu gravitacionog vektorskog potencijala predstavlja jednačina (11.20). Ona se može napisati u obliku

$$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma}{c^2} \int_{V'} \frac{\vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}')}{r} dV' \quad (11.115)$$

Postupak transformacije ove jednačine je veoma sličan postupku koji je primenjen u elektrodinamici. Najpre je potrebno izvršiti razvoj podintegralne funkcije iz jednačine (11.115) u Tejlorov red

$$\frac{\vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{r}')}{r} \approx \frac{\vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} - (\vec{n} \cdot \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} \right)$$

Obzirom da vršim analizu za talasni zonu ispunjen je uslov (11.7) i dovoljno je uzeti samo dva člana u razvoju podintegralne funkcije. Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.115) dobijamo

$$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma}{c^2} \int_{V'} \frac{\vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} dV' + \frac{4\gamma}{c^2} \int_{V'} (\vec{n} \cdot \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{r} \right) dV'$$

Ako se primeni matematička procedura koja je korišćena u elektrodinamici ova jednačina transformiše se na sledeći način.

$$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma}{rc^2} \int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' + \frac{4\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \right] \quad (11.116)$$

Da bi transformisao prvi član u jednačini (11.116) prvo ću transformisati podintegralni izraz koristeći definiciju masene gustine struje (jednačina (2.39))

$$\int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' = \int_{V'} \rho_m \vec{v} dV'$$

, a potom ću preći sa kontinualne raspodele mase na diskretnu raspodelu

$$\int_{V'} \rho_m \vec{v}' dV' = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}'_i$$

Nakon ovih transformacija dobio sam sledeći rezultat

$$\int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}'_i \quad (11.117)$$

U trećem poglavlju uveo sam veličinu \vec{p}_{gem} (jednačina (3.52))

$$\vec{p}_{gem} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}'_i$$

Potražimo sada promenu masenog dipolnog momenta sistema sa vremenom

$$\frac{d\vec{p}_{gem}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m \cdot \vec{r}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d\vec{r}'_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}'_i$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.117) dobijam

$$\int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' = \frac{d\vec{p}_{gem}(t - \frac{r}{c})}{dt}$$

, odnosno

$$\int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' = \dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c}) \quad (11.118)$$

Zamenom jednačine (11.118) u jednačinu (11.116) dobijamo

$$\vec{A}_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{4\gamma \dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c})}{c^2 r} + \frac{4\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_{V'} \vec{J}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \right] \quad (11.119)$$

Prvi član u jednačini (11.119) označiću sa $\vec{A}_{gem d}$

$$\vec{A}_{gem d} = -\frac{4\gamma \dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c})}{c^2 r} \quad (11.120)$$

Gravitacioni vektorski potencijal može se prikazati kao suma tri sabirka (jednačina (11.114)). Da bi smo odredili ostale dve komponente gravitacionog vektorskog potencijala potrebno je transformisati drugi član u jednačini (11.119). Postupak dobijanja tih komponenta biće prezentovan u narednom tekstu.

Sada ću analizirati slučaj kada se gravitacioni vektorski potencijal sastoji samo od komponente $\vec{A}_{gem d}$. U tom slučaju jednačina (11.114) dobija oblik

$$\vec{A}_{gem} = \vec{A}_{gem d} \quad (11.121)$$

U ovom slučaju postoji samo gravitaciono dipolno zračenje. Ako nam je poznat gravitacioni skalarni potencijal i gravitacioni vektorski potencijal jačinu gravitomagnetnog i jačinu gravitoelektričnog polja određujemo na osnovu jednačina (2.43) i (2.46)

$$\vec{B}_{gem} = \text{rot} \vec{A}_{gem} \quad (11.122)$$

$$\vec{E}_{gem} = -\text{grad} \varphi_{gem} - \frac{\partial \vec{A}_{gem}}{\partial t} \quad (11.123)$$

Zamenom jednačine (11.120) u jednačinu (11.122) dobijamo

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \text{rot} \left(\frac{\dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c})}{r} \right)$$

Ovu jednačinu dalje transformišemo korišćenjem jednačine (11.72)

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c})}{r} \right)$$

, odnosno

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c}) \right) \right] \quad (11.124)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama može se dalje pojednostaviti korišćenjem jednačine (11.38)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c}) \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c}) \right)$$

, odnosno

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c}) \right) = -\frac{1}{c} \ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.124) dobijamo

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \dot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{rc} \ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

, odnosno

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^3} \frac{\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r} - \frac{4\gamma}{c^2} \frac{\dot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r^2} \quad (11.125)$$

U talasnoj zoni možemo zanemariti sabirak koji sadrži faktor $1/r^2$, i dobijamo sledeći rezultat

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^3} \frac{\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r} \quad (11.126)$$

Na osnovu jednačine (11.126) određuje se jačina gravitomagnetnog polja u talasnoj zoni. Potrebno je odrediti jačinu gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni. U slučaju elektrodinamike kada sam određivao jačinu električnog polja u talasnoj zoni koristio sam Maksvelovu jednačinu odnosno jednačinu (11.74)

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

U slučaju gravitoelektromagnetizma primeniću sličan pristup. Osnovu dalje analize čini jednačina (2.37)

$$\text{rot} \vec{B}_{gem} = \mu_{gem} \vec{j}_m + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t}$$

Čestice se nalaze samo unutar zapremine V' (slika 53). Izvan zapremine V' ne postoje čestice, i u skladu sa tim masena gustina struje jednaka je nuli. Ovaj zaključak važi i za talasnu zonu, pa jednačina (2.37) dobija jednostavniju formu

$$\text{rot} \vec{B}_{gem} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t} \quad (11.127)$$

Da bi našao jačinu gravitoelektričnog polja potrebno je najpre odrediti rotor jačine gravitomagnetnog polja

$$\text{rot} \vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^3} \text{rot} \left(\frac{\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r} \right)$$

Primenom jednačine (11.72) dobijam

$$rot \vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^3} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r} \right)$$

, odnosno

$$rot \vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^3} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \right] \quad (11.128)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama transformišem na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \frac{\partial \tau}{\partial r}$$

Korišćenjem jednačine (11.34) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Ovaj izraz može se dalje transformisati na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \frac{\partial t}{\partial \tau} \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Korišćenjem jednačine (11.34) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

, odnosno

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} \ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.128) dobijam

$$rot \vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^3} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} - \frac{1}{rc} \ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right]$$

Pošto se razmatranja vrše u talasnoj zoni zanemariću prvi sabirak u uglastim zagradama i dobijam

$$rot \vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{rc^4} \left[\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Ovaj rezultat zamenjuje se u jednačinu (11.127)

$$\frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t} = -\frac{4\gamma}{rc^2} \left[\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Nakon integracije po vremenu dobija se jačina gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni

$$\vec{E}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \frac{\left[\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} \quad (11.129)$$

Na osnovu jednačina (11.126) i (11.129) dobijam sledeću jednačinu

$$\vec{E}_{gem} = c \left[\vec{B}_{gem} \times \vec{n} \right] \quad (11.130)$$

Vektori \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} medjusobno su ortogonalni, i ortogonalni su i na vektor \vec{n} .

Na osnovu jednačine (11.120) određuje se $\vec{A}_{gem d}$. Gravitacioni vektorski potencijal može se prikazati kao suma tri sabirka (jednačina (11.114)). Da bi smo odredili ostale dve komponente gravitacionog vektorskog potencijala potrebno je transformisati drugi član u jednačini (11.119). Taj član obeležiću sa \vec{A}_{gem}

$$\vec{A}_{gem} = \frac{4\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_{V'} \vec{J}_m \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \right] \quad (11.131)$$

On je jednak zbiru komponenata $\vec{A}_{gem m}$ i $\vec{A}_{gem k}$

$$\vec{A}_{gem} = \vec{A}_{gem m} + \vec{A}_{gem k} \quad (11.132)$$

Postupak dobijanja komponentata $\vec{A}_{gem m}$ i $\vec{A}_{gem k}$ zasniva se na proceduri koja je prezentovana u elektrodinamici. Izvršimo najpre diferenciranje po r u jednačini (11.131)

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \frac{1}{r^2} \int_{V'} \vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' + \frac{4\gamma}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{V'} \vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \quad (11.133)$$

Drugi sabirak transformišemo korišćenjem jednačine (11.36)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\int_{V'} \vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} \vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV'$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.133) dobijamo

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \frac{1}{r^2} \int_{V'} \vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' - \frac{4\gamma}{c^3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} \vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \quad (11.134)$$

Možemo zanemariti prvi sabirak u ovoj jednačini jer sadrži faktor $1/r^2$. U skladu sa tim dobijamo sledeći rezultat

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} \vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' \quad (11.135)$$

Da bi smo transformisali ovu jednačinu prelazimo sa kontinualne raspodele mase na diskretnu. U skladu sa tim integral može se napisati na sledeći način

$$\int_{V'} \vec{j}_m(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \vec{r}' \cdot \vec{n} dV' = \sum_{i=1}^N (m_i \cdot \vec{v}_i) (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.135) dobijamo

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N (m_i \cdot \vec{v}_i) (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) \quad (11.136)$$

Radius vektor \vec{r}' određuje položaj elementa zapremine dV' . Vektor \vec{v} je prvi izvod radius vektora \vec{r}' po vremenu

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

I u slučaju diskretne raspodele mase veličine \vec{r}' i \vec{v} treba odrediti u trenutku $t - r/c$. Slične zaključke imali smo i u slučaju elektrostatike.

Potrebno je transformisati izraz pod znakom sume u jednačini (11.136). Da bi to uradio primeniću pristup koji je već korišćen u elektrostatiki. Izraz pod znakom sume u jednačini (11.136) može se transformisati na sledeći način

$$\vec{v}_i (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{d}{dt} (\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)) - \vec{r}'_i (\vec{n} \cdot \vec{v}_i)$$

Ova jednačina može se proveriti neposrednim računom. Pri tome treba imati u vidu da je \vec{n} konstantan vektor.

Podelimmo predhodnu jednačinu sa dva

$$\frac{1}{2} \vec{v}_i (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)) - \frac{1}{2} \vec{r}'_i (\vec{n} \cdot \vec{v}_i)$$

, a potom izraz na levoj strani zapišimo na sledeći način

$$\vec{v}_i (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) - \frac{1}{2} \vec{v}_i (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)) - \frac{1}{2} \vec{r}'_i (\vec{n} \cdot \vec{v}_i)$$

, odnosno

$$\vec{v}_i (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{1}{2} \vec{v}_i (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)) - \frac{1}{2} \vec{r}'_i (\vec{n} \cdot \vec{v}_i)$$

Prvi i treći član zajedno možemo prikazati u obliku dvostrukog vektorskog proizvoda

$$\vec{v}'_i(\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{1}{2}\vec{n} \times (\vec{v}'_i \times \vec{r}'_i) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i))$$

Suma koja figuriše u jednačini (11.136) dobija oblik

$$\sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}'_i)(\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{n} \times (\vec{v}'_i \times \vec{r}'_i) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.136) dobijamo

$$\vec{A}'_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^3 r} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{n} \times (\vec{v}'_i \times \vec{r}'_i) \right] - \frac{4\gamma}{c^3 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) \right] \quad (11.137)$$

Istakao sam da je veličina \vec{A}'_{gem} jednaka zbiru komponenata $\vec{A}'_{gem m}$ i $\vec{A}'_{gem k}$

$$\vec{A}'_{gem} = \vec{A}'_{gem m} + \vec{A}'_{gem k}$$

Veličine $\vec{A}'_{gem m}$ i $\vec{A}'_{gem k}$ određuju se na osnovu sledećih jednačina

$$\vec{A}'_{gem m} = -\frac{4\gamma}{c^3 r} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{n} \times (\vec{v}'_i \times \vec{r}'_i) \right] \quad (11.138)$$

$$\vec{A}'_{gem k} = -\frac{4\gamma}{c^3 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) \right] \quad (11.139)$$

Najpre ću analizirati veličinu $\vec{A}'_{gem m}$. U jednačini (11.138) izvrši se izmena redosleda množitelja u dvostrukom vektorskom proizvodu i dobija se sledeća jednačina

$$\vec{A}'_{gem m} = -\frac{4\gamma}{c^3 r} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i) \times \vec{n} \right] \quad (11.140)$$

Moment impulsa za sistem čestica definisan je jednačinom

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i) \quad (11.141)$$

U skladu sa tim jednačina (11.140) dobija oblik

$$\vec{A}'_{gem m} = -\frac{4\gamma}{c^3 r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{L} \times \vec{n} \right) \quad (11.142)$$

I u slučaju diskretene raspodele mase, kao i u slučaju kontinualne raspodele mase veličine \vec{r}' i \vec{v}' treba odrediti u trenutku $t - r/c$. U skladu sa tim i moment impulsa za sistem čestica treba odrediti u trenutku $t - r/c$, pa jednačina (11.142) dobija oblik

$$\vec{A}'_{gem m} = -\frac{4\gamma}{c^3 r} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \vec{L} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right]$$

Obzirom da je \vec{n} konstantan vektor ovu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\vec{A}'_{gem m} = -\frac{2\gamma \vec{L} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{c^3 r} \quad (11.143)$$

Korišćenjem jednačine (11.143) možemo odrediti jačinu gravitomagnetnog polja. Međutim u većini slučajeva moment impulsa je konstantna veličina. To ima za posledicu da je veličina $\vec{A}'_{gem m}$ jednaka nuli, odnosno jačina gravitomagnetnog polja i jačina gravitoelektričnog polja biće jednake nuli, i odgovarajuća komponenta gravitacione radijacije izostaje. Konstantnost momenta impulsa nije iznenadjuća činjenica, jer čestice međusobno deluju gravitacionim silama. Zbog generalnosti diskutuje ja ću ipak odrediti jačinu gravitoelektričnog i jačinu gravitomagnetnog polja.

Zamenom jednačine (11.143) u jednačinu (11.122) dobijam

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^3} \text{rot} \left(\frac{\dot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} \right)$$

Ovu jednačinu dalje transformišemo korišćenjem jednačine (11.72)

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^3} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} \right)$$

, odnosno

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^3} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \dot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \right] \quad (11.144)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama može se dalje transformisati korišćenjem jednačine (11.38)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right)$$

Prilikom diferenciranja izraza u zagradi po vremenu treba imati na umu da je vektor \vec{n} konstantan vektor. U skladu sa tom konstatacijom dobijam sledeći rezultat

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\dot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} \ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.144) dobijam

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^3} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \dot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} - \frac{1}{rc} \ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right]$$

, odnosno

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^3} \frac{[\dot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r^2} - \frac{2\gamma}{c^4} \frac{[\ddot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r}$$

U talasnoj zoni možemo zanemariti sabirak koji sadrži faktor $1/r^2$, i dobijam sledeći rezultat

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^4} \frac{[\ddot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} \quad (11.145)$$

Na osnovu jednačine (11.145) određuje se jačina gravitomagnetnog polja u talasnoj zoni. Potrebno je odrediti jačinu gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni. Prilikom dobijanja jednačine (11.129) korišćena je jednačina (11.127). I u ovom slučaju jednačina (11.127) predstavlja osnovu dalje analize. Zbog njene važnosti ponovo je navodim

$$\text{rot} \vec{B}_{gem} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t}$$

Da bi našao jačinu gravitoelektričnog polja potrebno je najpre odrediti rotor jačine gravitomagnetnog polja

$$\text{rot} \vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^4} \text{rot} \left(\frac{[\ddot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} \right)$$

Primenom jednačine (11.72) dobijam

$$\text{rot} \vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^4} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{[\ddot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} \right)$$

, odnosno

$$\text{rot} \vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^4} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} [\ddot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} ([\ddot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}) \right] \quad (11.146)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama transformišem na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) \frac{\partial \tau}{\partial r}$$

Korišćenjem jednačine (11.34) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Ovaj izraz može se dalje transformisati na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) \frac{\partial t}{\partial \tau} \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Korišćenjem jednačine (11.34) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

, odnosno

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} \left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.146) dobijam

$$\text{rot} \vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^4} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} - \frac{1}{rc} \left[\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n} \right]$$

Pošto se razmatranja vrše u talasnoj zoni zanemariću prvi sabirak u uglastim zagradama i dobijam

$$\text{rot} \vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{rc^5} \left[\left(\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Ovaj rezultat zamenjuje se u jednačinu (11.127)

$$\frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t} = -\frac{2\gamma}{rc^3} \left[\left(\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Nakon integracije po vremenu dobija se jačina gravitoelektričnog polja

$$\vec{E}_{gem} = -\frac{2\gamma}{rc^3} \left[\left(\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

, odnosno

$$\vec{E}_{gem} = -\frac{2\gamma}{c^3} \frac{\left[\left(\ddot{\vec{L}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} \quad (11.147)$$

Na osnovu jednačina (11.145) i (11.147) vidi se da su u talasnoj zoni vektori \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} medjusobno ortogonalni. Vektori \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} ortogonalni su na vektor \vec{n} , i važi sledeća jednačina

$$\vec{E}_{gem} = c \left[\vec{B}_{gem} \times \vec{n} \right] \quad (11.148)$$

Sada ću analizirati gravitaciono kvadropolno zračenje. Gravitacioni vektorski potencijal koji je povezan sa ovim zračenjem označio sam sa \vec{A}_{gemk} i on se određuje na osnovu jednačine (11.139). Zbog važnosti ove jednačine za dalju analizu ponovo je navodim

$$\vec{A}_{gemk} = -\frac{4\gamma}{c^3 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) \right]$$

Primena gravitacionog kvadropolnog zračenja u astrofizici veoma je bitna. Naročito je značajna u slučaju binarnih zvezdanih sistema.

Procedura transformacije jednačine (11.139) zasniva se na proceduri koja je korišćenja u slučaju elektrodinamike. U slučaju elektrodinamike izrazu na desnoj strani jednačine (11.92) dodata je vektorska funkcija oblika $f(r) \cdot \vec{n}$. Funkcija $f(r)$ glasi

$$f(r) = -\frac{\mu_0}{24\pi cr} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^N q_i r_i^2$$

Dodavanje vektorske funkciju $f(r) \cdot \vec{n}$ izrazu na desnoj strani jednačine (11.92) nije promenilo jačinu magnetnog polja, jer je rotor vektorske funkciju $f(r) \cdot \vec{n}$ jednak nuli.

Sličnu proceduru primenjujemo i u slučaju gravitoelektromagnetizma. Kada nam je poznat gravitacioni vektorski potencijal \vec{A}_{gemk} jačinu gravitomagnetnog polja određujemo na osnovu jednačine (11.122)

$$\vec{B}_{gem} = rot \vec{A}_{gem}$$

Izrazu na desnoj strani jednačine (11.139) dodaću vektorsku funkciju oblika $g(r) \cdot \vec{n}$. Funkcija $g(r)$ glasi

$$g(r) = \frac{2\gamma}{3c^3 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^N m_i r^2$$

Može se pokazati da je rotor vektorske funkcije $g(r) \cdot \vec{n}$ jednak nuli.

U skladu sa procedurom koja je korišćena u elektrodinamici jednačina (11.139) dobija oblik

$$\vec{A}_{gemk} = -\frac{2\gamma}{c^3 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) \right] + \frac{2\gamma}{3c^3 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^N m_i r^2 \vec{n}$$

, odnosno

$$\vec{A}_{gemk} = -\frac{2\gamma}{3c^3 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{i=1}^N m_i (3\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) - r^2 \vec{n}) \right] \quad (11.149)$$

Jednačina (11.149) može se napisati na sledeći način

$$\vec{A}_{gemk} = -\frac{2\gamma}{3c^3} \frac{\vec{D} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \quad (11.150)$$

Vektor \vec{D} definiše se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \sum_{i=1}^N m_i (3\vec{r}'_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}'_i) - r^2 \vec{n})$$

Ovaj vektor može se izraziti na sledeći način

$$\vec{D} = D \vec{n} \quad (11.151)$$

Veličinu D nazvaću tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta. Komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ određuju se na osnovu sledeće jednačine

$$D_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N m_i (3x'_{i\mu} x'_{i\nu} - r_i'^2 \delta_{\mu\nu}) \quad (11.152)$$

Indeks i uzima vrednosti od 1 do N . Sa N je označen ukupan broj čestica u sistemu. Tenzori dati jednačinama (11.96) i (11.152) po matematičkoj formi veoma su slični. Kada budem analizirao konkretne primere iz astrofizike sa stanovišta gravitoelektromagnetizma, određiću komponente tenzora $D_{\mu\nu}$. Jednačina (11.152) važi za slučaj diskretne raspodele mase.

U slučaju kontinualne raspodele mase komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ određuju se na osnovu sledeće jednačine

$$D_{\mu\nu} = \int (3x'_{\mu} x'_{\nu} - r^2 \delta_{\mu\nu}) \rho_m dV \quad (11.153)$$

Da bi se odredile komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ potrebno je izračunati odgovarajuće integrale.

Tenzor D može se prikazati u matričnoj formi

$$D_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \quad (11.154)$$

Treba napomenuti da sve komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ moraju biti određene za vremenski trenutak $t - r/c$.

Uveo sam jedinični vektor \vec{n} . On se može izraziti preko svojih komponentata (jednačina (11.99))

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

Vektor \vec{n} koristi se u elektrodinamici, ali se koristi i u gravitoelektromagnetizmu.

Vektori \vec{n} i \vec{D} mogu se predstaviti kao matrice kolone

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (11.155)$$

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} \quad (11.156)$$

Zamenom jednačina (11.154), (11.155) i (11.156) u jednačinu (11.151) dobijam

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (11.157)$$

Gravitacioni vektorski potencijal \vec{A}_{gemk} određuje se na osnovu jednačine (11.150). Da bi odredio jačinu gravitomagnetnog polja koristiću metode koje su već prezentovane u dosadašnjem tekstu. Zamenom jednačine (11.150) u jednačinu (11.122) dobijam

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^3} \text{rot} \left(\frac{\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c})}{r} \right)$$

Ovu jednačinu dalje transformišem korišćenjem jednačine (11.72)

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^3} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c})}{r} \right)$$

, odnosno

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^3} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right] \quad (11.158)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama može se dalje pojednostaviti korišćenjem jednačine (11.38)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

, odnosno

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) = -\frac{1}{c} \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.158) dobijam

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^3} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{rc} \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

, odnosno

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^4} \frac{\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r} - \frac{2\gamma}{3c^3} \frac{\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r^2}$$

U talasnoj zoni možemo zanemariti sabirak koji sadrži faktor $1/r^2$, i dobijam sledeći rezultat

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^4} \frac{\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r} \quad (11.159)$$

Na osnovu jednačine (11.159) određuje se jačina gravitomagnetnog polja u talasnoj zoni. Potrebno je odrediti i jačinu gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni. I u ovom slučaju koristiću metode koje su već prezentovane u dosadašnjem tekstu. Prilikom dobijanja jednačine (11.147) korišćena je jednačina (11.127). Jednačina (11.127) i u ovom slučaju predstavlja osnovu dalje analize. Zbog njene važnosti ponovo je navodim

$$\text{rot}\vec{B}_{gem} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t}$$

Da bi našao jačinu gravitoelektričnog polja potrebno je najpre odrediti rotor jačine gravitomagnetnog polja

$$\text{rot}\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^4} \text{rot} \left(\frac{\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} \right)$$

Primenom jednačine (11.72) dobijam

$$\text{rot}\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^4} \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} \right)$$

, odnosno

$$\text{rot}\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^4} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) \right] \quad (11.160)$$

Drugi sabirak u uglastim zagradama transformišem na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) \frac{\partial \tau}{\partial r}$$

Korišćenjem jednačine (11.34) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Ovaj izraz može se dalje transformisati na sledeći način

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) \frac{\partial t}{\partial \tau} \left(-\frac{1}{c} \right)$$

Korišćenjem jednačine (11.34) dobijam

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) \left(-\frac{1}{c} \right)$$

, odnosno

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial^4 \vec{D}(t - \frac{r}{c})}{\partial t^4} \times \vec{n}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.160) dobijam

$$\text{rot}\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^4} \vec{n} \times \left[-\frac{1}{r^2} \vec{D}''''(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} - \frac{1}{rc} \frac{\partial^4 \vec{D}(t - \frac{r}{c})}{\partial t^4} \times \vec{n} \right]$$

Pošto se razmatranja vrše u talasnoj zoni zanemariću prvi sabirak u uglastim zagradama i dobijam

$$\text{rot}\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3rc^5} \left[\frac{\partial^4 \vec{D}(t - \frac{r}{c})}{\partial t^4} \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Ovaj rezultat zamenjuje se u jednačinu (11.127)

$$\frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t} = -\frac{2\gamma}{3rc^3} \left[\frac{\partial^4 \vec{D}(t - \frac{r}{c})}{\partial t^4} \times \vec{n} \right] \times \vec{n}$$

Nakon integracije po vremenu dobija se jačina gravitoelektričnog polja

$$\vec{E}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^3} \frac{[\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} \quad (11.161)$$

Na osnovu jednačina (11.159) i (11.161) zaključujemo da su u talasnoj zoni vektori \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} medjusobno ortogonalni. Vektori \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} ortogonalni su na vektor \vec{n} , i važi sledeća jednačina

$$\vec{E}_{gem} = c[\vec{B}_{gem} \times \vec{n}] \quad (11.162)$$

Gravitacioni vektorski potencijal može se prikazati kao suma tri sabirka (jednačina (11.114))

$$\vec{A}_{gem} = \vec{A}_{gem d} + \vec{A}_{gem m} + \vec{A}_{gem k}$$

Ovo je najuopšteniji slučaj jer istovremeno postoje tri komponente gravitacionog vektorskog potencijala. Mogući su slučajevi da postoji samo jedna komponenta gravitacionog vektorskog potencijala, ali postoje i slučajevi kada istovremeno egzistiraju dve komponente gravitacionog vektorskog potencijala.

Ja ću najpre analizirati slučaj kada postoje sve tri komponente gravitacionog vektorskog potencijala. Zamenom jednačina (11.120), (11.143) i (11.150) u jednačinu (11.114) dobijam

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \frac{\dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c})}{r} - \frac{2\gamma}{c^3} \frac{\dot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} - \frac{2\gamma}{3c^3} \frac{\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c})}{r} \quad (11.163)$$

Ukupno gravitomagnetno polje u talasnoj zoni takodje se sastoji od tri komponente

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^3} \frac{\ddot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} - \frac{2\gamma}{c^4} \frac{[\dot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} - \frac{2\gamma}{3c^4} \frac{[\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} \quad (11.164)$$

Ovaj rezultat dobio sam korišćenjem jednačina (11.126), (11.145) i (11.159).

I ukupno gravitoelektrično polje u talasnoj zoni takodje se sastoji od tri komponente

$$\vec{E}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \frac{[\ddot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} - \frac{2\gamma}{c^3} \frac{[[\dot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r} - \frac{2\gamma}{3c^3} \frac{[\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r}$$

Ovaj rezultat dobio sam korišćenjem jednačina (11.129), (11.147) i (11.161).

Lako je pokazati da u talasnoj važi sledeća jednačina

$$\vec{E}_{gem} = c[\vec{B}_{gem} \times \vec{n}] \quad (11.165)$$

Sa \vec{E}_{gem} označeno je ukupno gravitoelektrično polje u talasnoj zoni, a sa \vec{B}_{gem} označeno je ukupno gravitomagnetno polje u talasnoj zoni. Jednačina (11.165) je posledica jednačina (11.130), (11.148) i (11.162).

U ovom poglavlju prezentovano je dosta jednačina iz elektrodinamike i gravitoelektromagnetizma. Potrebno je najbitnije rezultate predstaviti tabelarno. Tabela se sastoji od dve kolone. U prvoj koloni biće dati osnovni rezultati iz elektrodinamike, a u drugoj koloni biće dati osnovni rezultati iz gravitoelektromagnetizma. Jačine električnog i jačine magnetnog polja određene su za talasnu zonu, odnosno za oblast prostora koja je veoma udaljena od izvora elektromagnetne radijacije. Sličan zaključak važi i za gravitoelektromagnetizam, odnosno jačine gravitoelektričnog i jačine gravitomagnetnog polja određene su za talasnu zonu.

Ovaj tabelarni prikaz omogućuje nam brzu preglednost dobijenih rezultata.

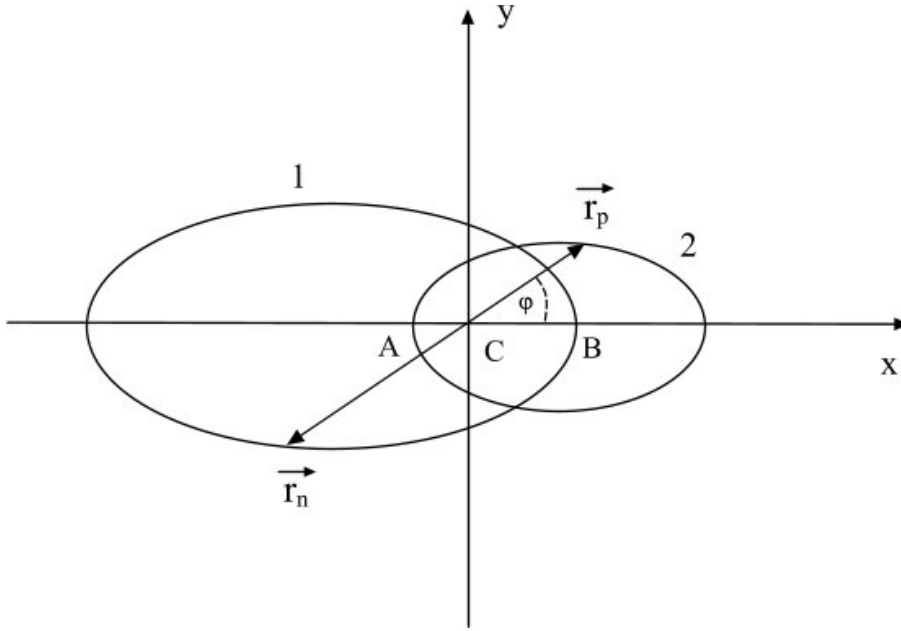
Elektrodinamika	Gravitoelektromagnetizam
$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r}$	$\varphi_{gem}(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma M}{r} - \frac{\gamma}{c} \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c})}{r}$
$\vec{A} = \vec{A}_d + \vec{A}_m + \vec{A}_k$	$\vec{A}_{gem} = \vec{A}_{gem d} + \vec{A}_{gem m} + \vec{A}_{gem k}$

$\vec{A}_d = \frac{\mu_0 \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r}$ $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{4\pi c r}$ $\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{r}$	$\vec{A}_{gem d} = -\frac{4\gamma \dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c})}{c^2 r}$ $\vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma \ddot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{c^3 r}$ $\vec{E}_{gem} = -\frac{4\gamma [\ddot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{c^2 r}$
$\vec{A}_m = \frac{\mu_0 \dot{\vec{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{4\pi c r}$ $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 [\ddot{\vec{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{4\pi c^2 r}$ $\vec{E} = \frac{\mu_0 [(\ddot{\vec{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{4\pi c r}$	$\vec{A}_{gem m} = -\frac{2\gamma \dot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{c^3 r}$ $\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma [\ddot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{c^4 r}$ $\vec{E}_{gem} = -\frac{2\gamma [(\ddot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{c^3 r}$
$\vec{A}_k = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c})}{24\pi c r}$ $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{24\pi c^2 r}$ $\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 [\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{24\pi c r}$	$\vec{A}_{gem k} = -\frac{2\gamma \ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c})}{3c^3 r}$ $\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma \ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{3c^4 r}$ $\vec{E}_{gem} = -\frac{2\gamma [\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}] \times \vec{n}}{3c^3 r}$

Tabela 3

O binarnom sistemu kojeg čine pulsar PSR 1913+16 i neutronska zvezda bilo je reči u dosadašnjem tekstu. Ja sam ovaj binarni sistem nazvao Rasel – Tejlorov binarni sistem. Rasel i Tejlor najpre su detektovali pulsar iz ovog binarnog sistema, a kasnije su analizom podataka utvrdili i postojanje neutronske zvezde. Ovaj binarni sistem je izuzetno bitan jer analiza podataka dobijenih proučavanjem ovog sistema pružila je prvi indirektni dokaz o postojanju gravitacionih talasa. Ovaj binarni sistem proučavan je preko 30 godina, i njegove karakteristike izuzetno su dobro poznate.

Pulsar PSR 1913+16 i neutronska zvezda kreću se oko centra mase. Na slici 54 prikazane su elipse po kojima se kreću ove zvezde. Ove elipse imaju jednu zajedničku žižu koja se poklapa se centrom mase sistema. Tačka gde se žiže poklapaju označena je sa C na slici 54.



Slika 54

Analizom podataka utvrđeno je da elipse imaju isti ekscentricitet, i on iznosi 0,0617. Brojem 1 označena je elipsa po kojoj se kreće neutronska zvezda, a brojem 2 označena je elipsa po kojoj se kreće pulsar. Radijus vektori pulsara i neutronske zvezde označeni su sa \vec{r}_p i \vec{r}_n respektivno. Veliku poluosu elipse 1 označiću sa a_n , a veliku poluosu elipse 2 sa a_p . Na slici 54 označen je i ugao φ . To je ugao izmedju x ose i pravca radijus vektora \vec{r}_p .

Na osnovu jednačine (10.58) može se uvesti veličina a . Za slučaj Rasel – Tejlorovog binarnog sistema veličina a određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$a = a_p + a_n \quad (11.166)$$

Analizom podataka utvrđeno je da veličina a ima vrednost

$$a = 1950100 \text{ km} \quad (11.167)$$

U jednom trenutku rastojanje izmedju zvezda imaće minimalnu vrednost. Položaji zvezda u tom trenutku označeni su tačkama A i B na slici 54. To minimano rastojanje označio sam sa d i ono se određuje na osnovu jednačine (10.61)

$$d = a(1 - e)$$

Vrednost rastojanja d iznosi 746600 km. Maksimalno rastojanje izmedju zvezda iznosi 3153600 km.

Na slici je označen i ugao φ . To je ugao izmedju x ose i pravca radijus vektora \vec{r}_p .

Korišćenjem eksperimentalnih podataka i teorijskog modela zasnovanog na Opštoj teoriji relativnosti utvrđeno je da masa pulsara i masa neutronske zvezde iznose respektivno

$$m_p = 1,441 M_{\odot} \quad (11.168)$$

$$m_n = 1,387 M_{\odot} \quad (11.169)$$

Masa Sunca označena je sa M_{\odot} .

U dosadašnjoj analizi korišćene su jednačine iz desetog poglavlja. To su jednačine (10.58) i (10.61). Pored ovih jednačina korišćiću i jednačine (10.67) i (10.68). Njihovom primenom na Rasel – Tejlorov binarni sistemi dobijaju se sledeći rezultati

$$a_p = a \frac{m_n}{m_p + m_n} \quad (11.170)$$

$$a_n = a \frac{m_p}{m_p + m_n} \quad (11.171)$$

Zamenom odgovarajućih brojnih vrednosti u ove jednačine dobijamo sledeće rezultate

$$a_p = 0,49 a$$

$$a_n = 0,51 a$$

Zbog emisije gravitacionih talasa smanjuje se energija binarnog sistema, odnosno smanjuju se veličine a i d tokom vremena. Analizom radio podataka utvrđeno je da se rastojanje a smanji 3,5 m za jednu godinu. Na osnovu ovog podatka možemo očekivati da će posle dovoljno dugog vremena doći do spajanja pulsara i neutronske zvezde i formiranja jedinstvenog objekta. Pri ovom procesu spajanja dveju zvezda dolazi do snažne emisije gravitacione radijacije.

Zbog emisije gravitacionih talasa smanjuje se energija ovog binarnog sistema, ali se smanjuje i period rotacije pulsara (neutronske zvezde) oko centra mase. Ovaj period rotacije označiću sa T . Proučavanjem Rasel – Tejlorovog binarnog sistema utvrđeno je da se period rotacije pulsara (neutronske zvezde) oko centra mase smanji za 0,0000765 s za jednu godinu. Na osnovu podataka sakupljenih od 1975 do 2005 godine utvrđeno je da se period T smanjio samo 40 s za ovih 30 godina koliko je vršeno posmatranje. Ovo smanjenje perioda rotacije je u izuzetnoj saglasnosti sa predviđanjima Opšte teorije relativnosti.

Jačina gravitacionog polja u okolini pulsara (neutronske zvezde) je izuzetno velika. Da bi to ilustrovao uzeću sledeći primer. Telo koje bi bilo pušteno da slobodno pada sa visine od jednog metra palo bi na površinu neutronske zvezde brzinom 2000 km/s . Veliku vrednost jačine gravitacionog polja neutronske zvezde ilustruje i činjenica da druga kosmička brzina iznosi 2/3 brzine svetlosti.

Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti možemo reći da je u okolini neutronske zvezde prostor-vreme izuzetno deformisano. Na velikim rastojanjima od neutronske zvezde jačina gravitacionog polja nije toliko velika kao u okolini neutronske zvezde. Na velikim rastojanjima od neutronske zvezde prostor-vreme malo je deformisano, i može se koristiti aproksimacija slabog polja. Aproksimacija slabog polja koristi se i za opisivanje gravitacionih efekata u Solarnom sistemu.

Problem dva tela sa stanovišta Njutnove mehanike analizirao sam u desetom poglavlju. Problem dva tela analiziran je i sa stanovišta Opšte teorije relativnosti, i prilikom rešavanja tog problema korišćene su numeričke i aproksimativne metode.

Rasel – Tejlorov binarni sistem predstavlja pravu laboratoriju za proučavanje efekata Opšte teorije relativnosti. Za opisivanje ovog binarnog sistema uvedeni su određeni parametri. Oni se mogu podeliti u tri grupe. Prvu grupu čine parametri koji su povezani sa karakteristikama pulsara. Primer ovakvog parametra je period rotacije pulsara oko njegove ose. Drugu grupu čine Keplerovi orbitalni parametri. Oni su dobijeni u okviru klasične mehanike. O tim parametrima bilo je reči u šestom poglavlju. Keplerovi orbitalni parametri za slučaj kretanja veštačkog satelita oko Zemlje prikazani su na slici 19. Treću grupu parametara čine tzv. post Keplerovi parametri. Oni se ne mogu dobiti korišćenjem klasične mehanike, već se mora koristiti Opšta teorija relativnosti. Primenom Opšte teorije relativnosti dobijeno je nekoliko post Keplerovih parametara. Oni se mogu izraziti preko Keplerovih parametara, mase pulsara i mase neutronske zvezde. Masa pulsara i masa neutronske zvezde nisu bile unapred poznate i mogu se odrediti na sledeći način. Najpre se izmere Keplerovi orbitalni parametri, a potom dva proizvoljno izabrana post Keplerova parametara. Istakao sam da se post Keplerovi parametari mogu izraziti preko Keplerovih parametara, mase pulsara i mase neutronske zvezde. Ova konstatacija važi i za dva proizvoljno izabrana post Keplerova parametra. Na ovaj način dobijaju se dve jednačine, a nepoznate veličine koje figurišu u tim jednačinama su masa pulsara i masa neutronske zvezde. Rešavanjem ovog sistema jednačina nalazi se masa pulsara i masa neutronske zvezde. Prezentovao sam proceduru određivanja masa zvezda u Rasel – Tejlorovom binarnom sistemu. Ova procedura primenjuje se i kod drugih binarnih sistema.

Ovom prilikom zadržaću se samo na dva post Keplerova parametra. Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti oni se određuju na osnovu jednačina (11.172) i (11.180).

Najpre ću dati određene komentare u vezi jednačine (11.172). Period rotacije pulsara (neutronske zvezde) označio sam sa T . Zbog emisije gravitacionih talasa dolazi do smanjenja perioda T tokom vremena. Period rotacije pulsara (neutronske zvezde) oko centra mase smanji se 0,0000765 s za jednu godinu.

Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti promena perioda rotacije sa vremenom opisuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{96}{5} \frac{\gamma^{5/3}}{c^5} \mu M^{2/3} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-8/3} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right) (1 - e^2)^{-7/2} \quad (11.172)$$

Sa e je označen ekscentricitet elipse, γ je gravitaciona konstanta. Brzina svetlosti u vakuumu označena je sa c .

Ukupna masa ovog binarnog sistema određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$M = m_p + m_n \quad (11.173)$$

Redukovana masa definiše se na sledeći način

$$\mu = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \quad (11.174)$$

U cilju konciznijeg pisanja jednačine (11.172) uvedena je funkcija $f(e)$. Ona ima sledeći oblik

$$f(e) = \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right) (1 - e^2)^{-7/2} \quad (11.175)$$

U slučaju Rasel – Tejlorovog binarnog sistema ekscentricitet elipse ima vrednost $e = 0,617$, i u skladu sa tim funkcija $f(e)$ ima vrednost 11,843.

Jednačina (11.172) može se transformisati korišćenjem jednačina (11.173), (11.174) i (11.175)

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{96}{5} \frac{\gamma^{5/3}}{c^5} \frac{m_p m_n}{(m_p + m_n)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-8/3} f(e) \quad (11.176)$$

Zamenom brojnih vrednosti u jednačinu (11.176) dobija se sledeći rezultat

$$\dot{T} = 2,402 \cdot 10^{-12} \quad (11.177)$$

Ova vrednost dobijena je na osnovu Opšte teorije relativnosti. Eksperimentalno određena vrednost za promenu perioda rotacije pulsara sa vremenom iznosi

$$\dot{T}_{eks} = 2,418 \cdot 10^{-12}$$

Na osnovu ovih vrednosti možemo zaključiti da postoji dobro slaganje između predviđanja Opšte teorije relativnosti i eksperimenta.

Drugi post Keplerov parametar o kome će biti reči u narednom tekstu određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\dot{\beta} = \frac{3\gamma^{2/3}}{c^2} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-5/3} (m_p + m_n)^{2/3} (1 - e^2)^{-1} \quad (11.178)$$

Ovaj parametar određuje precesiju perihela kod binarnog sistema. Da bi smo bolje razumeli ovaj parametar potrebno je da se podsetimo određenih rezultata o precesiji perihela Merkura. Perihel je na slici 21 označen tačkom P , afel tačkom A . Prilikom analize u osmom poglavlju uzeo sam da se Merkur u početnom trenutku nalazio u perihelu. Položaj perihela Merkura tokom vremena menja se. Nakon dovoljno dugog vremenskog intervala perihel će se naći u tački P_1 , a afel u tački A_1 (slika 21). Ova pojava naziva se precesija perihela Merkura. Sa slike 21 vidimo da se velika osa elipse zaokrenula za ugao $\Delta\alpha$. Perihel rotira oko tačke O konstantnom ugaonom brzinom. Ta promena položaja perihela je mala, ali je zapažena u astronomskim merenjima. Merenja su pokazala da se za period od 100 godina perihel Merkura pomeri za ugao od 574 lučnih sekundi. Na osnovu Njutnove mehanike može se dobiti vrednost od 531 lučne sekunde. Postoji razlika između izmerene vrednosti (574"/100 godina) i vrednosti dobijene na osnovu Njutnove mehanike (531"/100 godina).

Postavilo se pitanje kako objasniti ovu anomaliju. Predložene su razne teorije. O osnovama tih teorija bilo je reči u osmom poglavlju. Objašnjenje precesije perihela Merkura dao je Ajnštajn na osnovu njegove Opšte teorije relativnosti. Njegov rezultat je u dobroj saglasnosti sa astronomskim merenjima. On je izveo sledeću jednačinu

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi\gamma M_s}{c^2 a(1 - e^2)}$$

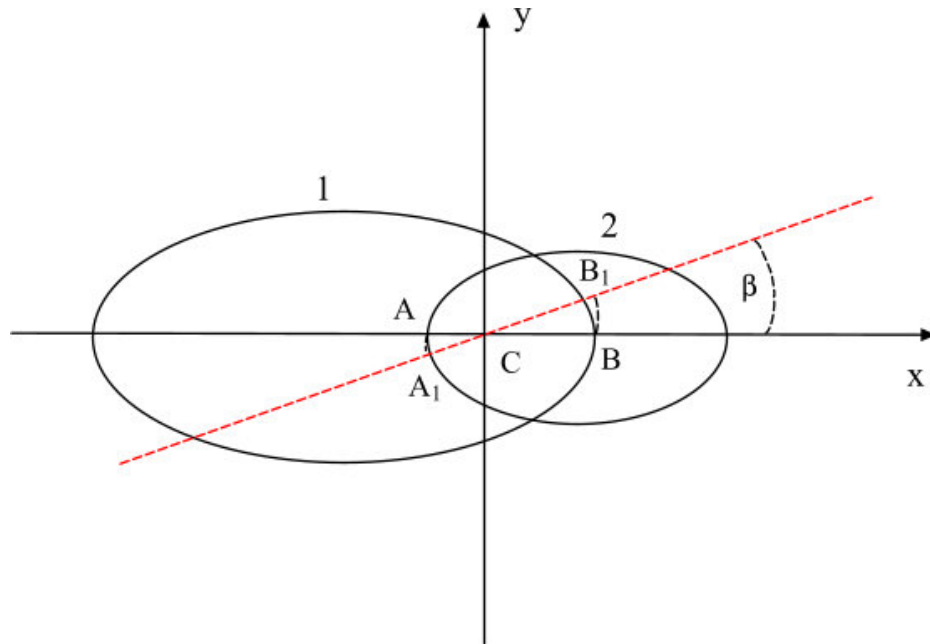
Jednačina (8.3) dalje je transformisana korišćenjem trećeg Keplerovog zakona i dobijena je jednačina (8.4)

$$\Delta\varphi = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

Na slici 21 prikazano je da se položaj perihela Merkura menja tokom vremena. Ja sam uzeo proizvoljan vremenski interval, i nakon tog vremenskog intervala perihel se nalazio u tački P_1 , a afel u tački A_1 . Velika osa elipse zaokrenula se za ugao $\Delta\alpha$. Ako je vremenski interval jednak periodu rotacije Merkura oko Sunca ($T = 87,97$ dana), onda će se perihel zaokrenuti za ugao $\Delta\varphi$ koji se određuje na osnovu jednačine (8.3). Na osnovu ovih podataka možemo odrediti ugaonu brzinu rotacije perihela oko tačke O

$$\frac{\Delta\varphi}{T} = \frac{24\pi^3 a^2}{T^3 c^2 (1 - e^2)} \quad (11.179)$$

Ovakva pojava postoji i kod Rasel – Tejlorovog binarnog sistema, ali je mnogo izraženija. Neka se u početnom trenutku pulsar i neutronska zvezda nalaze u perihelima (tačkama A i B). Periheli leže na x osi (slika 55). Nakon određenog vremenskog intervala periheli će se naći u tačkama A_1 i B_1 . Došlo je do rotacije x ose za ugao β . Novi položaj x ose označen je isprekidanom linijom na slici 55.



Slika 55

Proučavanjem Rasel – Tejlorovog binarnog sistema utvrđeno je da se periheli zarotiraju za ugao od $4,227^\circ$, za vremenski interval koji odgovara jednoj zemaljskoj godini. U slučaju Rasel – Tejlorovog binarnog sistema precesija perihela je mnogo izraženija nego u slučaju Merkura.

Osa x rotira oko tačke C konstantnom ugaonom brzinom. Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti ta ugaona brzina određuje se na osnovu jednačine (11.178). U literaturi se umesto ugla β

koristi ugao ω . Ugao ω naziva se argument perihela, i definisan je u šestom poglavlju. Za slučaj kretanja veštačkog satelita oko Zemlje argument perihela prikazan je na slici 19. Obzirom da su uglovi β i ω jednaki, jednačina (11.178) može se napisati u obliku

$$\dot{\omega} = 3 \frac{\gamma^{2/3}}{c^2} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{-5/3} (m_p + m_n)^{2/3} (1 - e^2)^{-1} \quad (11.180)$$

Promenu perioda rotacije pulsara (neutronske zvezde) oko centra mase u binarnom sistemu analiziraju i sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Da bi izvršio tu analizu biće mi potrebno da koristim određene matematičke metode koje su korišćenje pri dobijanju jednačine (11.172). O tim metodama biće reči u narednom tekstu.

U dosadašnjem tekstu dao sam konkretne brojne vrednosti za pojedine parametre koji karakterišu Rasel – Tejlorov binarni sistem. Podaci o ovom binarnom sistemu dobijeni su zahvaljujući osobini pulsara PSR 1913 + 16 da emituje radio talase. Da bi se bolje shvatio proces detekcije radio talasa potrebno je nešto reći o pulsarima.

Pulsari su brzrotirajuće neutronske zvezde. Neutronske zvezde se skoro u potpunosti sastoje od neutrona. Poluprečnik pulsara je oko 10 km. Pulsari imaju veoma jako magnetno polje. Jačina magnetnog polja kod većine pulsara je reda veličine $10^9 T$. Do sada je otkriveno preko 2400 pulsara. Ogromna većina otkrivenih pulsara nalazi se u našoj Galaksiji, međutim otkriveni su pulsari koji se nalaze i u drugim galaksijama.

Pulsari izuzetno brzo rotiraju oko svoje ose. Periodi rotacije otkrivenih pulsara pripadaju intervalu od 0,00139 sekundi (PSR J1748-2446 ad) do 11,779 sekunde (PSR J1841-0456). Većina pulsara ima periode rotacije između 0,5 s i 2,5 s. Pulsari koji imaju period rotacije manji od 30 ms nazivaju se milisekundni pulsari. Prvi milisekundni pulsar (PSR B1937+21) bio je otkriven 1982 godine. U toku jedne sekunde on učini oko 641 obrtaja oko svoje ose rotacije. On je bio najbrže rotirajući pulsar sve do 2005 godine kada je otkriven pulsar PSR J1748-2446 ad koji ima period rotacije 0,00139 sekundi. To znači da pulsar PSR J1748-2446 ad u toku jedne sekunde napravi oko 719 obrtaja oko svoje ose rotacije.

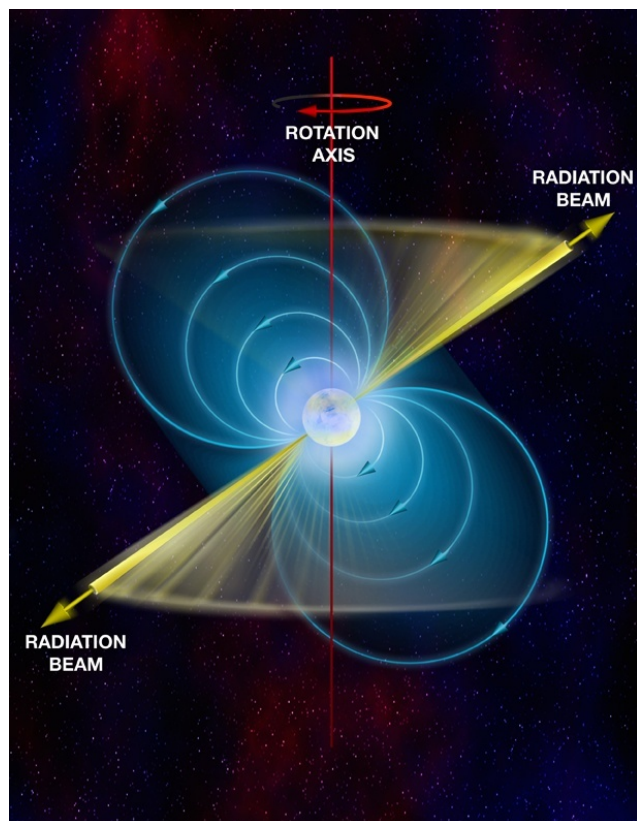
Periodi rotacije pulsara se izuzetno precizno mere. Na primer za period rotacije pulsara PSR J1603-7202 izmerena je vrednost

$$T = 0,0148419520154668 \text{ s}$$

Za pulsare je karakteristično da im se period rotacije izuzetno sporo menja. U slučaju pulsara PSR J1603-7202 period rotacije se poveća za $5 \cdot 10^{-7}$ s svakih milion godina.

Pulsari imaju mase u domenu $1,18 M_{\odot}$ do $1,97 M_{\odot}$. Sa M_{\odot} označena je masa Sunca. Većina pulsara ima masu $1,35 M_{\odot}$. Neutronske zvezde imaju gustinu u intervalu od $3,17 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$ do $5,9 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$. Ove vrednosti su uporedive sa srednjom gustinom atomskog jezgra koje iznosi $3 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$.

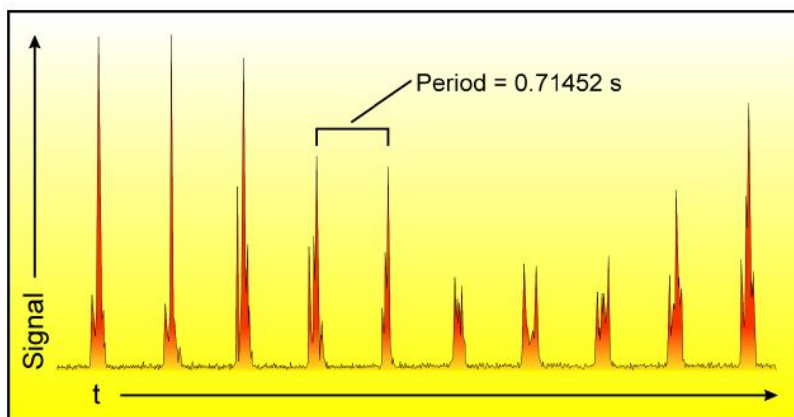
Na slici 56 prikazan je pulsar. Slika je preuzeta sa veb sajta [14]. U opštem slučaju osa rotacije pulsara i osa magnetnog polja ne poklapaju se. Prikazane su i linije sila magnetnog polja. Pulsar emituje elektromagnetno zračenje. To zračenje nalazi se u relativno uskom konusu. Osa konusa poklapa se sa pravcem magnetnog polja.



Slika 56

Kada pulsar rotira radijacioni snop može pogoditi detektor na Zemlji. Tada pulsar postaje za nas vidljiv i mi registrujemo kratkotrajni puls. Sledeći puls registrujemo nakon što pulsar napravi jednu punu rotaciju. Vremenski interval između detekcije dva pulsa jednak je periodu rotacije pulsara oko njegove ose. U mnogim slučajevima radijacioni snop sa pulsara ne pogađa naše detektore i mi jednostavno nismo u mogućnosti da registrujemo postojanje pulsara.

Na slici 57 prikazani su detektovani pulsevi. Pulsar PSR B0329+54 ima period rotacije od 0,71452 s. To znači da se nakon svakih 0,71452 s registruje po jedan puls.



Slika 57

Registrovani pulsevi variraju po obliku i intenzitetu. Iz tog razloga potrebno je dobiti tzv. srednji pulsni profil. On se dobija na osnovu stotina ili hiljada individualnih pulseva. Za razliku od

pojedinačnih pulseva srednji pulsni profil ima stalan oblik. Analizom radio pulseva određene su sa izuzetno visokom preciznošću karakteristike Rasel – Tejlorovog binarnog sistema. Naravno tehnika korišćenja radio pulseva primenjuje se i kod drugih binarnih sistema, ali i kod individualnih pulsara.

U dosadašnjem tekstu istakao sam da su većina pulsara tzv. radio pulsari, odnosno najveći deo elektromagnetnog zračenja koje emituju pripada oblasti radio talasa. U slučaju pulsara detekcija radio talasa je najjednostavnija. Medjutim kod pojedinih pulsara astronomi su uspeli da pored radio talasa detektuju i vidljivu svetlost, X zrake i γ zrake. Primer takvog pulsara je Rak pulsar. On se nalazi u maglini Rak, koja predstavlja ostatak supernove. Kod ovog pulsara ubrzo posle detekcije radio pulseva, astronomi su otkrili da se intenzitet registrovane vidljive svetlosti menja periodično. Kasnije su registrovani pravilni pulsevi i kod X i γ zračenja. Medjutim postoje pulsari koji uopšte ne emituju radio talase, već isključivo emituju X zračenje ili γ zračenje. 2008 godine otkriven je pulsar koji isključivo emituje γ zračenje. Kasnije je otkriveno još jedanaest takvih pulsara.

Postoje pulsari koji isključivo emituju X zračenje. Takvi pulsari nalaze se u binarnim sistemima. Kod ovakvih binarnih sistema materija prelazi sa zvezde na pulsar. Postoje različiti načini prenosa materije. Ja ću spomenuti samo jedan. Ako se pulsar i zvezda nalaze na malom rastojanju, onda će pulsar zbog jake gravitacione sile povući materiju sa susedne zvezde. Tokom procesa prenošenja materije pulsar sve brže rotira i u jednom trenutku započinje da emituje X zračenje.

Način na koji će zvezda evoluirati zavisi od njene mase. Postoje četiri završne faze u procesu evolucije zvezda, a to su: beli patuljak, braon patuljak, neutronska zvezda i crna rupa. Prilikom eksplozije supernove nastaje veoma jak udarni talas. On snažno gura materiju u okolni prostor i na taj način nastaje maglina. Širenje magline može da se nastavi vekovima. Nakon eksplozije supernove ostaje jezgro zvezde, ali ono nije u mogućnosti da vrši termonuklearne reakcije. Zbog dejstva gravitacionih sila dolazi do sažimanja mase oko nekadašnjeg jezgra zvezde. Nakon procesa gravitacionog sažimanja može da nastane neutronska zvezda ili crna rupa. U slučaju neutronske zvezde strahovito sažimanje zvezdane materije prevodi atome i molekule u neutronska kašu.

Ukratko sam objasnio proces nastanka neutronske zvezde. U skladu sa ovim procesom trebalo bi očekivati da se u svim ostacima supernovih, u maglinama nalaze neutronske zvezde. Medjutim u literaturi dovedeno je u pitanje ovaj proces nastanka neutronske zvezde. Prezentovane su sledeće činjenice. Početkom 80-tih godina dvadesetog veka analizirano je 175 ostataka supernovih u našoj Galaksiji i susednim Magelanovim oblacima, ali je registrovano samo 5 pulsara (neutronske zvezde). Treba istaći i činjenicu da oko 1000 otkrivenih pulsara je bez magline (ostatka supernove). Eksplozije supernovih su retki događaji, i verovatno se pulsari (neutronske zvezde) mogu proizvoditi na neki drugi manje spektakularni način.

Situacija postaje još komplikovanija ako bi smo analizirali binarni sistem koji se sastoji od dve neutronske zvezde ili dva pulsara. Da bi nastao ovakav binarni sistem eksplozija prve supernove ne sme da poremeti drugu zvezdu, a potom eksplozija druge supernove ne sme da uništi predhodno nastalu neutronska zvezdu. U okolini ove dve neutronske zvezde našla bi se ogromna količina raspršenog materijala koji bi mogao da poremeti formirane neutronske zvezde. Smatram da je opisani proces nastanka neutronske zvezde problematičan.

Jednačina (11.176) dobijena je na osnovu Opšte teorije relativnosti. Istakao sam da ću promenu perioda rotacije pulsara (neutronske zvezde) oko centra mase analizirati i sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Da bi to uradio potrebno mi je da koristim određene matematičke metode koje su primenjivane pri dobijanju jednačine (11.176). Te metode se odnose na postupak usrednjavanja pojedinih fizičkih veličina.

Rasel – Tejlorov binarni sistem zrači gravitacione talase. Energija ovog binarnog sistema može se odrediti korišćenjem jednačine (10.77)

$$E = -\gamma \frac{m_p m_n}{2a} \quad (11.181)$$

Na osnovu jednačine (11.166) jednačina (11.181) može se napisati u sledećem obliku

$$E = -\gamma \frac{m_p m_n}{2(a_p + a_n)} \quad (11.182)$$

Zbog emisije gravitacionih talasa dolazi do smanjenja energije ovog sistema, odnosno do smanjenja veličine a . Istakao sam da se veličina a smanji 3,5 m u toku jedne godine. Smanjenje energije sistema dE/dt određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8\gamma^4}{15c^5} \frac{m_p^3 m_n^3}{a^5 (1-e^2)^5} (1 + e \cos \varphi)^4 [12(1 + e \cos \varphi)^2 + e^2 \sin^2 \varphi] \quad (11.183)$$

Ova jednačina dobijena je primenom Ajnštajnovke kvadropolne formule. U ovoj jednačini figuriše ugao φ . On je označen na slici 54. To je ugao između x ose i pravca radijus vektora \vec{r}_p .

Veličina dE/dt zavisi od ugla φ i potrebno je izvršiti usrednjavanje ove veličine za jedan period. Nakon procesa usrednjavanja dobija se ukupna snaga gravitacione radijacije koju je emitovao ovaj binarni sistem. Tu veličinu označiću sa P , i ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{dE}{dt} \right) dt \quad (11.184)$$

Ova jednačina može se napisati i u obliku

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{dE}{dt} \right) dt \quad (11.185)$$

Ugao φ menja se tokom vremena. Ova promena određuje se na osnovu jednačine (10.114). Za slučaj Rasel – Tejlrovog binarnog sistema jednačina (10.114) dobija oblik

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{\gamma(m_p + m_n)}{a^3}} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e \cos \varphi)^2 \quad (11.186)$$

Veličina $\dot{\varphi}$ je trenutna ugaona brzina. Srednju ugaonu brzinu označiću sa ω_0 i ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (11.187)$$

Jednačina (11.184) može se napisati u sledećem obliku

$$P = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{dE}{dt} \frac{dt}{d\varphi} d\varphi$$

, odnosno

$$P = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dE}{dt} \right) \frac{1}{\dot{\varphi}} d\varphi \quad (11.188)$$

Korišćenjem trećeg Keplerovog zakona (jednačina (10.72)) dobijam

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma(m_p + m_n)}} \quad (11.189)$$

Zamenom jednačina (11.183), (11.186) i (11.189) u (11.188) i nakon integracije dobija se sledeći rezultat

$$P = \frac{32\gamma^4}{5} \frac{m_p^2 m_n^2 (m_p + m_n)}{c^5 a^5} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) (1 - e^2)^{-7/2} \quad (11.190)$$

Na osnovu ove jednačine određuje se ukupna snaga gravitacione radijacije. Ona se označava i sa L i naziva se luminoznost gravitacionih talasa.

Jednačina (11.190) može se transformisati korišćenjem jednačina (11.173) i (11.174), i dobijamo sledeći rezultat

$$P = \frac{32\gamma^4}{5} \frac{\mu^2 M^3}{c^5 a^5} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) (1 - e^2)^{-7/2} \quad (11.191)$$

Funkcija $f(e)$ određuje se na osnovu jednačine (11.175). U skladu sa tim jednačina (11.190) može se napisati u obliku

$$P = \frac{32\gamma^4 m_p^2 m_n^2 (m_p + m_n)}{5 c^5 a^5} f(e) \quad (11.192)$$

Pokazao sam kako je dobijena veličina P , odnosno kako je izvršeno usrednjavanje veličine dE/dt . Ovaj postupak usrednjavanja fizičkih veličina koristiću kada budem analizirao Rasel – Tejlorov binarni sistem sa stanovišta gravitoelektromagnetizma.

Dosadašnje rezultate iskoristiću da dokažem jednačinu (11.176). Ukupna energija binarnog sistema određuje se na osnovu jednačine (11.181). Iz ove jednačine sledi

$$a = -\gamma \frac{m_p m_n}{2E}$$

Diferenciranjem po vremenu dobijam sledeći rezultat

$$\frac{da}{dt} = \frac{\gamma m_p m_n}{2E^2} \frac{dE}{dt}$$

Ova jednačina može se dalje transformisati korišćenjem jednačine (11.181)

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\gamma m_p m_n} \frac{dE}{dt}$$

Usrednjavanjem ove jednačine dobijamo

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{2a^2}{\gamma m_p m_n} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \quad (11.193)$$

Energija binarnog sistema tokom vremena smanjuje se tako da moramo uvesti predznak minus u jednačinu (11.193)

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{2a^2}{\gamma m_p m_n} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \quad (11.194)$$

Srednja vrednost veličine dE/dt određuje se na osnovu jednačine (11.192). Zamenom jednačine (11.192) u jednačinu (11.194) dobijamo

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{\gamma^3}{c^5 a^3} m_p m_n (m_p + m_n) f(e) \quad (11.195)$$

Na osnovu ove jednačine dobijen je rezultat da se veličina a smanji 3,5 m u toku godine.

Korišćenjem trećeg Keplеровog zakona dobija se rezultat

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\gamma M}} a^{3/2} \quad (11.196)$$

Diferenciranjem po vremenu dobijamo

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\gamma M}} \frac{3}{2} \frac{da}{dt} a^{1/2} \quad (11.197)$$

Na osnovu jednačina (11.196) i (11.197) dobija se sledeći rezultat

$$\frac{\frac{dT}{dt}}{T} = \frac{3}{2} \frac{\frac{da}{dt}}{a}$$

Usrednjavanjem ove jednačine dobijamo

$$\frac{\left\langle \frac{dT}{dt} \right\rangle}{T} = \frac{3}{2} \frac{\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle}{a} \quad (11.198)$$

Zamenom jednačine (11.195) u jednačinu (11.198) i nakon algebarskih transformacija dobija se sledeći rezultat

$$\left\langle \frac{dT}{dt} \right\rangle = -\frac{96}{5} \frac{\gamma^3}{c^5 a^4} m_p m_n (m_p + m_n) f(e) \quad (11.199)$$

Na osnovu trećeg Keplerovog zakona dobija se jednačina

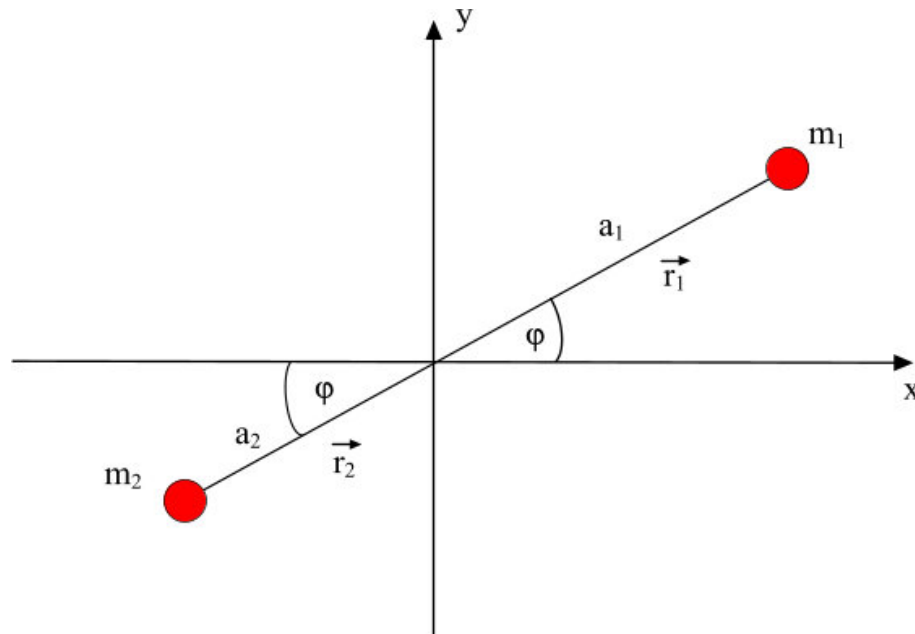
$$a = \left(\frac{\gamma M}{4\pi^2} \right)^{1/3} T^{2/3}$$

Zamenom ove jednačine u jednačinu (11.199) i nakon elementarnih algebarskih transformacija dobija se sledeća jednačina

$$\frac{\langle dT \rangle}{T} = -\frac{96}{5} \frac{\gamma^{5/3}}{c^5} \frac{m_p m_n}{(m_p + m_n)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{-8/3} f(e)$$

Ova jednačina je identična sa jednačinom (11.176).

Na slici 58 prikazane su dve zvezde masa m_1 i m_2 . Položaji ovih zvezda određeni su radijus vektorima \vec{r}_1 i \vec{r}_2 . Zvezde se kreću po kružnicama oko centra mase. Centar mase označen je tačkom C i poklapa se sa koordinatnim početkom sistema. Poluprečnici kružnica označeni su sa a_1 i a_2 . Na slici je prikazan i ugao φ . To je ugao između x ose i pravca radijus vektora \vec{r}_1 .



Slika 58

Rastojanje između zvezda označicu sa a i ono iznosi

$$a = a_1 + a_2$$

Ukupnu masu sistema označicu sa M

$$M = m_1 + m_2 \quad (11.200)$$

, a redukovanu masu sa μ

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (11.201)$$

Ugaona brzina rotacije zvezda oko centra mase i period rotacije zvezda određuju se na osnovu jednačina (10.101) i (10.102) respektivno

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{(a_1 + a_2)^3}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M}$$

Jednačina (10.102) predstavlja treći Keplerov zakon.

Ovaj binarni sistem zrači gravitacione talase. Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje ovakav binarni sistem određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$P = \frac{32}{5} \frac{\gamma^4 \mu^2 M^3}{c^5 a^5} \quad (11.202)$$

Jednačina (11.202) može se transformisati korišćenjem jednačina (11.200) i (11.201), i dobijam sledeći rezultat

$$P = \frac{32}{5} \frac{\gamma^4}{c^5 a^5} (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2) \quad (11.203)$$

U dosadašnjem tekstu prezentovao sam pojedine rezultate Opšte teorije relativnosti o gravitacionim talasima. Analizirao sam binarne zvezdane sisteme. Slučaj kada se zvezde kreću po eliptičnim putanjama prikazan je na slici 54, a slučaj kada se zvezde kreću po kružnicama prikazan je na slici 58.

Ova dva primera analiziraću i sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Zadržaću se najpre na Rasel – Tejlorovom binarnom sistemu koji je prikazan na slici 54. Zvezde se kreću ubrzano i emituju gravitacione talase. Gravitacioni vektorski potencijal može se prikazati kao suma tri sabirka (jednačina (11.114))

$$\vec{A}_{gem} = \vec{A}_{gem d} + \vec{A}_{gem m} + \vec{A}_{gem k}$$

Pokazao sam da se u talasnoj zoni gravitacioni vektorski potencijal određuje na osnovu jednačine (11.163)

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma \dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c})}{c^2 r} - \frac{2\gamma \dot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{c^3 r} - \frac{2\gamma \ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c})}{3c^3 r}$$

U slučaju Rasel – Tejlorovog binarnog sistema pojedini članovi u jednačini (11.163) biće jednaki nuli. Zadržimo se najpre na prvom članu u jednačini (11.163). U njemu figuriše veličina \vec{p}_{gem} . Tu veličinu nazvao sam maseni dipolni moment sistema, i ona se određuje na osnovu jednačine (3.52)

$$\vec{p}_{gem} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}'_i$$

Radijus vektore pulsara i neutronske zvezde označio sam sa \vec{r}'_p i \vec{r}'_n , i oni su prikazani na slici 54. Primenom jednačine (3.52) dobijam sledeći rezultat

$$\vec{p}_{gem} = m_p \vec{r}'_p + m_n \vec{r}'_n \quad (11.204)$$

U desetom poglavlju analizirao sam problem dva tela sa stanovišta Njutnove mehanike i pokazao sam da prava koja spaja tela masa m_1 i m_2 uvek prolazi kroz centar mase sistema (slika 44). Centar mase označen je tačkom C na slici 44. Tela se kreću oko centra mase, i njihovi položaji u sistemu centra mase određeni su radijus vektorima \vec{r}'_1 i \vec{r}'_2 (slika 43). Pokazao sam da važi jednačina (10.24)

$$m_1 \vec{r}'_1 = -m_2 \vec{r}'_2$$

Ona se može napisati u obliku

$$m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2 = 0 \quad (11.205)$$

Primenom jednačine (11.205) na Rasel – Tejlorov binarni sistem dobija se sledeći rezultat

$$m_p \vec{r}'_p + m_n \vec{r}'_n = 0 \quad (11.206)$$

Na osnovu jednačina (11.204) i (11.206) sledi da je maseni dipolni moment sistema jednak nuli, odnosno gravitacioni vektorski potencijal $\vec{A}_{gem d}$ jednak je nuli. To dalje znači da su jačine

gravitomagnetnog i gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni jednake nuli. Ovaj zaključak dobija se primenom jednačina (11.126) i (11.129). U slučaju Rasel – Tejlorovog binarnog sistema ne postoji gravitaciono dipolno zračenje.

Analizirajmo sada drugi član u jednačini (11.163). U njemu figuriše moment impulsa sistema, ali on ima konstantnu vrednost. Kod Rasel – Tejlorovog binarnog sistema zvezde se kreću po elipsama koje imaju isti ekscentricitet, i vektor momenta impulsa određuje se na osnovu jednačine (10.93). Obzirom da moment impulsa ima konstantnu vrednost gravitacioni vektorski potencijal \vec{A}_{gem} jednak je nuli. U skladu sa tim jačine gravitomagnetnog i gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni jednake su nuli, i ne postoji gravitaciono magnetno dipolno zračenje.

Jedino zračenje koje postoji u slučaju Rasel – Tejlorovog binarnog sistema je gravitaciono kvadropolno zračenje. Obzirom da izostaju komponente $\vec{A}_{gem d}$ i $\vec{A}_{gem m}$ jednačina (11.114) dobija oblik

$$\vec{A}_{gem} = \vec{A}_{gem k}$$

Jednostavniji oblik dobija i jednačina (11.163)

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^3 r} \ddot{D} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

Jačine gravitomagnetnog i gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni određujemo na osnovu jednačina (11.159) i (11.161). Zbog važnosti ovih jednačina za dalju analizu ponovo ih navodim

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^4} \frac{\ddot{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{r}$$

$$\vec{E}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^3} \frac{\left[\ddot{D} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r}$$

Pokazao sam da u talasnoj zoni važi i jednačina (11.162)

$$\vec{E}_{gem} = c[\vec{B}_{gem} \times \vec{n}]$$

U slučaju kada se zvezde kreću po kružnicama dobijaju se slični rezultati. Slučaj kretanja zvezda po kružnicama prikazan je na slici 58. Položaji zvezda određeni su radijus vektorima \vec{r}_1 i \vec{r}_2 .

Analizirajmo najpre prvi član u jednačini (11.163). Primenom jednačine (3.52) dobijam sledeći rezultat

$$\vec{p}_{gem} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \quad (11.207)$$

Na osnovu jednačina (11.207) i (11.205) sledi da je maseni dipolni moment sistema jednak nuli, i ne postoji gravitaciono dipolno zračenje. Moment impulsa ima konstantnu vrednost pa ne postoji ni gravitaciono magnetno dipolno zračenje. Kao i u predhodnom slučaju jedino postoji gravitaciono kvadropolno zračenje. Gravitacioni vektorski potencijal $\vec{A}_{gem k}$ određuje se na osnovu jednačine (11.150), a jačine gravitomagnetnog i gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni određujemo na osnovu jednačina (11.159) i (11.161).

Za slučaj binarnih zvezdanih sistema prikazanih na slikama 54 i 58 pokazao sam da sa stanovišta gravitoelektromagnetizma postoji samo gravitaciono kvadropolno zračenje. Ovi binarni sistemi emituju gravitacione talase. Zbog emisije gravitacionih talasa smanjuje se energija binarnog sistema. Da bi smo odredili ukupnu izračenu snagu gravitacione radijacije potrebno je da koristimo analogiju sa elektrodinamikom.

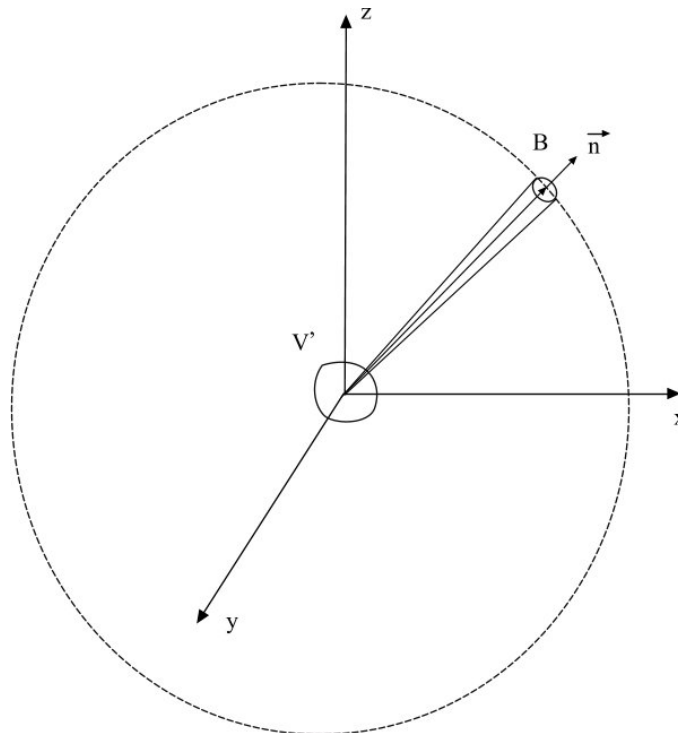
Na slici 52 prikazana je oblast prostora zapremine V' . Unutar te zapremine kreću se naelektrisane čestice. Na slici je prikazana i tačka B . Radijus vektor tačke B označio sam sa \vec{r} . Tačka B nalazi se na velikoj udaljenosti od sistema naelektrisanih čestica, i u skladu sa tim ispunjen je uslov (11.17). Ja sam odredio elektromagnetno polje u tački B , odnosno odredio sam elektromagnetno polje u tzv. talasnoj zoni. Kada se naelektrisane čestice kreću ubrzano one emituju elektromagnetne talase.

Elektromagnetni talasi imaju energiju. Zbog emisije elektromagnetnih talasa energija sistema naelektrisanih čestica koje se nalaze u zapremine V smanjuje se tokom vremena. Koristeći metode elektrodinamike možemo izračunati koliku energiju emituje sistem naelektrisanih čestica preko elektromagnetnih talasa. Da bi smo to uradili potrebno je najpre da odredimo ukupnu izračenu snagu elektromagnetne radijacije.

Na slici 59 ponovo je prikazana oblast prostora zapremine V i tačka B . Radijus vektor tačke B označen je sa \vec{r} . U jednačinama za elektromagnetno polje u tački B figuriše vektor \vec{n} . To je jedinični vektor i određuje se na osnovu jednačine (11.13)

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Može se uvesti u analizu sfera poluprečnika r , čiji se centar poklapa sa početkom koordinatnog sistema. Na slici 59 isprekidanom linijom prikazana je jedna kružnica koja pripada sferi poluprečnika r .



Slika 59

Oko tačke B može se uvesti mali element površine dS . Pramac normale na tu površinu poklapa se sa pravcem vektora \vec{n} . Ova mala površina može postati orjentisana ako u tački B uvedemo jedinični vektor čiji se pravac i smer poklapaju sa vektorom \vec{n} . Orjentisani element površine $d\vec{s}$ određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$d\vec{s} = ds\vec{n} \quad (11.208)$$

Ukupnu izračenu snagu elektromagnetne radijacije dobijamo na osnovu sledeće jednačine

$$P = \oint_S \vec{P} d\vec{s} \quad (11.209)$$

Da bi smo dobili ukupnu izračenu snagu elektromagnetne radijacije u jednačini (11.209) potrebno je izvršiti integraciju po celoj površini sfere.

Vektor \vec{P} je Pointingov vektor i on se određuje na osnovu jednačine (2.103)

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Zamenom Pointingov vektora u jednačinu (11.209) dobijamo

$$P = \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\vec{E} \times \vec{B}) d\vec{s} \quad (11.210)$$

Istakao sam da zbog emisije elektromagnetnih talasa energija sistema naelektrisanih čestica smanjuje se tokom vremena. Prilikom izvodjenja Pointingove teoreme (jednačina (2.102)) ukupnu energiju sistema čestica označio sam sa ε . Ova energija se smanjuje tokom vremena. Korišćenjem definicije snage možemo napisati sledeću jednačinu

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -P \quad (11.211)$$

Integracijom ove jednačine možemo odrediti kako se ukupna energija sistema čestica smanjuje tokom vremena. Istakao sam da elektromagnetni talasi imaju energiju. Energija koju je sistem čestica izgubio u toku nekog vremenskog intervala Δt jednaka je energiji elektromagnetnih talasa.

Ova diskusija iz elektrodinamike mnogo će mi koristiti u daljem radu. Potrebno je dobiti jednačinu na osnovu koje se može izračunati ukupna izračena snaga gravitacione radijacije sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Ponovo ću koristiti sliku 59, ali se sada u oblasti prostora zapremine V' nalazi binarni zvezdani sistem. Radijus vektor tačke B označen je sa \vec{r} . Tačka B nalazi se na velikoj udaljenosti od zapremine V' . Pokazao sam da sa stanovišta gravitoelektromagnetizma za slučaj binarnih zvezdanih sistema prikazanih na slikama 54 i 58 postoji samo gravitaciono kvadropolno zračenje. Jačine gravitomagnetnog i gravitoelektričnog polja u tački B (u talasnoj zoni) određuju se na osnovu jednačina (11.159) i (11.161).

U drugom poglavlju dokazao sam najpre Pointingovu teorema za slučaj elektrodinamike, a potom i za slučaj gravitoelektromagnetizma (jednačine (2.102) i (2.105)). Vidimo da postoji formalna sličnost između ovih jednačina. Ukupnu izračenu snagu elektromagnetne radijacije dobijamo na osnovu jednačine (11.210). Koristeći analogiju sa elektrodinamikom i formalnu sličnost jednačina (2.102) i (2.105) dobijam jednačinu na osnovu koje se može izračunati ukupna izračena snaga gravitacione radijacije

$$P_{gem} = \oint_S \vec{P}_{gem} d\vec{s} \quad (11.212)$$

Vektor \vec{P}_{gem} je Pointingov vektor za gravitoelektromagnetizam i on se određuje na osnovu jednačine (2.106). Zbog važnosti ovog vektora za dalju analizu ponovo ga navodim

$$\vec{P}_{gem} = -\frac{c^2}{16\pi\gamma} \vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem} \quad (11.213)$$

Zamenom vektora \vec{P}_{gem} u jednačinu (11.212) dobijam

$$P_{gem} = -\frac{c^2}{16\pi\gamma} \oint_S (\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem}) d\vec{s} \quad (11.214)$$

Obzirom da za slučaj binarnih zvezdanih sistema prikazanih na slikama 54 i 58 postoji samo gravitaciono kvadropolno zračenje jednačina (11.214) dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.162)

$$P_{gem} = -\frac{c^3}{16\pi\gamma} \oint_S [(\vec{B}_{gem} \times \vec{n}) \times \vec{B}_{gem}] d\vec{s}$$

Razvojem dvostrukog vektorskog proizvoda, i korišćenjem činjenice da su vektori \vec{B}_{gem} i \vec{n} međusobno ortogonalni dobijam sledeći rezultat

$$P_{gem} = -\frac{c^3}{16\pi\gamma} \oint_S (|\vec{B}_{gem}|^2 \vec{n}) d\vec{s} \quad (11.215)$$

Zamenom jednačine (11.159) u jednačinu (11.215) i nakon elementarnih algebarskih transformacija dobijam rezultat

$$P_{gem} = -\frac{\gamma}{36\pi c^5} \oint_S \left[\frac{|\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}|^2}{r^2} \vec{n} \right] d\vec{s} \quad (11.216)$$

Vektori \vec{n} i $d\vec{s}$ kolinearni su i njihov skalarni proizvod određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{n}d\vec{s} = ds$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.216) dobija se sledeća jednačina

$$P_{gem} = -\frac{\gamma}{36\pi c^5} \oint_S \frac{|\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}|^2}{r^2} ds \quad (11.217)$$

Može se uvesti prostorni ugao

$$d\Omega = \frac{ds}{r^2}$$

Korišćenjem definicije prostornog ugla jednačina (11.217) dobija oblik

$$P_{gem} = -\frac{\gamma}{36\pi c^5} \int |\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}|^2 d\Omega \quad (11.218)$$

Ova jednačina može se napisati i u obliku

$$\frac{dP_{gem}}{d\Omega} = -\frac{\gamma}{36\pi c^5} |\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}|^2 \quad (11.219)$$

Na osnovu jednačine (11.218) može se izračunati ukupna izračena snaga gravitacione radijacije.

Jedinični vektor \vec{n} određuje se na osnovu jednačine (11.13). Podesno je uvesti sferne koordinate.

Njih ću označiti sa θ , ψ i r . Dekartove i sferne koordinate povezane su sledećim jednačinama

$$x = r \sin\theta \cos\psi$$

$$y = r \sin\theta \sin\psi$$

$$z = r \cos\theta$$

Ugao θ može imati vrednosti od 0 do π . Ugao ψ može imati vrednosti od 0 do 2π , a veličina r može imati vrednosti od 0 do beskonačno.

U skladu sa ovim definicijama jedinični vektor \vec{n} može se izraziti na sledeći način

$$\vec{n} = \sin\theta \cos\psi \vec{i} + \sin\theta \sin\psi \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \quad (11.220)$$

Vektor \vec{n} može se izraziti i preko svojih komponentata

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \quad (11.221)$$

Upoređivanjem jednačina (11.220) i (11.221) jednostavno je odrediti komponente vektora \vec{n} .

Element prostornog ugla $d\Omega$ u sfernim koordinatama određuje se na sledeći način

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\psi \quad (11.222)$$

Jednačina (11.219) može se transformisati u oblik koji je pogodan za primenu. Korišćenjem odgovarajuće osobine vektorskog proizvoda dobijam

$$\left| \ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right|^2 = \left| \ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \right|^2 |\vec{n}|^2 \sin^2(\alpha) \quad (11.223)$$

Sa α je označen ugao između vektora $\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c})$ i \vec{n} .

Daljom transformacijom jednačine (11.223) dobijam

$$\left| \ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n} \right|^2 = \left| \ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c}) \right|^2 (1 - \cos^2(\alpha)) \quad (11.224)$$

Kosinus ugla α možemo dobiti korišćenjem skalarnog proizvoda

$$\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{n} = \left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right| |\vec{n}| \cos(\alpha)$$

, odnosno

$$\cos(\alpha) = \frac{\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{n}}{\left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right|}$$

Kvadriranjem ovog izraza dobija se

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{n} \right|^2}{\left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right|^2} \quad (11.225)$$

Zamenom jednačine (11.225) u jednačinu (11.224), i nakon algebarskih transformacija dobija se sledeći rezultat

$$\left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n} \right|^2 = \left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right|^2 - \left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{n} \right|^2 \quad (11.226)$$

Zamenom jednačine (11.226) u jednačine (11.218) i (11.219) dobijam

$$P_{gem} = -\frac{\gamma}{36\pi c^5} \int \left[\left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right|^2 - \left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{n} \right|^2 \right] d\Omega \quad (11.227)$$

$$\frac{dP_{gem}}{d\Omega} = -\frac{\gamma}{36\pi c^5} \left[\left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right|^2 - \left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{n} \right|^2 \right] \quad (11.228)$$

Primenom jednačine (11.227) izračunaću ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje binarni sistem prikazan na slici 58. Na slici su prikazane dve zvezde masa m_1 i m_2 . Položaji ovih zvezda određeni su radijus vektorima \vec{r}_1 i \vec{r}_2 . Zvezde se kreću po kružnicama oko centra mase. Poluprečnici kružnica označeni su sa a_1 i a_2 . Rastojanje između zvezda označio sam sa a i ono iznosi

$$a = a_1 + a_2 \quad (11.229)$$

Ukupna masa sistema M određuje se na osnovu jednačine (11.200), a redukovana masa μ na osnovu jednačine (11.201). Ugaona brzina rotacije zvezda oko centra mase i period rotacije zvezda određuje se na osnovu jednačina (10.101) i (10.102) respektivno.

U desetom poglavlju razmatrao sam problem dva tela sa stanovišta Njutnove mehanike i dobio sam jednačine (10.67) i (10.68). Zbog važnosti ovih jednačina za dalju analizu ponovo ih navodim

$$a_1 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} a \quad (11.230)$$

$$a_2 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} a \quad (11.231)$$

Korišćenjem jednačina (11.230), (11.231) i (11.201) mogu se dokazati sledeći identiteti

$$m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 = \mu a^2 \quad (11.232)$$

$$m_1 a_1 a_2 + m_2 a_1 a_2 = \mu a^2 \quad (11.233)$$

Ove jednačine koristiću u daljem radu.

Zvezde se kreću po kružnicama oko centra mase konstantnom ugaonom brzinom, i u skladu sa tim radijus vektori \vec{r}_1 i \vec{r}_2 određeni su sledećim jednačinama

$$\vec{r}_1 = a_1 (\cos(\omega t) \vec{i} + \sin(\omega t) \vec{j}) \quad (11.234)$$

$$\vec{r}_2 = -a_2 (\cos(\omega t) \vec{i} + \sin(\omega t) \vec{j}) \quad (11.235)$$

Komponente radijus vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 mogu se prikazati korišćenjem matrica kolona

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.236)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = -a_2 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.237)$$

Važe i sledeće jednačine

$$r_1 = a_1 \quad (11.238)$$

$$r_2 = a_2 \quad (11.239)$$

Sa r_1 i r_2 označeni su intenziteti radijus vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 respektivno.

Da bi izračunao ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje ovaj binarni sistem potrebno je da koristim tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta. Komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ određuju se na osnovu jednačine (11.152)

$$D_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N m_i (3x'_{i\mu}x'_{i\nu} - r_i'^2 \delta_{\mu\nu}) \quad (11.240)$$

Jednačina (11.152) važi za slučaj diskretne raspodele mase. Indeks i uzima vrednosti od 1 do N . Sa N je označen ukupan broj čestica u sistemu. Obzirom da se binarni sistem sastoji od dva tela jednačina (11.240) dobija oblik

$$D_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^2 m_i (3x'_{i\mu}x'_{i\nu} - r_i'^2 \delta_{\mu\nu}) \quad (11.241)$$

Komponente vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 predstavljene su korišćenjem matrica kolona. U jednačini (11.241) takodje figurišu komponente vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 , ali je u ovom slučaju korišćeno drugačije označavanje komponenta vektora u odnosu na označavanje u jednačinama (11.236) i (11.237).

Da bi odredio komponente tenzora uvodim sledeću korespondenciju izmedju označavanja komponenta vektora

$$\begin{bmatrix} x'_{11} \\ x'_{12} \\ x'_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (11.242)$$

$$\begin{bmatrix} x'_{21} \\ x'_{22} \\ x'_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (11.243)$$

Važe i sledeće jednačine

$$r_1'^2 = r_1^2 = a_1^2 \quad (11.244)$$

$$r_2'^2 = r_2^2 = a_2^2 \quad (11.245)$$

Komponente $D_{\mu\nu}$ određujem na osnovu sledećih jednačina

$$D_{11} = m_1(3x'_{11}x'_{11} - r_1'^2) + m_2(3x'_{21}x'_{21} - r_2'^2) \quad (11.246)$$

$$D_{12} = D_{21} = 3m_1x'_{11}x'_{12} + 3m_2x'_{21}x'_{22} \quad (11.247)$$

$$D_{22} = m_1(3x'_{12}x'_{12} - r_1'^2) + m_2(3x'_{22}x'_{22} - r_2'^2) \quad (11.248)$$

Komponente D_{13} , D_{23} , D_{31} , D_{32} i D_{33} jednake su nuli, jer su veličine x'_{13} i x'_{23} jednake nuli.

Korišćenjem jednačina (11.242-245) jednačine (11.246-248) dobijaju sledeći oblik

$$D_{11} = m_1(3x_1x_1 - a_1^2) + m_2(3x_2x_2 - a_2^2)$$

$$D_{12} = D_{21} = 3m_1x_1y_1 + 3m_2x_2y_2$$

$$D_{22} = m_1(3y_1y_1 - a_1^2) + m_2(3y_2y_2 - a_2^2)$$

Ove jednačine dalje se transformišu korišćenjem jednačina (11.236) i (11.237)

$$D_{11} = (m_1a_1^2 + m_2a_2^2)(3\cos^2(\omega t) - 1)$$

$$D_{12} = D_{21} = 3(m_1a_1^2 + m_2a_2^2) \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

$$D_{22} = (m_1a_1^2 + m_2a_2^2)(3\sin^2(\omega t) - 1)$$

Ove jednačine dalje transformišem korišćenjem jednačine (11.232) i trigonometrijskih identiteta

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\beta)$$

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\beta)$$

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$$

Konačni rezultati glase

$$D_{11} = \frac{3\mu a^2}{2} \cos(2\omega t) + \frac{\mu a^2}{2}$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{3\mu a^2}{2} \sin(2\omega t)$$

$$D_{22} = -\frac{3\mu a^2}{2} \cos(2\omega t) + \frac{\mu a^2}{2}$$

Tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta može se prikazati u matricnoj formi

$$D_{\mu\nu} = \frac{3\mu a^2}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\omega t) + \frac{1}{3} & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.249)$$

Vektor \vec{n} može se predstaviti u formi matrice kolone

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (11.250)$$

, ili

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.251)$$

Pri dobijanju ovih rezultata korišćene su jednačine (11.220) i (11.221)

Da bi izračunao ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje ovaj binarni sistem potrebno je odrediti vektor \vec{D} (jednačina (11.151)). Vektora \vec{D} takodje se može predstaviti u formi matrice kolone (jednačina (11.156))

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} \quad (11.252)$$

Na osnovu jednačine (11.157) dobijam sledeći rezultat

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \frac{3\mu a^2}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\omega t) + \frac{1}{3} & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\psi \\ \sin\theta \sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.253)$$

Ako se izvrši matricno množenje dobijamo komponente vektora \vec{D} .

Na osnovu jednačine (11.253) zaključujemo da komponente vektora \vec{D} zavise samo od vremena. Medjutim ako pogledamo jednačinu za gravitacioni vektorski potencijaj (jednačina (11.150)), ili jednačine za jačinu gravitoelektričnog ili gravitomagnetnog polja (jednačine (11.161) i (11.159)) primećujemo da postoji zavisnost od veličine $t - r/c$. Iz tog razloga potrebno je transformisati jednačinu (11.253). Ona dobija sledeći oblik

$$\begin{bmatrix} D_x(t - \frac{r}{c}) \\ D_y(t - \frac{r}{c}) \\ D_z(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} = \frac{3\mu a^2}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) + \frac{1}{3} & \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\psi \\ \sin\theta \sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.254)$$

U jednačini (11.227) figuriše veličina $\vec{\ddot{D}}(t - \frac{r}{c})$. To je treći izvod vektora \vec{D} po vremenu. Tu veličinu dobijam korišćenjem jednačine (11.254)

$$\begin{bmatrix} \ddot{D}_x(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_y(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_z(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} = 12\mu a^2 \omega^3 \begin{bmatrix} \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & -\sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\psi \\ \sin\theta \sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.255)$$

Komponente vektora $\vec{\ddot{D}}(t - \frac{r}{c})$ dobijam matricnim množenjem

$$\begin{bmatrix} \ddot{D}_x(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_y(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_z(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} = 12\mu a^2 \omega^3 \begin{bmatrix} \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \cos\psi - \cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \sin\psi \\ -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \cos\psi - \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \sin\psi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.256)$$

Zamenom vektora $\vec{\ddot{D}}(t - \frac{r}{c})$ u jednačinu (11.227) i nakon integracije dobiću ukupnu snagu gravitacione radijacije. Integral koji se pojavljuje u jednačinu (11.227) može se predstaviti kao razlika dva integrala

$$\int \left[\left| \vec{\ddot{D}}(t - \frac{r}{c}) \right|^2 - \left| \vec{\ddot{D}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \vec{n} \right|^2 \right] d\Omega = I_1 - I_2 \quad (11.257)$$

, gde je

$$I_1 = \int \left| \vec{\ddot{D}}(t - \frac{r}{c}) \right|^2 d\Omega$$

$$I_2 = \int \left| \vec{\ddot{D}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \vec{n} \right|^2 d\Omega$$

Element prostornog ugla $d\Omega$ u sfernim koordinatama određuje se na osnovu jednačine (11.222). U skladu sa tim integrali dobijaju oblik

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \vec{\ddot{D}}(t - \frac{r}{c}) \right|^2 \sin\theta d\theta d\psi \quad (11.258)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{n} \right|^2 \sin\theta d\theta d\psi \quad (11.259)$$

Ugao θ može imati vrednosti od 0 do π , a ugao ψ može imati vrednosti od 0 do 2π .

Izračunaću najpre integral I_1 . Komponente vektora $\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ određuju se na osnovu jednačine (11.256)

$$\ddot{D}_x\left(t - \frac{r}{c}\right) = 12\mu a^2 \omega^3 \left[\sin\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\theta \cos\psi - \cos\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\theta \sin\psi \right] \quad (11.260)$$

$$\ddot{D}_y\left(t - \frac{r}{c}\right) = 12\mu a^2 \omega^3 \left[-\cos\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\theta \cos\psi - \sin\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\theta \sin\psi \right] \quad (11.261)$$

Da bi lakše izračunao integral I_1 uvodim sledeće oznake

$$A = \sin\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \quad (11.262)$$

$$B = \cos\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \quad (11.263)$$

U skladu sa tim jednačine (11.260) i (11.261) dobijaju oblik

$$\ddot{D}_x\left(t - \frac{r}{c}\right) = 12\mu a^2 \omega^3 (A \sin\theta \cos\psi - B \sin\theta \sin\psi) \quad (11.264)$$

$$\ddot{D}_y\left(t - \frac{r}{c}\right) = 12\mu a^2 \omega^3 (-B \sin\theta \cos\psi - A \sin\theta \sin\psi) \quad (11.265)$$

Zamenom komponenata vektora $\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ u integral I_1 , i nakon algebarskih transformacija dobijam sledeći rezultat

$$I_1 = (12\mu a^2 \omega^3)^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} ((A)^2 + (B)^2) \sin^3(\theta) d\theta d\psi$$

Ovaj integral dalje se pojednostavljuje korišćenjem jednačina (11.262) i (11.263)

$$I_1 = (12\mu a^2 \omega^3)^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3(\theta) d\theta d\psi$$

Nakon integracije dobijam rezultat

$$I_1 = \frac{8\pi}{3} (12\mu a^2 \omega^3)^2 \quad (11.266)$$

Preostaje da se uradi integral I_2 . U njemu figuriše skalarni proizvod vektora $\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ i \vec{n}

$$\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{n} = \ddot{D}_x\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin\theta \cos\psi + \ddot{D}_y\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin\theta \sin\psi$$

Ova veličina dalje se transformiše korišćenjem jednačina (11.264) i (11.265)

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{n} &= 12\mu a^2 \omega^3 [(A \sin\theta \cos\psi - B \sin\theta \sin\psi) \sin\theta \cos\psi \\ &\quad - (B \sin\theta \cos\psi + A \sin\theta \sin\psi) \sin\theta \sin\psi] \end{aligned}$$

Zamenom ove veličine u integral I_2 , i nakon algebarskih transformacija dobija se sledeći rezultat

$$\begin{aligned} I_2 &= (12\mu a^2 \omega^3)^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [(A)^2 \sin^5(\theta) (\cos^4(\psi) - 2\cos^2(\psi) \sin^2(\psi) + \sin^4(\psi)) \\ &\quad + 4(B)^2 \sin^5(\theta) \cos^2(\psi) \sin^2(\psi) - 4AB \sin^5(\theta) (\cos^3(\psi) \sin(\psi) \\ &\quad - \cos(\psi) \sin^3(\psi))] d\theta d\psi \end{aligned}$$

Nakon integracije dobijam rezultat

$$I_2 = \frac{16\pi}{15} (12\mu a^2 \omega^3)^2 ((A)^2 + (B)^2)$$

Ovaj rezultat se dalje pojednostavljuje korišćenjem jednačina (11.262) i (11.263)

$$I_2 = \frac{16\pi}{15} (12\mu a^2 \omega^3)^2$$

Izračunao sam integrale I_1 i I_2 . Na osnovu jednačine (11.257) dobijam

$$\int \left[\left| \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 - \left| \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right|^2 \right] d\Omega = \frac{24\pi}{15} (12\mu a^2 \omega^3)^2$$

Zamenom ove vrednosti u jednačinu (11.227) dobijam rezultat

$$P_{gem} = -\frac{32}{5} \frac{\gamma \mu^2 a^4 \omega^6}{c^5} \quad (11.267)$$

Ovo je ukupna snaga gravitacione radijacije sa stanovišta gravitoelektromagnetizma.

Ugaona brzina rotacije zvezda oko centra mase određuje se na osnovu jednačina (10.101)

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{(a_1 + a_2)^3}}$$

Ova jednačina može se napisati u obliku

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{(a_1 + a_2)^3}}$$

Sa M je označena ukupna masa sistema.

Zamenom ove jednačine u jednačinu (11.267) dobijam rezultat

$$P_{gem} = -\frac{32}{5} \frac{\gamma^4 \mu^2 M^3}{c^5 a^5} \quad (11.263)$$

Istakao sam da sa stanovišta Opšte teorije relativnosti ukupna snaga gravitacione radijacije određuje se na osnovu jednačine (11.202)

$$P = \frac{32}{5} \frac{\gamma^4 \mu^2 M^3}{c^5 a^5}$$

Upoređivanjem ova dva rezultata vidimo da su ista po apsolutnoj vrednosti. U jednačini (11.263) figuriše minus, ali on nije od značaja za analizu.

Jednačina (11.263) može se dalje transformisati korišćenjem definicije za redukovanu masu (jednačina (11.201))

$$P_{gem} = -\frac{32}{5} \frac{\gamma^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^5} \quad (11.264)$$

Analizirao sam slučaj kada zvezde imaju nejednake mase. Ako se binarni sistem sastoji od tela jednakih masa

$$m_1 = m_2 = m$$

, onda se na osnovu jednačine (11.264) dobija sledeći rezultat za ukupnu snagu gravitacione radijacije

$$P_{gem} = -\frac{64}{5} \frac{\gamma^4 m^5}{c^5 a^5} \quad (11.265)$$

Potrebno je odrediti ukupnu snagu gravitacione radijacije za slučaj kada se zvezde kreću po eliptičnim orbitama. Na slici 43 prikazan je takav binarni sistem. Elipse imaju jednu zajedničku žižu koja se poklapa sa centrom mase sistema. Tačka gde se žiže poklapaju označena je sa C na slici 43.

Položaji ovih zvezda određeni su radijus vektorima \vec{r}_1 i \vec{r}_2 . x osa i pravac radijus vektora \vec{r}_2 određuju ugao φ . On je prikazan na slici 44. Intenzitete radijus vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 označiću sa r_1 i r_2 respektivno.

Radijus vektori \vec{r}_1 i \vec{r}_2 određeni su sledećim jednačinama

$$\vec{r}_1 = r_1 (\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}) \quad (11.266)$$

$$\vec{r}_2 = -r_2(\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}) \quad (11.267)$$

I u ovom slučaju komponente radijus vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 mogu se prikazati korišćenjem matrica kolona

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.268)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = -r_2 \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.269)$$

Komponente tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta određuju se na osnovu jednačine (11.241)

$$D_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^2 m_i (3x'_{i\mu}x'_{i\nu} - r_i'^2 \delta_{\mu\nu})$$

Komponente vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 predstavljene su korišćenjem matrica kolona. U jednačini (11.241) takodje figurišu komponente vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 , ali je u ovom slučaju korišćeno drugačije označavanje komponentenata vektora. Potrebno je uvesti korespondenciju između označavanja komponentenata vektora

$$\begin{bmatrix} x'_{11} \\ x'_{12} \\ x'_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (11.270)$$

$$\begin{bmatrix} x'_{21} \\ x'_{22} \\ x'_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (11.271)$$

Važe i sledeće jednačine

$$r_1'^2 = r_1^2 \quad (11.272)$$

$$r_2'^2 = r_2^2 \quad (11.273)$$

Komponente $D_{\mu\nu}$ određujemo na osnovu sledećih jednačina

$$D_{11} = m_1(3x'_{11}x'_{11} - r_1'^2) + m_2(3x'_{21}x'_{21} - r_2'^2) \quad (11.274)$$

$$D_{121} = D_{21} = 3m_1x'_{11}x'_{12} + 3m_2x'_{21}x'_{22} \quad (11.275)$$

$$D_{22} = m_1(3x'_{12}x'_{12} - r_1'^2) + m_2(3x'_{22}x'_{22} - r_2'^2) \quad (11.276)$$

Komponente D_{13} , D_{23} , D_{31} , D_{32} i D_{33} jednake su nuli, jer su veličine x'_{13} i x'_{23} jednake nuli.

Korišćenjem jednačina (11.270-273) jednačine (11.274-276) dobijaju sledeći oblik

$$D_{11} = m_1(3x_1x_1 - r_1^2) + m_2(3x_2x_2 - r_2^2)$$

$$D_{12} = D_{21} = 3m_1x_1y_1 + 3m_2x_2y_2$$

$$D_{22} = m_1(3y_1y_1 - r_1^2) + m_2(3y_2y_2 - r_2^2)$$

Ove jednačine dalje se transformišu korišćenjem jednačina (11.268) i (11.269)

$$D_{11} = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2)(3\cos^2(\varphi) - 1) \quad (11.277)$$

$$D_{12} = D_{21} = 3(m_1r_1^2 + m_2r_2^2) \cos(\varphi) \sin(\varphi) \quad (11.278)$$

$$D_{22} = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2)(3\sin^2(\varphi) - 1) \quad (11.279)$$

U desetom poglavlju analizirao sam problem dva tela sa stanovišta Njutnove mehanike, i dobio sam jednačine (10.22) i (10.23)

$$r_1 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} r$$

$$r_2 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} r$$

Korišćenjem jednačina (10.22), (10.23) i (11.201) može se dokazati sledeći identitet

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \mu r^2 \quad (11.280)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačine (11.277-279) dobija se

$$D_{11} = 3\mu r^2 \cos^2(\varphi) - \mu r^2 \quad (11.281)$$

$$D_{12} = D_{21} = 3\mu r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \quad (11.282)$$

$$D_{22} = 3\mu r^2 \sin^2(\varphi) - \mu r^2 \quad (11.283)$$

Jednačine (11.281-283) dalje se transformišu korišćenjem trigonometrijskog identiteta

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$$

Dobijam sledeće rezultate

$$D_{11} = 2\mu r^2 \cos^2(\varphi) - \mu r^2 \sin^2(\varphi) \quad (11.284)$$

$$D_{12} = D_{21} = 3\mu r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \quad (11.285)$$

$$D_{22} = 2\mu r^2 \sin^2(\varphi) - \mu r^2 \cos^2(\varphi) \quad (11.286)$$

Ovakav oblik jednačina pogodan je za dalju primenu.

Ako se zvezde kreću po elipsama koje imaju jednake ekscentricitete onda se rastojanje r određuje na osnovu jednačine (10.59)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi)} \quad (11.287)$$

Tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta može se prikazati u matričnoj formi

$$D_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da bi izračunao ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje ovaj binarni sistem potrebno je odrediti vektor \vec{D} (jednačina (11.151)). Na osnovu jednačina (11.157) i (11.251) dobijam sledeći rezultat

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\psi \\ \sin\theta \sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.288)$$

Kada sam razmatrao slučaj kretanja zvezda po kružnim putanjama uveo sam da komponente vektora \vec{D} zavise od veličine $t - r/c$. Označio sam sa r intenzitet vektora \vec{r} koji određuje položaj tačke B (slika 59).

U slučaju kretanja zvezda po eliptičnim putanjama javlja se problem formalne prirode. Taj problem se sastoji u sledećem. Rastojanje između zvezda označio sam sa r . Ono se određuje na osnovu jednačine (11.287). Medjutim i intenzitet radijus vektora tačke B (slika 59) označio sam sa r . Da se ne bi pojavljivala ista oznaka za dve veličine intenzitet radijus vektora tačke B označiću sa \bar{r} .

Za slučaj kretanja zvezda po kružnim putanjama uveo sam da komponente vektora \vec{D} zavise od veličine $t - r/c$. Na taj način dobio sam jednačinu (11.254). Za slučaj kretanja zvezda po eliptičnim

putanjama uvešću da komponente vektora \vec{D} zavise od veličine $t - \bar{r}/c$. Objasnio sam zašto koristim oznaku \bar{r} umesto oznake r . Jednačina (11.288) dobija sledeću formu

$$\begin{bmatrix} D_x(t - \frac{\bar{r}}{c}) \\ D_y(t - \frac{\bar{r}}{c}) \\ D_z(t - \frac{\bar{r}}{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.289)$$

Potrebno je odrediti veličinu $\ddot{\vec{D}}(t - \frac{\bar{r}}{c})$. To je treći izvod vektora \vec{D} po vremenu. Korišćenjem jednačine (11.289) dobijam

$$\begin{bmatrix} \ddot{D}_x(t - \frac{\bar{r}}{c}) \\ \ddot{D}_y(t - \frac{\bar{r}}{c}) \\ \ddot{D}_z(t - \frac{\bar{r}}{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{D}_{11} & \ddot{D}_{12} & 0 \\ \ddot{D}_{21} & \ddot{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.290)$$

Za slučaj kada se zvezde kreću po kružnim putanjama bilo je jednostavno odrediti veličinu $\ddot{\vec{D}}(t - \frac{\bar{r}}{c})$ (jednačina (11.255)). Medjutim za slučaj kretanja zvezda po eliptičnim putanjama određivanje veličine $\ddot{\vec{D}}(t - \frac{\bar{r}}{c})$ je matematički dosta komplikovano. Problem je u tome što veličina r , koja se određuje na osnovu jednačina (11.287) ne zavisi direktno od vremena.

Da bi smo ilustrovali ovaj problem potražimo prvi izvod komponente tenzora D_{12} po vremenu

$$\frac{dD_{12}}{dt} = \frac{d}{dt} (3\mu r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi))$$

Ova jednačina može se napisati u obliku

$$\frac{dD_{12}}{dt} = \frac{d}{d\varphi} (3\mu r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \frac{d\varphi}{dt}$$

Ovu jednačinu dalje transformišemo korišćenjem jednačine (10.114)

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{a^3} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e\cos\varphi)^2}$$

, i dobijamo

$$\frac{dD_{12}}{dt} = \frac{d}{d\varphi} (3\mu r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{a^3} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e\cos\varphi)^2} \quad (11.291)$$

Zamenom jednačine (11.287) u jednačinu (11.291) dobija se sledeći rezultat

$$\frac{dD_{12}}{dt} = \frac{d}{d\varphi} (3\mu \frac{a^2(1 - e^2)^2}{(1 + e\cos(\varphi))^2} \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{a^3} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e\cos\varphi)^2}$$

Nakon diferenciranja i primene algebarskih transformacija dobio bi se prvi izvod komponente tenzora D_{12} po vremenu. Daljom primenom ove procedure dobili bi smo i treći izvod komponente tenzora D_{12} po vremenu. Vidimo da je problem sa matematičke tačke gledišta dosta komplikovan.

Da bi prevazišao ovaj problem korišću određene rezultate Ošte teorije relativnosti. Prilikom razmatranja binarnih sistema sa stanovišta Ošte teorije relativnosti dobijen je sledeći tenzor

$$I_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \mu r^2 \cos^2(\varphi) & \mu r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) & 0 \\ \mu r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) & \mu r^2 \sin^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jednostavno je pročitati njegove komponente

$$I_{11} = \mu r^2 \cos^2(\varphi)$$

$$I_{12} = I_{21} = \mu r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)$$

$$I_{22} = \mu r^2 \sin^2(\varphi)$$

Uočavamo sličnost komponenta tenzora $I_{\mu\nu}$ sa komponentama tenzora $D_{\mu\nu}$ (jednačine (11.284-286)). U radu [15] određeni su treći izvodi komponenta tenzora $I_{\mu\nu}$ po vremenu

$$\frac{d^3 I_{11}}{dt^3} = \beta(1 + e \cos(\varphi))^2 (2 \sin(2\varphi) + 3e \sin(\varphi) \cos^2(\varphi)) \quad (11.292)$$

$$\frac{d^3 I_{12}}{dt^3} = -\beta(1 + e \cos(\varphi))^2 (2 \cos(2\varphi) - e \cos(\varphi)(1 - 3\cos^2(\varphi))) \quad (11.293)$$

$$\frac{d^3 I_{22}}{dt^3} = -\beta(1 + e \cos(\varphi))^2 (2 \sin(2\varphi) + e \sin(\varphi)(1 + 3\cos^2(\varphi))) \quad (11.294)$$

, gde je

$$\beta = \sqrt{\frac{4\gamma^3 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1 - e^2)^5}} \quad (11.295)$$

Jednačine (11.292-294) mogu se napisati i u sledećem obliku

$$\frac{d^3 I_{11}}{dt^3} = \beta F_1(\varphi) \quad (11.296)$$

$$\frac{d^3 I_{12}}{dt^3} = \frac{d^3 I_{21}}{dt^3} = -\beta F_2(\varphi) \quad (11.297)$$

$$\frac{d^3 I_{22}}{dt^3} = -\beta F_3(\varphi) \quad (11.298)$$

Na osnovu ovih definicija sledi da funkcije $F_1(\varphi)$, $F_2(\varphi)$ i $F_3(\varphi)$ imaju oblik

$$F_1(\varphi) = (1 + e \cos(\varphi))^2 (2 \sin(2\varphi) + 3e \sin(\varphi) \cos^2(\varphi))$$

$$F_2(\varphi) = (1 + e \cos(\varphi))^2 (2 \cos(2\varphi) - e \cos(\varphi)(1 - 3\cos^2(\varphi)))$$

$$F_3(\varphi) = (1 + e \cos(\varphi))^2 (2 \sin(2\varphi) + e \sin(\varphi)(1 + 3\cos^2(\varphi)))$$

Možemo uspostaviti vezu između komponenta tenzora $D_{\mu\nu}$ i $I_{\mu\nu}$ na sledeći način. Diferenciranjem jednačina (11.284-286) po vremenu dobijam

$$\frac{d^3 D_{11}}{dt^3} = 2 \frac{d^3}{dt^3} (\mu r^2 \cos^2(\varphi)) - \frac{d^3}{dt^3} (\mu r^2 \sin^2(\varphi))$$

$$\frac{d^3 D_{12}}{dt^3} = \frac{d^3 D_{21}}{dt^3} = 3 \frac{d^3}{dt^3} (\mu r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi))$$

$$\frac{d^3 D_{22}}{dt^3} = 2 \frac{d^3}{dt^3} (\mu r^2 \sin^2(\varphi)) - \frac{d^3}{dt^3} (\mu r^2 \cos^2(\varphi))$$

Na osnovu jednačina (11.296-298) dobijam sledeće rezultate

$$\frac{d^3 D_{11}}{dt^3} = 2\beta F_1(\varphi) + \beta F_3(\varphi) \quad (11.299)$$

$$\frac{d^3 D_{12}}{dt^3} = \frac{d^3 D_{21}}{dt^3} = -3\beta F_2(\varphi) \quad (11.300)$$

$$\frac{d^3 D_{22}}{dt^3} = -2\beta F_3(\varphi) - \beta F_1(\varphi) \quad (11.301)$$

Određio sam komponente tenzora $D_{\mu\nu}$. Primenom jednačine (11.290) dobijam komponente vektora $\overset{\text{iii}}{D}\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right)$

$$\ddot{D}_x\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right) = \ddot{D}_{11} \sin\theta \cos\psi + \ddot{D}_{12} \sin\theta \sin\psi \quad (11.302)$$

$$\ddot{D}_y\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right) = \ddot{D}_{21} \sin\theta \cos\psi + \ddot{D}_{22} \sin\theta \sin\psi \quad (11.303)$$

Zamenom vektora $\overset{\text{iii}}{D}\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right)$ u jednačinu (11.227) i nakon integracije dobiću ukupnu snagu gravitacione radijacije. Integral koji se pojavljuje u jednačinu (11.227) može se predstaviti kao razlika dva integrala

$$\int \left[\left| \overset{\text{iii}}{D}\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right) \right|^2 - \left| \overset{\text{iii}}{D}\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right) \cdot \vec{n} \right|^2 \right] d\Omega = I_3 - I_4 \quad (11.304)$$

, gde je

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \overset{\text{iii}}{D}\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right) \right|^2 \sin\theta d\theta d\psi \quad (11.305)$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \overset{\text{iii}}{D}\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right) \cdot \vec{n} \right|^2 \sin\theta d\theta d\psi \quad (11.306)$$

Izračunaću najpre integral I_3 . Komponente vektora $\overset{\text{iii}}{D}\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right)$ određuju se na osnovu jednačine (11.302) i (11.303). Da bi lakše izračunao integral I_3 uvodim sledeće oznake

$$\bar{A} = \ddot{D}_{11} \quad (11.307)$$

$$\bar{B} = \ddot{D}_{12} = \ddot{D}_{21} \quad (11.308)$$

$$\bar{C} = \ddot{D}_{22} \quad (11.309)$$

U skladu sa tim jednačine (11.302) i (11.303) dobijaju oblik

$$\ddot{D}_x\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right) = \bar{A} \sin\theta \cos\psi + \bar{B} \sin\theta \sin\psi \quad (11.310)$$

$$\ddot{D}_y\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right) = \bar{B} \sin\theta \cos\psi + \bar{C} \sin\theta \sin\psi \quad (11.311)$$

Zamenom komponentata vektora $\overset{\text{iii}}{D}\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right)$ u integral I_3 , i nakon algebarskih transformacija dobijam sledeći rezultat

$$I_3 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [(\bar{A})^2 \cos^2(\psi) + 2\bar{A}\bar{B} \cos(\psi) \sin(\psi) + (\bar{B})^2 + 2\bar{B}\bar{C} \cos(\psi) \sin(\psi) + (\bar{C})^2 \sin^2(\psi)] \sin^3(\theta) d\theta d\psi$$

Nakon integracije dobijam rezultat

$$I_3 = \frac{4\pi}{3} (\bar{A})^2 + \frac{8\pi}{3} (\bar{B})^2 + \frac{4\pi}{3} (\bar{C})^2$$

Preostaje da se uradi integral I_4 . U njemu figuriše skalarni proizvod vektora $\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{\vec{r}}{c}\right)$ i \vec{n} . Na osnovu jednačina (11.310), (11.311) i (11.251) dobijam

$$\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{\vec{r}}{c}\right) \cdot \vec{n} = (\bar{A}\sin\theta\cos\psi + \bar{B}\sin\theta\sin\psi)\sin\theta\cos\psi + (\bar{B}\sin\theta\cos\psi + \bar{C}\sin\theta\sin\psi)\sin\theta\sin\psi$$

Zamenom ove veličine u integral I_4 , i nakon algebarskih transformacija dobijam sledeći rezultat

$$I_4 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [(\bar{A})^2\cos^4(\psi) + 4\bar{A}\bar{B}\cos^3(\psi)\sin(\psi) + 2\bar{A}\bar{C}\cos^2(\psi)\sin^2(\psi) + 4(\bar{B})^2\cos^2(\psi)\sin^2(\psi) + 4\bar{B}\bar{C}\cos\psi\sin^3(\psi) + (\bar{C})^2\sin^4(\psi)]\sin^5(\theta)d\theta d\psi$$

Nakon integracije dobijam rezultat

$$I_4 = \frac{12\pi}{15}(\bar{A})^2 + \frac{16\pi}{15}(\bar{B})^2 + \frac{12\pi}{15}(\bar{C})^2 + \frac{8\pi}{15}\bar{A}\bar{C}$$

Razlika integrala I_3 i I_4 ima vrednost

$$I_3 - I_4 = \frac{8\pi}{15}(\bar{A})^2 + \frac{24\pi}{15}(\bar{B})^2 + \frac{8\pi}{15}(\bar{C})^2 - \frac{8\pi}{15}\bar{A}\bar{C} \quad (11.312)$$

Na osnovu jednačina (11.307-309) i (11.299-301) dobijam

$$\bar{A} = 2\beta F_1(\varphi) + \beta F_3(\varphi)$$

$$\bar{B} = -3\beta F_2(\varphi)$$

$$\bar{C} = -2\beta F_3(\varphi) - \beta F_1(\varphi)$$

Zamenom ovih vrednosti u jednačinu (11.312) i nakon algebarskih transformacija dobijam

$$I_3 - I_4 = \frac{56\pi}{15}\beta^2(F_1(\varphi))^2 + \frac{216\pi}{15}\beta^2(F_2(\varphi))^2 + \frac{56\pi}{15}\beta^2(F_3(\varphi))^2 + \frac{104\pi}{15}\beta^2 F_1(\varphi)F_3(\varphi)$$

Ovaj rezultat napisaću u obliku

$$I_3 - I_4 = \beta^2 F(\varphi) \quad (11.313)$$

Funkcija $F(\varphi)$ glasi

$$F(\varphi) = \frac{56\pi}{15}(F_1(\varphi))^2 + \frac{216\pi}{15}(F_2(\varphi))^2 + \frac{56\pi}{15}(F_3(\varphi))^2 + \frac{104\pi}{15}F_1(\varphi)F_3(\varphi) \quad (11.314)$$

Zamenom jednačine (11.313) u jednačinu (11.304) dobijam

$$\int \left[\left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{\vec{r}}{c}\right) \right|^2 - \left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{\vec{r}}{c}\right) \cdot \vec{n} \right|^2 \right] d\Omega = \beta^2 F(\varphi)$$

Ovaj rezultat dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.295)

$$\int \left[\left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{\vec{r}}{c}\right) \right|^2 - \left| \ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{\vec{r}}{c}\right) \cdot \vec{n} \right|^2 \right] d\Omega = \frac{4\gamma^3 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1 - e^2)^5} F(\varphi) \quad (11.315)$$

Zamenom jednačine (11.315) u jednačinu (11.227) dobijam

$$P_{gem}(\varphi) = - \frac{\gamma^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{9\pi a^5 c^5 (1 - e^2)^5} F(\varphi) \quad (11.316)$$

Na osnovu jednačine (11.227) određuje se ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje binarni sistem. U jednačini (11.316) figuriše funkcija $F(\varphi)$. Sa promenom ugla φ menja se i snaga gravitacione radijacije. Iz tog razloga u jednačini (11.316) koristim oznaku $P_{gem}(\varphi)$ umesto oznake P_{gem} . Da bi dobio ukupnu snagu gravitacione radijacije (P_{gem}) potrebno je izvršiti usrednjavanje veličine $P_{gem}(\varphi)$ za jedan period. O procesu usrednjavanja pojedinih fizičkih veličina bilo je već reči u dosadašnjem tekstu. Izvršeno je usrednjavanje veličine dE/dt koja se određuje na osnovu jednačine (11.183), i dobijena je ukupna snaga gravitacione radijacije (jednačina (11.190)). Istakao sam da ću te metode koristiti prilikom analize binarnih sistema sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Usrednjavanjem veličine $P_{gem}(\varphi)$ za jedan period dobija se veličina P_{gem}

$$P_{gem} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{gem}(\varphi) dt$$

Saglasno već opisanoj proceduri ovu jednačinu transformišem na način

$$P_{gem} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} P_{gem}(\varphi) \frac{dt}{d\varphi} d\varphi$$

, odnosno

$$P_{gem} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} P_{gem}(\varphi) \frac{1}{\dot{\varphi}} d\varphi \quad (11.317)$$

Ugao φ menja se tokom vremena. Ova promena određuje se na osnovu jednačine (10.114). Zamenom jednačine (10.114) u jednačinu (11.317) dobijam

$$P_{gem} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} P_{gem}(\varphi) \sqrt{\frac{a^3}{\gamma(m_1 + m_2)}} (1 - e^2)^{3/2} (1 + e \cos \varphi)^{-2} d\varphi \quad (11.318)$$

Na osnovu trećeg Keplerovog zakona dobija se rezultat

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma(m_1 + m_2)}}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.318) dobijam

$$P_{gem} = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \varphi)^{-2} P_{gem}(\varphi) d\varphi \quad (11.319)$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.316)

$$P_{gem} = -\frac{\gamma^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{18\pi^2 a^5 c^5} (1 - e^2)^{-7/2} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \varphi)^{-2} F(\varphi) d\varphi \quad (11.320)$$

Zamenom funkcije $F(\varphi)$ u jednačinu (11.320) dobijam

$$P_{gem} = -\frac{\gamma^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{18\pi^2 a^5 c^5} (1 - e^2)^{-7/2} \left[\frac{56\pi}{15} I_5 + \frac{216\pi}{15} I_6 + \frac{56\pi}{15} I_7 + \frac{104\pi}{15} I_8 \right] \quad (11.321)$$

Integrali koji se pojavljuju u ovoj jednačini imaju oblik

$$I_5 = \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \varphi)^{-2} (F_1(\varphi))^2 d\varphi$$

$$I_6 = \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \varphi)^{-2} (F_2(\varphi))^2 d\varphi$$

$$I_7 = \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \varphi)^{-2} (F_3(\varphi))^2 d\varphi$$

$$I_8 = \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \varphi)^{-2} F_1(\varphi) F_3(\varphi) d\varphi$$

Ovi integrali imaju sledeće vrednosti

$$I_5 = 4\pi + \frac{9\pi}{8} e^2$$

$$I_6 = 4\pi + \frac{17\pi}{8} e^2$$

$$I_7 = 4\pi + \frac{29\pi}{8}e^2$$

$$I_8 = 4\pi + \frac{15\pi}{8}e^2$$

Zamenom ovih vrednosti u jednačinu (11.321), i nakon sredjivanja dobijam sledeći rezultat

$$P_{gem} = -\frac{32\gamma^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5 a^5 c^5} (1 + 0,531e^2)(1 - e^2)^{-7/2} \quad (11.322)$$

U ovoj jednačini kao i u jednačini (11.263) figuriše minus, ali on nije od značaja za analizu.

Primenom jednačine (11.322) na Rasel – Tejlorov binarni sistem dobijam rezultat

$$P_{gem} = -\frac{32\gamma^4 m_p^2 m_n^2 (m_p + m_n)}{5 c^5 a^5} (1 + 0,531e^2)(1 - e^2)^{-7/2} \quad (11.323)$$

Sa m_p označena je masa pulsara, a sa m_n označena je masa neutronske zvezde.

Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje Rasel – Tejlorov binarni sistem određuje se na osnovu jednačine (11.190)

$$P = \frac{32\gamma^4 m_p^2 m_n^2 (m_p + m_n)}{5 c^5 a^5} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) (1 - e^2)^{-7/2}$$

Primećujemo da postoji sličnost između jednačina (11.323) i (11.190).

U okviru Opšte teorije relativnosti uvedena je funkcija $f(e)$ (jednačina (11.175)). U skladu sa tim dobijena je jednačina (11.192)

$$P = \frac{32\gamma^4 m_p^2 m_n^2 (m_p + m_n)}{5 c^5 a^5} f(e)$$

U okviru gravitoelektromagnetizma uvodim funkciju $f_{gem}(e)$

$$f_{gem}(e) = (1 + 0,531e^2)(1 - e^2)^{-7/2} \quad (11.324)$$

U skladu sa tim jednačina (11.323) dobija oblik

$$P_{gem} = -\frac{32\gamma^4 m_p^2 m_n^2 (m_p + m_n)}{5 c^5 a^5} f_{gem}(e) \quad (11.325)$$

Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti promena perioda rotacije sa vremenom opisuje se na osnovu jednačine (11.176)

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{96\gamma^{5/3}}{5 c^5} \frac{m_p m_n}{(m_p + m_n)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-8/3} f(e)$$

, a promena veličine a sa vremenom opisuje se na osnovu jednačine (11.195)

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{\gamma^3}{c^5 a^3} m_p m_n (m_p + m_n) f(e)$$

Primenjujući istu proceduru iz Opšte teorije relativnosti koja je prezentovana u dosadašnjem tekstu može se pokazati da sa stanovišta gravitoelektromagnetizma promena perioda rotacije sa vremenom opisuje se na osnovu jednačine (11.326)

$$\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)_{gem} = -\frac{96\gamma^{5/3}}{5 c^5} \frac{m_p m_n}{(m_p + m_n)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-8/3} f_{gem}(e) \quad (11.326)$$

, a promena veličine a sa vremenom opisuje se na osnovu jednačine (11.327)

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle_{gem} = -\frac{64}{5} \frac{\gamma^3}{c^5 a^3} m_p m_n (m_p + m_n) f_{gem}(e) \quad (11.327)$$

Uveo sam indeks gem da bi naznačio da su ovi rezultati dobijeni sa stanovišta gravitoelektromagnetizma.

Korišćenjem eksperimentalnih podataka i teorijskog modela zasnovanog na Opštoj teoriji relativnosti utvrđeno je da masa pulsara i masa neutronske zvezde u Rasel – Tejlorovom binarnom sistemu iznose respektivno

$$m_p = 1,441 M_{\odot}$$

$$m_n = 1,387 M_{\odot}$$

Masa Sunca označena je sa M_{\odot} .

Masa pulsara i masa neutronske zvezde nisu bile unapred poznate. U dosadašnjem tekstu ukratko sam objasnio postupak određivanja tih masa. Taj postupak sastoji se u sledećem. Najpre se izmere Keplerovi orbitalni parametri, a potom dva proizvoljno izabrana post Keplerova parametara. Post Keplerovi parametari mogu se izraziti preko Keplerovih parametara, mase pulsara i mase neutronske zvezde. Na ovaj način dobijaju se dve jednačine, a nepoznate veličine koje figurišu u tim jednačinama su masa pulsara i masa neutronske zvezde. Rešavanjem ovog sistema jednačina nalaze se masa pulsara i masa neutronske zvezde.

Analizom podataka za slučaj Rasel – Tejlorovog binarnog sistema utvrđeno je da elipse po kojima se kreću zvezde imaju isti ekscentricitet, i on iznosi $e = 0,617$. U skladu sa tim funkcije $f(e)$ i $f_{gem}(e)$ imaju vrednosti

$$f(e) = 11,843$$

$$f_{gem}(e) = 6,431$$

Jednačine (11.323) i (11.190) zaista imaju sličnu formu, međutim zbog razlike u funkcijama $f(e)$ i $f_{gem}(e)$ određene fizičke veličine imaće različite vrednosti. U slučaju Rasel – Tejlorovog binarnog sistema ekscentricitet elipse ima veliku vrednost. Kod binarnih sistema gde je vrednost ekscentriciteta mala razlika u funkcijama $f(e)$ i $f_{gem}(e)$ nije toliko značajna.

Sa stanovišta gravitoelektromagnetizma promena perioda rotacije sa vremenom opisuje se na osnovu jednačine (11.326). Da bi se dobila konkretna vrednost ove fizičke veličine potrebno je zameniti odgovarajuće brojne vrednosti u jednačinu (11.326). Što se tiče mase pulsara i neutronske zvezde koristiću vrednosti dobijene na osnovu Opšte teoriji relativnosti. Tako određena promena perioda rotacije sa vremenom sa stanovišta gravitoelektromagnetizma može se izraziti preko odgovarajuće veličine iz Opšte teorije relativnosti. Da bi se to postiglo potrebno je podeliti jednačine (11.326) i (11.176)

$$\frac{\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)_{gem}}{\frac{\dot{T}}{T}} = \frac{f_{gem}(e)}{f(e)}$$

Korišćenjem vrednosti funkcija $f(e)$ i $f_{gem}(e)$ dobijam

$$\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)_{gem} = 0,543 \frac{\dot{T}}{T}$$

Na osnovu jednačine (11.177) dobija se sledeći rezultat

$$\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)_{gem} = 1,304 \cdot 10^{-12} \quad (11.328)$$

Ovaj rezultat ima isti red veličine kao i rezultat Opšte teorije relativnosti (jednačina (11.177)).

U dosadašnjem tekstu spomenuo sam dva post Keplerova parametara. Oni se određuju na osnovu jednačina (11.176) i (11.180). Jednačina (11.180) opisuje pojavu precesije perihela zvezda koje čine Rasel – Tejlorov binarni sistem. Ta precesija zvezda prikazana je na slici 55. Prilikom te diskusije uzeo sam da se u početnom trenutku pulsar i neutronska zvezda nalaze u perihelima (tačkama A i B) (slika 55). Periheli leže na x osi. Nakon određenog vremenskog intervala periheli će se naći u tačkama A_1 i B_1 . Došlo je do rotacije x ose za ugao β . Novi položaj x ose označen je isprekidanom linijom na slici 55.

Proučavanjem Rasel – Tejlorovog binarnog sistema utvrđeno je da periheli zarotiraju za ugao od $4,227^0$, za vremenski interval koji odgovara jednoj zemaljskoj godini. U slučaju Rasel – Tejlorovog binarnog sistema precesija perihela je mnogo izraženija nego u slučaju Merkura.

Osa x rotira oko tačke C konstantnom ugaonom brzinom (slika 55). Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti ta ugaona brzina određuje se na osnovu jednačine (11.180). Zbog važnosti jednačine (11.180) za dalju analizu ponovo je navodim

$$\dot{\omega} = 3 \frac{\gamma^{2/3}}{c^2} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{-5/3} (m_p + m_n)^{2/3} (1 - e^2)^{-1} \quad (11.329)$$

Ova jednačina može se dobiti i sa stanovišta gravitoelektromagnetizma, ali postupak dobijanja te jednačine formalnog je karaktera.

U desetom poglavlju analizirao sam problem dva tela sa stanovišta Njutnove mehanike. Najpre sam uveo tzv. laboratorijski inercijalni sistem (slika 40). Položaj prvog tela čija je masa m_1 određen je radijus vektorom \vec{R}_1 , a položaj drugog tela čija je masa m_2 određen je radijus vektorom \vec{R}_2 . Uveo sam i vektor relativnog položaja

$$\vec{r} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$$

, a intenzitet vektora \vec{r} označio sam sa r .

Tela međusobno deluju samo gravitacionom silom, i u skladu sa tim ovo je izolovani sistem. Intenzitet gravitacione sile određuje se na osnovu Njutnovog zakona gravitacije

$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$

Jednačine kretanja tela glase

$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = - \frac{\gamma m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

$$m_2 \ddot{\vec{R}}_2 = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

U daljem radu uveo sam vektor centra mase i pokazao sam da je ubrzanje centra mase jednako nuli. Centar mase kreće se po inerciji, i ta činjenica nam omogućuje da uvedemo sistem centra mase. To je inercijalni sistem i prikazan je na slici 41.

U laboratorijskom inercijalnom sistemu položaji materijalnih tačaka određeni su vektorima \vec{R}_1 i \vec{R}_2 . U sistemu centra mase položaji materijalnih tačaka određuju se na osnovu jednačina (10.18) i (10.19)

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_1 - \vec{R}_{cm}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_2 - \vec{R}_{cm}$$

Ovi vektori predstavljeni su na slici 42.

Na osnovu jednačina (10.18) i (10.19) dobijam

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{R}}_1 - \ddot{\vec{R}}_{cm} \quad (11.330)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_{cm} \quad (11.331)$$

Ubrzanje centra mase jednako je nuli, i kao posledica te činjenice jednačine (11.330) i (11.331) postaju

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{R}}_1 \quad (11.332)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{R}}_2 \quad (11.333)$$

Jednačina (10.3) transformiše se korišćenjem jednačine (11.332)

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\gamma m_2}{r^3} \vec{r} \quad (11.334)$$

, a jednačina (10.4) transformiše se korišćenjem jednačine (11.333)

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\gamma m_1}{r^3} \vec{r} \quad (11.335)$$

Oduzimanjem jednačina (11.335) i (11.334) dobijam

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \quad (11.336)$$

Ukupna masa sistema određuje se na osnovu jednačine (11.200)

$$M = m_1 + m_2$$

, a redukovana masa na osnovu jednačine (11.201)

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

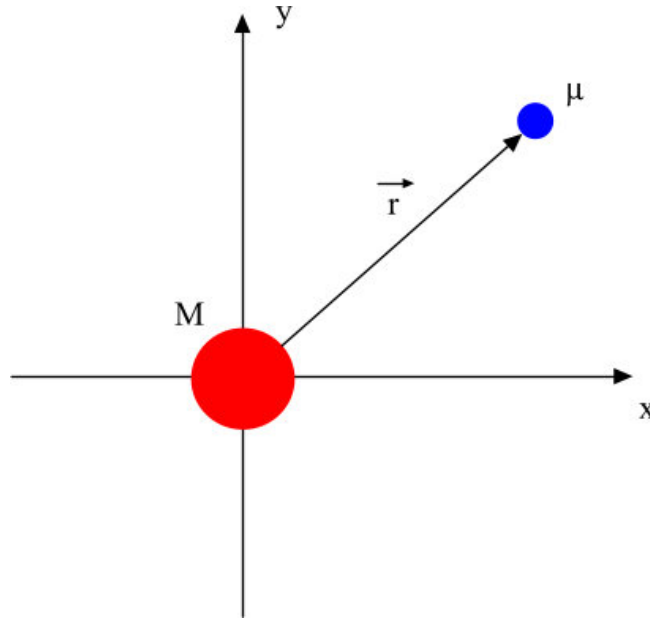
Zamenom jednačine (11.200) u jednačinu (11.336) dobijam

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma M}{r^3} \vec{r}$$

Množenjem ove jednačine redukovanom masom dobijam sledeći rezultat

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma \mu M}{r^3} \vec{r} \quad (11.337)$$

Postoji pristup u analizi problema dva tela u Njutnovoju mehanici koji se zasniva na primeni jednačine (11.337). Primenom tog pristupa dobija se jednačina (10.59). Ovaj pristup se zasniva na tome da se telo mase μ kreće u sistemu centra mase. Položaj tela mase μ određen je radijus vektorom \vec{r} . U koordinatnom početku sistema centra mase nalazi se telo mase M . Ova situacija je prikazana na slici 60



Slika 60

Kada se na osnovu jednačine (11.337) odredi radijus vektor \vec{r} , onda se vektori \vec{R}_1 i \vec{R}_2 određuju korišćenjem jednačina (10.10) i (10.11).

U osmom poglavlju dobio sam jednačinu (8.55)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt_s^2} = -\frac{\gamma M_s m}{r^3} \vec{r} + 3 \frac{\gamma M_s m}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} - \frac{\gamma M_s m}{r^3 c^2} \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{r})$$

To je diferencijalna jednačina kretanja Merkura sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Rešenje ove diferencijalne jednačine je jednačina (8.75)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi(1 + \beta))}$$

Daljom analizom dobio sam da se perihel Merkura u toku vremenskog intervala koji je jednak periodu rotacije Merkura oko Sunca pomeri za ugao $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = 2\pi\beta$$

, odnosno

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi\gamma M_s}{c^2 a(1 - e^2)} \quad (11.338)$$

Jednačina (11.338) može se dalje transformisati korišćenjem trećeg Keplerovog zakona (jednačina (7.48))

$$\Delta\varphi = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} \quad (11.339)$$

Ugaona brzina rotacije perihela Merkura oko Sunca je konstantna veličina. Ta ugaona brzina može se odrediti korišćenjem jednačine (11.339)

$$\frac{\Delta\varphi}{T} = \frac{24\pi^3 a^2}{T^3 c^2 (1 - e^2)} \quad (11.340)$$

Primenom trećeg Keplerovog zakona dobija se jednačina

$$a^2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{4/3} (\gamma M_s)^{2/3}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.340) i nakon algebarskih transformacija dobija se rezultat

$$\frac{\Delta\varphi}{T} = 3 \frac{\gamma^{2/3}}{c^2} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-5/3} M_s^{2/3} (1 - e^2)^{-1} \quad (11.341)$$

Sada ću primeniti jedan formalni pristup da dobijem jednačinu (11.329). Pristup koji se zasniva na primeni jednačine (11.337) može se primeniti i na Za slučaj Rasel – Tejlorovog binarnog sistema. U ovom slučaju ukupna masa sistema određuje se na osnovu jednačine (11.342)

$$M = m_p + m_n \quad (11.342)$$

, a redukovana masa na osnovu jednačine (11.343)

$$\mu = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \quad (11.343)$$

Ako se primeni pristup koji se zasniva na jednačini (11.337) problem kretanja dva tela (u ovom slučaju to su pulsar i neutronska zvezda) svodi se na kretanja tela mase μ oko tela mase M koje se nalazi u koordinatnom početku sistema centra mase. Primenom tog pristupa dobija se jednačina

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma \mu M}{r^3} \vec{r}$$

Ova jednačina dobijena je na osnovu klasične (Njutnove) mehanike, i na osnovu nje ne može se objasniti precesija perihela zvezda u Rasel-Tejlorovom binarnom sistemu. Iz tog razloga potrebno je koristiti generalniju jednačinu koja će opisati kretanje tela mase μ oko tela mase M . Da bi to postigao podsetimo se osmog poglavlja u kome sam analizirao precesiju perihela Merkura. Jednačina (8.55) je diferencijalna jednačina kretanja Merkura sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Po analogiji sa primerom kretanja Merkura oko Sunca, odnosno po analogiji sa jednačinom (8.55) mogu uvesti sledeću diferencijalnu jednačinu za Rasel – Tejlorov binarni sistema

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\gamma(m_p + m_n)\mu}{r^3} \vec{r} + 3 \frac{\gamma(m_p + m_n)\mu}{r^3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \vec{r} - \frac{\gamma(m_p + m_n)\mu}{r^3 c^2} \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{r}) \quad (11.344)$$

Jednačina (11.344) u ovom formalnom pristupu opisuje kretanja tela mase μ oko tela mase M . Mase μ i M određuje se na osnovu jednačine (11.343) i (11.342).

Ako ne bi postojao drugi i treći član na desnoj strani jednačine (11.344) onda bi se ona redukovala u jednačinu (11.337). Sa stanovišta Njutnove mehanike može se rešiti jednačina (11.337), i njeno rešenje je jednačina (10.59).

Da bi se rešila jednačina (11.344) može se koristiti pristup koji je prezentovan u osmog poglavlju. Primenom tog pristupa dobijam

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi(1 + \alpha))} \quad (11.345)$$

r je rastojanje izmedju tela mase μ i tela mase M . Medjutim rastojanje r jednako je rastojanju izmedju pulsara i neutronske zvezde.

Veličina α odredjuje se na osnovu jednačine

$$\alpha = \frac{3\gamma(m_p + m_n)}{c^2 a(1 - e^2)} \quad (11.346)$$

Korišćenjem jednačine (11.345) i analize prezentovane u osmom poglavlju dobija se rezultat

$$\Delta\theta = 2\pi\alpha$$

, odnosno

$$\Delta\theta = \frac{6\pi\gamma(m_p + m_n)}{c^2 a(1 - e^2)} \quad (11.347)$$

Periheli pulsara i neutronske zvezde u toku vremenskog intervala koji je jednak periodu rotacije pulsara (neutronske zvezde) oko zajedničkog centra mase pomere se za ugao $\Delta\theta$.

Jednačina (11.347) može se dalje transformisati korišćenjem trećeg Keplerovog zakona (jednačina (7.48))

$$\Delta\theta = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} \quad (11.348)$$

Periheli pulsara i neutronske zvezde oko zajedničkog centra mase rotiraju konstantnom ugaonom brzinom. Ta ugaona brzina može se odrediti korišćenjem jednačine (11.348)

$$\frac{\Delta\theta}{T} = \frac{24\pi^3 a^2}{T^3 c^2 (1 - e^2)} \quad (11.349)$$

Primenom trećeg Keplerovog zakona dobija se jednačina

$$a^2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{4/3} \gamma^{2/3} (m_p + m_n)^{2/3}$$

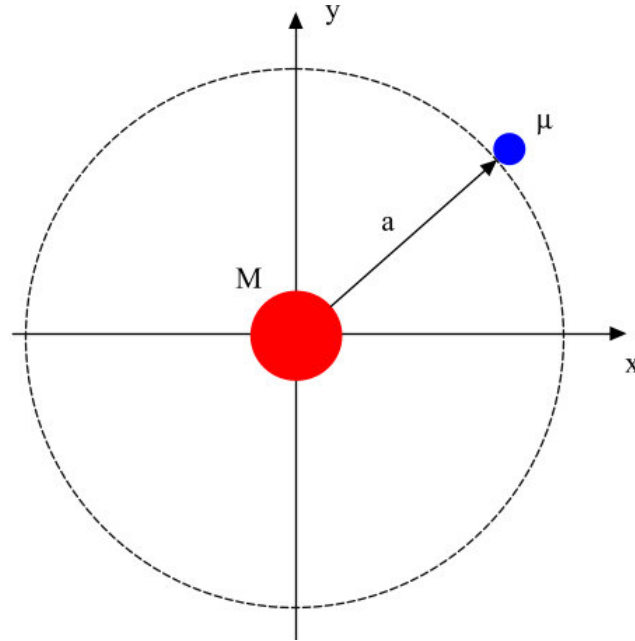
Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.349) i nakon algebarskih transformacija dobija se rezultat

$$\frac{\Delta\varphi}{T} = 3 \frac{\gamma^{2/3}}{c^2} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-5/3} (m_p + m_n)^{2/3} (1 - e^2)^{-1} \quad (11.350)$$

Ovaj rezultat je identičan sa jednačinom (11.329), ali je dobijen formalnim pristupom.

U dosadašnjem tekstu analizirao sam binarne sisteme. Ukupna snaga gravitacione radijacije za slučaj kada se zvezde u binarnom sistemu kreću po kružnicama odredjuje se na osnovu jednačine (11.264). Za slučaj kada se zvezde u binarnom sistemu kreću po elipsama ukupna snaga gravitacione radijacije odredjuje se na osnovu jednačine (11.325). U ovim slučajevima postoji samo gravitaciono kvadropolno zračenje.

Sada ću analizirati slučaj kada pored gravitacionog kvadropolnog zračenja postoji i gravitaciono dipolno zračenje. Neka se telo mase m kreće po kružnici poluprečnika a (slika 61). Položaj tela mase m odredjen je radijus vektorom \vec{r}_m . U početku koordinatnog sistema nalazi se telo mase M . Masa M je mnogo veća od mase m . Za razliku od predhodnih slučajeva gde su tela orbitirala oko centra mase, ovde imamo da telo mase M miruje, a da se telo mase m kreće po kružnici. Ovakav slučaj imamo kada planeta orbitira oko neke masivne zvezde.



Slika 61

Telo mase m rotira konstantnom ugaonom brzinom ω . Tu ugaonu brzinu možemo odrediti primenom Njutnove mehanike, odnosno izjednačavanjem gravitacione sile sa centripetalnom silom

$$\frac{\gamma m M}{a^2} = \frac{m(\omega a)^2}{a}$$

, odnosno

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{a^3}} \quad (11.351)$$

Radijus vektor \vec{r}_m određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{r}_m = a(\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}) \quad (11.352)$$

Da bi smo odredili maseni dipolni moment sistema koristićemo jednačinu (3.52), i dobijamo sledeći rezultat

$$\vec{p}_{gem} = ma(\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}) \quad (11.353)$$

U ovoj jednačini maseni dipolni moment sistema zavisi od vremena t . Za primenu je potrebna zavisnost masenog dipolnog momenta sistema od veličine $t - r/c$. U skladu sa tim jednačina (11.353) dobija sledeću formu

$$\vec{p}_{gem} = ma \left(\cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{i} + \sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{j} \right) \quad (11.354)$$

Ovakav sistem zrači gravitacione talase, i cilj mi je da odredim jačinu gravitoelektričnog i jačinu gravitomagnetnog polja u talasnoj zoni. Da bi precizirali ovu fizičku situaciju posmatrajmo sliku 59. U zapremini V nalazi se naš sistem (zvezda i planeta). Položaj tačke B određen je radijus vektorom \vec{r} . Tačka B nalazi se na velikoj udaljenosti od početka koordinatnog sistema. Potrebno je odrediti jačinu gravitoelektričnog i jačinu gravitomagnetnog polja u tačka B , odnosno u talasnoj zoni.

Gravitacioni vektorski potencijal može se prikazati kao suma tri sabirka (jednačina (11.114))

$$\vec{A}_{gem} = \vec{A}_{gem d} + \vec{A}_{gem m} + \vec{A}_{gem k}$$

, ili na sledeći način (jednačina (11.163))

$$\vec{A}_{gem} = -\frac{4\gamma \dot{\vec{p}}_{gem}(t - \frac{r}{c})}{c^2 r} - \frac{2\gamma \dot{\vec{L}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{c^3 r} - \frac{2\gamma \ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c})}{3c^3 r}$$

Maseni dipolni moment sistema različit je od nule, i postoji gravitaciono dipolno zračenje. Moment impulsa u ovom slučaju ima konstantnu vrednost pa ne postoji gravitaciono magnetno dipolno zračenje. U daljem tekstu pokazaću da postoji i gravitaciono kvadropolno zračenje. U skladu sa ovim zaključcima jednačina (11.114) postaje

$$\vec{A}_{gem} = \vec{A}_{gem d} + \vec{A}_{gem k}$$

Gravitacioni vektorski potencijal $\vec{A}_{gem d}$ određuje se na osnovu jednačine (11.120), a jačine gravitomagnetnog i gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni određuju se na osnovu jednačina (11.126) i (11.129). Primenom ovih jednačina dobijam

$$\vec{B}_{gem d} = -\frac{4\gamma \ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n}}{c^3 r} \quad (11.355)$$

$$\vec{E}_{gem d} = -\frac{4\gamma \left[\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{c^2 r} \quad (11.356)$$

Uveo sam indeks d da bi naznačio da je reč o gravitacionom dipolnom zračenju.

Potrebno je odrediti drugi izvod masenog dipolnog momenta sistema po vremenu. Na osnovu jednačine (11.354) dobijam

$$\ddot{\vec{p}}_{gem} = ma\omega^2 \left(-\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{i} - \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{j} \right) \quad (11.357)$$

Položaj tačke B određen je radijus vektorom \vec{r} . Jedinični vektor \vec{n} određuje se na osnovu jednačine (11.13)

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Ako koristimo sferne koordinate jedinični vektor \vec{n} može se izraziti na sledeći način (jednačina (11.220))

$$\vec{n} = \sin\theta \cos\psi \vec{i} + \sin\theta \sin\psi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}$$

Zamenom jednačina (11.357) i (11.220) u jednačinu (11.355) i nakon vektorskog množenja dobija se rezultat

$$\vec{B}_{gem d} = \frac{4\gamma ma\omega^2}{c^2 r} \left[\sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \cos\theta \vec{i} - \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \cos\theta \vec{j} + \left(\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\theta \sin\psi - \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\theta \cos\psi \right) \vec{k} \right]$$

Ako bi zamenili jednačine (11.357) i (11.220) u jednačinu (11.356) i izvršili odgovarajuća vektorska množenja dobili bi jačinu gravitoelektričnog polja u tački B .

Istakao sam da pored gravitacionog dipolnog zračenja postoji i gravitaciono kvadropolno zračenje. Gravitacioni vektorski potencijal $\vec{A}_{gem k}$ određuje se na osnovu jednačine (11.150), a odgovarajuće jačine gravitomagnetnog i gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni određuju se na osnovu jednačina (11.159) i (11.161).

Da bi odredili ove veličine potrebno je najpre odrediti komponente tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta. Komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ određuju se na osnovu jednačine (11.152). Jednačina (11.152) važi za slučaj diskretne raspodele mase. Telo mase M nalazi se u početku koordinatnog sistema i radijus vektor tog tela je nula vektor. Jedino komponente vektora \vec{r}_m uzimaju se u analizu, i u skladu sa tim jednačina (11.152) dobija oblik

$$D_{\mu\nu} = m(3x'_{\mu} x'_{\nu} - r_i'^2 \delta_{\mu\nu}) \quad (11.358)$$

Komponente radijus vektora \vec{r}_m mogu se prikazati korišćenjem matrice kolone

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.359)$$

Važi i sledeća jednačina

$$r_m = a \quad (11.360)$$

Sa r_m označen je intenzitet radijus vektora \vec{r}_m .

Komponente vektora \vec{r}_m predstavljene su korišćenjem matrice kolone. U jednačini (11.358) takodje figurišu komponente vektora \vec{r}_m , ali je u ovom slučaju korišćeno drugačije označavanje komponentata vektora u odnosu na označavanje u jednačini (11.359).

Da bi odredio komponente tenzora uvodim sledeću korespondenciju izmedju označavanja komponentata vektora

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (11.361)$$

Važi i sledeća jednačina

$$r'^2 = r_m^2 \quad (11.362)$$

Komponente $D_{\mu\nu}$ odredjujemo na osnovu sledećih jednačina

$$D_{11} = m_1(3x'_1x'_1 - r'^2) \quad (11.363)$$

$$D_{12} = D_{21} = 3m_1x'_1x'_2 \quad (11.364)$$

$$D_{22} = m_1(3x'_2x'_2 - r'^2) \quad (11.365)$$

Komponente D_{13} , D_{23} , D_{31} , D_{32} i D_{33} jednake su nuli, jer je veličina x'_3 jednaka nuli. Korišćenjem jednačina (11.360-362) jednačine (11.363-365) dobijaju sledeći oblik

$$D_{11} = m(3x_1x_1 - a^2)$$

$$D_{12} = D_{21} = 3mx_1y_1$$

$$D_{22} = m(3y_1y_1 - a^2)$$

Ove jednačine dalje se transformišu korišćenjem jednačine (11.359)

$$D_{11} = ma^2(3\cos^2(\omega t) - 1)$$

$$D_{12} = D_{21} = 3ma^2\cos(\omega t)\sin(\omega t)$$

$$D_{22} = ma^2(3\sin^2(\omega t) - 1)$$

Ove jednačine mogu se dalje transformisati korišćenjem trigonometrijskih identiteta

$$\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\beta)$$

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\beta)$$

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$$

Konačni rezultati glase

$$D_{11} = \frac{3ma^2}{2}\cos(2\omega t) + \frac{ma^2}{2}$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{3ma^2}{2} \sin(2\omega t)$$

$$D_{22} = -\frac{3ma^2}{2} \cos(2\omega t) + \frac{ma^2}{2}$$

Tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta može se prikazati u matricnoj formi

$$D_{\mu\nu} = \frac{3ma^2}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\omega t) + \frac{1}{3} & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.366)$$

Vektori \vec{n} može se predstaviti u formi matrice kolone (jednačina (11.251)). Na osnovu jednačine (11.157) dobijam sledeći rezultat

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \frac{3ma^2}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\omega t) + \frac{1}{3} & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\psi \\ \sin\theta \sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.367)$$

Na osnovu jednačine (11.367) zaključujem da komponente vektora \vec{D} zavise samo od vremena. Medjutim ako pogledamo jednačine za jačinu gravitoelektričnog ili gravitomagnetnog polja (jednačine (11.161) i (11.159)) primećujemo da postoji zavisnost od veličine $t - r/c$. Iz tog razloga potrebno je transformisati jednačinu (11.367). Ona dobija sledeći oblik

$$\begin{bmatrix} D_x(t - \frac{r}{c}) \\ D_y(t - \frac{r}{c}) \\ D_z(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} = \frac{3ma^2}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) + \frac{1}{3} & \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\psi \\ \sin\theta \sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.368)$$

U jednačinama (11.161) i (11.159) figuriše veličina $\vec{D}(t - \frac{r}{c})$. To je treći izvod vektora \vec{D} po vremenu. Tu veličinu dobijam korišćenjem jednačine (11.368)

$$\begin{bmatrix} \ddot{D}_x(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_y(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_z(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} = 12ma^2\omega^3 \begin{bmatrix} \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & -\sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\psi \\ \sin\theta \sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.369)$$

Komponente vektora $\vec{D}(t - \frac{r}{c})$ dobijam matičnim množenjem

$$\begin{bmatrix} \ddot{D}_x(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_y(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_z(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} = 12\mu a^2 \omega^3 \begin{bmatrix} \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \cos\psi - \cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \sin\psi \\ -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \cos\psi - \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \sin\psi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.370)$$

U skladu sa ovim rezultatom vektor $\vec{D}(t - \frac{r}{c})$ određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\begin{aligned} \vec{D}(t - \frac{r}{c}) = 12\mu a^2 \omega^3 & \left[(\sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \cos\psi - \cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \sin\psi) \vec{i} \right. \\ & \left. - (\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \cos\psi + \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) \sin\theta \sin\psi) \vec{j} \right] \end{aligned} \quad (11.371)$$

Ako bi zamenili jednačine (11.371) i (11.220) u jednačine (11.159) i (11.161) i izvršili odgovarajuća vektorska množenja dobili bi jačinu gravitomagnetnog polja i jačinu gravitoelektričnog polja u tački B . Nakon tih matematičkih operacija dobili bi glomazne jednačine. Zbog tog razloga ja ću jednačine za jačinu gravitomagnetnog polja i jačinu gravitoelektričnog polja u tački B napisati u sledećem obliku

$$\vec{B}_{gem k} = -\frac{2\gamma}{3c^4} \frac{\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n}}{r} \quad (11.372)$$

$$\vec{E}_{gem k} = -\frac{2\gamma}{3c^3} \frac{\left[\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n}\right] \times \vec{n}}{r} \quad (11.373)$$

Uveo sam indeks k da bi naznačio da je reč o gravitacionom kvadropolnom zračenju.

Ukupna jačina gravitomagnetnog polja u tački B određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{B}_{gem} = \vec{B}_{gem d} + \vec{B}_{gem k} \quad (11.374)$$

Zamenom jednačina (11.355) i (11.372) u jednačinu (11.374) dobija se rezultat

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^3} \frac{\ddot{\vec{p}}_{gem}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n}}{r} - \frac{2\gamma}{3c^4} \frac{\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n}}{r} \quad (11.375)$$

Ukupna jačina gravitoelektričnog polja u tački B određuje se na osnovu sledeće jednačine

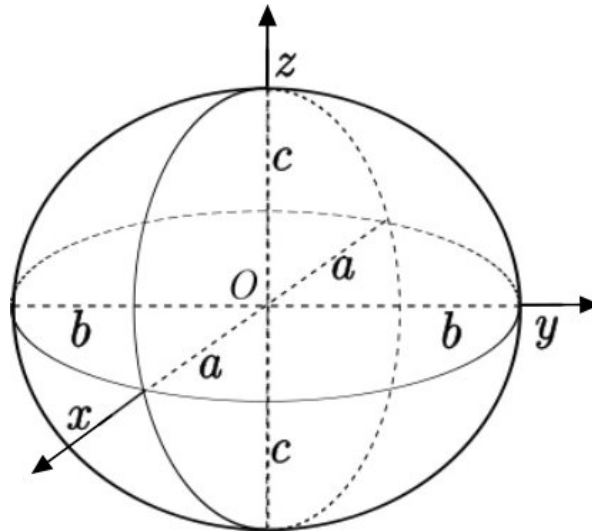
$$\vec{E}_{gem} = \vec{E}_{gem d} + \vec{E}_{gem k} \quad (11.376)$$

Ako zamenimo jednačine (11.356) i (11.373) u jednačinu (11.376) dobija se rezultat

$$\vec{E}_{gem} = -\frac{4\gamma}{c^2} \frac{\left[\ddot{\vec{p}}_{gem}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n}\right] \times \vec{n}}{r} - \frac{2\gamma}{3c^3} \frac{\left[\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n}\right] \times \vec{n}}{r} \quad (11.377)$$

Ako uporedimo jednačine (11.355) i (11.372) vidimo da u jednačini (11.355) figuriše veličina $1/c^3$, dok u jednačini (11.372) figuriše veličina $1/c^4$. Iz tog razloga intenzitet vektora $\vec{B}_{gem k}$ biće mnogo manji od intenziteta vektora $\vec{B}_{gem d}$. Kao posledica toga intenzitet gravitacionog kvadropolnog zračenja biće mnogo manji od intenziteta gravitacionog dipolnog zračenja.

Sada ću analizirati slučaj kada kruto telo emituje gravitacione talase. Kao primer krutog tela uzeću pulsar. Masu pulsara označiću sa M . Uzeću da je distribucija mase pulsara homogena, odnosno gustina mase (ρ_m) ima konstantnu vrednost. Zbog generalnosti diskusije uzeću da pulsar ima oblik elipsoida (slika 62)



Slika 62

Jednačina elipsoida u Dekartovim koordinatama glasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

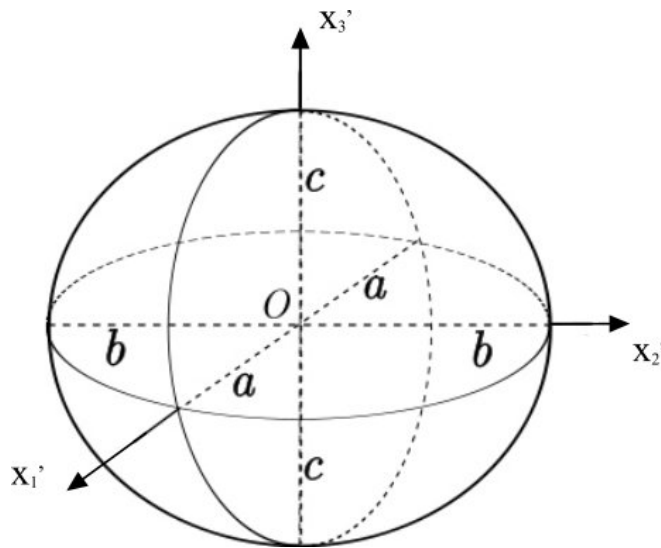
Velike poluose elipsoida označene su sa a , b i c na slici 62. Zapremina elipsoida određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$V = \frac{4}{3} \pi abc \quad (11.378)$$

U skladu sa ovim rezultatom gustinu mase (ρ_m) određujemo na osnovu sledeće jednačine

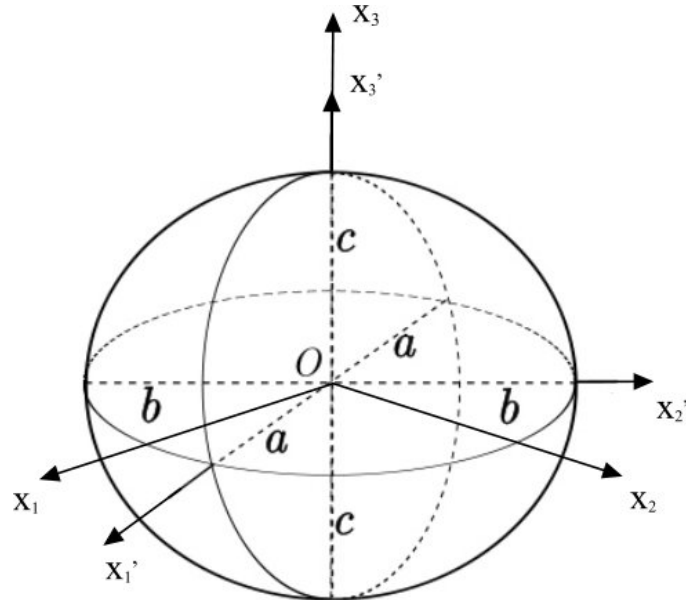
$$\rho_m = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi abc}$$

Potrebno je uvesti dva koordinatna sistema. Te sisteme označiću sa S i S' . Na slici 63 prikazan je sistem S' . Koordinatne ose ovog sistema poklapaju se sa velikim poluosama elipsoida, a koordinatni početak sistema S' poklapa se sa centrom elipsoida. Ovaj sistem je vezan za elipsoid i rotira zajedno sa njim. Koordinatne ose ovog sistema označiću sa x_1' , x_2' i x_3' . Elipsoid (pulsar) rotira oko ose x_3' konstantnom ugaonom brzinom koju ću označiti sa ω .



Slika 63

Elipsoid rotira i njegovu rotaciju posmatraćemo u odnosu na sistem S . Položaj koordinatnih osa sistema S tokom vremena ne menja se. Koordinatni početak sistema S poklapa se sa centrom elipsoida. Koordinatne ose sistema S označiću sa x_1 , x_2 i x_3 . One su prikazane na slici 64.



Slika 64

Sistem S je pravougli koordinatni sistem. Osa x_3 poklapa se sa osom x_3' . Ose x_1 i x_2 nalaze se u ravni elipsoida koju čine velike poluose a i b . Sistem S' rotira oko ose x_3' (odnosno oko ose x_3) konstantnom ugaonom brzinom.

Da bi odredio ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje ovaj pulsar potrebno je odrediti tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta. Komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ u slučaju kontinualne raspodele mase određuju se na osnovu jednačine (11.153)

$$D_{\mu\nu} = \int (3x'_\mu x'_\nu - r'^2 \delta_{\mu\nu}) \rho_m dV, \quad (11.379)$$

Najpre ću odrediti komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ u sistemu S' . One se određuju na osnovu sledećih jednačina

$$D_{11} = \int (3x'_1 x'_1 - (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3)) \rho_m dV, \quad (11.380)$$

$$D_{12} = D_{21} = \int 3x'_1 x'_2 \rho_m dV, \quad (11.381)$$

$$D_{13} = D_{31} = \int 3x'_1 x'_3 \rho_m dV, \quad (11.382)$$

$$D_{22} = \int (3x'_2 x'_2 - (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3)) \rho_m dV, \quad (11.383)$$

$$D_{23} = D_{32} = \int 3x'_2 x'_3 \rho_m dV, \quad (11.384)$$

$$D_{33} = \int (3x'_3 x'_3 - (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3)) \rho_m dV, \quad (11.385)$$

Da bi izračunao ove integrale koristiću sledeću formu generalisanih sfernih koordinata

$$x'_1 = a l \sin \alpha \cos \beta \quad (11.386)$$

$$x'_2 = bl \sin \alpha \sin \beta \quad (11.387)$$

$$x'_3 = cl \cos \alpha \quad (11.388)$$

Veličina l može imati vrednosti od 0 do 1. Ugao α može imati vrednosti od 0 do π , a ugao β može imati vrednosti od 0 do 2π .

Jakobijeva determinanta (Jakobijan) ima vrednost

$$|J| = abcl^2 \sin \alpha$$

Koristeći ove generalisane sferne koordinate možemo odrediti zapreminu elipsoida

$$V = \int \int \int d x'_1 d x'_2 d x'_3 = \int \int \int |J| d l d \alpha d \beta$$

, odnosno

$$V = abc \int \int \int l^2 \sin \alpha d l d \alpha d \beta$$

Daljom integracijom dobijamo

$$V = abc \int_0^1 l^2 d l \int_0^\pi \sin \alpha d \alpha \int_0^{2\pi} d \beta$$

$$V = \frac{4}{3} \pi abc$$

Koristeći ove generalisane sferne koordinate dobijam da integrali (11.380-385) imaju sledeće vrednosti

$$D_{11} = \frac{2Ma^2}{5} - \frac{M}{5}(b^2 + c^2) \quad (11.389)$$

$$D_{22} = \frac{2Mb^2}{5} - \frac{M}{5}(a^2 + c^2) \quad (11.390)$$

$$D_{33} = \frac{2Mc^2}{5} - \frac{M}{5}(a^2 + b^2) \quad (11.391)$$

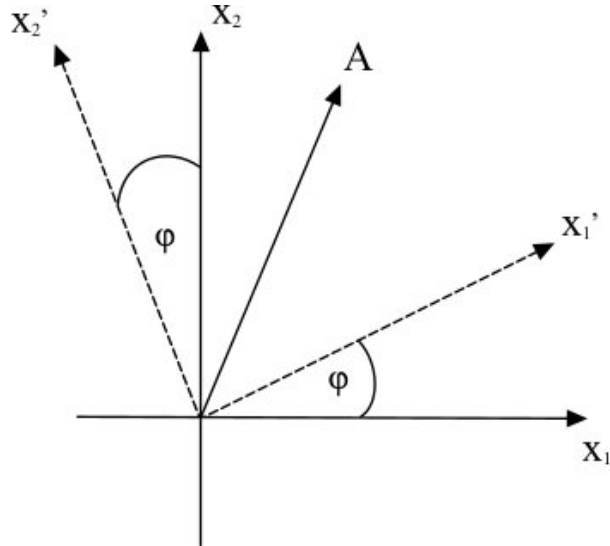
$$D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = 0 \quad (11.392)$$

Na osnovu ovih rezultata dobijam sledeću matricu

$$D_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

Odredjen je tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S' . Sistem S' je vezan za pulsar (elipsoid). Potrebno je odrediti tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S . Da bi to uradili potrebno je najpre uspostaviti vezu izmedju koordinata u sistemima S i S' . Sistem S' rotira u odnosu na sistem S konstantnom ugaonom brzinom ω . Ta rotacija se vrši oko ose x'_3 (slika 64).

Na slici 65 prikazan je jedan trenutni položaj sistema S i S' . Ugao izmedju osa x_1 i x'_1 (odnosno izmedju osa x_2 i x'_2) označen je sa φ



Slika 65

U sistemu S uvešću tačku A . Položaj te tačke određen je radijus vektorom \vec{r}

$$\vec{r} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} \quad (11.393)$$

Jedinične vektore koordinatnih osa x_1 i označio sam sa \vec{i} i \vec{j} respektivno.

Položaj tačke A u sistemu S' takodje je određen radijus vektorom \vec{r} , ali u ovom sistemu vektor \vec{r} ima oblik

$$\vec{r} = x_1' \vec{i}' + x_2' \vec{j}' \quad (11.394)$$

Sa \vec{i}' i \vec{j}' označio sam jedinične vektore koordinatnih osa x_1' i x_2' respektivno.

Na osnovu jednačina (11.393) i (11.394) dobijam

$$x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} = x_1' \vec{i}' + x_2' \vec{j}'$$

Sistem S' je zarotiran u odnosu na sistem S za ugao φ (slika 65). Može se pokazati da postoji sledeća veza izmedju komponenta vektora \vec{r} u ova dva sistema

$$x_1' = \cos \varphi x_1 + \sin \varphi x_2 + 0 x_3$$

$$x_2' = -\sin \varphi x_1 + \cos \varphi x_2 + 0 x_3$$

$$x_3' = 0 x_1 + 0 x_2 + 1 x_3$$

, ili u matričnoj formi

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Na osnovu ove jednačine možemo uvesti matricu rotacije

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.395)$$

Odredjena je veza izmedju koordinata sistema S i S' . Komponente tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta određuju se na osnovu jednačina (11.389-392). Vidimo da su to veličine koje ne zavise od vremena. Može se pokazati da se komponente tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S određuju na osnovu sledeće matrične jednačine

$$(D_{\mu\nu})_s = R^T D R \quad (11.396)$$

Uveo sam indeks s da bi naznačio da su komponente tenzora određene u sistemu S .

Veličina R^T je transponovana matrica. Ona ima sledeći oblik

$$R^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.397)$$

Na osnovu jednačina (11.389-392) i (11.395-397) dobija se sledeći rezultat

$$(D_{\mu\nu})_s = (D_{11} - D_{22}) \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \cos(\varphi)\sin(\varphi) & 0 \\ \cos(\varphi)\sin(\varphi) & \sin^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

Ove jednačina dalje se transformiše korišćenjem trigonometrijskih identiteta

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\beta)$$

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\beta)$$

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$$

, i dobijam sledeći rezultat

$$(D_{\mu\nu})_s = \frac{(D_{11} - D_{22})}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) & 0 \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(D_{11} + D_{22})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(D_{11} + D_{22})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (11.398)$$

Sistem S' rotira u odnosu na sistem S konstantnom ugaonom brzinom ω . U skladu sa tim važi sledeća jednačina

$$\varphi = \omega t$$

Zamenom ugla φ u jednačinu (11.398) dobijam

$$(D_{\mu\nu})_s = \frac{(D_{11} - D_{22})}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(D_{11} + D_{22})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(D_{11} + D_{22})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (11.399)$$

Drugu matricu na desnoj strani ove jednačine označiću sa C . Elementi ove matrice su konstante, odnosno ne zavise od vremena. U skladu sa ovom konstatacijom jednačina (11.399) dobija oblik

$$(D_{\mu\nu})_s = \frac{(D_{11} - D_{22})}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + C$$

Da bi izračunao ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje pulsar potrebno je odrediti vektor \vec{D} (jednačina (11.151)). Vektora \vec{D} takodje se može predstaviti u formi matrice kolone (jednačina (11.156))

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}$$

Na osnovu jednačine (11.157) dobijam sledeći rezultat

$$\begin{bmatrix} D_x(t) \\ D_y(t) \\ D_z(t) \end{bmatrix} = \frac{(D_{11} - D_{22})}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} + C\vec{n}$$

Komponente vektora \vec{D} zavise samo od vremena. Potrebno je ovu jednačinu dalje transformisati, odnosno uvesti zavisnost komponenata vektora od veličine $t - r/c$

$$\begin{bmatrix} D_x(t - \frac{r}{c}) \\ D_y(t - \frac{r}{c}) \\ D_z(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} = \frac{(D_{11} - D_{22})}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} + C\vec{n}$$

Potrebno je odrediti veličinu $\vec{D}''''(t - \frac{r}{c})$. To je treći izvod vektora \vec{D} po vremenu. Elementi matrice C su konstante, i izvod veličine $C\vec{n}$ po vremenu jednak je nuli. Nakon diferenciranja dobijam sledeći rezultat

$$\begin{bmatrix} \ddot{D}_x(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_y(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_z(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} = 4(D_{11} - D_{22})\omega^3 \begin{bmatrix} \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & -\sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.400)$$

Komponente vektora $\vec{D}''''(t - \frac{r}{c})$ mogu se dobiti matričnim množenjem.

Jednačinu (11.400) dalje ću transformisati korišćenjem komponenata tenzora inercije. Tenzor inercije uveden je u mehanici i njegove komponente određuju se na osnovu sledeće jednačine

$$D_{\mu\nu} = \int (r'^2 \delta_{\mu\nu} - x'_\mu x'_\nu) \rho_m dV,$$

Na slici 63 prikazan je elipsoid (pulsar) i sistem S' . Za ovaj elipsoid može se pokazati da matična forma tenzora inercije glasi

$$I_{\mu\nu} = \frac{M}{5} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \quad (11.401)$$

Ova matrica može se napisati u obliku

$$I_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

Veličine I_1 , I_2 i I_3 nazivaju se glavni centralni momenti inercije, i određuju se na osnovu sledećih jednačina

$$I_1 = \frac{M}{5} (b^2 + c^2) \quad (11.402)$$

$$I_2 = \frac{M}{5} (a^2 + c^2) \quad (11.403)$$

$$I_3 = \frac{M}{5} (a^2 + b^2) \quad (11.404)$$

O karakteristikama tenzora inercije biće još reči u daljem tekstu.

Na osnovu jednačina (11.389), (11.390), (11.402) i (11.403) dobija se rezultat

$$D_{11} - D_{22} = 3(I_2 - I_1)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.400) dobijam

$$\begin{bmatrix} \ddot{D}_x(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_y(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_z(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} = 12(I_{22} - I_{11})\omega^3 \begin{bmatrix} \sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ -\cos(2\omega(t - \frac{r}{c})) & -\sin(2\omega(t - \frac{r}{c})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.405)$$

Komponente vektora $\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ dobijaju se matricnim množenjem. Ako se zameni vektor $\ddot{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ u jednačinu (11.227) i izvrši integracija dobija se ukupna snaga gravitacione radijacije. Medjutim nema potrebe vršiti tu matematičku proceduru jer je ona već uradjena kada sam odredjivao ukupnu snagu gravitacione radijacije za binarni sistem prikazan na slici 58. Prilikom tog postupka najpre sam dobio jednačinu (11.255), a potom sam dobio i ukupnu snagu gravitacione radijacije (jednačina (11.267)). Ako uporedimo jednačine (11.255) i (11.405) vidimo da su veoma slične po matematičkoj formi. Razlika postoji samo u numeričkom faktoru koji se nalazi ispred matrica. Na osnovu toga i činjenice da se sprovodi isti matematički postupak u oba slučaja, mogu da konstatujem da se ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje pulsar određuje na osnovu sledeće jednačine

$$P_{gem} = -\frac{32 \gamma (I_2 - I_1)^2 \omega^6}{5 c^5} \quad (11.406)$$

Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti ukupna snaga gravitacione radijacije određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$P = \frac{32 \gamma (I_2 - I_1)^2 \omega^6}{5 c^5 a^5} \quad (11.407)$$

Upoređivanjem ova dva rezultata vidimo da su ista po apsolutnoj vrednosti. U jednačini (11.406) figuriše minus, ali on nije od značaja za analizu.

Jednačina (11.406) (odnosno jednačina (11.407)) može se dalje transformisati uvodjenjem bezdimenzionog parametra ε . On se definiše na sledeći način

$$\varepsilon = \frac{a - b}{(a + b)/2} \quad (11.408)$$

Ovaj parametar ima malu vrednost jer se a i b malo razlikuju u slučaju pulsara.

Na osnovu jednačine (11.408) dobija se rezultat

$$a - b = \frac{\varepsilon(a + b)}{2} \quad (11.409)$$

Korišćenjem jednačina (11.402-404) jednostavno je dobiti sledeći rezultat

$$\frac{I_2 - I_1}{I_3} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

, odnosno

$$\frac{I_2 - I_1}{I_3} = \frac{(a - b)(a + b)}{a^2 + b^2} \quad (11.410)$$

Zamenom jednačine (11.409) u jednačinu (11.410) dobija se

$$\frac{I_2 - I_1}{I_3} = \frac{\varepsilon(a + b)^2}{2(a^2 + b^2)}$$

, odnosno

$$\frac{I_2 - I_1}{I_3} = \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{2ab}{a^2 + b^2}\right) \quad (11.411)$$

Parametar ε ima malu vrednost jer se a i b malo razlikuju u slučaju pulsara

$$a \approx b$$

Na osnovu ovog uslova dobijam sledeći rezultat

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} \approx 1$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.411) dobijam

$$\frac{I_2 - I_1}{I_3} = \varepsilon$$

, odnosno

$$I_2 - I_1 = \varepsilon I_3 \quad (11.412)$$

Zamenom jednačine (11.412) u jednačinu (11.406) dobija se sledeći rezultat

$$P_{gem} = -\frac{32 \gamma \varepsilon^2 I_3^2 \omega^6}{5 c^5} \quad (11.413)$$

Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti odgovarajuća jednačina glasi

$$P = \frac{32 \gamma \varepsilon^2 I_3^2 \omega^6}{5 c^5} \quad (11.414)$$

U literaturi postoje procene parametra ε . Moguće vrednosti parametra ε nalaze se u domenu $\varepsilon \leq 10^{-6}$

Uzeću neke konkretne vrednosti i na osnovu jednačine (11.414) izračunaću ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje pulsar. Za poluprečnik pulsara uzeću vrednost 10 km , a za masu pulsara $1,4 M_\odot$. Sa M_\odot označena je masa Sunca. Istakao sam da većina pulsara ima periode rotacije između $0,5 \text{ s}$ i $2,5 \text{ s}$. U ovom konkretnom primeru uzeću da je period rotacije pulsara 2 s . U skladu sa tim ugaona brzina rotacije pulsara koja figuriše u jednačini (11.414) ima vrednost

$$\omega = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Za parametar ε uzeću vrednost 10^{-6} . Moment inercije I_3 određuje se na osnovu jednačine (11.404). Obzirom da parametar ε ima malu vrednost, velike poluose a i b neznatno se razlikuju, i moment inercije I_3 određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$I_3 = \frac{2}{5} M a^2$$

Za poluprečnik pulsara uzeo sam vrednost 10 km , a za masu pulsara $1,4 M_\odot$. U skladu sa ovim vrednostima moment inercije I_3 ima vrednost

$$I_3 = 1,1 \cdot 10^{38} \text{ kgm}^2$$

Zamenom ove vrednosti i vrednosti ugaone brzine rotacije pulsara u jednačinu (11.414) dobija se rezultat

$$P = 2 \cdot 10^{15} \text{ W}$$

U dosadašnjem tekstu analizirao sam konkretne primere iz astrofizike, i prezentovao sam jednačine Opšte teorije relativnosti na osnovu kojih se određuje ukupna snaga gravitacione radijacije. Pored rezultata Opšte teorije relativnosti prezentovao sam i rezultate koji su dobijeni sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Binarni zvezdani sistemi (koji su prikazani na slikama 54 i 58) emituju gravitacione talase. Zbog emisije gravitacionih talasa smanjuje se energija binarnog sistema, odnosno smanjuje se rastojanje između zvezda. Nakon dovoljno dugog vremena dolazi do spajanja zvezda i formiranja jedinstvene celine.

Gravitacioni talasi poseduju energiju. Energija koju je binarni sistem izgubio tokom vremena jednaka je energiji gravitacionih talasa. Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti gravitacioni talasi poseduju i druga interesantna svojstva. Oni pored energije poseduju impuls i moment impulsa. Sličnu situaciju imamo i kod elektromagnetnih talasa. Oni takodje poseduju energiju, impuls i moment impulsa. Zbog emisije gravitacionih talasa smanjuje se energija binarnog zvezdanog sistema, ili nekog astrofizičkog objekta, ali zbog emisije gravitacionih talasa smanjuje se i moment impulsa sistema jer gravitacioni talasi poseduju moment impulsa.

Sa stanovišta Opšte teorije relativnosti za slučaj binarnih sistema, gde se zvezde kreću po eliptičnim orbitama dobijena je jednačina na osnovu koje se određuje promena momenta impulsa sistema tokom vremena. Ta jednačina glasi

$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle = -\frac{32 \gamma^{7/2} m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)^{1/2}}{5 c^5 a^{7/2} (1 - e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8} e^2 \right) \quad (11.415)$$

Sa m_1 i m_2 označene su mase zvezda, a rastojanje izmedju zvezda označeno je sa a . Ekscentricitet elipse označen je sa e . Ova jednačina primenjuje se i u slučaju Rasel-Tejlorovog binarnog sistema.

Treba istaći da je prilikom dobijanja jednačine (11.415) korišćen postupak usrednjavanja određenih fizičkih veličina. Da bi se naznačilo da je reč o srednjoj vrednosti koriste se posebne zagrade na levoj strani jednačine (11.415). O postupku usrednjavanja fizičkih veličina bilo je reči u dosadašnjem tekstu. Na primer usrednjavanjem veličine dE/dt (jednačina (11.183)) dobijena je ukupna snaga gravitacione radijacije (jednačina (11.190)).

U desetom poglavlju analizirao sam problem kretanja dva tela i pokazao sam da se intenzitet momenta impulsa određuje na osnovu jednačine (10.92). Zbog važnosti ove jednačine za dalju analizu ponovo je navodim

$$L = m_1 m_2 \sqrt{\frac{\gamma a (1 - e^2)}{m_1 + m_2}}$$

Korišćenjem jednačina (11.415), (10.92) i (11.195) može se odrediti promena ekscentriciteta elipse sa vremenom. Da bi to postigao najpre ću jednačine (10.92) i (11.195) napisati u sledećem obliku

$$L^2 = \gamma m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)^{-1} a (1 - e^2) \quad (11.416)$$

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{\gamma^3}{c^5 a^3} m_1 m_2 (m_1 + m_2) f(e) \quad (11.417)$$

Na osnovu jednačine (11.416) dobijam sledeći rezultat

$$1 - e^2 = \frac{L^2 (m_1 + m_2)}{\gamma m_1^2 m_2^2 a}$$

Diferenciranjem ove jednačine po vremenu dobija se

$$\frac{de}{dt} = \frac{(m_1 + m_2)}{e \gamma m_1^2 m_2^2} \left(\frac{L^2}{2a^2} \frac{da}{dt} - \frac{L}{a} \frac{dL}{dt} \right) \quad (11.418)$$

Zamenom jednačine (11.416) u jednačinu (11.418) dobija se

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1 - e^2)}{2ae} \frac{da}{dt} - \sqrt{\frac{(1 - e^2)(m_1 + m_2)}{\gamma a}} \frac{1}{e m_1 m_2} \frac{dL}{dt}$$

Ako se izvrši usrednjavanje ove jednačine dobija se sledeći rezultat

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{(1 - e^2)}{2ae} \left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle - \sqrt{\frac{(1 - e^2)(m_1 + m_2)}{\gamma a}} \frac{1}{e m_1 m_2} \left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle \quad (11.419)$$

Zamenom jednačina (11.417) i (11.415) u jednačinu (11.419) i nakon niza algebarskih transformacija dobija se rezultat

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{304}{15} \frac{e \gamma^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^4 (1 - e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right) \quad (11.420)$$

Na osnovu jednačina (11.417) i (11.419) dobija se sledeći rezultat

$$\left\langle \frac{da}{de} \right\rangle = a \frac{12}{19} \frac{(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4)}{e(1 - e^2)(1 + \frac{121}{304} e^2)}$$

Ova jednačina može se integraliti analitički i dobija se

$$a(e) = c_0 \frac{e^{12/19}}{1 - e^2} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)^{870/2299}$$

Konstanta c_0 određuje se na osnovu početnih uslova. U početnom trenutku veličina a ima vrednost a_0 , a ekscentricitet ima vrednost e_0 .

I sa stanovišta gravitoelektromagnetizma gravitacioni talasi poseduju moment impulsa. Da bi dobio konkretne relacije potrebno je najpre prezentovati određene rezultate iz elektrodinamike. Takav pristup je potreban, jer više puta sam istakao da se gravitoelektromagnetizam zasniva na formalnoj analogiji sa elektrodinamikom.

U drugom poglavlju dokazao sam Pointingovu teoremu (jednačina (2.102)), i odredio sam Pointingov vektor (jednačina (2.103)). Pointingova teorema povezana je sa energijom elektromagnetnog polja. Medjutim postoji i teorema impulsa elektromagnetnog polja. Tu teoremu kasnije ću dokazati. Na osnovu teoreme impulsa elektromagnetnog polja dobija se veličina \vec{g} . To je zapreminska gustina impulsa elektromagnetnog polja. Ako se elektromagnetni talasi prostiru u vakuumu veličina \vec{g} određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{g} = \epsilon_0(\vec{E} \times \vec{B}) \quad (11.421)$$

Ova jednačina nam omogućuje da definišemo zapreminsku gustinu momenta impulsa. Tu veličinu označiću sa \vec{l} , i ona se određuje na sledeći način

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{g}$$

, odnosno

$$\vec{l} = \epsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (11.422)$$

Sa \vec{r} je označen radijus vektor.

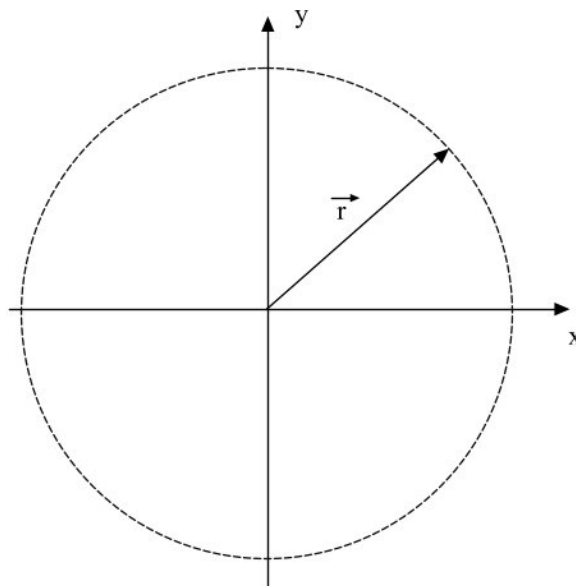
Jednačina (11.422) može se napisati na sledeći način

$$\frac{d\vec{L}_{em}}{dV} = \epsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (11.423)$$

U ovoj jednačini koristim indeks em da bi naznačio da elektromagnetno polje poseduje moment impulsa. Ako izvršimo integraciju po celokupnoj zapremini, u kojoj postoji elektromagnetno polje dobićemo ukupni moment impulsa elektromagnetnog polja.

$$\vec{L}_{em} = \epsilon_0 \int \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) dV \quad (11.424)$$

Sada ću analizirati jedan konkretan primer. Na slici 66 prikazano je telo količine naelektrisanja q koje rotira po kružnici poluprečnika a konstantnom ugaonom brzinom ω .



Slika 66

Radius vektor tela određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{r} = a(\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}) \quad (11.425)$$

Naelektrisano telo kreće se ubrzano i emituje elektromagnetne talase. U ovom slučaju postoji električno dipolno i električno kvadropolno zračenje. Jačine električnog i magnetnog polja u talasnoj zoni koje su povezane sa električnim dipolnim zračenjem određuju se na osnovu jednačina (11.68) i (11.69), a jačine električnog i magnetnog polja u talasnoj zoni koje su povezane sa električnim kvadropolnim zračenjem određuju se na osnovu jednačina (11.106) i (11.104). Ako uporedimo jednačine (11.69) i (11.104) vidimo da je amplituda vektora \vec{B} koja se određuje na osnovu jednačine (11.104) mnogo manja od amplitude vektora \vec{E} koja se određuje na osnovu jednačine (11.69). To ima za posledicu da je intenzitet električnog kvadropolnog zračenja mnogo manji od intenziteta električnog dipolnog zračenja. Iz tog razloga zanemariću električno kvadropolno zračenje, i u razmatranje uzeću samo električno dipolno zračenje.

Na osnovu jednačine (11.423) dobija se sledeći rezultat

$$\frac{d\vec{L}_{em}}{dV} = \varepsilon_0 (\vec{E}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{E})) \quad (11.426)$$

Na osnovu jednačina (11.68) i (11.69) dobijaju se rezultati

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{E} = 0$$

, odnosno

$$\vec{L}_{em} = 0$$

Primenom jednačina (11.68) i (11.69) dobija se da je ukupni moment impulsa elektromagnetnog polja jednak nuli. Iz tog razloga ovde treba napraviti jednu digresiju. Jednačine (11.68) i (11.69) dobijene su na osnovu jednačina (11.66) i (11.67), tako što su jednačinama (11.66) i (11.67) zanemareni sabirci koji sadrže faktor $1/r^2$. Ovo zanemarivanje sabiraka koji sadrže faktor $1/r^2$ imalo je smisla jer se određivalo elektromagnetno polje u talasnoj zoni. Na osnovu jednačina (11.68) i (11.69) može se odrediti ukupna snaga elektromagnetne radijacije koju emituje električni dipol. Medjutim ako želimo odrediti ukupni moment impulsa elektromagnetnog polja moramo koristiti jednačine (11.66) i (11.67). Na osnovu jednačina (11.66) i (11.67) dobijaju se sledeći rezultati

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \vec{n}}{r}$$

Zamenom ovih rezultata u jednačinu (11.426) dobijam

$$\frac{d\vec{L}_{em}}{dV} = -\varepsilon_0 \left(\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}}{r^2} \right) \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \vec{n}}{r} \right) \quad (11.427)$$

Sabirak u zagradi koji sadrži faktor $1/r^2$ zanemariću, i jednačina (11.427) dobija oblik

$$\frac{d\vec{L}_{em}}{dV} = -\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^4} \frac{(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n})(\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \vec{n})}{r^2} \quad (11.428)$$

Ako izvršimo integraciju ove jednačine po zapremini u kojoj postoji elektromagnetno polje možemo dobiti ukupni moment impulsa elektromagnetnog polja. U dosadašnjem radu koristio sam sledeći oblik sfernih koordinata

$$x = r\sin\theta\cos\psi$$

$$y = r\sin\theta\sin\psi$$

$$z = r \cos \theta$$

Ugao θ može imati vrednosti od 0 do π . Ugao ψ može imati vrednosti od 0 do 2π , a veličina r može imati vrednosti od 0 do beskonačno. Element zapremine dV određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.428) dobija se

$$d\vec{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^4} \left(\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \left(\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right) \sin \theta d\theta d\psi dr \quad (11.429)$$

Korišćenjem elementa prostornog ugla $d\Omega$ jednačina (11.429) dobija oblik

$$d\vec{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^4} \left(\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \left(\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Omega dr$$

Deobom ove jednačine sa dt dobijamo

$$\frac{d\vec{L}_{em}}{dt} = -\frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^4} \left(\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \left(\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Omega \frac{dr}{dt} \quad (11.430)$$

Veličina dr/dt jednaka je brzini elektromagnetnih talasa u vakuumu

$$\frac{dr}{dt} = c$$

U skladu sa tim jednačina (11.430) dobija oblik

$$\frac{d\vec{L}_{em}}{dt} = -\frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \left(\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \left(\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Omega$$

Potrebno je izvršiti integraciju ove jednačine po prostornom uglu

$$\frac{d\vec{L}_{em}}{dt} = -\frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int \left(\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \left(\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Omega \quad (11.431)$$

Integral koji se pojavljuje na desnoj strani jednačine (11.431) označiću sa I

$$I = \int \left(\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right) \left(\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Omega \quad (11.432)$$

Radius vektor naelektrisane čestice određuje se na osnovu jednačine (11.425). U skladu sa tim vektor električnog dipolnog momenta određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{p} = aq(\cos(\omega t) \vec{i} + \sin(\omega t) \vec{j}) \quad (11.433)$$

Ako uvedemo zavisnost električnog dipolnog momenta od veličine $t - r/c$ jednačina (11.433) dobija oblik

$$\vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) = aq \left(\cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{i} + \sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{j} \right)$$

Odgovarajući izvodi glase

$$\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) = aq\omega \left(-\sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{i} + \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{j} \right) \quad (11.434)$$

$$\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) = aq\omega^2 \left(-\cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{i} - \sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{j} \right) \quad (11.435)$$

Zbog lakšeg izračunavanja integrala I jednačine (11.434) i (11.435) napisaću u obliku

$$\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \dot{p}_x \vec{i} + \dot{p}_y \vec{j} \quad (11.436)$$

$$\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \ddot{p}_x \vec{i} + \ddot{p}_y \vec{j} \quad (11.437)$$

Korišćenjem sfernih koordinata jedinični vektor \vec{n} određuje se na osnovu jednačine (11.220). Vektor \vec{n} može se izraziti i preko svojih komponenta (jednačina (11.221))

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

Upoređivanjem jednačina (11.220) i (11.221) jednostavno je odrediti komponente vektora \vec{n} .

Korišćenjem jednačina (11.436), (11.437) i (11.221) integral I dobija oblik

$$I = \int (\dot{p}_x n_x + \dot{p}_y n_y) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \ddot{p}_x & \ddot{p}_y & 0 \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} d\Omega \quad (11.438)$$

Da bi rešio ovaj integral koristiću sledeći rezultat

$$\int n_\mu n_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{\mu\nu}$$

, odnosno

$$\int n_x^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3} \quad (11.439)$$

$$\int n_y^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3} \quad (11.440)$$

$$\int n_z^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3} \quad (11.441)$$

$$\int n_x n_y d\Omega = 0 \quad (11.442)$$

$$\int n_x n_z d\Omega = 0 \quad (11.443)$$

$$\int n_y n_z d\Omega = 0 \quad (11.444)$$

Koristeći jednačine (11.439-444) integral I dobija sledeću vrednost

$$I = \int (-\dot{p}_x \ddot{p}_y n_x n_x + \dot{p}_y \ddot{p}_x n_y n_y) \vec{k} d\Omega$$

Na osnovu jednačina (11.439) i (11.440) dobijam rezultat

$$I = (-\dot{p}_x \ddot{p}_y + \dot{p}_y \ddot{p}_x) \frac{4\pi}{3} \vec{k} \quad (11.445)$$

Zamenom komponenta vektora $\dot{\vec{p}}$ i $\ddot{\vec{p}}$ u jednačinu (11.445) dobija se

$$I = -q^2 a^2 \omega^3 \left(\sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) + \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right) \frac{4\pi}{3} \vec{k}$$

, odnosno

$$I = -q^2 a^2 \omega^3 \frac{4\pi}{3} \vec{k}$$

Zamenom ovog integrala u jednačinu (11.431) dobijam rezultat

$$\frac{d\vec{L}_{em}}{dt} = \frac{q^2 a^2 \omega^3}{12\pi \epsilon_0 c^3} \vec{k} \quad (11.446)$$

Istakao sam da i sa stanovišta gravitoelektromagnetizma gravitacioni talasi poseduju moment impulsa. Da bi dobio konkretne relacije za moment impulsa gravitacionih talasa potrebno je prezentovati određene rezultate iz elektrodinamike. U dosadašnjem radu razmatrao sam slučaj

električnog dipola koji emituje elektromagnetne talase, i dobio sam određene rezultate. Međutim za dalji rad potrebni su još neki rezultati iz elektrodinamike. Potrebno je najpre dokazati jednačinu (11.66), a potom i teoremu impulsa elektromagnetnog polja.

Najpre ću dokazati jednačinu (11.66). U razmatranje opet uzimam slučaj prikazan na slici 66. Dipol rotira i emituje elektromagnetne talase. U ovom slučaju postoji električno dipolno i električno kvadropolno zračenje. Intenzitet električnog kvadropolnog zračenja mnogo manji od intenziteta električnog dipolnog zračenja. Iz tog razloga zanemario sam električno kvadropolno zračenje, i uzeo sam u razmatranje samo električno dipolno zračenje. Skalarni potencijal određuje se na osnovu jednačine (11.40), a vektorski potencijal na osnovu jednačine (11.62). U ovom slučaju razmatra se samo električno dipolno zračenje. Poznati su potencijali. Jačina električnog polja određuje se na osnovu jednačine (11.65), a jačina magnetnog polja na osnovu jednačine (11.64). Zbog važnosti ovih jednačina za dalju analizu ponovo ih navodim

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (11.447)$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (11.448)$$

Jednačinu (11.67) već sam dokazao. Preostaje da dokažem jednačinu (11.66). Zamenom jednačina (11.40) i (11.62) u jednačinu (11.448) dobijam

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \text{grad} \left(\frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \quad (11.449)$$

Jedinični vektor \vec{n} određuje se na osnovu jednačine (11.13)

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

, i u skladu sa tim jednačina (11.449) dobija oblik

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \text{grad} \left(\frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^2} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}$$

, odnosno

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{1}{r^2} \text{grad}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)) - \frac{2\vec{n}}{r^3} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)) \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \quad (11.450)$$

Da bi izračunao gradijent koji se pojavljuje u ovoj jednačini potrebno je najpre navesti opšti obrazac

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times \text{rot}(\vec{b}) + \vec{b} \times \text{rot}(\vec{a}) + (\vec{a}\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\nabla)\vec{a} \quad (11.451)$$

Primenom ovog opšteg obrazca dobijam

$$\text{grad}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}) = \vec{r} \times \text{rot}(\dot{\vec{p}}) + \dot{\vec{p}} \times \text{rot}(\vec{r}) + (\vec{r}\nabla)\dot{\vec{p}} + (\dot{\vec{p}}\nabla)\vec{r} \quad (11.452)$$

Jednostavno je dokazati sledeće rezultate

$$\text{rot}(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$(\dot{\vec{p}}\nabla)\vec{r} = \dot{\vec{p}}$$

Zamenom ovih rezultata u jednačinu (11.452) dobijam

$$\text{grad}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}) = \vec{r} \times \text{rot}(\dot{\vec{p}}) + (\vec{r}\nabla)\dot{\vec{p}} + \dot{\vec{p}} \quad (11.453)$$

Rotor veličine $\dot{\vec{p}}$ transformiše se korišćenjem jednačine (11.72)

$$\text{rot}(\dot{\vec{p}}) = \vec{n} \times \frac{\partial\dot{\vec{p}}}{\partial r}$$

Ovu jednačinu dalje transformišem korišćenjem jednačine (11.38)

$$\text{rot}(\dot{\vec{p}}) = \frac{1}{c} \ddot{\vec{p}} \times \vec{n} \quad (11.454)$$

Drugi sabirak u jednačini (11.453) transformišem na sledeći način

$$(\vec{r}\nabla)\dot{\vec{p}} = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)\dot{\vec{p}}$$

, odnosno

$$(\vec{r}\nabla)\dot{\vec{p}} = x \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial x} + y \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial y} + z \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial z} \quad (11.455)$$

Prvi sabirak u ovoj jednačini transformišem na sledeći način

$$x \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial x} = x \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$$

, odnosno

$$x \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial x} = x \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

Da bi transformisao ovaj izraz korišću jednačine (11.34) i (11.35)

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = -\frac{1}{c}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1$$

Jednostavno je dokazati i sledeću jednačinu

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (11.456)$$

Na osnovu jednačina (11.34), (11.35) i (11.456) dobija se sledeći rezultat

$$x \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial x} = -\frac{x^2}{cr} \ddot{\vec{p}}$$

Ako se primeni ista procedura i na ostale sabirke u jednačini (11.455) dobijaju se rezultati

$$y \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial y} = -\frac{y^2}{cr} \ddot{\vec{p}} \quad (11.457)$$

$$z \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial z} = -\frac{z^2}{cr} \ddot{\vec{p}} \quad (11.458)$$

Zamenom jednačina (11.456-458) u jednačinu (11.455), i nakon elementarnih algebarskih operacija dobija se rezultat

$$(\vec{r}\nabla)\dot{\vec{p}} = -\frac{r}{c} \ddot{\vec{p}} \quad (11.459)$$

Zamenom jednačina (11.454), (11.459) u jednačinu (11.453) dobija se

$$\text{grad}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}) = \frac{1}{c} \vec{r} \times (\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) - \frac{r}{c} \ddot{\vec{p}} + \dot{\vec{p}}$$

Ovaj rezultat zamenjuje se u jednačinu (11.450), i nakon algebarskih transformacija dobija se jednačina (11.66) koju ovom prilikom ponovo navodim

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\left[\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n}\right] \times \vec{n}}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{2\vec{n} \left[\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{n}\right] - \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2}$$

Ostalo je još da se dokaže teorema impulsa elektromagnetnog polja. Medjutim da bi to uradio potrebno je prezentovati neke osnovne rezultate tenzorske algebre i tenzorske analize. Uzmimo u

razmatranje jedan pravougli koordinatni sistem. Jedinične vektore koordinatnih osa označicu sa \vec{e}_1 , \vec{e}_2 i \vec{e}_3 .

Uvodim vektor \vec{A} . On se može izraziti preko svojih komponenata

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 \quad (11.460)$$

Da bi smo definisali tenzor uvodimo tri koordinatna vektora

$$\vec{T}_1 = T_{11}\vec{e}_1 + T_{12}\vec{e}_2 + T_{13}\vec{e}_3$$

$$\vec{T}_2 = T_{21}\vec{e}_1 + T_{22}\vec{e}_2 + T_{23}\vec{e}_3$$

$$\vec{T}_3 = T_{31}\vec{e}_1 + T_{32}\vec{e}_2 + T_{33}\vec{e}_3$$

Komponente ovih koordinatnih vektora mogu se prikazati pomoću jedne matrice

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (11.461)$$

Dijadski proizvod dva vektora označava se sa $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ i po definiciji ima sledeće osobine

$$\{\vec{A}, \vec{B}\}\vec{C} = \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$\vec{C}\{\vec{A}, \vec{B}\} = (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B}$$

Dijadski proizvod kraće se zove dijada.

Tenzor T može se prikazati kao suma tri dijade

$$T = \{\vec{T}_1, \vec{e}_1\} + \{\vec{T}_2, \vec{e}_2\} + \{\vec{T}_3, \vec{e}_3\}$$

Delovanjem tenzora na vektor \vec{A} dobijamo

$$T\vec{A} = (\{\vec{T}_1, \vec{e}_1\} + \{\vec{T}_2, \vec{e}_2\} + \{\vec{T}_3, \vec{e}_3\})\vec{A}$$

, odnosno

$$T\vec{A} = \vec{T}_1(\vec{e}_1 \cdot \vec{A}) + \vec{T}_2(\vec{e}_2 \cdot \vec{A}) + \vec{T}_3(\vec{e}_3 \cdot \vec{A})$$

Na osnovu jednačine (11.460) dobijamo

$$T\vec{A} = \vec{T}_1A_1 + \vec{T}_2A_2 + \vec{T}_3A_3$$

Jedinični tenzor definiše se na sledeći način

$$I = \{\vec{e}_1, \vec{e}_1\} + \{\vec{e}_2, \vec{e}_2\} + \{\vec{e}_3, \vec{e}_3\}$$

Delovanjem jediničnog tenzora na vektor \vec{A} dobijamo

$$I\vec{A} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_1\}\vec{A} + \{\vec{e}_2, \vec{e}_2\}\vec{A} + \{\vec{e}_3, \vec{e}_3\}\vec{A}$$

, odnosno

$$I\vec{A} = \vec{e}_1(\vec{e}_1 \cdot \vec{A}) + \vec{e}_2(\vec{e}_2 \cdot \vec{A}) + \vec{e}_3(\vec{e}_3 \cdot \vec{A})$$

Na osnovu jednačine (11.460) dobija se rezultat

$$I\vec{A} = \vec{A}$$

Jednostavno je dokazati i sledeći rezultat

$$\vec{A}I = \vec{A}$$

Tenzoru T može se pridružiti kvadratna matrica na sledeći način

$$T_{ij} = \vec{e}_i T \vec{e}_j$$

Na osnovu ove definicije dobijamo matricu T_{ij} (jednačina (11.461))

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Uspostavljena je veza elemenata matrice T_{ij} i komponenata vektora \vec{T}_1 , \vec{T}_2 i \vec{T}_3 . Zahvaljujući ovoj korespondenciji između tenzora i matrica, često je mnogo jednostavnije problem rešiti korišćenjem matrične algebre nego korišćenjem tenzorske algebre.

U okviru tenzorske analize pokazuju se sledeće jednačine

$$\nabla\{\vec{a}, \vec{b}\} = \vec{b} \operatorname{div}(\vec{a}) + (\vec{a}\nabla)\vec{b} \quad (11.462)$$

$$\operatorname{grad}(\varphi) = \nabla(\varphi I) \quad (11.463)$$

Sa I je označen jedinični tenzor.

Divergencija tenzora određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\operatorname{div}T = \vec{e}_1 \operatorname{div}(\vec{T}_1) + \vec{e}_2 \operatorname{div}(\vec{T}_2) + \vec{e}_3 \operatorname{div}(\vec{T}_3)$$

, a Gausova teorema za tenzore glasi

$$\oint \vec{ds} T = \int \operatorname{div}T dV \quad (11.464)$$

Ako uzmemo da su vektori \vec{a} i \vec{b} jednaki, onda se na osnovu jednačina (11.451) i (11.462) dobijaju sledeći rezultati

$$\operatorname{grad}\left(\frac{a^2}{2}\right) = \vec{a} \times \operatorname{rot}(\vec{a}) + (\vec{a}\nabla)\vec{a} \quad (11.465)$$

$$\nabla\{\vec{a}, \vec{a}\} = \vec{a} \operatorname{div}(\vec{a}) + (\vec{a}\nabla)\vec{a} \quad (11.466)$$

Na osnovu ovih jednačina sledi rezultat

$$\nabla\{\vec{a}, \vec{a}\} - \operatorname{grad}\left(\frac{a^2}{2}\right) = \vec{a} \operatorname{div}(\vec{a}) - \vec{a} \times \operatorname{rot}(\vec{a}) \quad (11.467)$$

Na osnovu jednačine (11.463) dobijamo

$$\operatorname{grad}\left(\frac{a^2}{2}\right) = \nabla\left(\frac{a^2}{2}I\right)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.467) dobijamo

$$\nabla\left[\{\vec{a}, \vec{a}\} - \frac{a^2}{2}I\right] = \vec{a} \operatorname{div}(\vec{a}) - \vec{a} \times \operatorname{rot}(\vec{a}) \quad (11.468)$$

Ovaj rezultat korišću u daljem radu.

Nakon ovog matematičkog uvoda prelazim na izvodjenje teoreme impulsa elektromagnetnog polja. Posmatrajmo sistem naelektrisanih čestica koje se nalaze u elektromagnetnom polju. Sistem čestica nalazi se u oblasti prostora zapremine V . Sistem se sastoji od N čestica, a i -ta čestica ima naelektrisanje q_i i brzinu \vec{v}_i . Na nju deluje Lorencova sila

$$\vec{F}_i = q_i \vec{E} + q_i \vec{v}_i \times \vec{B}$$

Jednačina dinamike ove čestice glasi

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = q_i \vec{E} + q_i \vec{v}_i \times \vec{B}$$

Sumiranjem ovakvih jednačina za sve čestice koje se nalaze u zapremini V dobijamo

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N (q_i \vec{E} + q_i \vec{v}_i \times \vec{B})$$

Ako predjemo sa diskretne na kontinualnu raspodelu naelektrisanja dobijamo sledeću jednačinu

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \int (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) dV \quad (11.469)$$

Podintegralni izraz na desnoj strani jednačine (11.469) transformišemo korišćenjem Maksvelovih jednačina. Na osnovu jednačine (1.1) i jednačine (1.4) dobijam

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}$$

, odnosno

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} + \varepsilon_0 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(1.3) Poslednji sabirak na desnoj strani ove jednačine dalje transformišemo korišćenjem jednačine

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} \quad (11.470)$$

Divergencija vektora jačine magnetnog polja jednaka je nuli, i desnoj strani jednačine (11.470) možemo dodati izraz $\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \operatorname{div} \vec{B}$. Na taj način dobijamo sledeći rezultat

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t}$$

Ovu jednačinu dalje transformišemo korišćenjem jednačine (11.468)

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \nabla \left[\{ \vec{E}, \vec{E} \} - \frac{E^2}{2} I \right] + \frac{1}{\mu_0} \nabla \left[\{ \vec{B}, \vec{B} \} - \frac{B^2}{2} I \right] - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t}$$

, odnosno

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \nabla \left[\{ \varepsilon_0 \vec{E}, \vec{E} \} + \left\{ \frac{1}{\mu_0} \vec{B}, \vec{B} \right\} - \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) I \right] - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} \quad (11.471)$$

Maksvelov tenzor određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$T_M = \{ \varepsilon_0 \vec{E}, \vec{E} \} + \left\{ \frac{1}{\mu_0} \vec{B}, \vec{B} \right\} - \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) I \quad (11.472)$$

U skladu sa ovom definicijom jednačina (11.471) dobija oblik

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \nabla T_M - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.469) dobijamo

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \int \left(\nabla T_M - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} \right) dV$$

Primenom Gausove teoreme za tenzore (jednačina (11.464)) dobija se sledeći rezultat

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \vec{p}_i + \int \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) dV \right] = \oint \vec{d}s T_M \quad (11.473)$$

Komponente Maksvelovog tenzora mogu se dobiti na osnovu sledeće jednačine

$$(T_M)_{ij} = \vec{e}_i T_M \vec{e}_j$$

, odnosno

$$(T_M)_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \delta_{ij} \quad (11.474)$$

Iz jednačine (11.473) dobija se vektor \vec{g}

$$\vec{g} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (11.475)$$

To je zapreminska gustina impulsa elektromagnetnog polja. Korišćenjem ove veličine definisana je zapreminska gustina momenta impulsa elektromagnetnog polja (jednačina (11.422)).

Dokazao sam teoremu impulsa elektromagnetnog polja. Potrebno je dobiti odgovarajuću teoremu i za slučaj gravitoelektromagnetizma. Izvodjenje te teoreme u mnogome će se zasnivati na teoremi iz elektrodinamike.

Uvodim u razmatranje sistem od N čestica koje se nalaze u gravitacionom polju. Gravitaciono polje opisano je veličinama \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} . Sistem se sastoji od N čestica, a i -ta čestica ima masu m_i i brzinu \vec{v}_i . Na ovu česticu deluje sila

$$\vec{F}_i = m_i \vec{E}_{gem} + m_i \vec{v}_i \times \vec{B}_{gem}$$

Jednačina dinamike ove čestice glasi

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = m_i \vec{E}_{gem} + m_i \vec{v}_i \times \vec{B}_{gem}$$

Sumiranjem ovakvih jednačina za sve čestice koje se nalaze u zapremini V dobijam

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N (m_i \vec{E}_{gem} + m_i \vec{v}_i \times \vec{B}_{gem})$$

Prelazim sa diskretne na kontinualnu raspodelu mase i dobijam sledeću jednačinu

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \int (\rho_m \vec{E}_{gem} + \vec{j}_m \times \vec{B}_{gem}) dV \quad (11.476)$$

Na osnovu jednačina (2.34) i (2.37) dobijam sledeće rezultate

$$\rho_m = \varepsilon_{gem} \operatorname{div} \vec{E}_{gem}$$

$$\vec{j}_m = \frac{1}{\mu_{gem}} (\operatorname{rot} \vec{B}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t})$$

Korišćenjem ovih rezultata podintegralni izraz na desnoj strani jednačine (11.469) postaje

$$\rho_m \vec{E}_{gem} + \vec{j}_m \times \vec{B}_{gem} = \varepsilon_{gem} \vec{E}_{gem} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} + \frac{1}{\mu_{gem}} (\operatorname{rot} \vec{B}_{gem} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_{gem}}{\partial t}) \times \vec{B}_{gem}$$

, odnosno

$$\begin{aligned} \rho_m \vec{E}_{gem} + \vec{j}_m \times \vec{B}_{gem} &= \varepsilon_{gem} \vec{E}_{gem} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} + \frac{1}{\mu_{gem}} \operatorname{rot} \vec{B}_{gem} \times \vec{B}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem} c^2} \frac{\partial (\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem})}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{\mu_{gem} c^2} \vec{E}_{gem} \times \frac{\partial \vec{B}_{gem}}{\partial t} \end{aligned}$$

Poslednji sabirak na desnoj strani ove jednačine transformišem korišćenjem jednačine (2.36) i dobijam

$$\begin{aligned} \rho_m \vec{E}_{gem} + \vec{j}_m \times \vec{B}_{gem} &= \varepsilon_{gem} \vec{E}_{gem} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem} c^2} \vec{E}_{gem} \times \operatorname{rot} \vec{E}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem} \times \operatorname{rot} \vec{B}_{gem} \\ &- \frac{1}{\mu_{gem} c^2} \frac{\partial (\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem})}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.477)$$

Divergencija vektora jačine gravitomagnetnog polja jednaka je nuli (jednačina (2.35)), i desnoj strani jednačine (11.477) možemo dodati sledeći izraz

$$\frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem} \operatorname{div} \vec{B}_{gem}$$

Na taj način dobijam sledeći rezultat

$$\begin{aligned} & \rho_m \vec{E}_{gem} + \vec{J}_m \times \vec{B}_{gem} \\ &= \varepsilon_{gem} \vec{E}_{gem} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem} c^2} \vec{E}_{gem} \times \operatorname{rot} \vec{E}_{gem} + \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem} \operatorname{div} \vec{B}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem} \\ & \quad \times \operatorname{rot} \vec{B}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem} c^2} \frac{\partial(\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem})}{\partial t} \end{aligned}$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačina (2.31) i (2.32)

$$\begin{aligned} & \rho_m \vec{E}_{gem} + \vec{J}_m \times \vec{B}_{gem} \\ &= -\frac{1}{4\pi\gamma} \vec{E}_{gem} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} + \frac{1}{16\pi\gamma} \vec{E}_{gem} \times \operatorname{rot} \vec{E}_{gem} + \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem} \operatorname{div} \vec{B}_{gem} - \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem} \\ & \quad \times \operatorname{rot} \vec{B}_{gem} + \frac{1}{16\pi\gamma} \frac{\partial(\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem})}{\partial t} \end{aligned}$$

Primenom jednačine (11.468) dobija se rezultat

$$\begin{aligned} & \rho_m \vec{E}_{gem} + \vec{J}_m \times \vec{B}_{gem} \\ &= -\frac{1}{4\pi\gamma} \left(\vec{E}_{gem} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} - \frac{1}{4} \vec{E}_{gem} \times \operatorname{rot} \vec{E}_{gem} \right) + \nabla \left[\left\{ \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem}, \vec{B}_{gem} \right\} - \frac{B_{gem}^2}{2\mu_{gem}} I \right] \\ & \quad + \frac{1}{16\pi\gamma} \frac{\partial(\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem})}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.478)$$

Potrebno je transformisati prvi član u ovoj jednačini. On se može napisati u obliku

$$\vec{E}_{gem} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} - \frac{1}{4} \vec{E}_{gem} \times \operatorname{rot} \vec{E}_{gem} = \vec{E}_{gem} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} - \left(\frac{\vec{E}_{gem}}{2} \right) \times \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{E}_{gem}}{2} \right) \quad (11.479)$$

Na osnovu jednačine (11.465) dobijam sledeći rezultat

$$\vec{a} \times \operatorname{rot}(\vec{a}) = \frac{1}{2} \operatorname{grad}(a^2) - (\vec{a} \nabla) \vec{a} \quad (11.480)$$

Uzeću da je

$$\vec{a} = \frac{\vec{E}_{gem}}{2}$$

, i na osnovu jednačine (11.480) dobijam

$$\left(\frac{\vec{E}_{gem}}{2} \right) \times \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{E}_{gem}}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(\left(\frac{E_{gem}}{2} \right)^2 \right) - \left(\left(\frac{\vec{E}_{gem}}{2} \right) \nabla \right) \left(\frac{\vec{E}_{gem}}{2} \right)$$

, odnosno

$$\left(\frac{\vec{E}_{gem}}{2} \right) \times \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{E}_{gem}}{2} \right) = \frac{1}{8} \operatorname{grad}(E_{gem}^2) - \frac{1}{4} (\vec{E}_{gem} \nabla) \vec{E}_{gem} \quad (11.481)$$

Na osnovu jednačine (11.466) dobijam sledeći rezultat

$$\vec{a} \operatorname{div}(\vec{a}) = \nabla \{ \vec{a}, \vec{a} \} - (\vec{a} \nabla) \vec{a} \quad (11.482)$$

U ovom slučaju uzeću da je

$$\vec{a} = \vec{E}_{gem}$$

, i primenom jednačine (11.482) dobijam

$$\vec{E}_{gem} \operatorname{div}(\vec{E}_{gem}) = \nabla \{ \vec{E}_{gem}, \vec{E}_{gem} \} - (\vec{E}_{gem} \nabla) \vec{E}_{gem} \quad (11.483)$$

Zamenom jednačina (11.483) i (11.481) u jednačinu (11.479) dobijam

$$\vec{E}_{gem} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} - \frac{1}{4} \vec{E}_{gem} \times \operatorname{rot} \vec{E}_{gem} = \nabla \{ \vec{E}_{gem}, \vec{E}_{gem} \} - \frac{1}{8} \operatorname{grad}(E_{gem}^2) - \frac{3}{4} (\vec{E}_{gem} \nabla) \vec{E}_{gem} \quad (11.484)$$

Na osnovu jednačine (11.463) dobijam

$$\operatorname{grad}(E_{gem}^2) = \nabla(E_{gem}^2 I)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.484) dobijam

$$\vec{E}_{gem} \operatorname{div} \vec{E}_{gem} - \frac{1}{4} \vec{E}_{gem} \times \operatorname{rot} \vec{E}_{gem} = \nabla \left[\left\{ \vec{E}_{gem}, \vec{E}_{gem} \right\} - \frac{1}{8} E_{gem}^2 I \right] - \frac{3}{4} (\vec{E}_{gem} \nabla) \vec{E}_{gem} \quad (11.485)$$

Zamenom jednačine (11.485) u jednačinu (11.478) dobijam

$$\begin{aligned} \rho_m \vec{E}_{gem} + \vec{j}_m \times \vec{B}_{gem} \\ = \nabla \left[\left\{ -\frac{1}{4\pi\gamma} \vec{E}_{gem}, \vec{E}_{gem} \right\} + \frac{1}{32\pi\gamma} E_{gem}^2 I \right] + \nabla \left[\left\{ \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem}, \vec{B}_{gem} \right\} - \frac{1}{2\mu_{gem}} B_{gem}^2 I \right] \\ + \frac{3}{16\pi\gamma} (\vec{E}_{gem} \nabla) \vec{E}_{gem} + \frac{1}{16\pi\gamma} \frac{\partial (\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem})}{\partial t} \end{aligned}$$

Ovaj rezultat može se napisati u obliku

$$\rho_m \vec{E}_{gem} + \vec{j}_m \times \vec{B}_{gem} = \operatorname{div}(T_{gem}) + \frac{3}{16\pi\gamma} (\vec{E}_{gem} \nabla) \vec{E}_{gem} + \frac{1}{16\pi\gamma} \frac{\partial (\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem})}{\partial t} \quad (11.486)$$

Tenzor T_{gem} određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$T_{gem} = \left[\left\{ -\frac{1}{4\pi\gamma} \vec{E}_{gem}, \vec{E}_{gem} \right\} + \left\{ \frac{1}{\mu_{gem}} \vec{B}_{gem}, \vec{B}_{gem} \right\} + \left(\frac{1}{32\pi\gamma} E_{gem}^2 - \frac{1}{2\mu_{gem}} B_{gem}^2 \right) I \right] \quad (11.487)$$

Zamenom jednačine (11.486) u jednačinu (11.476) dobijam

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \vec{p}_i - \int \frac{1}{16\pi\gamma} (\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem}) dV \right] = \int \operatorname{div}(T_{gem}) dV + \frac{3}{16\pi\gamma} \int (\vec{E}_{gem} \nabla) \vec{E}_{gem} dV$$

Primenom Gausove teoreme za tenzore (jednačina (11.464)) dobijam sledeći rezultat

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \vec{p}_i - \int \frac{1}{16\pi\gamma} (\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem}) dV \right] = \oint \vec{d}s T_{gem} + \frac{3}{16\pi\gamma} \int (\vec{E}_{gem} \nabla) \vec{E}_{gem} dV \quad (11.488)$$

Uočava se formalna sličnost između jednačina (11.488) i (11.473). Međutim u jednačini (11.488) pojavljuje se dopunski faktor

$$\frac{3}{16\pi\gamma} \int (\vec{E}_{gem} \nabla) \vec{E}_{gem} dV$$

Po analogiji sa elektrodinamikom uvešću vektor \vec{g}_{gem}

$$\vec{g}_{gem} = \frac{1}{16\pi\gamma} (\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem}) \quad (11.489)$$

Ovaj vektor predstavlja zapreminsku gustinu impulsa gravitacionih talasa. U elektrodinamici je definisana zapreminska gustina momenta impulsa elektromagnetnog polja (jednačina (11.422)). Po analogiji sa elektrodinamikom uvešću zapreminsku gustinu momenta impulsa gravitacionih talasa. Tu veličinu označiću sa \vec{l}_{gem} , i ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{l}_{gem} = \vec{r} \times \vec{g}_{gem}$$

, odnosno

$$\vec{l}_{gem} = \frac{1}{16\pi\gamma} \vec{r} \times (\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem}) \quad (11.490)$$

Sa \vec{r} je označen radijus vektor.

Jednačina (11.490) može se napisati na sledeći način

$$\frac{d\vec{l}_{gem}}{dV} = \frac{1}{16\pi\gamma} \vec{r} \times (\vec{E}_{gem} \times \vec{B}_{gem})$$

Primenom jednačine za dvostruki vektorski proizvod dobijam sledeći rezultat

$$\frac{d\vec{l}_{gem}}{dV} = \frac{1}{16\pi\gamma} \left(\vec{E}_{gem} (\vec{r} \cdot \vec{B}_{gem}) - \vec{B}_{gem} (\vec{r} \cdot \vec{E}_{gem}) \right) \quad (11.491)$$

Ovo je opšta jednačina. U daljem radu primeniću ovu jednačinu na konkretnom primeru koji je prikazan na slici 61. Telo mase m kreće se po kružnici poluprečnika a . U početku koordinatnog sistema nalazi se telo mase M . Položaj tela mase m određen je radijus vektorom \vec{r}_m (jednačina (11.352))

$$\vec{r}_m = a(\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j})$$

Ugaona brzina rotacije tela određuje se na osnovu jednačine (11.351), a maseni dipolni moment sistema na osnovu jednačina (11.353)

$$\vec{p}_{gem} = ma(\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j})$$

U jednačini (11.353) maseni dipolni moment sistema zavisi od vremena t . Za primenu je potrebna zavisnost masenog dipolnog momenta sistema od veličine $t - r/c$. U skladu sa tim na osnovu jednačine (11.353) dobijena je jednačina (11.354)

$$\vec{p}_{gem} = ma \left(\cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{i} + \sin \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \vec{j} \right)$$

Ovaj sistem zrači gravitacione talase. Pored gravitacionog kvadropolnog zračenja postoji i gravitaciono dipolno zračenje. U skladu sa tim ukupna jačina gravitomagnetnog polja u talasnoj zoni određuje se na osnovu jednačine (11.375), a ukupna jačina gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni određuje se na osnovu jednačine (11.377). Pokazao sam analizom jednačina (11.375) i (11.377) da je intenzitet gravitacionog kvadropolnog zračenja mnogo manji od intenziteta gravitacionog dipolnog zračenja. Iz tog razloga gravitaciono kvadropolno zračenje zanemario sam, i u razmatranje uzeo sam samo gravitaciono dipolno zračenje. U skladu sa tim jednačine (11.375) i (11.377) dobijaju oblik

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma \ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n}}{c^3 r} \quad (11.492)$$

$$\vec{E}_{gem} = -\frac{4\gamma \left[\ddot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{c^2 r} \quad (11.493)$$

Ako zamenim ove jednačine u jednačinu (11.491) dobijam

$$\vec{L}_{gem} = 0$$

Sličnu situaciju imali smo i u slučaju elektromagnetnih talasa. Zamenom jednačina (11.68) i (11.69) u jednačinu (11.426) dobijen je rezultat da je ukupni moment impulsa elektromagnetnog polja jednak nuli. Da bi odredio ukupni moment impulsa elektromagnetnog polja koristio sam jednačine (11.66) i (11.67).

Slična situacija je i u okviru gravitoelektromagnetizma. Umesto jednačina (11.492) i (11.493) potrebno je koristiti generalnije jednačine. Te jednačine dobiću korišćenjem jednačina (11.54) i (11.120). Zbog važnosti ovih jednačina za dalju analizu ponovo ih navodim

$$\varphi_{gem} = -\frac{\gamma M}{r} - \frac{\gamma}{c} \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}$$

$$\vec{A}_{gem d} = -\frac{4\gamma \dot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{c^2 r}$$

Prvi član u jednačini (11.54) je Njutnov gravitacioni potencijal. On ne zavisi od vremena i nije od značaja za dalju analizu. Taj član ću zanemariti, i u skladu sa tim jednačina (11.54) dobija oblik

$$\varphi_{gem} = -\frac{\gamma}{c} \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \quad (11.494)$$

Jačinu gravitomagnetnog i jačinu gravitoelektričnog polja određujemo na osnovu jednačina (2.43) i (2.46)

$$\vec{B}_{gem} = \text{rot} \vec{A}_{gem}$$

$$\vec{E}_{gem} = -grad\varphi_{gem} - \frac{\partial \vec{A}_{gem}}{\partial t}$$

Jačinu gravitomagnetnog polja ja sam već dobio (jednačina (11.125))

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{4\gamma \dot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n}}{c^3 r} - \frac{4\gamma \dot{\vec{p}}_{gem} \left(t - \frac{r}{c}\right) \times \vec{n}}{c^2 r^2}$$

Na osnovu jednačine (11.126) dobio sam jednačinu (11.129). Medjutim ovde se mora koristiti pristup koji se zasniva na jednačini (2.46). Zamenom jednačina (11.494) i (11.120) u jednačinu (2.46) dobijam

$$\vec{E}_{gem} = \frac{\gamma}{c} grad \left(\frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}}{r} \right) + \frac{4\gamma \ddot{\vec{p}}_{gem}}{c^2 r} \quad (11.495)$$

Jedinični vektor \vec{n} određuje se na osnovu jednačine (11.13)

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

U skladu sa tim jednačina (11.495) dobija oblik

$$\vec{E}_{gem} = \frac{\gamma}{c} grad \left(\frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}}{r^2} \right) + \frac{4\gamma \ddot{\vec{p}}_{gem}}{c^2 r}$$

, odnosno

$$\vec{E}_{gem} = \frac{\gamma}{c} \left(\frac{1}{r^2} grad(\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}) - \frac{2\vec{n}}{r^3} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}) \right) + \frac{4\gamma \ddot{\vec{p}}_{gem}}{c^2 r} \quad (11.496)$$

Da bi izračunao gradijent koji se pojavljuje u ovoj jednačini koristiću jednačinu (11.451). Primenom te jednačine dobijam

$$grad(\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}) = \vec{r} \times rot(\dot{\vec{p}}_{gem}) + \dot{\vec{p}}_{gem} \times rot(\vec{r}) + (\vec{r}\nabla)\dot{\vec{p}}_{gem} + (\dot{\vec{p}}_{gem}\nabla)\vec{r} \quad (11.497)$$

Jednostavno je dokazati sledeće rezultate

$$rot(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$(\dot{\vec{p}}_{gem}\nabla)\vec{r} = \dot{\vec{p}}_{gem}$$

Zamenom ovih rezultata u jednačinu (11.497) dobijam

$$grad(\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}) = \vec{r} \times rot(\dot{\vec{p}}_{gem}) + (\vec{r}\nabla)\dot{\vec{p}}_{gem} + \dot{\vec{p}}_{gem} \quad (11.498)$$

Rotor veličine $\dot{\vec{p}}_{gem}$ transformiše se korišćenjem jednačine (11.72)

$$rot(\dot{\vec{p}}_{gem}) = \vec{n} \times \frac{\partial \dot{\vec{p}}_{gem}}{\partial r}$$

Ovu jednačinu dalje transformišem korišćenjem jednačine (11.38)

$$rot(\dot{\vec{p}}_{gem}) = \frac{1}{c} \ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n} \quad (11.499)$$

Da bi transformisao drugi član u jednačini (11.498) primeniću metode koje su korišćene za dobijanje jednačine (11.459). U skladu sa tim drugi sabirak u jednačini (11.498) transformišem na sledeći način

$$(\vec{r}\nabla)\dot{\vec{p}}_{gem} = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \dot{\vec{p}}_{gem}$$

, odnosno

$$(\vec{r}\nabla)\dot{\vec{p}}_{gem} = x \frac{\partial \dot{\vec{p}}_{gem}}{\partial x} + y \frac{\partial \dot{\vec{p}}_{gem}}{\partial y} + z \frac{\partial \dot{\vec{p}}_{gem}}{\partial z} \quad (11.500)$$

Prvi sabirak u ovoj jednačini transformišem na sledeći način

$$x \frac{\partial \dot{\vec{p}}_{gem}}{\partial x} = x \frac{\partial \dot{\vec{p}}_{gem}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}$$

, odnosno

$$x \frac{\partial \dot{\vec{p}}_{gem}}{\partial x} = x \frac{\partial \dot{\vec{p}}_{gem}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

Da bi transformisao ovaj izraz koristiću jednačine (11.34) i (11.35)

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = -\frac{1}{c}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1$$

Jednostavno je dokazati i sledeću jednačinu

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (11.501)$$

Na osnovu jednačina (11.34), (11.35) i (11.501) dobija se sledeći rezultat

$$x \frac{\partial \dot{\vec{p}}_{gem}}{\partial x} = -\frac{x^2}{cr} \ddot{\vec{p}}_{gem} \quad (11.502)$$

Ako se primeni ista procedura i na ostale sabirke u jednačini (11.500) dobijaju se rezultati

$$y \frac{\partial \dot{\vec{p}}_{gem}}{\partial y} = -\frac{y^2}{cr} \ddot{\vec{p}}_{gem} \quad (11.503)$$

$$z \frac{\partial \dot{\vec{p}}_{gem}}{\partial z} = -\frac{z^2}{cr} \ddot{\vec{p}}_{gem} \quad (11.504)$$

Zamenom jednačina (11.502-504) u jednačinu (11.500), i nakon elementarnih algebarskih operacija dobija se rezultat

$$(\vec{r}\nabla)\dot{\vec{p}}_{gem} = -\frac{r}{c} \ddot{\vec{p}}_{gem} \quad (11.505)$$

Zamenom jednačina (11.499), (11.505) u jednačinu (11.498) dobija se

$$\text{grad}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}) = \frac{1}{c} \vec{r} \times (\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n}) - \frac{r}{c} \ddot{\vec{p}}_{gem} + \dot{\vec{p}}_{gem} \quad (11.506)$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.496), i nakon algebarskih transformacija dobija se sledeći rezultat

$$\vec{E}_{gem} = \frac{3\gamma \ddot{\vec{p}}_{gem}}{c^2 r} + \frac{\gamma \vec{n} \times (\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})}{c^2 r} + \frac{\gamma (\dot{\vec{p}}_{gem} - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}))}{c r^2} \quad (11.507)$$

Jačina gravitomagnetnog polja određuje se na osnovu jednačine (11.125), a zapreminska gustina momenta impulsa gravitacionih talasa na osnovu jednačine (11.491). Na osnovu jednačina (11.125) i (11.507) dobijaju se sledeći rezultati

$$\vec{B}_{gem} \cdot \vec{r} = 0 \quad (11.508)$$

$$\vec{E}_{gem} \cdot \vec{r} = \frac{3\gamma}{c^2} \ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n} - \frac{\gamma (\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem})}{c r} \quad (11.509)$$

Zamenom jednačina (11.125), (11.508) i (11.509) u jednačinu (11.491) dobijam

$$\frac{d\vec{L}_{gem}}{dV} = -\frac{1}{16\pi\gamma} \left(-\frac{4\gamma \ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n}}{c^3 r} - \frac{4\gamma \dot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n}}{c^2 r^2} \right) \left(\frac{3\gamma}{c^2} \ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n} - \frac{\gamma (\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem})}{c r} \right)$$

, odnosno

$$\frac{d\vec{L}_{gem}}{dV} = -\frac{\gamma}{4\pi c^4} \frac{(\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem})}{r^2} + \frac{3\gamma}{4\pi c^4} \frac{(\dot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n})}{r^2} + \frac{3\gamma}{4\pi c^5} \frac{(\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n})}{r} - \frac{\gamma}{4\pi c^3} \frac{(\dot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem})}{r^3}$$

Poslednji sabirak sadrži faktor $1/r^3$, i najbrže opada sa povećanjem r . Iz tog razloga ovaj sabirak ću zanemariti, i predhodna jednačina dobija oblik

$$\frac{d\vec{L}_{gem}}{dV} = -\frac{\gamma}{4\pi c^4} \frac{(\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem})}{r^2} + \frac{3\gamma}{4\pi c^4} \frac{(\dot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n})}{r^2} + \frac{3\gamma}{4\pi c^5} \frac{(\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n})}{r} \quad (11.510)$$

Dalja transformacija ove jednačine zasniva se na postupku koji je korišćen u elektrodinamici. Koriste se sferne koordinate, a element zapremine određuje se na osnovu jednačine

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\psi$$

Element prostornog ugla $d\Omega$ određuje se na osnovu jednačine (11.222)

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\psi$$

U skladu sa tim dobija se rezultat

$$dV = r^2 d\Omega dr$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.510) dobijam

$$d\vec{L}_{gem} = -\frac{\gamma}{4\pi c^4} (\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}) d\Omega dr + \frac{3\gamma}{4\pi c^4} (\dot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n}) d\Omega dr + \frac{3\gamma}{4\pi c^5} (\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n}) d\Omega r dr \quad (11.511)$$

U daljem radu biće potrebno izračunati određene integrale. Posmatrajmo najpre treći sabirak u ovoj jednačini. Integrali koji se mogu pojaviti u vezi sa trećim sabirkom su sledeći

$$I_1 = \int_0^\infty r dr$$

$$I_2 = \int (\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}_{gem}) d\Omega$$

Integral I_1 divergira, ali ću pokazati da je integral I_2 jednak nuli. Da bi to uradio potrebno je najpre odrediti izvode veličine \vec{p}_{gem} po vremenu. Koristeći jednačinu (11.354) dobijam sledeće rezultate

$$\dot{\vec{p}}_{gem} = ma\omega \left(-\sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{i} + \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{j} \right) \quad (11.512)$$

$$\ddot{\vec{p}}_{gem} = ma\omega^2 \left(-\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{i} - \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{j} \right) \quad (11.513)$$

Radi lakšeg izračunavanja integrala I_2 jednačine (11.512) i (11.513) napisaću u obliku

$$\dot{\vec{p}}_{gem} = \dot{p}_x \vec{i} + \dot{p}_y \vec{j} \quad (11.514)$$

$$\ddot{\vec{p}}_{gem} = \ddot{p}_x \vec{i} + \ddot{p}_y \vec{j} \quad (11.515)$$

Korišćenjem sfernih koordinata jedinični vektor \vec{n} određuje se na osnovu jednačine (11.220). Vektor \vec{n} može se izraziti i preko svojih komponentata (jednačina (11.221))

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

Upoređivanjem jednačina (11.220) i (11.221) jednostavno je odrediti komponente vektora \vec{n} .

Korišćenjem jednačina (11.515) i (11.221) integral I_2 dobija oblik

$$I_2 = \int (\ddot{p}_x n_x + \ddot{p}_y n_y) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \ddot{p}_x & \ddot{p}_y & 0 \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} d\Omega$$

Na osnovu jednačina (11.439-444) integral I_2 dobija sledeću vrednost

$$I_2 = \int (-\ddot{p}_x \ddot{p}_y n_x n_x + \ddot{p}_y \ddot{p}_x n_y n_y) d\Omega \vec{k}$$

, ali na osnovu jednačina (11.439) i (11.440) dobija se da je integral I_2 jednak nuli.

Tokom dalje transformacije jednačine (11.511) pojavio bi se integral I_2 , i u skladu sa tim treći član u jednačini (11.511) bio bi jednak nuli. Iz tog razloga treći član iz dalje analize izostavljam, i jednačina (11.511) dobija oblik

$$d\vec{L}_{gem} = -\frac{\gamma}{4\pi c^4} (\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}) d\Omega dr + \frac{3\gamma}{4\pi c^4} (\dot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n}) d\Omega dr$$

Deobom ove jednačine sa dt dobijam

$$\frac{d\vec{L}_{gem}}{dt} = -\frac{\gamma}{4\pi c^4} (\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}) d\Omega \frac{dr}{dt} + \frac{3\gamma}{4\pi c^4} (\dot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n}) d\Omega \frac{dr}{dt} \quad (11.516)$$

Veličina dr/dt jednaka je brzini gravitacionih talasa, odnosno brzini c

$$\frac{dr}{dt} = c$$

U skladu sa tim jednačina (11.516) dobija oblik

$$\frac{d\vec{L}_{gem}}{dt} = -\frac{\gamma}{4\pi c^3} (\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}) d\Omega + \frac{3\gamma}{4\pi c^3} (\dot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n}) d\Omega$$

Potrebno je izvršiti integraciju ove jednačine po prostornom uglu

$$\frac{d\vec{L}_{gem}}{dt} = -\frac{\gamma}{4\pi c^3} \int (\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}) d\Omega + \frac{3\gamma}{4\pi c^3} \int (\dot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n}) d\Omega \quad (11.517)$$

Pojaviće se dva integrala u ovoj jednačini. Njih ću označiti sa I_3 i I_4

$$I_3 = \int (\ddot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}_{gem}) d\Omega$$

$$I_4 = \int (\dot{\vec{p}}_{gem} \times \vec{n})(\ddot{\vec{p}}_{gem} \cdot \vec{n}) d\Omega$$

U skladu sa tim jednačina (11.517) može se napisati u obliku

$$\frac{d\vec{L}_{gem}}{dt} = -\frac{\gamma}{4\pi c^3} I_3 + \frac{3\gamma}{4\pi c^3} I_4 \quad (11.518)$$

Korišćenjem jednačina (11.514), (11.515) i (11.221) integral I_3 dobija oblik

$$I_3 = \int (\dot{p}_x n_x + \dot{p}_y n_y) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \ddot{p}_x & \ddot{p}_y & 0 \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} d\Omega$$

Na osnovu jednačina (11.439-444) integral I_3 dobija sledeću vrednost

$$I_3 = \int (-\dot{p}_x \ddot{p}_y n_x n_x + \dot{p}_y \ddot{p}_x n_y n_y) d\Omega \vec{k}$$

Na osnovu jednačina (11.439) i (11.440) dobijam sledeći rezultat

$$I_3 = (-\dot{p}_x \ddot{p}_y + \dot{p}_y \ddot{p}_x) \frac{4\pi}{3} \vec{k} \quad (11.519)$$

Zamenom komponenata vektora $\dot{\vec{p}}_{gem}$ i $\ddot{\vec{p}}_{gem}$ u jednačinu (11.519) dobija se

$$I_3 = -m^2 a^2 \omega^3 \left[\sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) + \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right] \frac{4\pi}{3} \vec{k}$$

, odnosno

$$I_3 = -m^2 a^2 \omega^3 \frac{4\pi}{3} \vec{k} \quad (11.520)$$

Preostao je da se izračuna integral I_4 . Korišćenjem jednačina (11.514), (11.515) i (11.221) integral I_4 dobija oblik

$$I_4 = \int (\ddot{p}_x n_x + \ddot{p}_y n_y) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{p}_x & \dot{p}_y & 0 \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} d\Omega$$

Koristeći jednačine (11.439-444) integral I_4 dobija sledeću vrednost

$$I_4 = \int (-\ddot{p}_x \dot{p}_y n_x n_x + \ddot{p}_y \dot{p}_x n_y n_y) d\Omega \vec{k}$$

Na osnovu jednačina (11.439) i (11.440) dobijam sledeći rezultat

$$I_4 = (-\ddot{p}_x \dot{p}_y + \ddot{p}_y \dot{p}_x) \frac{4\pi}{3} \vec{k} \quad (11.521)$$

Zamenom komponentata vektora $\dot{\vec{p}}_{gem}$ i $\ddot{\vec{p}}_{gem}$ u jednačinu (11.521) dobija se

$$I_4 = m^2 a^2 \omega^3 \left[\cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) + \sin^2 \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right] \frac{4\pi}{3} \vec{k}$$

, odnosno

$$I_3 = m^2 a^2 \omega^3 \frac{4\pi}{3} \vec{k} \quad (11.522)$$

Zamenom jednačina (11.520) i (11.522) u jednačinu (11.518) dobijam

$$\frac{d\vec{L}_{gem}}{dt} = \frac{4\gamma}{3c^3} m^2 a^2 \omega^3 \vec{k} \quad (11.523)$$

Telo mase m kreće se po kružnici poluprečnika a (slika 61). Moment impulsa tela određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{L} = m a^2 \omega \vec{k}$$

Ovaj sistem emituje gravitacione talase koji poseduju moment impulsa. Zbog emisije gravitacionih talasa dolazi do smanjenja momenta impulsa sistema. Ta promena može se opisati sledećom jednačinom

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{d\vec{L}_{gem}}{dt}$$

, odnosno

$$\frac{d(m a^2 \omega)}{dt} \vec{k} = -\frac{4\gamma}{3c^3} m^2 a^2 \omega^3 \vec{k} \quad (11.524)$$

U daljem tekstu biće reči o promeni frekvence gravitacionih talasa sa vremenom. Analiziraću sa teorijskog aspekta i detekciju gravitacionih talasa. Više puta sam naznačio da se zbog emisije gravitacionih talasa smanjuje energija sistema koji emituje gravitacione talase. Na slici 43 prikazan je binarni zvezdani sistem. Zvezde se kreću po eliptičnim orbitama. Za ovakav sistem sa stanovišta gravitoelektromagnetizma odredio sam ukupnu snagu gravitacione radijacije (jednačina (11.322)). Ova jednačina može se primeniti na Rasel-Tejlorov binarni sistem i dobija se jednačina (11.325).

Da bi odredio kako se frekvencija gravitacionih talasa menja sa vremenom analiziraću binarni sistem kada se zvezde kreću po kružnim putanjama. Takav binarni sistem je prikazan na slici 58. Sa stanovišta gravitoelektromagnetizma ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje ovakav binarni sistem određuje se na osnovu jednačine (11.264). Ukupna energija ovog sistema određuje se na osnovu jednačine (10.77). Zbog važnosti ove jednačine za dalju analizu ponovo je navodim

$$E = -\frac{\gamma m_1 m_2}{2a}$$

Diferenciranjem ove jednačine po vremenu dobijam

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma m_1 m_2}{2a^2} \frac{da}{dt} \quad (11.525)$$

Promena ukupne energije binarnog sistema sa vremenom jednaka je ukupnoj snazi gravitacione radijacije

$$\frac{dE}{dt} = P_{gem} \quad (11.526)$$

Zamenom jednačina (11.525) i (11.264) u jednačinu (11.526) dobijam

$$a^3 da = -\frac{64 \gamma^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5 c^5} dt \quad (11.527)$$

Tokom vremena menjaće se veličina a , period rotacije zvezda oko centra mase, ali i ugaona brzina. U početnom trenutku ($t = 0$) ove veličine imaju vrednosti a_0 , T_0 i ω_0 . Veličine ω_0 i T_0 povezane su sledećom jednačinom

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (11.528)$$

Ugaona brzina rotacije zvezda oko centra mase i period rotacije zvezda određuju se na osnovu jednačina (10.101) i (10.102) respektivno. Zbog važnosti ovih jednačina za dalju analizu ponovo ih navodim

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{a^3}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M}$$

Sa M je označena ukupna masa sistema, i ona se određuje na osnovu jednačine (11.200).

Na osnovu jednačina (10.101) i (10.102) dobijaju se sledeći rezultati

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{a_0^3}} \quad (11.529)$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{a_0^3}{\gamma M}} \quad (11.530)$$

Integracijom jednačine (11.527) dobijam

$$\frac{a^4}{4} = -\frac{64 \gamma^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5 c^5} t + C \quad (11.531)$$

Potrebno je odrediti integracionu konstantu C . U početnom trenutku veličina a ima vrednost a_0 . U skladu sa tim dobija se sledeća vrednost integracione konstante

$$C = \frac{a_0^4}{4}$$

Zamenom ove vrednosti u jednačinu (11.531) i nakon elementarnih algebarskih transformacija dobija se sledeći rezultat

$$a(t) = a_0 \left[1 - \frac{256 \gamma^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 a_0^4} t \right]^{1/4} \quad (11.532)$$

Zbog emisije gravitacionih talasa smanjuje se rastojanje izmedju zvezda sa vremenom. Nakon dovoljno dugog vremena doći će do spajanja zvezda i formiranja jedinstvene celine. Umesto termina spajanje zvezda koristiću i termin koalescencija zvezda. Veme koje protekne od početnog trenutka ($t = 0$) do trenutka spajanja (koalescencije) zvezda označiću sa t_{koal} .

Možemo uzeti da je u trenutku spajanja (koalescencije) zvezda rastojanje između zvezda jednako nuli

$$a(t_{koal}) = 0$$

Zamenom ove vrednosti u jednačinu (11.532), i nakon algebarskih transformacija dobijam sledeći rezultat

$$t_{koal} = \frac{5c^5 a_0^4}{256\gamma^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} \quad (11.533)$$

U skladu sa ovim rezultatom jednačina (11.532) dobija oblik

$$a(t) = a_0 \left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{1/4} \quad (11.534)$$

Ugaona brzina rotacije zvezda oko centra mase i period rotacije zvezda određuju se na osnovu jednačina (10.101) i (10.102) respektivno. Zamenom jednačine (11.534) u jednačine (10.101) i (10.102) dobijam

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{a_0^3}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}} \quad (11.535)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a_0^3}{\gamma M}} \left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8} \quad (11.536)$$

Jednačina (11.535) transformiše se korišćenjem jednačine (11.529) i dobija se sledeći rezultat

$$\omega = \frac{\omega_0}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}} \quad (11.537)$$

Jednačina (11.536) transformiše se korišćenjem jednačine (11.530) i dobija se rezultat

$$T = T_0 \left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8} \quad (11.538)$$

Frekvencija rotacije zvezda oko centra mase određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (11.539)$$

Zamenom jednačine (11.538) u jednačinu (11.539) dobijam rezultat

$$\nu = \frac{1}{T_0 \left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}}$$

, odnosno

$$\nu = \frac{\nu_0}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}} \quad (11.540)$$

Sa ν_0 označio sam frekvencu rotacije zvezda oko centra mase u početnom trenutku ($t = 0$), i ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma M}{a_0^3}}$$

Polaznu osnovu za ovu analizu predstavljale su jednačine (11.264) i (11.526). Predhodno prezentovane jednačine dobijene su sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Medjutim iste jednačine mogu se dobiti ako se problem analizira sa stanovišta opšte teorije relativnosti, ali u tom slučaju osnovu analize predstavljaju jednačine (11.203) i (11.526). Ovaj zaključak mogao se očekivati jer se jednačine (11.264) i (11.203) razlikuju samo po predznaku.

Analizirao sam slučaj kretanja zvezda po kružnim putanjama (slika 58). U tom slučaju postoji samo gravitaciono kvadropolno zračenje. Jačina gravitomagnetnog polja i jačina gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni određuju se na osnovu jednačina (11.159) i (11.161). Komponente vektora $\vec{\ddot{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ određuju se na osnovu jednačine (11.260) i (11.261). Vektor $\vec{\ddot{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ može se napisati na sledeći način

$$\vec{\ddot{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \ddot{D}_x\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{i} + \ddot{D}_y\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{j} \quad (11.541)$$

, odnosno

$$\begin{aligned} \vec{\ddot{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = & 12\mu a^2 \omega^3 \left[\sin\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\theta \cos\psi - \cos\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\theta \sin\psi \right] \vec{i} \\ & + 12\mu a^2 \omega^3 \left[-\cos\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\theta \cos\psi - \sin\left(2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \sin\theta \sin\psi \right] \vec{j} \end{aligned} \quad (11.542)$$

Zamenom jednačine (11.541) u jednačinu (11.161) dobijam

$$\vec{E}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^3} \frac{\left[\left(\ddot{D}_x\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{i} + \ddot{D}_y\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{j} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} \quad (11.543)$$

Na osnovu jednačina (11.542) i (11.543) može se odrediti kružna frekvencija gravitacionih talasa sa stanovišta gravitoelektromagnetizma. Da bi to postigao potrebno je dati neke opšte jednačine u vezi gravitacionih talasa. Brzina gravitacionih talasa iznosi c . Za ove talase važi jednačina

$$c = \lambda_{gt} \nu_{gt} \quad (11.543)$$

Sa ν_{gt} označio sam frekvenciju gravitacionih talasa, a sa λ_{gt} označio sam talasnu dužinu gravitacionih talasa. Može se uvesti i kružna frekvencija gravitacionih talasa (ω_{gt}) i talasni broj (k_{gt}). Ove veličine određuju se na osnovu sledećih jednačina

$$\omega_{gt} = 2\pi \nu_{gt} \quad (11.544)$$

$$k_{gt} = \frac{2\pi}{\lambda_{gt}} \quad (11.545)$$

Jednostavno je dokazati sledeću jednačinu

$$\omega_{gt} = ck_{gt}$$

, odnosno

$$\frac{\omega_{gt}}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_{gt}} \quad (11.546)$$

Da bi osnovu jednačina (11.542) i (11.543) odredio kružnu frekvenciju gravitacionih talasa potrebno je argument trigonometrijskih funkcija koji figuriše u jednačini (11.542) transformisati na sledeći način

$$2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) = 2\omega t - \frac{2\omega r}{c} \quad (11.547)$$

Kružna frekvencija gravitacionih talasa (ω_{gt}) jednaka je dvostrukoj vrednosti ugaone brzine rotacije zvezda oko centra mase

$$\omega_{gt} = 2\omega \quad (11.548)$$

U skladu sa tim jednačina (11.547) dobija oblik

$$2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) = \omega_{gt} t - \frac{\omega_{gt} r}{c}$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.546)

$$2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) = \omega_{gt} t - \frac{2\pi}{\lambda_{gt}} r \quad (11.549)$$

Na osnovu jednačina (11.548) i (11.535) dobija se rezultat

$$\omega_{gt} = 2 \sqrt{\frac{\gamma M}{a_0^3}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}} \quad (11.550)$$

Ova jednačina može se napisati i u obliku

$$\omega_{gt} = \frac{\omega_{gt0}}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}} \quad (11.551)$$

Sa ω_{gt0} označio sam kružnu frekvencu gravitacionih talasa u početnom trenutku ($t = 0$). Na osnovu jednačina (11.550) i (11.551) jednostavno je odrediti veličinu ω_{gt0} .

Na osnovu jednačina (11.544) i (11.550) dobijam rezultat

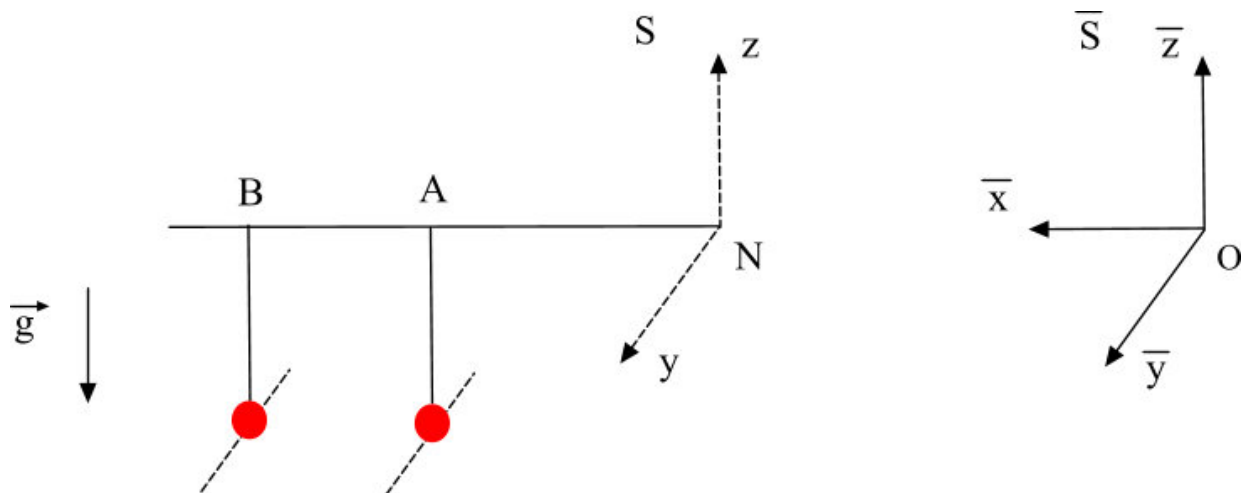
$$v_{gt} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma M}{a_0^3}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}} \quad (11.552)$$

Ova jednačina može se napisati i u obliku

$$v_{gt} = \frac{v_{gt0}}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}} \quad (11.553)$$

Sa v_{gt0} označio sam frekvencu gravitacionih talasa u početnom trenutku ($t = 0$). Veličina v_{gt0} jednostavno se može odrediti na osnovu jednačina (11.552) i (11.553).

U daljem tekstu izvršiću analizu sa teorijskog aspekta problem detekcije gravitacionih talasa. Uvodim u razmatranje jednostavnu fizičku situaciju. U sistemu \bar{S} nalazi se binarni zvezdani sistem. Koordinatne ose ovog sistema na slici 67 označio sam sa \bar{x} , \bar{y} i \bar{z} . Jedinične vektore ovih koordinatnih osa označiću sa \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} . Zvezde se kreću po kružnim putanjama. Centar mase ovog sistema poklapa se sa tačkom O . Putanje zvezda pripadaju $\bar{x}O\bar{y}$ ravni sistema \bar{S} .



Slika 67

Na levoj strani slike 67 prikazan je sistem od dva klatna koja se nalaze u gravitacionom polju Zemlje. Na slici je prikazan i vektor gravitacionog ubrzanja. Klatna su obešena u tačkama A i B. Klatno se sastoji od niti i kuglice. Kuglica i nit imaju male mase, međutim masa niti je mnogo manja od mase kuglice, i može se zanemariti. Klatno koje je obešeno u tački A nazvaću klatno 1, a klatno koje je obešeno u tački B nazvaću klatno 2. Masu kuglice klatna 1 označiću sa m_1 , a masu kuglice klatna 2 označiću sa m_2 . Kuglice ću nazvati probnim telima.

Prava koja je određena tačkama A i B poklapa se sa osom \bar{x} sistema \bar{S} . Početak ove prave označen je tačkom N na slici 67. Rastojanje između tačaka A i N označiću sa x_1 , a rastojanje između tačaka B i N označiću sa x_2 , odnosno

$$AN = x_1 \quad (11.554)$$

$$BN = x_2 \quad (11.555)$$

Rastojanje između tačaka A i B označiću sa L , i ono se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$L = x_2 - x_1 \quad (11.556)$$

U sistemu detektora uvodim pravougli koordinatni sistem koji ću označiti sa S . Početak ovog koordinatnog sistema poklapa se sa tačkom N . x osa ovog sistema poklapa se sa pravom koja je određena tačkama A i B , a usmerena je od tačke N ka tački A . Ose y i z prikazane su isprekidanim linijama na slici 67. Jedinične vektore ovih koordinatnih osa označiću sa \vec{e}_x , \vec{e}_y i \vec{e}_z . U sistemu \bar{S} uveo sam jedinične vektore \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} . Sistem S može se dobiti translacijom sistema \bar{S} duž prave koja je određena tačkama A i B . Pri toj translaciji tačka O prelazi u tačku N . Kao posledica ove translacije dobijam da su koordinatne ose sistema S paralelne sa koordinatnim osama sistema \bar{S} , i važe sledeće jednačine

$$\vec{e}_x = \vec{i} \quad (11.557)$$

$$\vec{e}_y = \vec{j} \quad (11.558)$$

$$\vec{e}_z = \vec{k} \quad (11.559)$$

Binarni zvezdani sistem nalazi se na velikom rastojanju od Zemlje. Rastojanje između tačaka O i N označiću sa r , i ono figuriše u jednačini (11.543). Objasnio sam da se klatno sastoji od niti i kuglice. Mase kuglica označio sam sa m_1 i m_2 . Kuglice ću nazvati probnim telima. U sistemu \bar{S} nalazi se binarni zvezdani sistem. Zvezde se kreću po kružnim putanjama oko centra mase. Centar mase ovog sistema poklapa se sa tačkom O . Putanje zvezda pripadaju $\bar{x}O\bar{y}$ ravni sistema \bar{S} . Binarni zvezdani sistem emituje gravitacione talase. U ovom slučaju postoji samo gravitaciono kvadropolno zračenje, a vektor jačine gravitoelektričnog polja određuju se na osnovu jednačine (11.543). Gravitacioni talasi deluju na kuglice (probna tela). U početnom trenutku kuglice nalaze se u stanju mirovanja. Pod dejstvom gravitacionih talasa dolazi do pomeranja kuglica iz ravnotežnih položaja. Ova pomeranja su izuzetno mala. Sila koja deluje na probno telo mase m_1 određuje se na osnovu jednačine (2.28)

$$\vec{F}_{gem\ 1} = m_1 \vec{E}_{gem} + m_1 \vec{v} \times \vec{B}_{gem} \quad (11.560)$$

Potrebno je proceniti odnos dva sabirka na desnoj strani ove jednačine. Binarni sistem emituje gravitacione talase. U ovom slučaju postoji samo gravitaciono kvadropolno zračenje. Komponente vektora $\vec{\vec{D}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ određuju se na osnovu jednačine (11.260) i (11.261). Korišćenjem tih komponenata dobio sam jednačinu (11.542). Jačina gravitomagnetnog polja i jačina gravitoelektričnog polja u talasnoj zoni određuju se na osnovu jednačina (11.159) i (11.161). Zamenom jednačine (11.541) u jednačinu (11.161) dobio sam vektor jačine gravitoelektričnog polja (jednačina (11.543)). Vektor jačine gravitomagnetnog polja dobija se zamenom jednačine (11.541) u jednačinu (11.159)

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^4} \frac{\left[\ddot{D}_x \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{i} + \ddot{D}_y \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{j} \right] \times \vec{n}}{r} \quad (11.561)$$

Rastojanje između tačaka O i N označio sam sa r , i to je izuzetno veliko rastojanje. Na primer Rasel-Tejlorov binarni sistem udaljen je od Zemlje 6400 pc odnosno $1,975 \cdot 10^{20} m$. Rastojanje između tačaka A i N označio sam sa x_1 . Dužina klatna ima malu vrednost, i u skladu sa tim kuglica (probno telo mase m_1) nalazi se na rastojanju $r + x_1$ od tačke O , i jednačine (11.543) i (11.561) postaju

$$\vec{E}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^3} \frac{\left[\left(\ddot{D}_x \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{i} + \ddot{D}_y \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{j} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r}$$

$$\vec{B}_{gem} = -\frac{2\gamma}{3c^4} \frac{\left[\ddot{D}_x \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{i} + \ddot{D}_y \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{j} \right] \times \vec{n}}{r}$$

Zamenom ovih jednačina u jednačinu (11.560) dobijam

$$\vec{F}_{gem1} = -m_1 \frac{2\gamma}{3c^3} \frac{\left[\left(\ddot{D}_x \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{i} + \ddot{D}_y \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{j} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} - m_1 \frac{2\gamma}{3c^4} \vec{v} \times \frac{\left[\left(\ddot{D}_x \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{i} + \ddot{D}_y \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{j} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} \quad (11.562)$$

Istakao sam da je potrebno proceniti odnos dva sabirka na desnoj strani jednačine (11.560). Jednačinu (11.560) transformisao sam, i dobio sam jednačinu (11.562). U prvom sabirku na desnoj strani jednačine (11.562) figuriše faktor $1/c^3$, a u drugom sabirku figuriše faktor $1/c^4$. To nam ukazuje da je prvi sabirak mnogo veći od drugog sabirka. U drugom sabirku figuriše brzina probnog tela, ali ona ima izuzetno malu vrednost. Zbog predhodno navedenih razloga zanemariću drugi sabirak, i jednačina (11.562) dobija oblik

$$\vec{F}_{gem1} = -m_1 \frac{2\gamma}{3c^3} \frac{\left[\left(\ddot{D}_x \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{i} + \ddot{D}_y \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{j} \right) \times \vec{n} \right] \times \vec{n}}{r} \quad (11.563)$$

I jednačina (11.560) se pojednostavljuje i dobija sledeću formu

$$\vec{F}_{gem1} = m_1 \vec{E}_{gem} \quad (11.564)$$

Binarni sistem koji se nalazi u sistemu \bar{S} emituje gravitacione talase. Zbog jednostavnosti analize posmatraraću kretanje gravitacionog talasa koji se prostire duž ose \bar{x} , i koji dospeva do sistema S . U ovom slučaju važi jednačina

$$\vec{n} = \vec{i} \quad (11.565)$$

Jedinični vektor koordinatne ose \bar{x} označio sam sa \vec{i} . Vektor \vec{n} može se izraziti korišćenjem sfernih koordinata (jednačina (11.220))

$$\vec{n} = \sin\theta \cos\psi \vec{i} + \sin\theta \sin\psi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}$$

Da bi važila jednačina (11.565) moraju biti ispunjena sledeća dva uslova

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (11.566)$$

$$\psi = 0 \quad (11.567)$$

Zamenom jednačine (11.565) u jednačinu (11.563) dobijam

$$\vec{F}_{gem1} = -m_1 \frac{2\gamma}{3c^3} \frac{\left[\left(\ddot{D}_x \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{i} + \ddot{D}_y \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \vec{j} \right) \times \vec{i} \right] \times \vec{i}}{r} \quad (11.568)$$

Komponente vektora $\vec{D} \left(t - \frac{r}{c} \right)$ određuju se na osnovu jednačine (11.260) i (11.261). U jednačini (11.568) figuriše zavisnost od veličine $t - (r+x_1)/c$, dok se u jednačinama (11.260) i (11.261) figuriše zavisnost od veličine $t - r/c$. Iz tog razloga potrebno je transformisati jednačine (11.260) i (11.261) da bi se i kod njih pojavila zavisnost od veličine $t - (r+x_1)/c$. Transformacijom jednačina (11.260) i (11.261) dobijam rezultate

$$\begin{aligned} \ddot{D}_x \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \\ = 12\mu a^2 \omega^3 \left[\sin \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right) \sin\theta \cos\psi - \cos \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right) \sin\theta \sin\psi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{D}_y \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \\ = 12\mu a^2 \omega^3 \left[-\cos \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right) \sin\theta \cos\psi - \sin \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right) \sin\theta \sin\psi \right] \end{aligned}$$

Ove komponente vektora dalje se transformišu korišćenjem uslova koji su dati jednačinama (11.566) i (11.567), i dobijaju se sledeći rezultati

$$\ddot{D}_x \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) = 12\mu a^2 \omega^3 \sin \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right)$$

$$\ddot{D}_y \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) = -12\mu a^2 \omega^3 \cos \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right)$$

Vektor $\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right)$ određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) = 12\mu a^2 \omega^3 \left[\sin \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right) \vec{i} - \cos \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right) \vec{j} \right]$$

Zamenog ovog vektora u jednačinu (11.568) i nakon izvršenog vektorskog množenja dobijam rezultat

$$\vec{F}_{gem1} = -m_1 \frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r} \cos \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right) \vec{j}$$

U predhodnom tekstu naznačio sam da se sistem S može dobiti translacijom sistema \bar{S} duž prave koja je određena tačkama A i B . Pri toj translaciji tačka O prelazi u tačku N . Koordinatne ose sistema S paralelne su sa koordinatnim osama sistema \bar{S} , i važe jednačine (11.557-559). Korišćenjem jednačine (11.558) dobija se sledeći rezultat

$$\vec{F}_{gem1} = -m_1 \frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r} \cos \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right) \vec{e}_y \quad (11.569)$$

Na osnovu ove jednačine zaključujem da sila \vec{F}_{gem1} deluje duž y ose sistema S .

U početnom trenutku obe kuglice (probna tela) nalaze se u stanju mirovanja (slika 67). Pod dejstvom gravitacionih talasa dolazi do pomeranja kuglice mase m_1 iz ravnotežnog položaja, i ona će se kretati duž y ose sistema S . Kuglica mase m_2 takodje će se kretati duž y ose sistema S .

Diferencijalna jednačina kretanja kuglice mase m_1 glasi

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2_{lab}} = -\frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r} \cos \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right) \quad (11.570)$$

Sa y_1 označio sam rastojanje kuglice mase m_1 od ravnotežnog položaja. Vreme koje se meri u sistemu detektora (u sistemu S) označio sam sa t_{lab} , a vreme koje se meri u sistemu \bar{S} označeno je sa t . Ova dva vremena medjusobno se razlikuju. Da bi pojednostavio matematičku analizu jednačine (11.570) uzeću da je

$$t_{lab} = t$$

U skladu sa ovim pojednostavlivanjem jednačina (11.570) dobija oblik

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r} \cos \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right) \quad (11.571)$$

Ubrzanje kuglice mase m_1 (probnog tela) određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$a_1 = -\frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r} \cos \left(2\omega \left(t - \frac{(r+x_1)}{c} \right) \right) \quad (11.572)$$

Ovu jednačinu koristiću da bi procenio maksimalnu vrednost ubrzanja kuglice mase m_1 .

Potrebno je dobiti diferencijalnu jednačinu kretanja kuglice mase m_2 . Drugo klatno obešeno je u tački B (slika 67). Dužina klatna ima malu vrednost, i u skladu sa tim kuglica mase m_2 nalazi se na rastojanju $r + x_2$ od tačke O . Sila koja deluje na kuglicu mase m_2 može se dobiti korišćenjem predhodno opisane procedure i jednačine (11.569). Ta sila ima sledeći matematički oblik

$$\vec{F}_{gem\ 2} = -m_2 \frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r} \cos\left(2\omega\left(t - \frac{(r+x_2)}{c}\right)\right) \vec{e}_y \quad (11.573)$$

Na osnovu ove jednačine dobija se sledeća diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2_{lab}} = -\frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r} \cos\left(2\omega\left(t - \frac{(r+x_2)}{c}\right)\right) \quad (11.574)$$

Sa y_2 označio sam rastojanje probnog tela (kuglice mase m_2) od ravnotežnog položaja. Zbog pojednostavljenja matematičke analize jednačine (11.570) uveo sam uslov

$$t_{lab} = t$$

I u slučaju jednačine (11.574) koristiću ovaj uslov, i dobijam rezultat

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r} \cos\left(2\omega\left(t - \frac{(r+x_2)}{c}\right)\right) \quad (11.575)$$

Ubrzanje probnog tela (kuglice mase m_2) određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$a_2 = -\frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r} \cos\left(2\omega\left(t - \frac{(r+x_2)}{c}\right)\right) \quad (11.576)$$

Ova jednačina može se koristiti za procenu maksimalne vrednosti ubrzanja kuglice mase m_2 . Zbog lakšeg zapisivanja diferencijalnih jednačina (11.571) i (11.575) uvodim sledeće oznake

$$k = \frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r} \quad (11.577)$$

$$\varphi_0 = \frac{2\omega r}{c} \quad (11.578)$$

U skladu sa ovim oznakama jednačine (11.571) i (11.575) postaju

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -k \cos\left(2\omega t - \frac{2\omega x_1}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.579)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -k \cos\left(2\omega t - \frac{2\omega x_2}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.580)$$

Potrebno je rešiti ove diferencijalne jednačine. U početnom trenutku ($t = 0$) obe kuglice (probna tela) nalaze se u stanju mirovanja. U skladu sa tim početni uslovi glase

$$y_1(0) = 0 \quad (11.581)$$

$$\dot{y}_1(0) = 0 \quad (11.582)$$

$$y_2(0) = 0 \quad (11.583)$$

$$\dot{y}_2(0) = 0 \quad (11.584)$$

Strogo posmatrano ugaona brzina (ω) menja se sa vremenom (jednačina (11.537)). Medjutim registracija talasa kratko traje, i možemo smatrati da je u toku procesa registracije talasa ugaona brzina (ω) konstantna veličina. Integracijom jednačine (11.579) dobijam

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{k}{2\omega} \sin\left(2\omega t - \frac{2\omega x_1}{c} - \varphi_0\right) + C_1$$

Korišćenjem jednačine (11.581) dobijam integracionu konstantu C_1

$$C_1 = \frac{k}{2\omega} \sin\left(-\frac{2\omega x_1}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.585)$$

Daljom integracijom dobijam

$$y_1 = \frac{k}{(2\omega)^2} \cos\left(2\omega t - \frac{2\omega x_1}{c} - \varphi_0\right) + C_1 t + C_2$$

Korišćenjem jednačine (11.582) dobijam integracionu konstantu C_2

$$C_2 = -\frac{k}{(2\omega)^2} \cos\left(-\frac{2\omega x_1}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.586)$$

Jednačina kretanja tela mase m_1 glasi

$$y_1 = \frac{k}{(2\omega)^2} \cos\left(2\omega t - \frac{2\omega x_1}{c} - \varphi_0\right) + C_1 t + C_2 \quad (11.587)$$

Ako primenim istu matematičku proceduru u slučaju jednačine (11.580) dobijam rezultat

$$y_2 = \frac{k}{(2\omega)^2} \cos\left(2\omega t - \frac{2\omega x_2}{c} - \varphi_0\right) + \bar{C}_1 t + \bar{C}_2 \quad (11.588)$$

, gde je

$$\bar{C}_1 = \frac{k}{2\omega} \sin\left(-\frac{2\omega x_2}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.589)$$

$$\bar{C}_2 = -\frac{k}{(2\omega)^2} \cos\left(-\frac{2\omega x_2}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.590)$$

Odrediću razliku veličina y_2 i y_1 . Na osnovu jednačina (11.587) i (11.588) dobijam

$$y_2 - y_1 = \frac{k}{(2\omega)^2} \left[\cos\left(2\omega t - \frac{2\omega x_2}{c} - \varphi_0\right) - \cos\left(2\omega t - \frac{2\omega x_1}{c} - \varphi_0\right) \right] + (\bar{C}_1 - C_1)t + (\bar{C}_2 - C_2)$$

Ova jednačina može se napisati u obliku

$$y_2 - y_1 = S + Ht + G \quad (11.591)$$

Veličine S , H i G imaju sledeće vrednosti

$$S = \frac{k}{(2\omega)^2} \left[\cos\left(2\omega t - \frac{2\omega x_2}{c} - \varphi_0\right) - \cos\left(2\omega t - \frac{2\omega x_1}{c} - \varphi_0\right) \right] \quad (11.592)$$

$$H = \bar{C}_1 - C_1 \quad (11.593)$$

$$G = \bar{C}_2 - C_2 \quad (11.594)$$

Da bi se izvršila dalja transformacija jednačine (11.591) adekvatno je uzeti konkretne brojne vrednosti za pojedine fizičke veličine. U dosadašnjem tekstu dosta pažnje posvetio sam Rasel – Tejlorovom binarnom sistemu. U slučaju ovog binarnog sistema pulsar i neutronska zvezda kreću se po eliptičnim putanjama. U cilju dalje transformacije i analize jednačine (11.591) uveću jedan hipotetički binarni sistem. Neke karakteristike ovog hipotetičkog binarnog sistema biće identične karakteristikama Rasel – Tejlorovog binarnog sistema. Rasel – Tejlorov binarni sistem sastoji se od pulsara i neutronske zvezde. Mase ovih zvezda određene su jednačinama (11.168) i (11.169)

$$m_p = 1,441 M_\odot$$

$$m_n = 1,387 M_\odot$$

Masa Sunca označena je sa M_\odot i njena vrednost iznosi

$$M_\odot = 1,988 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad (11.595)$$

Rasel – Tejlorov binarni sistem nalazi se na rastojanju od 6400 pc od Zemlje, odnosno

$$r = 1,975 \cdot 10^{20} \text{ m}$$

Period rotacije pulsara (neutronske zvezde) oko centra mase iznosi 7,752 h.

Uzeću da se hipotetički binarni sistem sastoji od pulsara i neutronske zvezde, a mase zvezda određuju se na osnovu jednačina (11.168) i (11.169). U jednačini (11.577) figuriše redukovana masa. Ona se određuje na osnovu jednačine (11.174)

$$\mu = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n}$$

Zamenom vrednosti masa zvezda (jednačine (11.168) i (11.169)) u jednačinu (11.174) dobijam sledeći rezultat

$$\mu = 0,707 M_{\odot}$$

Na osnovu jednačine (11.595) dobijam sledeću vrednost za redukovanu masu

$$\mu = 1,405 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad (11.596)$$

Hipotetički binarni sistem takodje se nalazi na rastojanju od 6400 pc od Zemlje, odnosno

$$r = 1,975 \cdot 10^{20} \text{ m} \quad (11.597)$$

U slučaju hipotetičkog binarnog sistema uzeću da se zvezde kreću po kružnim putanjama oko centra mase. Ovaj binarni sistem emituje gravitacione talase i tokom vremena dolazi do smanjenja energije ovog sistema, odnosno do smanjenja rastojanja između zvezda. Uzeću da u početnom trenutku ($t = 0$) rastojanje između zvezda iznosi

$$a_0 = 1,821 \cdot 10^9 \text{ m} \quad (11.598)$$

Zbog emisije gravitacionih talasa smanjuje se i period rotacije zvezda oko centra mase. Sa T_0 označicu period rotacije zvezda oko centra mase u početnom trenutku ($t = 0$). Na osnovu jednačine (10.102) možemo povezati veličine T_0 i a_0

$$T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 a_0^3}{\gamma(m_p + m_n)}}$$

,i dobijam da veličina T_0 ima vrednost

$$T_0 = 25200 \text{ s}$$

, odnosno

$$T_0 = 7 \text{ h} \quad (11.599)$$

Na osnovu ove vrednosti jednostavno je odrediti kružnu frekvencu (ω_0) i frekvencu (ν_0) rotacije pulsara (neutronske zvezde) oko centra mase u početnom trenutku ($t = 0$)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2,492 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (11.600)$$

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = 3,968 \cdot 10^{-5} \text{ Hz} \quad (11.601)$$

Kružnu frekvencu rotacije zvezda oko centra mase dobijam primenom jednačine (11.535)

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma(m_p + m_n)}{a_0^3}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}} \quad (11.602)$$

Primenom jednačine (11.537) dobijam sledeći rezultat

$$\omega = \frac{\omega_0}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}} \quad (11.603)$$

Sa ω_0 označio sam kružnu frekvencu rotacije zvezda u početnom trenutku ($t = 0$). Brojna vrednost ove veličine iznosi $2,492 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$ (jednačina (11.600))

Frekvencu gravitacionih talasa određujem primenom jednačine (11.552) i dobijam sledeći rezultat

$$v_{gt} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma(m_p + m_n)}{a_0^3}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}} \quad (11.604)$$

Primenom jednačine (11.553) dobijam rezultat

$$v_{gt} = \frac{v_{gt0}}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}} \quad (11.605)$$

Sa v_{gt0} označio sam frekvencu gravitacionih talasa u početnom trenutku ($t = 0$). Veličina v_{gt0} jednostavno se određuje na osnovu jednačina (11.604) i (11.605)

$$v_{gt0} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma(m_p + m_n)}{a_0^3}} \quad (11.606)$$

Korišćenjem jednačine (11.543) može se odrediti talasna dužina gravitacionih talasa. Ona će se takodje menjati tokom vremena. Na osnovu jednačine (11.543) dobijam sledeću jednačinu

$$c = \lambda_{gt0} v_{gt0}$$

, odnosno

$$\lambda_{gt0} = \frac{c}{v_{gt0}} \quad (11.607)$$

Sa λ_{gt0} označio sam talasnu dužinu gravitacionih talasa u početnom trenutku ($t = 0$). Zamenom jednačine (11.606) u jednačinu (11.607) dobijam

$$\lambda_{gt0} = c\pi \sqrt{\frac{a_0^3}{\gamma(m_p + m_n)}} \quad (11.608)$$

Korišćenjem jednačina (11.598), (11.168) i (11.169) dobijam brojnu vrednost veličine λ_{gt0}

$$\lambda_{gt0} = 3,768 \cdot 10^{12} \text{ m} \quad (11.609)$$

U ovom slučaju talasna dužina gravitacionih talasa ima veliku vrednost.

Na osnovu jednačine (11.572) određuje se ubrzanje kuglice mase m_1 (probnog tela). Maksimalna vrednost ubrzanja iznosi

$$(a_1)_{max} = \frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r}$$

Na osnovu jednačine (11.576) zaključujem da maksimalno ubrzanje kuglice mase m_2 iznosi

$$(a_2)_{max} = \frac{8\gamma\mu a^2 \omega^3}{3c^3 r}$$

U predhodnom tekstu uveo sam numeričke vrednosti za fizičke veličine koje karakterišu hipotetički binarni sistem. Na osnovu tih numeričkih vrednosti dobijam rezultat

$$(a_1)_{max} = (a_2)_{max} = 2,406 \cdot 10^{-18} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (11.610)$$

Vratimo se jednačini (11.591) i odredimo veličine S , H i G . Veličina G određuje se na osnovu jednačine (11.594). Zamenom jednačina (11.590) i (11.586) u jednačinu (11.594) dobijam

$$G = -\frac{k}{(2\omega)^2} \left[\cos\left(-\frac{2\omega x_2}{c} - \varphi_0\right) - \cos\left(-\frac{2\omega x_1}{c} - \varphi_0\right) \right] \quad (11.611)$$

U daljem radu koristiću sledeće teoreme iz trigonometrije

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (11.612)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (11.613)$$

Jednačina (11.611) dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.613) i dobija se sledeći rezultat

$$G = \frac{k}{2\omega^2} \sin\left(-\frac{\omega(x_2 - x_1)}{c}\right) \sin\left(-\frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.614)$$

Obzirom da koristim numeričke vrednosti za analizu jednačine (11.591) potrebno je precizirati numeričke vrednosti rastojanja x_1 , x_2 i L . U slučaju LIGO detektora (slika 49) dužina interferencione grane iznosi 4 km.

Na slici 67 prikazana su dva klatna. Jedno je obešeno u tački A , a drugo u tački B . Rastojanje između tačaka A i B označio sam sa L , i ono se određuje na osnovu jednačine (11.556). Ja ću uzeti da rastojanja L i x_1 imaju sledeće vrednosti

$$L = 4 \text{ km} \quad (11.615)$$

$$x_1 = 100 \text{ m} \quad (11.616)$$

Na osnovu jednačine (11.556) dobijam da rastojanje x_2 ima vrednost

$$x_2 = 4,1 \cdot 10^3 \text{ m} \quad (11.617)$$

Da bi se dalje transformisala jednačina (11.614) potrebno je najpre proceniti vrednost sledeće veličine

$$\frac{\omega(x_2 - x_1)}{c}$$

Ovu veličinu označiću sa φ_1

$$\varphi_1 = \frac{\omega(x_2 - x_1)}{c} \quad (11.618)$$

Strogo postrano kružna frekvenca (ω) menja se u toku vremena (jednačina (11.603)). U početnom trenutku ($t = 0$) kružna frekvenca je ω_0 . Brojna vrednost ove veličine iznosi $2,492 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$ (jednačina (11.600)). Kružna frekvenca (ω) naglo se menja kada dolazi do procesa koalescencije (spajanja) zvezda. Kada se binarni sistem ne nalazi u procesu koalescencije (spajanja zvezda) kružna frekvenca sporo se menja u toku vremena i možemo uzeti da važi uslov

$$\omega \approx \omega_0$$

Zamenom ovog uslova u jednačinu (11.618) dobijam

$$\varphi_1 = \frac{\omega_0(x_2 - x_1)}{c}$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.556)

$$\varphi_1 = \frac{\omega_0 L}{c} \quad (11.619)$$

Korišćenjem jednačina (11.600) i (11.615) dobijam sledeći rezultat

$$\varphi_1 = 3,323 \cdot 10^{-9} \text{ rad} \quad (11.620)$$

Potrebno je proceniti i vrednost veličine

$$\frac{\omega(x_2 + x_1)}{c}$$

Ovu veličinu označiću sa φ_2

$$\varphi_2 = \frac{\omega(x_2 + x_1)}{c}$$

Korišćenjem uslova $\omega \approx \omega_0$ dobijam

$$\varphi_2 = \frac{\omega_0(x_2 + x_1)}{c} \quad (11.621)$$

Korišćenjem jednačina (11.600), (11.616) i (11.617) dobijam sledeći rezultat

$$\varphi_2 = 3,406 \cdot 10^{-9} \text{ rad} \quad (11.622)$$

Ugao φ_1 ima malu vrednost i može se koristiti sledeća aproksimacija

$$\sin(\varphi_1) \approx \varphi_1$$

, odnosno

$$\sin\left(\frac{\omega_0(x_2 - x_1)}{c}\right) \approx \frac{\omega_0(x_2 - x_1)}{c}$$

Primenom uslova $\omega \approx \omega_0$ dobijam rezultat

$$\sin\left(\frac{\omega(x_2 - x_1)}{c}\right) \approx \frac{\omega(x_2 - x_1)}{c} \quad (11.623)$$

Korišćenjem ovog rezultata jednačina (11.614) dobija oblik

$$G = -\frac{k}{2\omega} \frac{(x_2 - x_1)}{c} \sin\left(-\frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.624)$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.625)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (11.625)$$

, i dobijam sledeći rezultat

$$G = -\frac{kT}{4\pi c} (x_2 - x_1) \sin\left(-\frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.626)$$

Veličina H određuje se na osnovu jednačine (11.593). Zamenom jednačina (11.585) i (11.589) u jednačinu (11.593) dobijam rezultat

$$H = \frac{k}{2\omega} \left[\sin\left(-\frac{2\omega x_2}{c} - \varphi_0\right) - \sin\left(-\frac{2\omega x_1}{c} - \varphi_0\right) \right]$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.612), i dobijam rezultat

$$H = \frac{k}{\omega} \sin\left(-\frac{\omega(x_2 - x_1)}{c}\right) \cos\left(-\frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right)$$

Primenom jednačine (11.623) dobijam rezultat

$$H = -\frac{k}{c} (x_2 - x_1) \cos\left(-\frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.627)$$

Veličina S određuje se na osnovu jednačine (11.592)

$$S = \frac{k}{(2\omega)^2} \left[\cos\left(2\omega t - \frac{2\omega x_2}{c} - \varphi_0\right) - \cos\left(2\omega t - \frac{2\omega x_1}{c} - \varphi_0\right) \right]$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.613), i dobijam rezultat

$$S = -\frac{k}{2\omega^2} \sin\left(-\frac{\omega(x_2 - x_1)}{c}\right) \sin\left(2\omega t - \frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right)$$

Primenom jednačine (11.623) dobijam rezultat

$$S = \frac{k}{2\omega c} (x_2 - x_1) \sin\left(2\omega t - \frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right)$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.625)

$$S = \frac{kT}{4\pi c} (x_2 - x_1) \sin\left(2\omega t - \frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.628)$$

Zamenom jednačina (11.626-628) u jednačin (11.591), i nakon algebarskih transformacija dobijam

$$y_2 - y_1 = \frac{kT}{4\pi c} (x_2 - x_1) \left[\sin\left(2\omega t - \frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right) - \sin\left(-\frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right) \right] \\ - \frac{kt}{c} (x_2 - x_1) \cos\left(-\frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right)$$

Član u uglastim zagradama transformišem korišćenjem jednačine (11.612), i dobijam rezultat

$$y_2 - y_1 = \frac{kT}{2\pi c} (x_2 - x_1) \sin(\omega t) \cos\left(\omega t - \frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right) \\ - \frac{kt}{c} (x_2 - x_1) \cos\left(-\frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.629)$$

Gravitacioni talasi izazvaće pomeranje klatna. To pomeranje klatna moglo bi se iskoristiti za detekciju gravitacionih talasa. Interakcija gravitacionih talasa sa klatnima ne traje dugo. Dužinu vremenskog intervala u toku kojeg se dešava interakcija gravitacionih talasa sa klatnima označio sam u jednačini (11.629) sa t . Ovaj vremenski interval može biti nekoliko minuta. Ja ovde razmatram hipotetički binarni sistem, i dobio sam da period rotacije zvezda oko centra mase iznosi 7 h. Ovaj period rotacije označio sam sa T . Vreme t mnogo je manje od period rotacije T , i iz tog razloga zanemariću drugi član u jednačini (11.629) i dobijam rezultat

$$y_2 - y_1 = \frac{kT}{2\pi c} (x_2 - x_1) \sin(\omega t) \cos\left(\omega t - \frac{\omega(x_2 + x_1)}{c} - \varphi_0\right) \quad (11.630)$$

U dosadašnjem tekstu uveo sam veličinu φ_2

$$\varphi_2 = \frac{\omega(x_2 + x_1)}{c}$$

Korišćenjem ove veličine jednačina (11.630) postaje

$$y_2 - y_1 = \frac{kT}{2\pi c} (x_2 - x_1) \sin(\omega t) \cos(\omega t - \varphi_2 - \varphi_0) \quad (11.631)$$

Ugao φ_2 ima malu vrednost (jednačina (11.622)). Iz tog razloga ugao φ_2 može se zanemariti u jednačini (11.631), i dobijam rezultat

$$y_2 - y_1 = \frac{kT}{2\pi c} (x_2 - x_1) \sin(\omega t) \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (11.632)$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačina (11.577) i (11.556), i dobijam sledeći rezultat

$$y_2 - y_1 = \frac{4\gamma\mu a^2 \omega^3}{3\pi c^4 r} L T \sin(\omega t) \cos(\omega t - \varphi_0)$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.625)

$$y_2 - y_1 = \frac{8\gamma\mu a^2 \omega^2}{3c^4 r} L \sin(\omega t) \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (11.633)$$

Na osnovu jednačine (11.633) određuje se promena rastojanja izmedju kuglica (probnih tela) tokom vremena. Radi jednostavnosti dalje analize izostaviću veličinu φ_0 i dobijam sledeći rezultat

$$y_2 - y_1 = \frac{8\gamma\mu a^2 \omega^2}{3c^4 r} L \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

, odnosno

$$\frac{y_2 - y_1}{L} = \frac{4\gamma\mu a^2 \omega^2}{3c^4 r} \sin(2\omega t) \quad (11.634)$$

Zamenom jednačina (11.534) i (11.537) u jednačinu (11.634) dobijam

$$\frac{y_2 - y_1}{L} = \frac{4\gamma\mu a_0^2 \omega_0^2}{3c^4 r} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{1/4}} \sin\left(\frac{2\omega_0 t}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}}\right) \quad (11.635)$$

Levu strani jednačine označiću sa $\delta(t)$

$$\delta(t) = \frac{y_2 - y_1}{L}$$

, i jednačina (11.635) dobija oblik

$$\delta(t) = \frac{4\gamma\mu a_0^2 \omega_0^2}{3c^4 r} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{1/4}} \sin\left(\frac{2\omega_0 t}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}}\right) \quad (11.636)$$

Sada ću odrediti vrednost sledeće veličine

$$A = \frac{4\gamma\mu a_0^2 \omega_0^2}{3c^4 r}$$

U ovoj jednačini figurišu veličine koje karakterišu hipotetički binarni sistem. Brojne vrednosti tih veličina prezentovane su dosadašnjem tekstu. Korišćenjem tih brojnih vrednosti dobijam rezultat

$$A = 1,609 \cdot 10^{-23}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.636) dobijam

$$\delta(t) = 1,609 \cdot 10^{-23} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{1/4}} \sin\left(\frac{2\omega_0 t}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}}\right) \quad (11.637)$$

U dosadašnjem tekstu analizirao sam slučaj kada pulsar emituje gravitacione talase. Masu pulsara označio sam sa M . Uzeo sam da je distribucija mase pulsara homogena, odnosno gustina mase (ρ_m) ima konstantnu vrednost. Zbog generalnosti diskusije uzeo sam da pulsar ima oblik elipsoida (slika 62).

Uveo sam dva koordinatna sistema. Te sisteme označio sam sa S i S' . Na slici 63 prikazan je sistem S' . Ovaj sistem je vezan za elipsoid i rotira zajedno sa njim. Koordinatne ose ovog sistema poklapaju se sa velikim poluosama elipsoida, a koordinatni početak sistema S' poklapa se sa centrom elipsoida. Koordinatne ose ovog sistema označio sam sa x_1' , x_2' i x_3' , a koordinatne ose sistema S sa x_1 , x_2 i x_3 . Elipsoid (pulsar) rotira oko ose x_3' (odnosno oko ose x_3) konstantnom ugaonom brzinom (slika 64). Sa stanovišta gravitoelektromagnetizma ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje pulsar određuje na osnovu jednačine (11.406).

Astrofizički objekti mogu da vrše precesiono kretanje. U daljem radu ja ću se pre svega zadržati na pulsarima. Cilj mi je da odredim ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje pulsar kada vrši precesiono kretanje. Na slici 64 prikazano je kretanje pulsara. Pulsar rotira oko ose x_3' (odnosno oko ose x_3) konstantnom ugaonom brzinom. U ovom slučaju ne postoji precesiono kretanje pulsara.

U vezi pulsara potrebno je napomenuti pojedine stvari. Pulsari mogu biti slobodni, ali se mogu nalaziti i u binarnim zvezdanim sistemima. Kada je pulsar slobodan on je veoma udaljen od ostalih astrofizičkih objekata. Takav pulsar je usamljen, i na njega ne deluju spoljašnje sile.

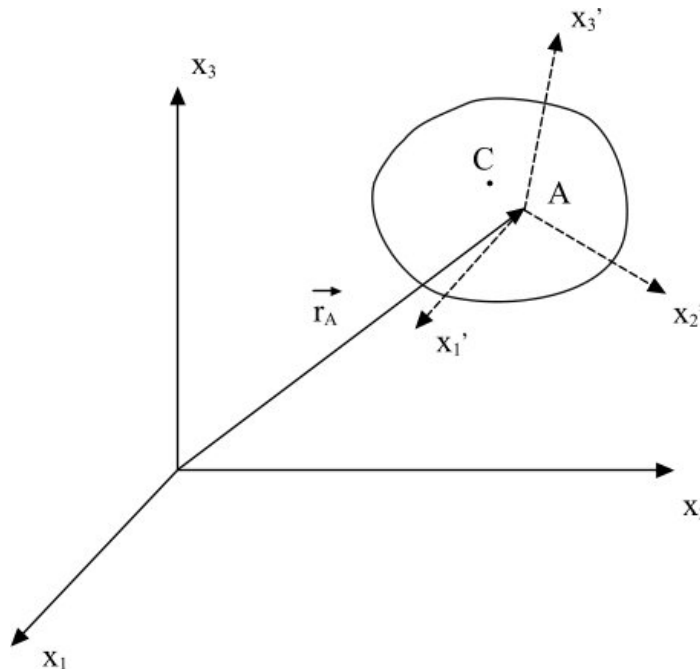
Pulsari se mogu nalaziti i u binarnim zvezdanim sistemima. U dosadašnjem radu dosta pažnje posvetio sam Rasel-Tejlorovom binarnom sistemu. Postoje binarni sistemi koji se sastoje od pulsara i neke zvezde koja nije pulsar. Astronomi su otkrili binarne sisteme koji se sastoje od dva pulsara. Primer takvog binarnog sistema je PSR J0737-3039A/B. Pulsari su neutronske zvezde koje vrlo brzo rotiraju oko svojih osa. U dosadašnjem tekstu istakao sam da periodi rotacije otkrivenih pulsara pripadaju intervalu od 0,00139 sekundi (PSR J1748-2446 ad) do 11,77894 sekunde (PSR J1841-0456). Pulsar PSR J1748-2446 ad napravi oko 719 obrtaja u sekundi. U slučaju binarnog sistema PSR J0737-3039A/B jedan od pulsara ima period rotacije oko svoje ose 23 ms, a drugi 2,8 s. Na osnovu ovih vrednosti o periodima rotacije pulsara zaključujemo da pulsari imaju velike ugaone brzine rotacije, odnosno imaju velike vrednosti momenta impulsa.

Kada se zvezde (pulsari) nalaze u binarnim sistemima može doći do njihovog precesionog kretanja. Prilikom precesionog kretanja osa rotacije zvezde (pulsara) opisuje konus. Na osnovu opšte teorije relativnosti predviđena je pojava precesije zvezda u binarnim sistemima. Za proučavanje efekta precesije koriste se pulsari zbog svojih specifičnih karakteristika. Pulsari emituju radio talase, a periodi rotacije pulsara se izuzetno precizno mere. U dosadašnjem tekstu istakao sam da je za pulsare karakteristično da im se periodi rotacije izuzetno sporo menjaju. U slučaju pulsara PSR J1603-7202 period rotacije se poveća za $5 \cdot 10^{-7}$ s svakih milion godina. Rezultati o precesiji pulsara u binarnim zvezdanim sistemima koji su dobijeni metodama radio astronomije su u dobroj saglasnosti sa predviđanjima opšte teorije relativnosti.

Kada je pulsar slobodan, ili se nalazi u binarnom zvezdanom sistemu on emituje gravitacione talase. U dosadašnjem tekstu istakao sam da mi je cilj da odredim ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje pulsar kada vrši precesiono kretanje. Da bi se objasnila precesija pulsara, i odredila ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje pulsar potrebno je uvesti jednu idealizaciju koja se

koristi i u opštoj teoriji relativnosti. Uvodim idealizaciju da je pulsar kruto telo. Pojam kruto telo (apsolutno kruto telo) je uveden u mehanici. Kod krutog tela se rastojanje izmedju bilo koje dve tačke ne menja. Kruto telo je idealizacija, jer su sva tela u prirodi deformabilna, jer pod delovanjem sila (spoljnih faktora) rastojanja izmedju tačaka tela mogu se promeniti. Pulsar ima svoju strukturu. Postoje određeni modeli koji analiziraju unutrašnju i spoljašnju strukturu pulsara, međjutim zbog jednostavnosti analize uveo sam da se pulsar ponaša kao kruto telo, i to predstavlja idealizaciju. Tretiranje pulsara kao krutog tela mnogo pojednostavljuje problem njegove dinamike.

Precesiono kretanje slobodnog pulsara (krutog tela), odnosno problem dinamike slobodnog pulsara biće analiziran sa stanovišta Njutnove mehanike. Iz tog razloga potrebno je prezentovati određene rezultate klasične mehanike. Za opisivanje kretanja krutog tela koriste se sistemi S i S' (slika 68). Sistem S je nepokretan sistem. To je inercijalan sistem. Sistem S' je sopstveni sistem reference. Ovaj sistem se realizuje na sledeći način. Bilo koja čestica krutog tela može da se poklopi sa koordinatnim početkom sistema S' . Na slici 68 tačkom A označen je koordinatni početak sistema S' .



Slika 68

Koordinatne ose sistema S' medjusobno su ortogonalne i prolaze kroz tačku A . Na slici 68 koordinatne ose sistema S' prikazane su isprekidanim linijama. Položaj koordinatnih osa u odnosu na kruto telo ne menja se tokom vremena. Na slici je prikazano da se tačka A poklapa sa koordinatnim početkom sistema S' . Međjutim u većini slučajeva mnogo je praktičnije uzeti da se koordinatni početak sistema S' poklapa se centrom mase krutog tela. Centar mase krutog tela je na slici 68 označen tačkom C . Istakao sam da možemo proizvoljno uzeti bilo koju tačku krutog tela da predstavlja koordinatni početak sistema S' .

U sledećem primeru uzeću da se koordinatni početak sistema S' poklapa sa tačkom C . Jedinične vektore koordinatnih osa sistema S' označiću sa \vec{e}_x' , \vec{e}_y' i \vec{e}_z' . U sistemu S' položaj neke čestice krutog tela određen je radijus vektorom \vec{r}'

$$\vec{r}' = x'\vec{e}_x' + y'\vec{e}_y' + z'\vec{e}_z' \quad (11.638)$$

Jedinične vektore koordinatnih osa sistema S označiću sa \vec{e}_x , \vec{e}_y i \vec{e}_z . Za posmatrača u sistemu S položaj tačke C (koordinatni početak sistema S') određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\vec{r}_c = x_c \vec{e}_x + y_c \vec{e}_y + z_c \vec{e}_z \quad (11.639)$$

Za posmatrača u sistemu S položaj neke čestice krutog tela određuje se na osnovu jednačine

$$\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{r}'$$

Brzina kretanja čestice krutog tela sa stanovišta posmatrača u sistemu S određuje se na osnovu jednačine

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_c}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

, odnosno

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Sa $\vec{\omega}$ je označena trenutna ugaona brzina rotacije krutog tela. Ona se može napisati na sledeći način

$$\vec{\omega} = \omega \vec{n}$$

Intenzitet ugaone brzine označio sam sa ω , a jedinični vektor ugaone brzine sa \vec{n} . Veličine ω i \vec{n} određuje posmatrač u sistemu S . Kod složenog kretanja krutog tela veličine ω i \vec{n} neprekidno se menjaju tokom remena.

Problem kretanja krutog tela detaljno je proučen u mehanici. Prvenstveno ću se baviti precesionim kretanjem krutog tela. Najpre ću slikovito opisati precesiono kretanje krutog tela (pulsara), a kasnije ću prezentovati i konkretne jednačine za ovaj tip kretanja. Kada sam analizirao slučaj pulsara koji emituje gravitacione talase uzeo sam da pulsar ima oblik elipsoida (slika 62). I u slučaju precesionog kretanja pulsara uzeću da pulsar ima oblik elipsoida.

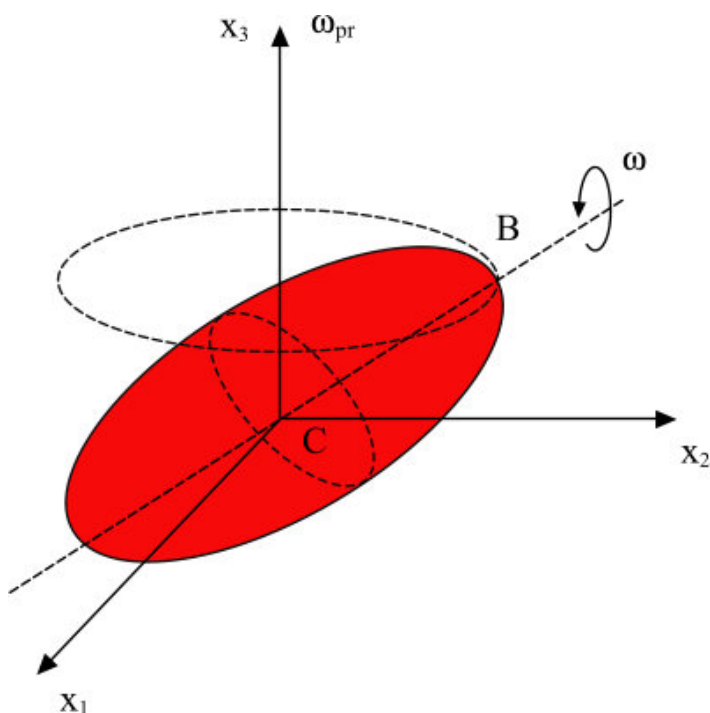
Analiziraću dva slučaja precesionog kretanja slobodnog pulsara. U prvom slučaju velike poluose a i b elipsoida međusobno su jednake, a razlikuju se od velike poluose c . Za takav elipsoid (pulsar) ispunjen je sledeći uslov

$$a = b \neq c \quad (11.640)$$

U drugom slučaju velika poluosa a razlikuje od velike poluose b , ali razlika između ovih poluosa nije velika. Kao i u prvom slučaju velike poluose a i b razlikuju se od velike poluose c . Za ovakav elipsoida ispunjen je sledeći uslov

$$a \approx b \neq c \quad (11.641)$$

Najpre ću slikovito opisati precesiono kretanje krutog tela (slobodnog pulsara), kod koga je ispunjen uslov (11.640). Za opisivanje kretanja krutog tela koriste se dva sistema sa S i S' . O tim sistemima već je bilo reči u dosadašnjem tekstu. Da bi opisao precesiono kretanje slobodnog pulsara (elipsoida) uzeću da se koordinatni počeci sistema S i S' poklapaju. Koordinatne ose sistema S označio sam sa x_1 , x_2 i x_3 , i one su prikazane na slici 69



Slika 69

Sistem S' vezan je za elipsoid i rotira zajedno sa njim. Koordinatne ose ovog sistema poklapaju se sa velikim poluosama elipsoida, a koordinatni početak sistema S' poklapa se sa centrom elipsoida (pulsara). Koordinatne ose ovog sistema označio sam sa x_1' , x_2' i x_3' . U sistemu S' jednačina elipsoida glasi

$$\frac{(x_1')^2}{a^2} + \frac{(x_2')^2}{a^2} + \frac{(x_3')^2}{c^2} = 1$$

Elipsoid (pulsar) rotira oko ose x_3' konstantnom ugaonom brzinom koju ću označiti sa ω .

Na slici 69 označio sam i tačku B . Ona se nalazi na osi x_3' . Rastojanje između tačaka C i B jednako je c

$$CB = c$$

Prilikom precesije pulsara tačka B kreće se po kružnici konstantnom ugaonom brzinom. Ta ugaona brzina naziva se ugaona brzina precesije, i označiću je sa ω_{pr} . Kružnica po kojoj se kreće tačka B prikazana je isprekidanom linijom na slici 69.

Ugao između ose rotacije elipsoida (pulsara) i x_3 ose sistema S označiću sa α . Ovaj ugao se tokom vremena ne menja.

U drugom slučaju ispunjen je uslov (11.641). U tom slučaju velika poluosa a razlikuje od velike poluose b , ali razlika između ovih poluosa nije velika. Realno je očekivati da se kod pulsara velika poluosa a razlikuje od velike poluose b .

Prilikom transformacije jednačine (11.406) uveden je bezdimenzioni parametar ε . On se određuje na osnovu jednačine (11.408). Istakao sam da u literaturi postoje procene parametra ε . Moguće vrednosti parametra ε nalaze se u domenu

$$\varepsilon \leq 10^{-6}$$

Mala vrednost parametra ε ukazuje da se veličine a i b malo razlikuju. Da bi to pokazao korišću jednačinu (11.408). Na osnovu ove jednačine dobijam rezultat

$$b = a \frac{(2 - \varepsilon)}{(2 + \varepsilon)} \quad (11.642)$$

Zamenom vrednosti $\varepsilon = 10^{-6}$ u jednačinu (11.642) dobijam sledeći rezultat

$$b = a \frac{(2 - 10^{-6})}{(2 + 10^{-6})} \quad (11.643)$$

Na osnovu ovog rezultata vidimo da se veličine a i b zaista malo razlikuju. Kao posledica toga pulsar kod koga je ispunjen uslov (11.641) takodje će vršiti precesiono kretanje koje je prikazano na slici 69.

U slučaju kada se veličine a , b i c međusobno razlikuju, odnosno kada je ispunjen uslov

$$a \neq b \neq c \quad (11.644)$$

kretanje elipsoida (slobodnog pulsara) može biti veoma složeno, i opisivanje takvog kretanja zahteva korišćenje veoma složenih matematičkih funkcija.

Istakao sam da ću precesiono kretanje slobodnog pulsara (krutog tela), odnosno problem njegove dinamike analizirati sa stanovišta Njutnove mehanike. Već sam prezentovao određene rezultate klasične mehanike koji se koriste u toj analizi. Postoje nekoliko pristupa u klasičnoj mehanici za rešavanje problema kretanja krutog tela. Ja ću se zadržati samo na pristupu koji se zasniva na korišćenju Lagranževe funkcije. Za rotaciono kretanje krutog tela u gravitacionom polju Zemlje Lagranževa funkcija glasi

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\beta} \sin \alpha \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \gamma) + \frac{I_2}{2} (\dot{\beta} \sin \alpha \cos \gamma - \dot{\alpha} \sin \gamma) + \frac{I_3}{2} (\dot{\beta} \cos \alpha + \dot{\gamma}) - U \quad (11.645)$$

Potrebno je objasniti značenje pojedinih veličina koje figurišu u ovoj jednačini. Veličine I_1 , I_2 i I_3 su glavni centralni momenti inercije, a veličine α , β i γ su Ojlerovi uglovi. Veličina U je potencijalna energija krutog tela u homogenom gravitacionom polju Zemlje.

Sada ću objasniti kako se određuju veličine I_1 , I_2 i I_3 . One su povezane sa tenzorom inercije. Za opisivanje kretanja krutog tela koriste se sistemi S i S' (slika 68). Sistem S je nepokretan sistem. To je inercijalan sistem. Sistem S' je sopstveni sistem reference. Istakao sam da možemo proizvoljno uzeti bilo koju tačku krutog tela da predstavlja koordinatni početak sistema S' . U cilju objašnjenja tenzora inercije uzeću najpre da se tačka A poklapa sa koordinatnim početkom sistema S' . Takav slučaj je prikazan na slici 68.

Jedinične vektore koordinatnih osa sistema S' označio sam sa \vec{e}_x' , \vec{e}_y' i \vec{e}_z' . U sistemu S' položaj neke čestice krutog tela određen je radijus vektorom \vec{r}'

$$\vec{r}' = x' \vec{e}_x' + y' \vec{e}_y' + z' \vec{e}_z' \quad (11.646)$$

Tenzor inercije određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$I_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (y_i'^2 + z_i'^2) & - \sum_{i=1}^N m_i x_i' y_i' & - \sum_{i=1}^N m_i x_i' z_i' \\ - \sum_{i=1}^N m_i y_i' x_i' & \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + z_i'^2) & - \sum_{i=1}^N m_i y_i' z_i' \\ - \sum_{i=1}^N m_i z_i' x_i' & - \sum_{i=1}^N m_i z_i' y_i' & \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \end{bmatrix} \quad (11.647)$$

Dijagonalni elementi tenzora inercije nazivaju se momenti inercije, a van dijagonalni elementi proizvodi inercije. Sa N je označen ukupan broj čestica koje čine telo.

Obzirom da se koordinatni početak sistema S' poklapa sa tačkom A jednačina (11.647) može se napisati u obliku

$$I_{\mu\nu}^{(A)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (y_i'^2 + z_i'^2) & -\sum_{i=1}^N m_i x_i' y_i' & -\sum_{i=1}^N m_i x_i' z_i' \\ -\sum_{i=1}^N m_i y_i' x_i' & \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + z_i'^2) & -\sum_{i=1}^N m_i y_i' z_i' \\ -\sum_{i=1}^N m_i z_i' x_i' & -\sum_{i=1}^N m_i z_i' y_i' & \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \end{bmatrix} \quad (11.648)$$

Jednačina (11.648) važi za slučaj diskretne raspodele mase. Za slučaj kontinualne raspodele mase dobija se rezultat

$$I_{\mu\nu}^{(A)} = \begin{bmatrix} \int (y'^2 + z'^2) \rho dV, & -\int x' y' \rho dV, & -\int x' z' \rho dV, \\ -\int y' x' \rho dV, & \int (x'^2 + z'^2) \rho dV, & -\int y' z' \rho dV, \\ -\int z' x' \rho dV, & -\int z' y' \rho dV, & \int (x'^2 + y'^2) \rho dV, \end{bmatrix} \quad (11.649)$$

Sa ρ označena je gustina mase.

Jednačina (11.648) (odnosno jednačina (11.649)) može se napisati u obliku

$$I_{\mu\nu}^{(A)} = \begin{bmatrix} I_{11}^{(A)} & I_{12}^{(A)} & I_{13}^{(A)} \\ I_{21}^{(A)} & I_{22}^{(A)} & I_{23}^{(A)} \\ I_{31}^{(A)} & I_{32}^{(A)} & I_{33}^{(A)} \end{bmatrix}$$

Na osnovu jednačine (11.648) zaključujemo da je tenzor inercije simetričan tenzor, odnosno

$$I_{\mu\nu}^{(A)} = I_{\nu\mu}^{(A)} \quad (11.650)$$

Uzeo sam da se koordinatni početak sistema S' poklapa sa tačkom A , i prezentovani su tenzori inercije za taj slučaj (jednačine (11.648) i (11.649)). Međutim koordinatni početak sistema S' može da se poklopi sa centrom mase krutog tela. Centar mase krutog tela je na slici 68 označen tačkom C . I za ovaj slučaj može se odrediti tenzor inercije

$$I_{\mu\nu}^{(C)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (y_i'^2 + z_i'^2) & -\sum_{i=1}^N m_i x_i' y_i' & -\sum_{i=1}^N m_i x_i' z_i' \\ -\sum_{i=1}^N m_i y_i' x_i' & \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + z_i'^2) & -\sum_{i=1}^N m_i y_i' z_i' \\ -\sum_{i=1}^N m_i z_i' x_i' & -\sum_{i=1}^N m_i z_i' y_i' & \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \end{bmatrix} \quad (11.651)$$

Za slučaj kontinualne raspodele mase dobija se rezultat

$$I_{\mu\nu}^{(C)} = \begin{bmatrix} \int (y'^2 + z'^2) \rho dV, & -\int x' y' \rho dV, & -\int x' z' \rho dV, \\ -\int y' x' \rho dV, & \int (x'^2 + z'^2) \rho dV, & -\int y' z' \rho dV, \\ -\int z' x' \rho dV, & -\int z' y' \rho dV, & \int (x'^2 + y'^2) \rho dV, \end{bmatrix} \quad (11.652)$$

Tenzor inercije je simetričan tenzor. Za tenzor $I_{\mu\nu}^{(A)}$, odnosno za odgovarajuću matricu mogu se naći svojstvene vrednosti. Problem nalaženja svojstvenih vrednosti tenzora (matrice) naziva se svojstveni problem. Obzirom da je tenzor $I_{\mu\nu}^{(A)}$ simetričan njegove svojstvene vrednosti biće realne.

Prilikom određivanja svojstvenih vrednosti tenzora $I_{\mu\nu}^{(A)}$ dobija se sledeći uslov

$$\begin{vmatrix} I_{11}^{(A)} - \lambda & I_{12}^{(A)} & I_{13}^{(A)} \\ I_{21}^{(A)} & I_{22}^{(A)} - \lambda & I_{23}^{(A)} \\ I_{31}^{(A)} & I_{32}^{(A)} & I_{33}^{(A)} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Kada se razvije ova determinanta i izjednači sa nulom dobija se kubna jednačina

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

Kubna jednačina u opštem slučaju ima tri rešenja. Obzirom da je tenzor inercije simetričan pokazuje se da su sva rešenja kubne jednačine realna. Rešenja kubne jednačine označiću sa λ_1 , λ_2 i λ_3 . U opštem slučaju ova rešenja su međusobno različita, ali mogući su slučajevi da su dva ili tri rešenja međusobno jednaka. U cilju generalnosti diskusije uzeću da su sva tri rešenja kubne jednačine međusobno različita. Obzirom da analiziram tenzor inercije uvodim sledeće označavanje veličina λ_1 , λ_2 i λ_3

$$\lambda_1 = I_1^{(A)}$$

$$\lambda_2 = I_2^{(A)}$$

$$\lambda_3 = I_3^{(A)}$$

Veličine $I_1^{(A)}$, $I_2^{(A)}$ i $I_3^{(A)}$ nazivaju se glavni momenti inercije, i to su svojstvene vrednosti tenzora $I_{\mu\nu}^{(A)}$.

Primenjujući predhodno opisanu proceduru mogu se odrediti i svojstvene vrednosti tenzora $I_{\mu\nu}^{(C)}$. Njih ću označiti sa I_1 , I_2 i I_3 . Ove veličine nazivaju se glavni centralni momenti inercije, i oni figurišu u jednačini (11.645).

Na slici 69 prikazano je precesiono kretanje krutog tela (slobodnog pulsara), kod koga je ispunjen uslov (11.640). Za opisivanje kretanja krutog tela koriste se dva sistema S i S' . Istakao sam da je sistem S' vezan za elipsoid i da rotira zajedno sa njim. Koordinatne ose ovog sistema poklapaju se sa velikim poluosama elipsoida, a koordinatni početak sistema S' poklapa se sa centrom elipsoida (pulsara). Koordinatne ose ovog sistema označio sam sa x_1' , x_2' i x_3' . Elipsoid (pulsar) rotira oko ose x_3' konstantnom ugaonom brzinom koju sam označio sa ω .

Obzirom da je ispunjen uslov (11.640) u sistemu S' jednačina elipsoida glasi

$$\frac{(x_1')^2}{a^2} + \frac{(x_2')^2}{a^2} + \frac{(x_3')^2}{c^2} = 1 \quad (11.653)$$

Matrica (jednačina (11.401)) dobijena je za slučaj kada se veličine a , b i c međusobno razlikuju, odnosno kada je ispunjen uslov (11.644). Može se pokazati da matrica tenzora inercije u slučaju kada je ispunjen uslov (11.640) ima sledeći oblik

$$I_{\mu\nu}^{(C)} = \frac{M}{5} \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{bmatrix} \quad (11.654)$$

Uveden je indeks C da bi naznačio da se koordinatni početak sistema S' poklapa se sa centrom mase elipsoida (pulsara).

Prilikom dobijanja jednačine (11.654) koristi se sledeća forma generalisanih sfernih koordinata

$$x_1' = al \sin \alpha \cos \beta$$

$$x_2' = al \sin \alpha \sin \beta$$

$$x_3' = cl \cos \alpha$$

Ova forma generalisanih sfernih koordinata dobijena je korišćenjem jednačina (11.386-388) i primenom uslova (11.640).

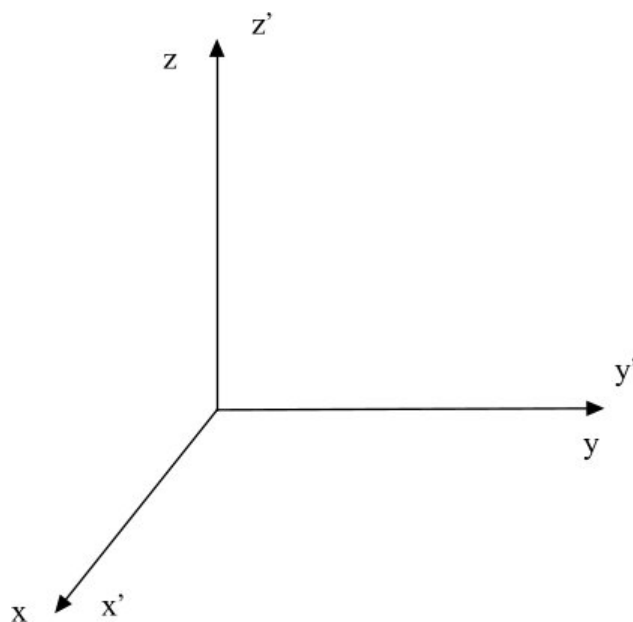
Za matricu $I_{\mu\nu}^{(C)}$ mogu se naći svojstvene vrednosti. Te veličine nazivaju se glavni centralni momenti inercije. Obeležio sam ih sa I_1 , I_2 i I_3 . Može se pokazati da su dijagonalni elementi matrice $I_{\mu\nu}^{(C)}$ jednaki svojstvenim vrednostima. U skladu sa tim važe sledeće jednačine

$$I_1 = \frac{M}{5}(a^2 + c^2) \quad (11.655)$$

$$I_2 = \frac{M}{5}(a^2 + c^2) \quad (11.656)$$

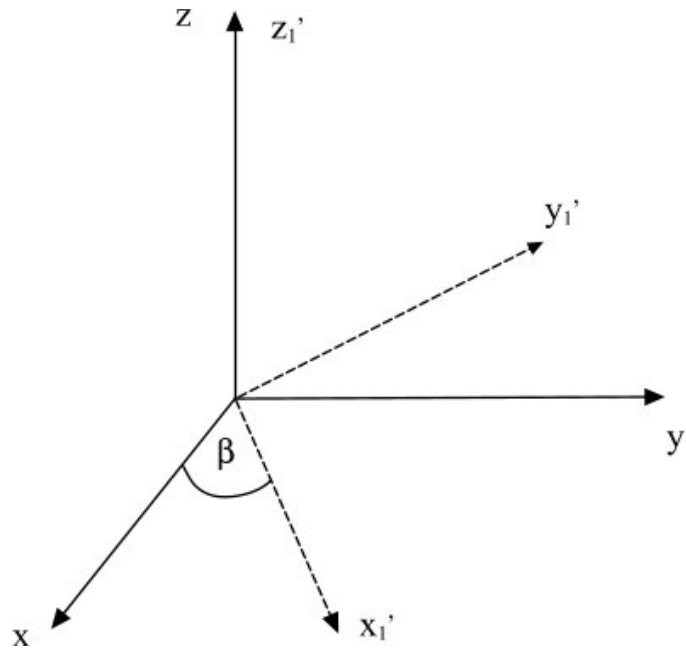
$$I_3 = \frac{2M}{5}a^2 \quad (11.657)$$

U jednačini (11.645) figurišu uglovi α , β i γ . To su tzv. Ojlerovi uglovi. Da bi definisali Ojlerove uglove potrebna su dva koordinatna sistema. Te koordinatne sisteme ponovo ću označiti sa S i S' . Počeci tih koordinatnih sistema se poklapaju. Sistem S je nepokretan. Njegove koordinatne ose označiću sa x , y , i z . Sistem S' je pokretan. U početnom trenutku sistemi S i S' se poklapaju. Ta situacija je prikazana na slici 70. Koordinatne ose sistema S' označiću sa x' , y' i z' .



Slika 70

Sistem S' izvršice tri uzastopne rotacije. Te rotacije povezane su sa Ojlerovim uglovima. Sistem S' najpre izvrši rotaciju oko ose z (ose z') za ugao β . Pri tome sistem S' prelazi u sistem S_1' (slika 71). Koordinatne ose sistema S_1' označiću sa x_1' , y_1' i z_1' i one su prikazane na slici 71. Osa x_1' naziva se čvorna linija. Ona se nalazi u xOy ravni sistema S .

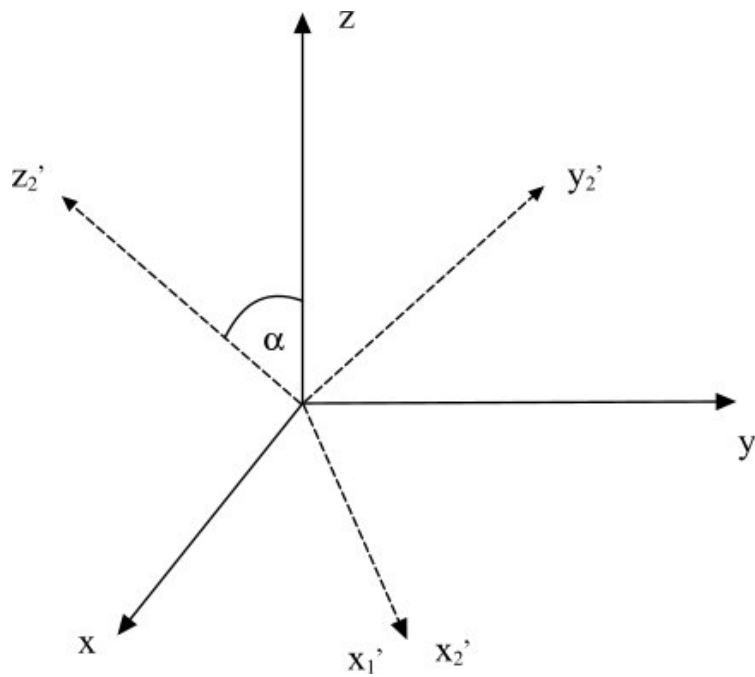


Slika 71

Matrica rotacije glasi

$$B(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.658)$$

Druga rotacija se vrši na sledeći način. Sistem S_1' se zarotira oko ose x_1' (čvrne linije) za ugao α , i dobija se sistem S_2' . Ta rotacija je prikazana na slici 72.

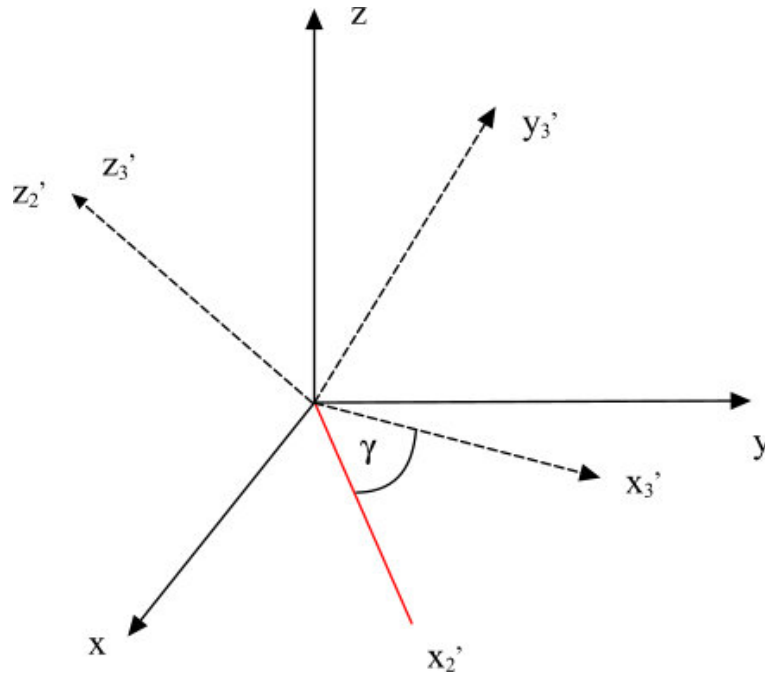


Slika 72

Sa x_2' , y_2' i z_2' označio sam koordinatne ose sistema S_2' . Za ovu transformaciju matrica rotacije glasi

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (11.659)$$

Treća transformacija se vrši na sledeći način. Sistem S_2' se zarotira za ugao γ oko ose z_2' , i dobija se sistem S_3' . Ta rotacija je prikazana na slici 73.

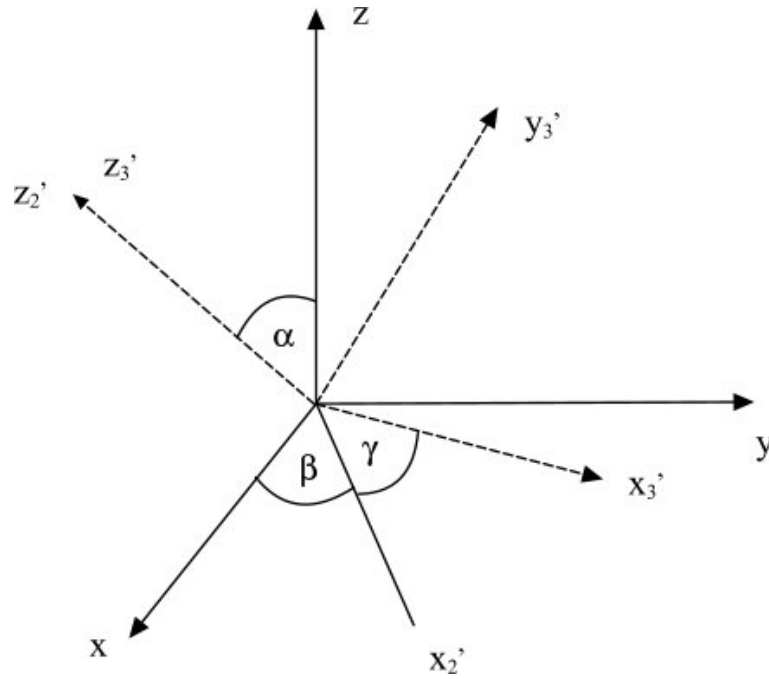


Slika 73

Sa x_3' , y_3' i z_3' označio sam koordinatne ose sistema S_3' . Crvenom linijom prikazana je čvorna linija. Za ovu transformaciju matrica rotacije glasi

$$C(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.660)$$

Nakon tri uzastopne rotacije sistem S' prešao je u sistem S_3' . Na slici 74 prikazani su sistemi S i S_3' , Ojlerovi uglovi i čvorna linija.



Slika 74

Vrednosti Ojlerovih uglova ograničene su na intervale

$$0 \leq \beta \leq 2\pi \quad (11.661)$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi \quad (11.662)$$

$$0 \leq \gamma \leq 2\pi \quad (11.663)$$

Sistem S_3' dobijen je nakon tri uzastopne rotacije. Ukupna matrica rotacije dobija se množenjem matrica C , A i B

$$R = C(\gamma)A(\alpha)B(\beta) \quad (11.664)$$

, odnosno

$$R = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.665)$$

U dosadašnjem tekstu ja sam najpre slikovito opisao precesiono kretanje slobodnog pulsara (krutog tela), kod koga je ispunjen uslov (11.640), ali sam istakao da ću prezentovati i konkretne jednačine za ovaj tip kretanja. To precesiono kretanje prikazano je na slici 69. Za opisivanje kretanja krutog tela koriste se dva sistema sa S i S' . O tim sistemima već je bilo reči u dosadašnjem tekstu. Sistem S' vezan je za elipsoid i rotira zajedno sa njim. Koordinatne ose ovog sistema označio sam sa x_1' , x_2' i x_3' . Elipsoid (pulsar) rotira oko ose x_3' konstantnom ugaonom brzinom koju sam označio sa ω . Na slici 69 označio sam i tačku B . Prilikom precesije pulsara tačka B kreće se po kružnici konstantnom ugaonom brzinom. Ta ugaona brzina naziva se ugaona brzina precesije, i označio sam je sa ω_{pr} . Kružnica po kojoj se kreće tačka B prikazana je isprekidanom linijom na slici 69. Ugao između ose rotacije elipsoida (pulsara) i x_3 ose sistema S označio sam sa α . Ovaj ugao se tokom vremena ne menja.

Kada je pulsar slobodan on je veoma udaljen od ostalih astrofizičkih objekata. Takav pulsar je usamljen, i na njega ne deluju spoljašnje sile. To ima za posledicu da je moment impulsa pulsara konstantan vektor

$$\vec{L} = const \quad (11.666)$$

Intenzitet ovog vektora označiću sa L i to je konstantna veličina. Vektor momenta impulsa usmeren je duž x_3 ose sistema S . Ovaj vektor određen je u sistemu S .

Nakon ovog slikovitog opisivanja kretanja slobodnog pulsara (krutog tela) potrebno je prezentovati i konkretne jednačine za ovaj tip kretanja. U ovom slučaju kretanja slobodnog pulsara ispunjen je uslov (11.640), i glavni centralni momenti inercije određuju se na osnovu jednačina (11.655-657). Obzirom da su veličine I_1 i I_2 jednake, a pulsar je slobodan ($U = 0$) jednačina (11.645) dobija oblik

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\beta} \sin \alpha \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \gamma) + \frac{I_1}{2}(\dot{\beta} \sin \alpha \cos \gamma - \dot{\alpha} \sin \gamma) + \frac{I_3}{2}(\dot{\beta} \cos \alpha + \dot{\gamma}) \quad (11.667)$$

Na osnovu ove Lagranževe funkcije i primenom metoda analitičke mehanike mogu se odrediti Ojlerovi uglovi, odnosno može se opisati precesiono kretanje slobodnog pulsara. Konkretne jednačine glase

$$\dot{\alpha} = 0 \quad (11.668)$$

$$I_1 \dot{\beta} = L \quad (11.669)$$

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) L \cos \alpha \quad (11.670)$$

Integracijom jednačina (11.668) i (11.669) dobijam

$$\alpha = \alpha_0 \quad (11.671)$$

$$\beta = \frac{L}{I_1} t + \beta_0 \quad (11.672)$$

Veličine α_0 i β_0 su integracione konstante, i određuju se iz početnih uslova. Zbog jednostavnosti analize uzeću da je ugao β_0 jednak nuli, a ugao α_0 je različit od nule. Na osnovu ovih integracionih konstanata jednačine (11.671) i (11.672) postaju

$$\alpha = \alpha_0 \quad (11.673)$$

$$\beta = \frac{L}{I_1} t \quad (11.674)$$

Zamenom jednačine (11.671) u jednačinu (11.670) dobijam

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) L \cos \alpha_0$$

Integracijom ove jednačine dobija se sledeći rezultat

$$\gamma = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) L \cos \alpha_0 t + \gamma_0 \quad (11.675)$$

Veličine γ_0 je integraciona konstanta. Zbog jednostavnosti analize uzeću da je ugao γ_0 jednak nuli. U skladu sa tim jednačina (11.675) postaje

$$\gamma = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) L \cos \alpha_0 t$$

Ovu jednačinu zapisaću u obliku

$$\gamma = \Omega t \quad (11.676)$$

Veličina Ω određuje se na osnovu sledeće jednačine

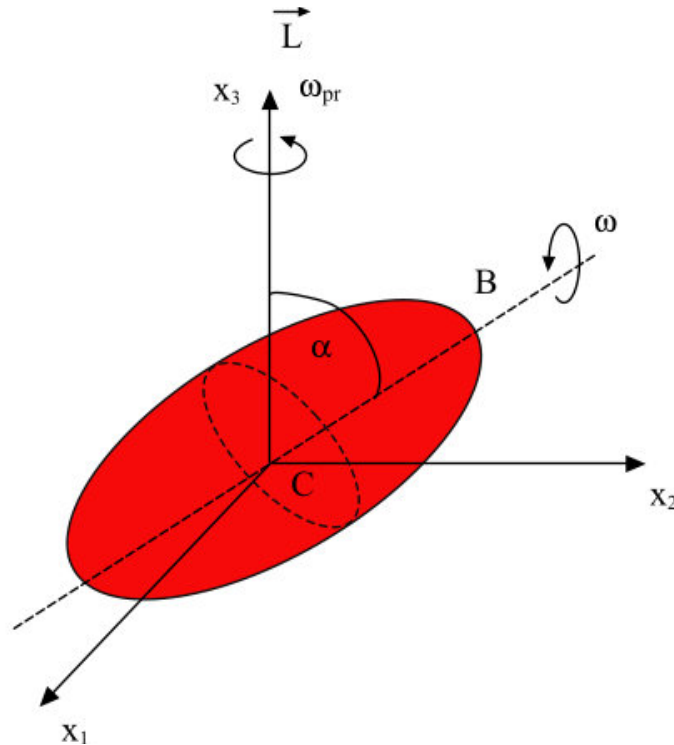
$$\Omega = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) L \cos \alpha_0 \quad (11.677)$$

Sistem S' vezan je za elipsoid i rotira zajedno sa njim. Koordinatne ose ovog sistema poklapaju se sa velikim poluosama elipsoida, a koordinatni početak sistema S' poklapa se sa centrom elipsoida (pulsara). Koordinatne ose ovog sistema označio sam sa x_1' , x_2' i x_3' . Elipsoid (pulsar) rotira oko ose

x_3' konstantnom ugaonom brzinom koju sam označio sa ω . Može se pokazati da se ugaona brzina ω određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\omega = \frac{L}{I_3} \cos \alpha_0 \quad (11.678)$$

Potrebno je povezati precesiono kretanje pulsara sa Ojlerovim uglovima. U tom cilju modifikovao sam sliku 69 i dobio sam sliku 75.



Slika 75

Na slici 75 označen je ugao α i vektor momenta impulsa. Moment impulsa pulsara je konstantan vektor i usmeren je duž x_3 ose sistema S . Ugao α je ugao izmedju ose rotacije elipsoida (pulsara) i vektora momenta impulsa (x_3 ose sistema S). Ovaj ugao se tokom vremena ne menja.

Na slici 69 (slici 75) označio sam i tačku B . Ona se nalazi na osi x_3' . Prilikom precesije pulsara tačka B kreće se po kružnici konstantnom ugaonom brzinom. Ta ugaona brzina naziva se ugaona brzina precesije, i označio sam je sa ω_{pr} . Ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\omega_{pr} = \frac{d\beta}{dt}$$

Korišćenjem jednačine (11.674) dobija se rezultat

$$\omega_{pr} = \frac{L}{I_1} \quad (11.679)$$

Na osnovu jednačina (11.679) i (11.674) dobija se sledeća jednačina

$$\beta = \omega_{pr} t \quad (11.680)$$

Analizirao sam slučaj slobodnog pulsara kod koga je ispunjen uslov (11.640). Koristio sam Lagranževu funkciju (jednačina (11.667)), i prezentovao sam odgovarajuće jednačine za Ojlerove uglove. Sada ću analizirati slučaj slobodnog pulsara kod koga je ispunjen uslov (11.641). Prilikom transformacije jednačine (11.406) uveden je bezdimenzioni parametar ε . On se određuje na osnovu jednačine (11.408). Istakao sam da u literaturi postoje procene parametra ε . Za slučaj slobodnog

pulsara kod koga je ispunjen uslov (11.641) pokazao sam da se veličine a i b malo razlikuju zbog male vrednosti parametra ε (jednačina (11.643)).

Matrica tenzora inercije u slučaju kada je ispunjen uslov (11.640) određuje se na osnovu jednačine (11.654). Može se pokazati da matrica tenzora inercije u slučaju kada je ispunjen uslov (11.641) ima sledeći oblik

$$I_{\mu\nu}^{(C)} = \frac{M}{5} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \quad (11.681)$$

Pri dobijanju ovog rezultata koristi se isti postupak kao i u slučaju dobijanja jednačine (11.401). Uveden je indeks C da bi se naznačilo da se koordinatni početak sistema S' poklapa se sa centrom elipsoida (pulsara).

Za matricu $I_{\mu\nu}^{(C)}$ mogu se naći svojstvene vrednosti. Te veličine nazivaju se glavni centralni momenti inercije. Obeležio sam ih sa I_1, I_2 i I_3 . Može se pokazati da su dijagonalni elementi matrice $I_{\mu\nu}^{(C)}$ jednaki svojstvenim vrednostima. U skladu sa tim važe sledeće jednačine

$$I_1 = \frac{M}{5} (b^2 + c^2) \quad (11.682)$$

$$I_2 = \frac{M}{5} (a^2 + c^2) \quad (11.683)$$

$$I_3 = \frac{2M}{5} (a^2 + b^2) \quad (11.684)$$

Na osnovu ovih rezultata i činjenice da je pulsar slobodan ($U = 0$) jednačina (11.645) dobija oblik

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\beta} \sin \alpha \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \gamma) + \frac{I_2}{2} (\dot{\beta} \sin \alpha \cos \gamma - \dot{\alpha} \sin \gamma) + \frac{I_3}{2} (\dot{\beta} \cos \alpha + \dot{\gamma}) \quad (11.685)$$

Jednačina (11.685) razlikuje se od jednačine (11.667). Na osnovu jednačine (11.667) i primenom metoda analitičke mehanike određeni su Ojlerovi uglovi, odnosno može se opisati precesiono kretanje slobodnog pulsara. Medjutim i na osnovu jednačine (11.685) može se dobiti da slobodni pulsar vrši precesiono kretanje. Da bi to obrazložio koristiću jednačine (11.643), (11.682) i (11.683). Na osnovu jednačina (11.682) i (11.683) dobijam rezultat

$$I_1 - I_2 = \frac{M}{5} (b^2 - a^2) \quad (11.686)$$

Zamenom jednačine (11.643) u jednačinu (11.686) dobijam rezultat

$$I_1 - I_2 = \frac{Ma^2}{5} \left[\frac{(2 - 10^{-6})^2}{(2 + 10^{-6})^2} - 1 \right] \quad (11.687)$$

Na osnovu ovog rezultata vidimo da se veličine I_1 i I_2 zaista malo razlikuju. Primena jednačine (11.685) u cilju određivanja kretanja slobodnog pulsara zahteva korišćenje veoma složenih matematičkih funkcija. Medjutim zbog uslova koji je izražen jednačinom (11.687) umesto jednačine (11.685) može se koristiti jednačina (11.667) za određivanje kretanja slobodnog pulsara. Kao posledica toga dobijam da slobodni pulsar kod koga je ispunjen uslov (11.641) vrši precesiono kretanje, a Ojlerovi uglovi određuju se na osnovu jednačina (11.673), (11.680) i (11.676).

Sada ću odrediti ukupnu snagu gravitacione radijacije za slučaj pulsara kod koga je ispunjen uslov (11.640). U tom slučaju pulsar vrši precesiono kretanje. Takvo kretanje pulsara prikazano je na slikama 69 i 75, a Ojlerovi uglovi određuju se na osnovu jednačina (11.673), (11.680) i (11.676).

Da bi odredio ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje pulsar potrebno je najpre odrediti tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta. Komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ u slučaju kontinualne raspodele mase određuju se na osnovu jednačine (11.153). Najpre ću odrediti komponente tenzora $D_{\mu\nu}$

u sistemu S' . Da bi naznačio da se komponente tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta određuju u sistemu S' uvešću indeks S' . U skladu sa tim jednačina (11.153) dobija oblik

$$(D_{\mu\nu})_{S'} = \int (3x'_{\mu}x'_{\nu} - r'^2\delta_{\mu\nu})\rho_m dV, \quad (11.688)$$

Komponente ovog tenzora određuju se na osnovu sledećih jednačina

$$(D_{11})_{S'} = \int (3x'_1x'_1 - (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3))\rho_m dV, \quad (11.689)$$

$$(D_{12})_{S'} = (D_{21})_{S'} = \int 3x'_1x'_2\rho_m dV, \quad (11.690)$$

$$(D_{13})_{S'} = (D_{31})_{S'} = \int 3x'_1x'_3\rho_m dV, \quad (11.691)$$

$$(D_{22})_{S'} = \int (3x'_2x'_2 - (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3))\rho_m dV, \quad (11.692)$$

$$(D_{23})_{S'} = (D_{32})_{S'} = \int 3x'_2x'_3\rho_m dV, \quad (11.693)$$

$$(D_{33})_{S'} = \int (3x'_3x'_3 - (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3))\rho_m dV, \quad (11.694)$$

Prilikom izračunavanja integrala (11.380-385) koristio sam generalisane sferne koordinate (jednačine (11.386-388)). Da bi izračunao integrale (jednačine (11.689-694)) korišću sledeću formu generalisanih sfernih kooordinata

$$x'_1 = al \sin \alpha \cos \beta \quad (11.695)$$

$$x'_2 = al \sin \alpha \sin \beta \quad (11.696)$$

$$x'_3 = cl \cos \alpha \quad (11.697)$$

Veličina l može imati vrednosti od 0 do 1. Ugao α može imati vrednosti od 0 do π , a ugao β može imati vrednosti od 0 do 2π . Jakobijeva determinanta (Jakobijan) za slučaj ovih generalisanih sfernih koordinata ima vrednost

$$|J| = a^2cl^2 \sin \alpha$$

Korišći generalisane sferne koordinate (jednačine (11.695-697)) dobijam da integrali (11.689-694) imaju sledeće vrednosti

$$(D_{11})_{S'} = \frac{M}{5}(a^2 - c^2) \quad (11.698)$$

$$(D_{22})_{S'} = \frac{M}{5}(a^2 - c^2) \quad (11.699)$$

$$(D_{33})_{S'} = \frac{2M}{5}(c^2 - a^2) \quad (11.700)$$

$$(D_{12})_{S'} = (D_{21})_{S'} = (D_{13})_{S'} = (D_{31})_{S'} = 0$$

Na osnovu jednačina (11.698) i (11.699) zaključujem da su komponente $(D_{11})_{S'}$ i $(D_{22})_{S'}$ jednake

$$(D_{11})_{S'} = (D_{22})_{S'}$$

Na osnovu ovih rezultata dobijam sledeću matricu

$$(D_{\mu\nu})_{S'} = \begin{bmatrix} (D_{11})_{S'} & 0 & 0 \\ 0 & (D_{11})_{S'} & 0 \\ 0 & 0 & (D_{33})_{S'} \end{bmatrix} \quad (11.701)$$

Prilikom određivanja ukupne snage gravitacione radijacije za slučaj pulsara prikazanog na slici 63 najpre sam odredio tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S' , a potom sam odredio i tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S (jednačina (11.396)). Tom prilikom korišćena je matrica rotacije (jednačina (11.395)).

Kada se koriste Ojlerovi ugovi ukupna matrica rotacije određuje se na osnovu jednačine (11.664)

$$R = C(\gamma)A(\alpha)B(\beta)$$

, odnosno jednačine (11.665)

$$R = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Može se pokazati da se tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S određuje na osnovu sledeće jednačine

$$D_{\mu\nu} = R^T (D_{\mu\nu})_{S'} R \quad (11.702)$$

Sa R^T označena je transponovana matrica matrice R . Matrica R^T određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$R^T = (CAB)^T = B^T A^T C^T \quad (11.703)$$

Zamenom jednačine (11.703) u jednačinu (11.702) dobijam

$$D_{\mu\nu} = B^T A^T C^T (D_{\mu\nu})_{S'} CAB \quad (11.704)$$

Može se pokazati da važi sledeći rezultat

$$C^T (D_{\mu\nu})_{S'} C = (D_{\mu\nu})_{S'}$$

Na osnovu ovog rezultata jednačina (11.704) postaje

$$D_{\mu\nu} = B^T A^T (D_{\mu\nu})_{S'} AB$$

Ako izvršimo dalja matična množenja dobićemo komponente tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S . One se određuju na osnovu sledećih jednačina

$$D_{11} = (D_{11})_{S'} [\cos^2(\beta) + \cos^2(\alpha) \sin^2(\beta)] + (D_{33})_{S'} \sin^2(\alpha) \sin^2(\beta) \quad (11.705)$$

$$D_{12} = [(D_{11})_{S'} - (D_{33})_{S'}] \sin^2(\alpha) \cos(\beta) \sin(\beta) \quad (11.706)$$

$$D_{13} = -[(D_{11})_{S'} - (D_{33})_{S'}] \cos(\alpha) \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (11.707)$$

$$D_{21} = [(D_{11})_{S'} - (D_{33})_{S'}] \sin^2(\alpha) \cos(\beta) \sin(\beta) \quad (11.708)$$

$$D_{22} = (D_{11})_{S'} [\sin^2(\beta) + \cos^2(\alpha) \cos^2(\beta)] + (D_{33})_{S'} \sin^2(\alpha) \cos^2(\beta) \quad (11.709)$$

$$D_{23} = [(D_{11})_{S'} - (D_{33})_{S'}] \cos(\alpha) \sin(\alpha) \cos(\beta) \quad (11.710)$$

$$D_{31} = -[(D_{11})_{S'} - (D_{33})_{S'}] \cos(\alpha) \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (11.711)$$

$$D_{32} = [(D_{11})_{S'} - (D_{33})_{S'}] \cos(\alpha) \sin(\alpha) \cos(\beta) \quad (11.712)$$

$$D_{33} = (D_{11})_{S'} \sin^2(\alpha) + (D_{33})_{S'} \cos^2(\alpha) \quad (11.713)$$

Komponente tenzora $(D_{\mu\nu})_{S'}$ mogu se povezati sa komponentama tenzora inercije, odnosno sa glavnim centralnim momentima inercije. Jednačina (11.401) dobijena je za slučaj kada se veličine a, b

i c međusobno razlikuju, odnosno kada je ispunjen uslov (11.644). U slučaju kada je ispunjen uslov (11.640) matrica tenzora inercije ($I_{\mu\nu}^{(c)}$) određuje se na osnovu jednačine (11.654). Za tu matricu mogu se naći svojstvene vrednosti. Te veličine nazivaju se glavni centralni momenti inercije. Obeležio sam ih sa I_1 , I_2 i I_3 . One se određuju na osnovu jednačina (11.655-657). Zbog važnosti jednačina (11.655-657) za dalju analizu ponovo ih navodim

$$I_1 = \frac{M}{5}(a^2 + c^2)$$

$$I_2 = \frac{M}{5}(a^2 + c^2)$$

$$I_3 = \frac{2M}{5}a^2$$

Na osnovu jednačine (11.657) dobijam rezultat

$$a^2 = \frac{5I_3}{2M} \quad (11.714)$$

Na osnovu jednačina (11.714) i (11.655) dobijam rezultat

$$c^2 = \frac{5}{M}(I_1 - \frac{I_3}{2}) \quad (11.715)$$

Zamenom jednačina (11.714) i (11.715) u jednačine (11.698-700) dobijam sledeće rezultate

$$(D_{11})_{S'} = I_3 - I_1 \quad (11.716)$$

$$(D_{22})_{S'} = I_3 - I_1$$

$$(D_{33})_{S'} = 2(I_1 - I_3) \quad (11.717)$$

Veličine $(D_{11})_{S'}$ i $(D_{22})_{S'}$ jednake su. Može se formirati razlika veličina $(D_{11})_{S'}$ i $(D_{33})_{S'}$. Ona iznosi

$$(D_{11})_{S'} - (D_{33})_{S'} = 3(I_3 - I_1) \quad (11.718)$$

Ojlerovi uglovi određuju se na osnovu jednačina (11.673), (11.680) i (11.676). Zbog važnosti Ojlerovih uglova za dalju analizu ponovo ih navodim

$$\alpha = \alpha_0$$

$$\beta = \omega_{prt}$$

$$\gamma = \Omega t$$

Zamenom jednačina (11.716-718), (11.673) i (11.680) u jednačine (11.705-713) dobijam sledeću formu komponentata tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S

$$D_{11}(t) = (I_3 - I_1)[\cos^2(\omega_{prt}) + \cos^2(\alpha)\sin^2(\omega_{prt})] + 2(I_1 - I_3)\sin^2(\alpha)\sin^2(\omega_{prt}) \quad (11.719)$$

$$D_{12}(t) = 3(I_3 - I_1)\sin^2(\alpha)\cos(\omega_{prt})\sin(\omega_{prt}) \quad (11.720)$$

$$D_{13}(t) = -3(I_3 - I_1)\cos(\alpha)\sin(\alpha)\sin(\omega_{prt}) \quad (11.721)$$

$$D_{21}(t) = 3(I_3 - I_1)\sin^2(\alpha)\cos(\omega_{prt})\sin(\omega_{prt})$$

$$D_{22}(t) = (I_3 - I_1)[\sin^2(\omega_{prt}) + \cos^2(\alpha)\cos^2(\omega_{prt})] + 2(I_1 - I_3)\sin^2(\alpha)\cos^2(\omega_{prt}) \quad (11.722)$$

$$D_{23}(t) = 3(I_3 - I_1)\cos(\alpha)\sin(\alpha)\cos(\omega_{prt}) \quad (11.723)$$

$$D_{31}(t) = -3(I_3 - I_1)\cos(\alpha)\sin(\alpha)\sin(\omega_{pr}t)$$

$$D_{32}(t) = 3(I_3 - I_1)\cos(\alpha)\sin(\alpha)\cos(\omega_{pr}t)$$

$$D_{33}(t) = (I_3 - I_1)\sin^2(\alpha) + 3(I_3 - I_1)\cos^2(\alpha) \quad (11.724)$$

Važe sledeće jednačine

$$D_{12}(t) = D_{21}(t)$$

$$D_{13}(t) = D_{31}(t)$$

$$D_{23}(t) = D_{32}(t)$$

Tenzoru gravitacionog kvadropolnog momenta može se pridružiti sledeća matrica

$$D_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} D_{11}(t) & D_{12}(t) & D_{13}(t) \\ D_{12}(t) & D_{22}(t) & D_{23}(t) \\ D_{13}(t) & D_{23}(t) & D_{33}(t) \end{bmatrix} \quad (11.725)$$

Ova matrica je simetrična.

Da bi izračunao ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje pulsar potrebno je odrediti vektor \vec{D} . On se određuje na osnovu jednačine (11.151). U toj jednačini figuriše jedinični vektor \vec{n} . Vektor \vec{n} može se izraziti na dva načina (jednačina (11.220) i jednačina (11.221)). Zbog važnosti vektora \vec{n} za dalju analizu ponovo navodim te jednačine

$$\vec{n} = \sin\theta\cos\psi\vec{i} + \sin\theta\sin\psi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$$

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}$$

Upoređivanjem jednačina (11.220) i (11.221) jednostavno je odrediti komponente vektora \vec{n} .

Istakao sam da se vektor \vec{n} može predstaviti u formi matrice kolone (jednačina (11.250) i jednačina (11.251))

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

U dosadašnjem radu koristio sam jednačinu (11.251), ali ću sada koristiti jednačinu (11.250). Vektor \vec{D} takodje se može predstaviti kao matrica kolona (jednačina (11.156)). Zamenom jednačina (11.156), (11.725) i (11.250) u jednačinu (11.151) dobijam

$$\begin{bmatrix} D_x(t) \\ D_y(t) \\ D_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}(t) & D_{12}(t) & D_{13}(t) \\ D_{12}(t) & D_{22}(t) & D_{23}(t) \\ D_{13}(t) & D_{23}(t) & D_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (11.726)$$

Ako izvršimo matricno množenje dobićemo komponente vektora \vec{D} . Komponente vektora \vec{D} zavise samo od vremena. Potrebno je jednačinu (11.726) dalje transformisati, odnosno uvesti zavisnost komponenata vektora od veličine $t - r/c$

$$\begin{bmatrix} D_x(t - \frac{r}{c}) \\ D_y(t - \frac{r}{c}) \\ D_z(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}(t - \frac{r}{c}) & D_{12}(t - \frac{r}{c}) & D_{13}(t - \frac{r}{c}) \\ D_{12}(t - \frac{r}{c}) & D_{22}(t - \frac{r}{c}) & D_{23}(t - \frac{r}{c}) \\ D_{13}(t - \frac{r}{c}) & D_{23}(t - \frac{r}{c}) & D_{33}(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

Potrebno je odrediti veličinu $\ddot{\vec{D}}(t - \frac{r}{c})$. To je treći izvod vektora \vec{D} po vremenu. Nakon diferenciranja dobijam sledeći rezultat

$$\begin{bmatrix} \ddot{D}_x(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_y(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_z(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{D}_{11}(t - \frac{r}{c}) & \ddot{D}_{12}(t - \frac{r}{c}) & \ddot{D}_{13}(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_{12}(t - \frac{r}{c}) & \ddot{D}_{22}(t - \frac{r}{c}) & \ddot{D}_{23}(t - \frac{r}{c}) \\ \ddot{D}_{13}(t - \frac{r}{c}) & \ddot{D}_{23}(t - \frac{r}{c}) & \ddot{D}_{33}(t - \frac{r}{c}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (11.727)$$

Komponente tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S već sam odredio. Tenzoru gravitacionog kvadropolnog momenta ($D_{\mu\nu}$) pridružio sam matricu (jednačina (11.725)). Treći izvodi komponenata tenzora $D_{\mu\nu}$ po vremenu određuju se na osnovu sledećih jednačina

$$\ddot{D}_{11}(t - \frac{r}{c}) = 12(I_3 - I_1)(\omega_{pr})^3 \sin^2(\alpha) \sin(2\omega_{pr}(t - \frac{r}{c})) \quad (11.728)$$

$$\ddot{D}_{12}(t - \frac{r}{c}) = -12(I_3 - I_1)(\omega_{pr})^3 \sin^2(\alpha) \cos(2\omega_{pr}(t - \frac{r}{c})) \quad (11.729)$$

$$\ddot{D}_{13}(t - \frac{r}{c}) = \frac{3}{2}(I_3 - I_1)(\omega_{pr})^3 \sin(2\alpha) \cos(\omega_{pr}(t - \frac{r}{c})) \quad (11.730)$$

$$\ddot{D}_{22}(t - \frac{r}{c}) = -12(I_3 - I_1)(\omega_{pr})^3 \sin^2(\alpha) \sin(2\omega_{pr}(t - \frac{r}{c})) \quad (11.731)$$

$$\ddot{D}_{23}(t - \frac{r}{c}) = \frac{3}{2}(I_3 - I_1)(\omega_{pr})^3 \sin(2\alpha) \sin(\omega_{pr}(t - \frac{r}{c})) \quad (11.732)$$

$$\ddot{D}_{33}(t - \frac{r}{c}) = 0 \quad (11.733)$$

Važi i sledeća jednačina

$$\ddot{D}_{22}(t - \frac{r}{c}) = -\ddot{D}_{11}(t - \frac{r}{c}) \quad (11.734)$$

U cilju jednostavnijeg zapisivanja jednačina uvešću sledeće skraćenice

$$\bar{A} = \ddot{D}_{11}(t - \frac{r}{c}) \quad (11.735)$$

$$\bar{B} = \ddot{D}_{12}(t - \frac{r}{c}) \quad (11.736)$$

$$\bar{C} = \ddot{D}_{13}(t - \frac{r}{c}) \quad (11.737)$$

$$\bar{D} = \ddot{D}_{23}(t - \frac{r}{c}) \quad (11.738)$$

Na osnovu jednačina (11.734) i (11.735) dobija se sledeći rezultat

$$\ddot{D}_{22} \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\bar{A} \quad (11.739)$$

Jednačina (11.727) transformiše se korišćenjem jednačina (11.735-739) i jednačine (11.733), i dobijam sledeći rezultat

$$\begin{bmatrix} \ddot{D}_x \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ \ddot{D}_y \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ \ddot{D}_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \\ \bar{B} & -\bar{A} & \bar{D} \\ \bar{C} & \bar{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

Komponente vektora $\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$ dobijaju se matricnim množenjem

$$\ddot{D}_x \left(t - \frac{r}{c} \right) = \bar{A}n_x + \bar{B}n_y + \bar{C}n_z \quad (11.740)$$

$$\ddot{D}_y \left(t - \frac{r}{c} \right) = \bar{B}n_x - \bar{A}n_y + \bar{D}n_z \quad (11.741)$$

$$\ddot{D}_z \left(t - \frac{r}{c} \right) = \bar{C}n_x + \bar{D}n_y \quad (11.742)$$

Ako se zameni vektor $\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$ u jednačinu (11.227) i izvrši integracija dobija se ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje pulsar. Sada ću primeniti proceduru koju sam već koristio. Integral koji se pojavljuje u jednačinu (11.227) predstaviću kao razliku dva integrala

$$\int \left[\left| \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 - \left| \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right|^2 \right] d\Omega = I_1 - I_2 \quad (11.743)$$

, gde je

$$I_1 = \int \left| \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 d\Omega \quad (11.744)$$

$$I_2 = \int \left| \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right|^2 d\Omega \quad (11.745)$$

Element prostornog ugla $d\Omega$ u sfernim koordinatama određuje se na osnovu jednačine (11.222).

Izračunaću najpre integral I_1 . Komponente vektora $\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$ određuju se na osnovu jednačina (11.740-742). Zamenom komponenata vektora $\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$ u jednačinu (11.744) dobijam

$$I_1 = \int \left[(\bar{A}n_x + \bar{B}n_y + \bar{C}n_z)^2 + (\bar{B}n_x - \bar{A}n_y + \bar{D}n_z)^2 + (\bar{C}n_x + \bar{D}n_y)^2 \right] d\Omega \quad (11.746)$$

Nakon razvoja podintegralnog izraza u jednačini (11.746) i korišćenjem jednačina (11.442-444) dobija se rezultat

$$I_1 = \int \left[\bar{A}^2(n_x^2 + n_y^2) + \bar{B}^2(n_x^2 + n_y^2) + \bar{C}^2(n_x^2 + n_z^2) + \bar{D}^2(n_y^2 + n_z^2) \right] d\Omega$$

Ovaj integral određujem korišćenjem jednačina (11.439-441) i dobijam sledeći rezultat

$$I_1 = \frac{8\pi}{3} (\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 + \bar{D}^2) \quad (11.747)$$

Preostaje da se uradi integral I_2 . U njemu figuriše skalarni proizvod vektora $\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$ i \vec{n}

$$\ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} = (\bar{A}n_x + \bar{B}n_y + \bar{C}n_z)n_x + (\bar{B}n_x - \bar{A}n_y + \bar{D}n_z)n_y + (\bar{C}n_x + \bar{D}n_y)n_z$$

Zamenom ove veličine u integral I_2 dobijam sledeći rezultat

$$I_2 = \int [(\bar{A}n_x + \bar{B}n_y + \bar{C}n_z)n_x + (\bar{B}n_x - \bar{A}n_y + \bar{D}n_z)n_y + (\bar{C}n_x + \bar{D}n_y)n_z]^2 d\Omega \quad (11.748)$$

Kada se razvije podintegralni izraz dobija se dosta sabiraka. Da bi se izračunao ovaj integral mora se koristiti sledeći rezultat

$$\int n_i n_j n_k n_l d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{lj})$$

Korišćenjem ovog rezultata može se pokazati da su sledeći integrali različiti od nule

$$\int n_x^4 d\Omega = \frac{12\pi}{15} \quad (11.749)$$

$$\int n_y^4 d\Omega = \frac{12\pi}{15} \quad (11.750)$$

$$\int n_y^2 n_z^2 d\Omega = \frac{4\pi}{15} \quad (11.751)$$

$$\int n_x^2 n_z^2 d\Omega = \frac{4\pi}{15} \quad (11.752)$$

$$\int n_x^2 n_y^2 d\Omega = \frac{4\pi}{15} \quad (11.753)$$

Kada se razvije podintegralni izraz u jednačini (11.748) i izvrši integracija dobija se da su sledeći podintegralni članovi različiti od nule

$$I_2 = \int [\bar{A}^2 n_x^4 + \bar{A}^2 n_y^4 + 4\bar{D}^2 n_y^2 n_z^2 + 4\bar{C}^2 n_x^2 n_z^2 - 2\bar{A}^2 n_x^2 n_y^2 + 4\bar{B}^2 n_x^2 n_y^2] d\Omega$$

Ovaj integral se izračunava korišćenjem jednačina (11.749-753) i dobija se sledeći rezultat

$$I_2 = \frac{16\pi}{15} (\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 + \bar{D}^2)$$

Izračunao sam integrale I_1 i I_2 . Zamenom vrednosti tih integrala u jednačinu (11.743) dobijam

$$\int \left[\left| \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 - \left| \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right|^2 \right] d\Omega = \frac{24\pi}{15} (\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 + \bar{D}^2)$$

Ovaj rezultat najpre transformišem korišćenjem jednačina (11.735-738), a potom dobijeni rezultat dalje transformišem korišćenjem jednačina (11.728-730) i jednačine (11.732). Nakon tih algebarskih transformacija dobijam sledeći rezultat

$$\int \left[\left| \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 - \left| \ddot{\vec{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right|^2 \right] d\Omega = \frac{24\pi}{15} (I_3 - I_1)^2 (\omega_{pr})^6 \left[144 \sin^4(\alpha) + \frac{9}{4} \sin^2(2\alpha) \right]$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.227) dobijam sledeću rezultat

$$P_{gem} = -\frac{2\gamma}{45c^5} (I_3 - I_1)^2 (\omega_{pr})^6 \left[144 \sin^4(\alpha) + \frac{9}{4} \sin^2(2\alpha) \right] \quad (11.754)$$

Sa stanovišta gravitoelektromagnetizma ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje pulsar određuje se na osnovu jednačine (11.754). Ova jednačina može se napisati u obliku

$$P_{gem} = -6,4 \frac{\gamma}{c^5} (I_3 - I_1)^2 (\omega_{pr})^6 \left[\sin^4(\alpha) + \frac{9}{4 \cdot 144} \sin^2(2\alpha) \right]$$

, odnosno

$$P_{gem} = -6,4 \frac{\gamma}{c^5} (I_3 - I_1)^2 (\omega_{pr})^6 \left[\sin^4(\alpha) + \frac{1}{64} \sin^2(2\alpha) \right] \quad (11.755)$$

Sa stanovišta opšte teorije relativnosti ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje pulsar određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$P = -\frac{2\gamma}{5c^5}(I_1 - I_3)^2(\Omega)^6 \sin^2(\alpha)[\cos^2(\alpha) + 16\sin^2(\alpha)] \quad (11.756)$$

Jednačina (11.756) prezentovana je u knjizi [16]. Potrebno je dati napomenu u vezi veličine Ω koja figuriše u jednačini (11.756). U knjizi [16] intenzitet momenta impulsa označen je sa J , a veličina Ω određuje se na osnovu jednačine

$$\Omega = \frac{J}{I_1}$$

Intenzitet momenta impulsa označio sam sa L . Ako uporedimo jednačinu na osnovu koje se određuje veličina Ω , sa jednačinom (11.679) vidimo da su veličine Ω i ω_{pr} identične. U skladu sa tim jednačina (11.756) može se napisati na sledeći način

$$P = -\frac{2\gamma}{5c^5}(I_1 - I_3)^2(\omega_{pr})^6 \sin^2(\alpha)[\cos^2(\alpha) + 16\sin^2(\alpha)] \quad (11.757)$$

Jednačina (11.757) može se napisati u obliku

$$P = -6,4 \frac{\gamma}{c^5}(I_3 - I_1)^2(\omega_{pr})^6 \sin^2(\alpha) \left[\cos^2(\alpha) \frac{1}{16} + \sin^2(\alpha) \right]$$

,odnosno

$$P = -6,4 \frac{\gamma}{c^5}(I_3 - I_1)^2(\omega_{pr})^6 \left[\sin^4(\alpha) + \frac{1}{64} \sin^2(2\alpha) \right] \quad (11.758)$$

Upoređivanjem jednačina (11.755) i (11.758) vidimo da su identične.

Sada ću analizirati slučaj slobodnog pulsara kod koga je ispunjen uslov (11.641). Pokazao sam da se u tom slučaju veličine a i b malo razlikuju zbog male vrednosti parametra ε (jednačina (11.643)). Takođe sam pokazao da se zbog uslova koji je izražen jednačinom (11.686) umesto jednačine (11.685) može koristiti jednačina (11.667) za određivanje kretanje slobodnog pulsara. Kao posledica toga dobijam da slobodni pulsar kod koga je ispunjen uslov (11.641) vrši precesiono kretanje, a Ojlerovi uglovi određuju se na osnovu jednačina (11.673), (11.680) i (11.676).

U ovom slučaju izračunavanje ukupne snage gravitacione radijacije koju emituje pulsar sa matematičke tačke gledišta je komplikovano. Da bi odredio ukupnu snagu gravitacione radijacije koju emituje pulsar potrebno je najpre odrediti tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta. Komponente tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta u slučaju kontinualne raspodele mase određuju se na osnovu jednačine (11.153). Najpre ću odrediti komponente tenzora u sistemu S' . Da bi naznačio da se komponente tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta određuju u sistemu S' uvešću indeks S' . U skladu sa tim jednačina (11.153) dobija oblik

$$(D_{\mu\nu})_{S'} = \int (3x'_\mu x'_\nu - r'^2 \delta_{\mu\nu}) \rho_m dV' \quad (11.759)$$

U ovom slučaju koriste se generalisane sferne koordinate koje su određene jednačinama (11.386-388). Nema potrebe ponavljati celokupnu matematičku proceduru određivanja komponenta tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S' jer je u principu to već uradjeno kada sam određivao ukupnu snagu gravitacione radijacije za pulsar koji je prikazan na slici 63. Koristiću već dobijene rezultate (jednačine (11.389-392)), ali ću uvesti indeks S' da bi naznačio da su komponente tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta određene u sistemu S' . Na osnovu jednačina (11.389-392) dobijam sledeće rezultate

$$(D_{11})_{S'} = \frac{2Ma^2}{5} - \frac{M}{5}(b^2 + c^2) \quad (11.760)$$

$$(D_{22})_{S'} = \frac{2Mb^2}{5} - \frac{M}{5}(a^2 + c^2) \quad (11.761)$$

$$(D_{33})_{S'} = \frac{2Mc^2}{5} - \frac{2M}{5}(a^2 + b^2) \quad (11.762)$$

$$(D_{12})_{S'} = (D_{21})_{S'} = (D_{13})_{S'} = (D_{31})_{S'} = 0$$

Na osnovu ovih rezultata dobijam sledeću matricu

$$(D_{\mu\nu})_{S'} = \begin{bmatrix} (D_{11})_{S'} & 0 & 0 \\ 0 & (D_{22})_{S'} & 0 \\ 0 & 0 & (D_{33})_{S'} \end{bmatrix} \quad (11.763)$$

Komponente tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta mogu se povezati sa komponentama tenzora inercije. Pokazao sam da u slučaju slobodnog pulsara kod koga je ispunjen uslov (11.641) matrica tenzora inercije određuje se na osnovu jednačine (11.401). Veličine I_1 , I_2 i I_3 nazivaju se glavni centralni momenti inercije, i određuju se na osnovu jednačina (11.402-404). Korišćenjem jednačina (11.389), (11.390), (11.402) i (11.403) dobio sam rezultat

$$D_{11} - D_{22} = 3(I_2 - I_1)$$

Obzirom da koristim indeks S' ova jednačina može se napisati u obliku

$$(D_{11})_{S'} - (D_{22})_{S'} = 3(I_2 - I_1)$$

, odnosno

$$(D_{22})_{S'} = (D_{11})_{S'} - 3(I_2 - I_1) \quad (11.764)$$

Više puta sam istakao da se veličine a i b malo razlikuju zbog male vrednosti parametra ε (jednačina (11.643)). Kao posledica male razlike između veličine a i b dobio sam jednačinu (11.412). Zamenom jednačine (11.412) u jednačinu (11.764) dobijam

$$(D_{22})_{S'} = (D_{11})_{S'} - 3\varepsilon I_3$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.763) dobijam

$$(D_{\mu\nu})_{S'} = \begin{bmatrix} (D_{11})_{S'} & 0 & 0 \\ 0 & (D_{11})_{S'} - 3\varepsilon(I_2 - I_1) & 0 \\ 0 & 0 & (D_{33})_{S'} \end{bmatrix}$$

, odnosno

$$(D_{\mu\nu})_{S'} = \begin{bmatrix} (D_{11})_{S'} & 0 & 0 \\ 0 & (D_{11})_{S'} & 0 \\ 0 & 0 & (D_{33})_{S'} \end{bmatrix} - 3\varepsilon I_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.765)$$

Ovakav način zapisivanja matrice ima pogodnosti za dalju analizu. Matrica $(D_{\mu\nu})_{S'}$ može se predstaviti kao zbir dve matrice

$$(D_{\mu\nu})_{S'} = (D_{\mu\nu})_{S',1} + (D_{\mu\nu})_{S',2} \quad (11.766)$$

Na osnovu jednačina (11.765) i (11.766) dobijam

$$(D_{\mu\nu})_{S',1} = \begin{bmatrix} (D_{11})_{S'} & 0 & 0 \\ 0 & (D_{11})_{S'} & 0 \\ 0 & 0 & (D_{33})_{S'} \end{bmatrix} \quad (11.767)$$

$$(D_{\mu\nu})_{S',2} = -3\varepsilon I_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.768)$$

Ukupna matrica rotacije određuje se na osnovu jednačine (11.664)

$$R = C(\gamma)A(\alpha)B(\beta)$$

, odnosno jednačine (11.665)

$$R = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da bi odredio tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S koristim jednačinu (11.702), a matrica R^T određuje se na osnovu jednačine (11.703). Zamenom jednačina (11.765) i (11.703) u jednačinu (11.702) dobijam

$$D_{\mu\nu} = B^T A^T C^T \begin{bmatrix} (D_{11})_{S'} & 0 & 0 \\ 0 & (D_{11})_{S'} & 0 \\ 0 & 0 & (D_{33})_{S'} \end{bmatrix} CAB - 3\varepsilon I_3 B^T A^T C^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} CAB \quad (11.769)$$

Matrica $D_{\mu\nu}$ može se predstaviti kao zbir dve matrice

$$D_{\mu\nu} = D_{\mu\nu 1} + D_{\mu\nu 2} \quad (11.770)$$

Na osnovu jednačina (11.769) i (11.770) dobijam

$$D_{\mu\nu 1} = B^T A^T C^T \begin{bmatrix} (D_{11})_{S'} & 0 & 0 \\ 0 & (D_{11})_{S'} & 0 \\ 0 & 0 & (D_{33})_{S'} \end{bmatrix} CAB \quad (11.771)$$

$$D_{\mu\nu 2} = -3\varepsilon I_3 B^T A^T C^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} CAB \quad (11.772)$$

Korišćenjem jednačina (11.767) i (11.768) matrice $D_{\mu\nu 1}$ i $D_{\mu\nu 2}$ mogu se napisati i na sledeći način

$$D_{\mu\nu 1} = B^T A^T C^T (D_{\mu\nu})_{S'} CAB \quad (11.773)$$

$$D_{\mu\nu 2} = B^T A^T C^T (D_{\mu\nu})_{S'} CAB \quad (11.774)$$

Sada ću prezentovati određene rezultate koje ću koristiti u daljem radu. Kretanje pulsara kod koga je ispunjen uslov (11.641) prikazano je na slikama 69 i 75. Pulsar rotira oko ose x_3' konstantnom ugaonom brzinom koju sam označio sa ω . Ona se određuje na osnovu jednačine (11.678). Ojlerov ugao γ može se povezati sa ugaonom brzinom ω na sledeći način. Deobom jednačine (11.677) sa jednačinom (11.678) dobijam rezultat

$$\Omega = \omega \left(1 - \frac{I_3}{I_1} \right) \quad (11.775)$$

Zamenom jednačine (11.775) u jednačinu (11.676) dobijam

$$\gamma = \omega t \left(1 - \frac{I_3}{I_1} \right) \quad (11.776)$$

Povezao sam ugaonu brzinu rotacije pulsara oko ose x_3' sa Ojlerovim uglom γ . U dosadašnjem tekstu istakao sam da periodi rotacije otkrivenih pulsara pripadaju intervalu od 0,00139 sekundi (PSR J1748-2446 ad) do 11,77894 sekunde (PSR J1841-0456). Pulsar PSR J1748-2446 ad napravi oko 719 obrtaja u sekundi. Na osnovu ovih vrednosti o periodima rotacije pulsara zaključujem da pulsari imaju velike ugaone brzine rotacije.

Ojlerov ugao β određuje se na osnovu jednačine (11.680). U toj jednačini figuriše ugaona brzina precesije pulsara (ω_{pr}). Potrebno je dati numeričke vrednosti za ovu veličinu. Potrebno je najpre da se podsetimo da pulsari mogu biti slobodni, ali se mogu nalaziti i u binarnim zvezdanim sistemima. Postoje binarni sistemi koji se sastoje od pulsara i neke zvezde koja nije pulsar. Astronomi su otkrili binarne sisteme koji se sastoje od dva pulsara. Primer takvog binarnog sistema je PSR J0737-3039A/B.

Kada se zvezde (pulsari) nalaze u binarnim sistemima može doći do njihovog precesionog kretanja. Prilikom precesionog kretanja osa rotacije zvezde (pulsara) opisuje konus. Na osnovu opšte teorije relativnosti predviđena je pojava precesije zvezda u binarnim sistemima.

Za proučavanje efekta precesije koriste se pulsari zbog svojih specifičnih karakteristika. Pulsari emituju radio talase, a periodi rotacije pulsara se izuzetno precizno mere. Primer binarnog sistema koji

se sastoji od dva pulsara je PSR J0737-3039A/B. Proučavanjem ovog binarnog sistema utvrđeno je da ugaona brzina precesije jednog od pulsara iznosi $4,47^0$ po godini, odnosno

$$\omega_{pr} = 4,47^0 / godina$$

Ovaj rezultat je u dobroj saglasnosti sa predviđanjima opšte teorije relativnosti. Na osnovu ovog rezultata zaključujemo da je ugaona brzina precesije mnogo manja od ugaone brzine ω , odnosno

$$\omega_{pr} \ll \omega \quad (11.777)$$

Na osnovu jednačina (11.413) i (11.755) može se izvesti zaključak da ukupna snaga gravitacione radijacije veoma zavisi od odgovarajuće ugaone brzine.

Potrebno je prezentovati i pojedine rezultate o diferenciranju matrica. Kao primer uzeću matricu A čije su sve komponente funkcije vremena

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Matrica A se diferencira po vremenu tako što se svaka komponenta matrice diferencira po vremenu

$$\frac{dA}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} a_{11}(t) & \frac{d}{dt} a_{12}(t) \\ \frac{d}{dt} a_{21}(t) & \frac{d}{dt} a_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Uvešću u analizu i matricu B . Sve njene komponente takodje su funkcije vremena

$$B = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Izvod matrice B po vremenu određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\frac{dB}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} b_{11}(t) & \frac{d}{dt} b_{12}(t) \\ \frac{d}{dt} b_{21}(t) & \frac{d}{dt} b_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Neka je matrica C jednaka zbiru matrica A i B

$$C = A + B$$

Jednostavno je pokazati da se izvod matrice C po vremenu određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} \quad (11.778)$$

Možemo analizirati i izvod proizvoda matrica. Neka je matrica D jednaka proizvodu matrica A i B

$$D = AB$$

Izvod matrice D po vremenu određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dA}{dt} B + A \frac{dB}{dt} \quad (11.779)$$

Uočava se formalna sličnost jednačine (11.779) sa izvodom proizvoda dve skalarne funkcije.

Uvešću sada u analizu i matricu E . Sve njene komponente takodje su funkcije vremena

$$E = \begin{bmatrix} e_{11}(t) & e_{12}(t) \\ e_{21}(t) & e_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Neka je matrica F jednaka proizvodu tri matrica

$$F = ABE$$

Izvod matrice F po vremenu određuje se korišćenjem jednačine (11.779)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d(AB)}{dt} E + (AB) \frac{dE}{dt}$$

, odnosno

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dA}{dt}BE + A\frac{dB}{dt}E + AB\frac{dE}{dt} \quad (11.780)$$

Uočava se formalna sličnost jednačine (11.780) sa izvodom proizvoda tri skalarne funkcije.

Ako je neka matrica X jednaka proizvodu četiri ili više matrica, njen izvod po vremenu određuje se primenom predhodno opisane procedure.

Mogu se definisati i viši izvodi matrice po vremenu. Na primer drugi izvod matrice A po vremenu određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\frac{d^2A}{dt^2} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} a_{11}(t) & \frac{d^2}{dt^2} a_{12}(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} a_{21}(t) & \frac{d^2}{dt^2} a_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (11.781)$$

Sada ću uporediti jednačinu (11.701) sa jednačinom (11.767). Ovim jednačinama određene su dve matrice. Postoji sličnost izmedju ovih matrica. Obe matrice su dijagonalne, i njihovi matricni elementi su konstantne veličine. Kod matrice $(D_{\mu\nu})_S$, koja je određena jednačinom (11.701) prva dva člana na dijagonali jednaka su. I u slučaju matrice $(D_{\mu\nu})_{S \cdot 1}$ prva dva člana na dijagonali jednaka su.

Za slučaj pulsara kod koga je ispunjen uslov (11.640) tenzor gravitacionog kvadropolnog momenta u sistemu S određuje se na osnovu jednačine (11.702). Pokazao sam da se komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ u ovom slučaju određuju na osnovu jednačina (11.705-713). Komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ ne zavise od Ojlerovog ugla γ . Jednačina (11.776) povezuje ugao γ i ugaonu brzinu ω . U skladu sa tim na osnovu jednačina (11.705-713) i jednačine (11.776) zaključujem da komponente tenzora $D_{\mu\nu}$ ne zavise od ugaone brzine ω . Treći izvodi komponenata tenzora $D_{\mu\nu}$ po vremenu određuju se na osnovu jednačina (11.728-733). Sve ove komponente zavise od trećeg stepena ugaone brzine precesije, ali ugaona brzina precesije kod realnih fizičkih sistema ima malu vrednost. Kao primer uzeo sam binarni sistem PSR J0737-3039A/B. Kod ovog binarnog sistema utvrđeno je da ugaona brzina precesije jednog od pulsara iznosi $4,47^0$ po godini.

Prezentovane rezultate korišću prilikom analize matrice $D_{\mu\nu \cdot 1}$. Ona se određuje na osnovu jednačine (11.771). Zbog važnosti ove matrice za dalju analizu ponovo je navodim

$$D_{\mu\nu \cdot 1} = B^T A^T C^T \begin{bmatrix} (D_{11})_S & 0 & 0 \\ 0 & (D_{11})_S & 0 \\ 0 & 0 & (D_{33})_S \end{bmatrix} CAB$$

Korišćenjem jednačina (11.660) i (11.767) dobija se rezultat

$$C^T \begin{bmatrix} (D_{11})_S & 0 & 0 \\ 0 & (D_{11})_S & 0 \\ 0 & 0 & (D_{33})_S \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} (D_{11})_S & 0 & 0 \\ 0 & (D_{11})_S & 0 \\ 0 & 0 & (D_{33})_S \end{bmatrix}$$

, odnosno

$$C^T (D_{\mu\nu})_{S \cdot 1} C = (D_{\mu\nu})_{S \cdot 1}$$

Zamenom ove jednačine u jednačinu (11.773) dobijam

$$D_{\mu\nu \cdot 1} = B^T A^T (D_{\mu\nu})_{S \cdot 1} AB \quad (11.782)$$

Komponente matrice $D_{\mu\nu \cdot 1}$ ne zavise od ugla γ odnosno od ugaone brzine ω . Podsetimo se da su veličine γ i ω povezane jednačinom (11.776).

Ako se izvrše matricna množenja u jednačini (11.782) dobijaju se komponente tenzora $D_{\mu\nu \cdot 1}$

$$(D_{11})_1 = (D_{11})_S [\cos^2(\beta) + \cos^2(\alpha) \sin^2(\beta)] + (D_{33})_S \sin^2(\alpha) \sin^2(\beta)$$

$$(D_{12})_1 = [(D_{11})_S - (D_{33})_S] \sin^2(\alpha) \cos(\beta) \sin(\beta)$$

$$(D_{13})_1 = -[(D_{11})_S - (D_{33})_S] \cos(\alpha) \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$(D_{21})_1 = [(D_{11})_S - (D_{33})_S] \sin^2(\alpha) \cos(\beta) \sin(\beta)$$

$$(D_{22})_1 = (D_{11})_S [\sin^2(\beta) + \cos^2(\alpha) \cos^2(\beta)] + (D_{33})_S \sin^2(\alpha) \cos^2(\beta)$$

$$(D_{23})_1 = [(D_{11})_S - (D_{33})_S] \cos(\alpha) \sin(\alpha) \cos(\beta)$$

$$(D_{31})_1 = -[(D_{11})_S - (D_{33})_S] \cos(\alpha) \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$(D_{32})_1 = [(D_{11})_S - (D_{33})_S] \cos(\alpha) \sin(\alpha) \cos(\beta)$$

$$(D_{33})_1 = (D_{11})_S \sin^2(\alpha) + (D_{33})_S \cos^2(\alpha)$$

Pri dobijanju ovih rezultata mogu da se iskoriste jednačine (11.705-713), jer postoji formalna sličnost između matrice $(D_{\mu\nu})_S$ i matrice $(D_{\mu\nu})_{S,1}$. Matrice $(D_{\mu\nu})_S$ i $(D_{\mu\nu})_{S,1}$ određuju se na osnovu jednačina (11.701) i (11.767) respektivno.

Mogu se odrediti i treći izvodi komponenata tenzora $D_{\mu\nu,1}$ po vremenu. Međutim svi treći izvodi komponenata tenzora $D_{\mu\nu,1}$ po vremenu zavise od trećeg stepena ugaone brzine precesije (ω_{pr}^3). Ovo se može simbolički napisati na sledeći način

$$\ddot{D}_{\mu\nu,1} \sim \omega_{pr}^3 \quad (11.783)$$

Istakao sam da ugaona brzina precesije kod realnih fizičkih sistema ima malu vrednost.

Analizirao sam i matricu $D_{\mu\nu,2}$ i odredio sam treće izvode komponenata matrice $D_{\mu\nu,2}$ po vremenu. Ti rezultati biće prezentovani u daljem tekstu. Pokazuje se da su svi treći izvodi komponenata matrice $D_{\mu\nu,2}$ po vremenu proporcionalni trećem stepenu ugaone brzine. To se može simbolički napisati na sledeći način

$$\ddot{D}_{\mu\nu,2} \sim \omega^3 \quad (11.784)$$

Uporedimo sada jednačine (11.783) i (11.784). Obzirom da je ugaona brzina ω mnogo veća od ugaone brzine precesije dobijam sledeći uslov

$$\ddot{D}_{\mu\nu,2} \gg \ddot{D}_{\mu\nu,1} \quad (11.785)$$

Komponente matrice $\ddot{D}_{\mu\nu,2}$ mnogo su veće od komponenata matrice $\ddot{D}_{\mu\nu,1}$. To ima za posledicu da kada se razmatra ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje pulsar kod koga je ispunjen uslov (11.641) matricu $D_{\mu\nu,1}$ u jednačini (11.770) mogu zanemariti i dobijam sledeći rezultat

$$D_{\mu\nu} = D_{\mu\nu,2} \quad (11.786)$$

U predhodnom tekstu konstatovao sam da su svi treći izvodi komponenata matrice $D_{\mu\nu,2}$ po vremenu proporcionalni trećem stepenu ugaone brzine. Potrebno je to dokazati. Matrica $D_{\mu\nu,2}$ određuje se na osnovu jednačine (11.772). Zbog važnosti ove matrice za dalju analizu ponovo je navodim

$$D_{\mu\nu,2} = -3\varepsilon I_3 B^T A^T C^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} CAB$$

Korišćenjem jednačine (11.660) može se dokazati sledeća jednačina

$$C^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} \sin^2(\gamma) & -\sin(\gamma)\cos(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma)\cos(\gamma) & \cos^2(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zamenom ovog rezultata u jednačinu (11.772) dobijam

$$D_{\mu\nu,2} = -3\varepsilon I_3 B^T A^T \begin{bmatrix} \sin^2(\gamma) & -\sin(\gamma)\cos(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma)\cos(\gamma) & \cos^2(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} AB \quad (11.787)$$

Komponente tenzora $D_{\mu\nu 2}$ zavise od ugla γ . Na osnovu jednačine (11.676) dobijam sledeći rezultat

$$D_{\mu\nu 2} = -3\epsilon I_3 B^T A^T \begin{bmatrix} \sin^2(\Omega t) & -\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) & 0 \\ -\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) & \cos^2(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} AB \quad (11.788)$$

Matrica B određuje se na osnovu jednačine (11.658). Pojedini matricni elementi matrice B zavise od ugla β . Promena ugla β sa vremenom određuje se na osnovu jednačine (11.680). Obzirom da uglovi β i γ zavise od vremena zaključujem da pojedine komponente tenzora $D_{\mu\nu 2}$ zavise od vremena.

Može se uvesti zavisnost komponenata tenzora $D_{\mu\nu 2}$ od veličine $t - \frac{r}{c}$. U skladu sa tim jednačina (11.788) dobija oblik

$$D_{\mu\nu 2}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -3\epsilon I_3 B^T A^T \begin{bmatrix} \sin^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & -\sin\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\cos\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 0 \\ -\sin\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\cos\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & \cos^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} AB \quad (11.789)$$

Potrebno je odrediti treći izvod komponenata tenzora $D_{\mu\nu 2}$ po vremenu. Da bi se to postiglo mora se izvršiti diferenciranje proizvoda matrica koje figurišu na desnoj strani jednačine (11.789). O diferenciranju matrica bilo je reči u dosadašnjem tekstu.

Na osnovu jednačine (11.673) zaključujem da su svi matricni elementi matrice A konstantne veličine. To ima za posledicu da je izvod matrice A po vremenu jednak nula matrici.

Ako bi odredio treći izvod proizvoda matrica koje figurišu na desnoj strani jednačine (11.789) dobio bi veći broj sabiraka. Najbitniji sabirak koji figuriše u toj sumi je sledeći

$$-3\epsilon I_3 B^T A^T \left\{ \frac{d^3}{dt^3} \begin{bmatrix} \sin^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & -\sin\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\cos\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 0 \\ -\sin\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\cos\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & \cos^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} AB$$

Nakon diferenciranja dobijam sledeći rezultat

$$-3\epsilon I_3 B^T A^T (\Omega)^3 \begin{bmatrix} -4\sin\left(2\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 4(-1 + 2\cos^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)) & 0 \\ 4(-1 + 2\cos^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)) & 4\sin\left(2\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} AB \quad (11.790)$$

Ovaj sabirak je najbitniji jer u njemu figuriše veličina $(\Omega)^3$. Ako bi odredio treći izvod proizvoda matrica koje figurišu na desnoj strani jednačine (11.789) dobio bi članove koji sadrže veličine $\Omega^2\omega_{pr}$, $\Omega(\omega_{pr})^2$ i $(\omega_{pr})^3$. Istakao sam da ugaona brzina precesije ima malu vrednost. Iz tog razloga članove koji sadrže veličine $\Omega^2\omega_{pr}$, $\Omega(\omega_{pr})^2$ i $(\omega_{pr})^3$ zanemarujem, i ostaje samo član koji se određuje na osnovu jednačine (11.790). U skladu sa ovom aproksimacijom dobijam sledeći rezultat

$$\ddot{D}_{\mu\nu 2}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -3\varepsilon I_3 B^T A^T (\Omega)^3 \begin{bmatrix} -4 \sin\left(2\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 4(-1 + 2\cos^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)) & 0 \\ 4(-1 + 2\cos^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)) & 4\sin\left(2\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} AB$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (11.775) i dobija se sledeći rezultat

$$\ddot{D}_{\mu\nu 2}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -12\varepsilon I_3 \omega^3 \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)^3 B^T A^T \begin{bmatrix} -\sin\left(2\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & -1 + 2\cos^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 0 \\ -1 + 2\cos^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & \sin\left(2\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} AB \quad (11.791)$$

Odredio sam treći izvod tenzora gravitacionog kvadropolnog momenta po vremenu. Na osnovu jednačine (11.151) dobijam jednačinu

$$\ddot{\vec{D}}_2\left(t - \frac{r}{c}\right) = \ddot{D}_{\mu\nu 2}\left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{n} \quad (11.792)$$

Jedinični vektor \vec{n} može se izraziti na dva načina (jednačina (11.220) i jednačina (11.221)). Istakao sam da se vektor \vec{n} može predstaviti u formi matrice kolone (jednačina (11.250) i jednačina (11.251)). I vektor $\ddot{\vec{D}}_2\left(t - \frac{r}{c}\right)$ može se predstaviti u formi matrice kolone

$$\ddot{\vec{D}}_2\left(t - \frac{r}{c}\right) = \begin{bmatrix} \ddot{D}_{x 2}\left(t - \frac{r}{c}\right) \\ \ddot{D}_{y 2}\left(t - \frac{r}{c}\right) \\ \ddot{D}_{z 2}\left(t - \frac{r}{c}\right) \end{bmatrix} \quad (11.793)$$

Zamenom jednačina (11.793), (11.791) i (11.250) u jednačinu (11.792) dobijam

$$\begin{bmatrix} \ddot{D}_{x 2}\left(t - \frac{r}{c}\right) \\ \ddot{D}_{y 2}\left(t - \frac{r}{c}\right) \\ \ddot{D}_{z 2}\left(t - \frac{r}{c}\right) \end{bmatrix} = -12\varepsilon I_3 \omega^3 \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)^3 B^T A^T \begin{bmatrix} -\sin\left(2\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & -1 + 2\cos^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 0 \\ -1 + 2\cos^2\left(\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & \sin\left(2\Omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} AB \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (11.794)$$

Da bi se odredila ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje pulsar potrebno je odrediti komponente vektora $\ddot{\vec{D}}_2\left(t - \frac{r}{c}\right)$, a potom primeniti jednačinu (11.227). Na osnovu jednačine (11.794) mogu se odrediti komponente vektora $\ddot{\vec{D}}_2\left(t - \frac{r}{c}\right)$. Medjutim procedura određivanja komponenata vektora $\ddot{\vec{D}}_2\left(t - \frac{r}{c}\right)$ je sa matematičke tačke gledišta veoma komplikovana, jer u izrazu na desnoj strani

jednačine (11.794) figuriše proizvod šest matrica. Medjutim i pored matematičke složenosti problema može se proceniti ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje pulsar.

Korišćenjem komponenta vektora $\ddot{\vec{D}}_2 \left(t - \frac{r}{c} \right)$ jednačina (11.227) može se napisati na sledeći način

$$P_{gem} = -\frac{\gamma}{36\pi c^5} \int \left[\left(\ddot{D}_{x2} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 + \left(\ddot{D}_{y2} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 + \left(\ddot{D}_{z2} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 - \left(\ddot{D}_{x2} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_x + \ddot{D}_{y2} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_y + \ddot{D}_{z2} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_z \right)^2 \right] d\Omega \quad (11.795)$$

Ova jednačina može se dalje razviti, odnosno može se naći kvadrat sledećeg člana

$$\ddot{D}_{x2} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_x + \ddot{D}_{y2} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_y + \ddot{D}_{z2} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_z$$

Na osnovu jednačine (11.794) sledi da je svaka komponenta vektora $\ddot{\vec{D}}_2 \left(t - \frac{r}{c} \right)$ proporcionalna sledećoj skalarnoj veličini

$$\varepsilon I_3 \omega^3 \left(1 - \frac{I_3}{I_1} \right)^3$$

Tu veličinu označicu sa S

$$S = \varepsilon I_3 \omega^3 \left(1 - \frac{I_3}{I_1} \right)^3$$

Ako se zameni svaka komponenta vektora $\ddot{\vec{D}}_2 \left(t - \frac{r}{c} \right)$ u jednačini (11.795) onda se ispred integrala može izvući kvadrat skalarne veličine S . Na osnovu ove analize sledi da je ukupna snaga gravitacione radijacije koju emituje pulsar proporcionalna veličini S^2 , odnosno

$$P_{gem} \sim \varepsilon^2 I_3^2 \omega^6 \left(1 - \frac{I_3}{I_1} \right)^6 \quad (11.796)$$

Ako se uporedi ova jednačina sa jednačinom (11.413) uočava se sličnost. Na osnovu jednačine (11.413) određuje se ukupna snaga gravitacione radijacije za slučaj pulsara prikazanog na slici 63.

U ovom poglavlju prezentovano je dosta jednačina. Iz tog razloga potrebno je najbitnije rezultate predstaviti tabelarno. Tabela se sastoji od dve kolone. U prvoj koloni biće dati pojedini rezultati Opšte teorije relativnosti, a u drugoj koloni biće dati pojedini rezultati iz gravitoelektromagnetizma. Ovaj tabelarni prikaz omogućuje nam brzu preglednost dobijenih rezultata.

Opšta teorija relativnosti	Gravitoelektromagnetizam
$P = \frac{32 \gamma^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 a^5}$	$P_{gem} = -\frac{32 \gamma^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 a^5}$
$P = \frac{32 \gamma^4 m_p^2 m_n^2 (m_p + m_n)}{5 c^5 a^5} f(e)$	$P_{gem} = -\frac{32 \gamma^4 m_p^2 m_n^2 (m_p + m_n)}{5 c^5 a^5} f_{gem}(e)$
$f(e) = \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) (1 - e^2)^{-7/2}$	$f_{gem}(e) = (1 + 0,531e^2)(1 - e^2)^{-7/2}$

$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{96\gamma^{5/3}}{5c^5} \frac{m_p m_n}{(m_p + m_n)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-8/3} f(e)$	$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{T}}{T}\right)_{gem} \\ = -\frac{96\gamma^{5/3}}{5c^5} \frac{m_p m_n}{(m_p + m_n)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-8/3} f_{gem}(e) \end{aligned}$
$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64\gamma^3}{5c^5 a^3} m_p m_n (m_p + m_n) f(e)$	$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle_{gem} = -\frac{64\gamma^3}{5c^5 a^3} m_p m_n (m_p + m_n) f_{gem}(e)$
$\dot{\omega} = 3 \frac{\gamma^{2/3}}{c^2} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-5/3} (m_p + m_n)^{2/3} (1 - e^2)^{-1}$	$\frac{\Delta\varphi}{T} = 3 \frac{\gamma^{2/3}}{c^2} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-5/3} (m_p + m_n)^{2/3} (1 - e^2)^{-1}$
$P = \frac{32\gamma\varepsilon^2 I_{33}^2 \omega^6}{5c^5}$	$P_{gem} = -\frac{32\gamma\varepsilon^2 I_{33}^2 \omega^6}{5c^5}$
$t_{koal} = \frac{5c^5 a_0^4}{256\gamma^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}$	$t_{koal} = \frac{5c^5 a_0^4}{256\gamma^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}$
$a(t) = a_0 \left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{1/4}$	$a(t) = a_0 \left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{1/4}$
$\omega = \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{a_0^3}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}}$	$\omega = \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{a_0^3}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}}$
$v_{gt} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{a_0^3}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}}$	$v_{gt} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{a_0^3}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_{koal}}\right)^{3/8}}$
$P = -6,4 \frac{\gamma}{c^5} (I_3 - I_1)^2 (\omega_{pr})^6 \left[\sin^4(\alpha) + \frac{1}{64} \sin^2(2\alpha) \right]$	$P_{gem} = -6,4 \frac{\gamma}{c^5} (I_3 - I_1)^2 (\omega_{pr})^6 \left[\sin^4(\alpha) + \frac{1}{64} \sin^2(2\alpha) \right]$

Tabela 4

12. Povećanje astronomske jedinice

Za merenje rastojanja (daljine) u astronomiji koriste se sledeće astronomske jedinice za daljinu: astronomska jedinica, svetlosna godina i parsek. Svetlosna godina se od strane profesionalnih astronoma veoma retko koristi. Parsek je povezan sa astronomskom jedinicom, jer parsek je definisan kao rastojanje sa koga se poluprečnik Zemljine orbite oko Sunca vidi pod uglom (paralaksom) od jedne lučne sekunde.

Astronomska jedinica je veoma pogodna za merenje rastojanja u Sunčevom sistemu. Skraćenice koje se najčešće koriste za astronomsku jedinicu su "au" ili "AU". U daljem radu ja ću koristiti skraćenicu AU. Definicije i vrednosti astronomske jedinice tokom razvoja astronomije menjale su se. Problem evolucije pojma i vrednosti astronomske jedinice posmatrajmo hronološki. Iz tog razloga zadržimo se najpre na početnoj definiciji da je astronomska jedinica jednaka srednjem rastojanju izmedju Sunca i Zemlje. Zemlja se kreće po eliptičnoj putanji. Trenutno rastojanje izmedju Sunca i Zemlje određuje se na osnovu jednačine (7.15). U ovoj jednačini sa a označena je velika poluosa elipse, a sa e označen je ekscentricitet elipse. Srednje rastojanje izmedju Sunca i Zemlje određuje se na osnovu sledeće jednačine

$$\langle r \rangle = a \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) \quad (12.1)$$

U daljem radu biće reči o definisanju astronomske jedinice korišćenjem Gausove gravitacione konstante (k).

Sve do 1961 godine merenja u astronomiji, a samim tim i određivanje vrednosti astronomske jedinice zasnivala su se na optičkim metodama. Od 1961 godine počeli su da se koriste radio talasi za određivanje rastojanja, i relativnih brzina objekata u Sunčevom sistemu. Ove radiometrijske metode zasnivale su se na odbijanju radio talasa od površine planeta (astronomskih objekata). Za određivanje rastojanja izmedju Zemlje i planeta koriste se podaci svemirskih misija Viking i Pathfinder. U novije vreme koriste se i podaci dobijeni od satelita koji orbitiraju oko Marsa, kao i podaci dobijeni od istraživačkih rovera koji se nalaze na površini Marsa. Korišćenjem ove savremene tehnologije postignuta je izuzetno visoka preciznost u određivanju rastojanja izmedju Zemlje i pojedinih planeta u Sunčevom sistemu.

Astronomi G.A. Krasinsky i V.A. Brumberg u svom naučnom radu konstatovali su da dolazi do povećanja astronomske jedinice tokom vremena. Oni su dali sledeći rezultat

$$\frac{d}{dt} AU = 15 \pm 3 \frac{m}{vek} \quad (12.2)$$

Na osnovu ove jednačine zaključujemo da se za 100 godina (1 *vek*) astronomska jedinica poveća za oko 15 metra.

Astronom E.M. Standish izvršio je nezavisnu analizu podataka i dobio je sledeći rezultat

$$\frac{d}{dt} AU = 7 \pm 2 \frac{m}{vek} \quad (12.3)$$

U radu [17] navedeno je da je astronom E.V. Pitjeva dobila sledeći rezultat

$$\frac{d}{dt} AU = 5 \frac{m}{vek} \quad (12.4)$$

U radu [17] navode se i najnoviji rezultati dobijeni od JPL (Jet Propulsion Laboratory). Oni su dobili sledeću vrednost za povećanja astronomske jedinice tokom vremena

$$\frac{d}{dt} AU = 7 \pm 2 \frac{m}{vek} \quad (12.5)$$

Ako se zaista povećava astronomska jedinica tokom vremena, onda se povećava i rastojanje između Zemlje i Sunca. Ovi rezultati o povećanju astronomske jedinice sa vremenom privukli su pažnju pojedinih istraživača, i predložena su pojedina objašnjenja. Traži se uzrok ove pojave, ali većina istraživača smatra da uzrok povećanja astronomske jedinice ima kosmološko poreklo.

Ja ću sa stanovišta gravitoelektromagnetizma dati objašnjenje povećanja astronomske jedinice. Medjutim moram napomenuti da bi se izvršila potpunija analiza potreban je veći broj podataka od podataka koji su dati jednačinama (12.2-5).

Istakao sam da se astronomska jedinica može definisati i korišćenjem Gausove gravitacione konstante (k). Treći Keplerov zakon može se povezati sa Gausovom gravitacionom konstantom. Matematička forma trećeg Keplerovog zakona određena je jednačinom (7.48). Na osnovu ove jednačine dobija se rezultat

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M_s}} \quad (12.6)$$

Gausova gravitaciona konstanta (k) povezana je sa gravitacionom konstantom (γ) sledećom jednačinom

$$k = \sqrt{\gamma} \quad (12.7)$$

Na osnovu jednačina (12.6) i (12.7) dobija se rezultat

$$k = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{a^3}{M_s}} \quad (12.8)$$

Gausova gravitaciona konstanta ima brojnu vrednost i odgovarajuću mernu jedinicu. Jednačine (12.6) i (12.8) imaju veliku primenu u astronomiji. U ovim jednačinama period rotacije planete oko Sunca označen je sa T , a velika poluosa elipse označena je sa a . Prilikom primene jednačine (12.8) ne koristi se *SI* sistem već se uzima da je jedinica za vreme srednji Sunčev dan, a jedinica za rastojanje je astronomska jedinica. Jedinica za masu je masa Sunca. Masa Sunca se obično obeležava sa M_\odot . Treba napomenuti da je srednji Sunčev dan jednak 86400 *SI* sekundi, odnosno

$$d = 86400 \text{ s}$$

Brojna vrednost Gausove konstante iznosi 0,01720209895. Korišćenjem jednačine (12.8), brojne vrednosti Gausove konstante i mernih jedinica za vreme, dužinu i masu može se definisati astronomska jedinica. Astronomska jedinica je radijus kružne neperturbovane putanje po kojoj se kreće telo zanemarljive mase oko Sunca, a vreme (T) koje je potrebno ovom telu da opiše kružnu putanju iznosi

$$T = 2\pi/0,01720209895 \text{ d} \quad (12.9)$$

Na osnovu navedene definicije za astronomsku jedinicu dobijaju se sledeći rezultati

$$a = AU \quad (12.10)$$

$$M_s = M_\odot \quad (12.11)$$

Zamenom jednačina (12.9-11) u jednačinu (12.8) dobija se Gausova gravitaciona konstanta

$$k = 0,01720209895 (AU)^{3/2} (M_\odot)^{-1/2} (d)^{-1} \quad (12.12)$$

Medjutim postoji problem sa Gausovom gravitacionom konstantom. Na osnovu jednačine (12.8) zaključujemo da Gausova gravitaciona konstanta zavisi od mase Sunca. Masa Sunca smanjuje se zbog emisije elektromagnetne radijacije i solarnog vetra. Ovaj gubitak mase delimično se kompenzuje usled padanja međuplanetarne prašine, meteorita, asteroida i kometa na Sunce.

Postoje teorijske analize zasnovane na klasičnoj mehanici koje se bave kretanjem planeta, a koje uzimaju u obzir smanjenje mase Sunca. Na osnovu tih teorijskih analiza dobijeno je da se velika poluosa eliptične putanje planete povećava tokom vremena. Ovaj rezultat mogao se očekivati, jer usled gubitka mase Sunca smanjuje se gravitaciona sila koja deluje na planetu, i dolazi do povećanja

rastojanja između planete i Sunca. Uzmimo u razmatranje Zemlju. Usled smanjenja mase Sunca povećava se rastojanje između Zemlje i Sunca, odnosno povećava se astronomska jedinica.

Prilikom definisanja astronomske jedinice moraju se uzeti u obzir i relativistički efekti. Ako bi se dinamika Sunčevog sistema analizirala sa stanovišta teorije relativnosti onda bi definicija astronomske jedinice bila veoma kompleksna. Vidimo da definisanje astronomske jedinice nije jednostavan zadatak. Međutim Međunarodna Astronomska Unija je 2012 godine donela zaključak da astronomska jedinica ima sledeću vrednost

$$AU = 149597870700 \text{ m} \quad (12.13)$$

Astronomska jedinica se izražava u metrima, a metar je u *SI* sistemu definisan kao rastojanje koju svetlost predje za $1/299792458$ delova sekunde. Ovako definisana astronomska jedinica nije povezana sa Masom Sunca.

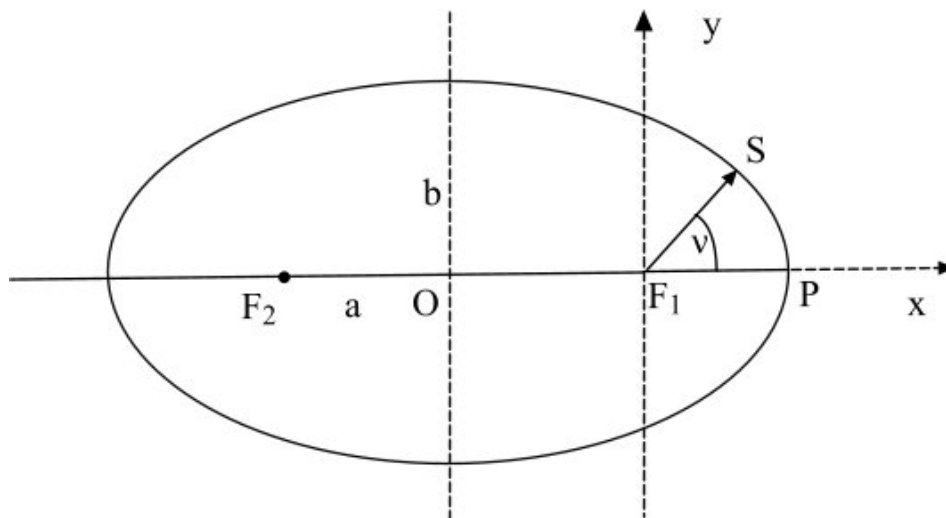
Masa Sunca smanjuje se tokom vremena. U unutrašnjosti Sunca odvijaju se termonuklearne reakcije, i ono emituje elektromagnetnu radijaciju. Sunčeva (radijativna) luminoznost ima sledeću vrednost

$$L_{\odot} = 3,828 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Sunčeva (radijativna) luminoznost varira u toku vremena, i te varijacije su na nivou $\pm 0,1\%$ vrednosti L_{\odot} . Pored radijativne luminoznosti Sunca postoji i neutrinska luminoznost. Vrednost Sunčeve neutrinske luminoznosti iznosi $0,023 L_{\odot}$. Zbog termonuklearnih reakcija i emisije neutrina smanjuje se masa Sunca, ali masa Sunca smanjuje se i zbog Sunčevog vetra. Procenjuje se da 95% Sunčevog vetra čine protoni, 4% čine jezgra helijumovih atoma, a manje od 1% čine jezgra atoma drugih elemenata. Smanjenje mase Sunca zbog Sunčevog vetra je tri puta manje nego smanjenje mase Sunca zbog termonuklearnih reakcija. Istakao sam da se gubitak mase Sunca delimično kompenzuje usled padanja međuplanetarne prašine, meteorita, asteroida i kometa na Sunce. Zbog smanjenja mase Sunca povećava se rastojanje između Sunca i Zemlje, odnosno povećava se astronomska jedinica. Međutim smanjenje mase Sunca ne izaziva značajne promene astronomske jedinice, i zbog tog razloga moraju se tražiti drugi uzroci koji dovode do promene astronomske jedinice. Istakao sam da je pojava povećanja astronomske jedinice sa vremenom privukla pažnju pojedinih istraživača, i predložena su određena objašnjenja.

Ja ću sa stanovišta gravitoelektromagnetizma dati objašnjenje povećanja astronomske jedinice. Moje objašnjenje se zasniva na pretpostavci da u Sunčevom sistemu postoji gravitoelektrično i gravitomagnetno polje. Ova polja su slaba, ali mogu da izazovu perturbacije u kretanju planeta. Jačine ovih polja označiću sa \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} . Smatram da ova polja imaju kosmološko poreklo. Da bi to detaljnije objasnio konstatujmo najpre da se naš Sunčev sistem nalazi u Galaksiji koja se zove Mlečni put. Astronomske objekti koji se nalaze van Sunčevog sistema, a distribuirani su u našoj Galaksiji mogu da izazovu nastanak gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja. Logično je očekivati da astronomske objekti (zvezde) koji se nalaze bliže našem Sunčevom sistemu daju najveći doprinos nastanku gravitoelektričnog i gravitomagnetnog polja. Jačine ovih polja označio sam sa \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} . U principu vektor gravitoelektričnog polja može imati različite vrednosti na različitim mestima u Sunčevom sistemu. Isti zaključak važi i za vektor gravitomagnetnog polja. Ako promene vektora \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} sa promenom položaja u Sunčevom sistemu nisu velike, onda možemo vektore \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} smatrati konstantnim vektorima, odnosno možemo uzeti da vektori \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} imaju iste vrednosti na različitim mestima u Sunčevom sistemu. U daljem radu ja ću vektore smatrati \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} konstantnim vektorima.

Da bi opisao promene koje gravitoelektrično i gravitomagnetno polje izazivaju na putanje planeta potrebno je koristiti Orbitalni koordinatni sistem. O tom sistemu je već bilo reči u predhodnom tekstu. Taj sistem je označen sa S_4 i prikazan je na slikama 13 i 20. Sliku 20 sam modifikovao i dobio sam sliku 76.



Slika 76

Planeta se kreće po eliptičnoj putanji. Žiže elipse na slici 76 označene su sa F_1 i F_2 . Saglasno prvom Keplerovom zakonu centar mase Sunca poklapa se sa jednom žižom elipse. Uzeću da se centar mase Sunca poklapa sa žižom F_1 . Koordinatni početak sistema S_4 poklapa se sa žižom F_1 . Osa x sistema S_4 usmerena je ka perihelu koji je na slici 76 označen tačkom P . Osa y je normalna na osu x . Ona prolazi kroz žižu F_1 , i paralelna je sa malom poluosom elipse. Osa y je prikazana isprekidanom linijom na slici 76. Ose x i y nalaze se u ravni ekliptike. Trenutni položaj planete označen je tačkom S . Prava anomalija (v) je ugao koji se meri između duži OP i pravca radijus vektora koji određuje trenutni položaj satelita.

Vektor položaja planete u Orbitalnom koordinatnom sistemu može se odrediti korišćenjem prave anomalije (v) (jednačina (7.2)). Zbog važnosti ove jednačine za dalju analizu ponovo je navodim

$$\vec{r} = r \cos(v)\vec{e}_{x4} + r \sin(v)\vec{e}_{y4} \quad (12.14)$$

Sa r je označeno trenutno rastojanje između planete i koordinatnog početka sistema S_4 . Jedinični vektori koordinatnih osa sistema S_4 označeni su sa \vec{e}_{x4} i \vec{e}_{y4} . Uvodi se i vektor \vec{e}_{z4} . To je jedinični vektor koordinatne ose z . Pravac vektora \vec{e}_{z4} normalan je na ravan u kojoj se kreće planeta. Vektori \vec{e}_{x4} , \vec{e}_{y4} i \vec{e}_{z4} čini trijedar desne orijentacije i važe sledeće jednačine

$$\vec{e}_{x4} \times \vec{e}_{y4} = \vec{e}_{z4} \quad (12.15)$$

$$\vec{e}_{z4} \times \vec{e}_{x4} = \vec{e}_{y4} \quad (12.16)$$

$$\vec{e}_{y4} \times \vec{e}_{z4} = \vec{e}_{x4} \quad (12.17)$$

Umesto ugla v u daljem radu korišću ugao φ . U skladu sa tom zamenom jednačina (12.14) dobija oblik

$$\vec{r} = r \cos(\varphi)\vec{e}_{x4} + r \sin(\varphi)\vec{e}_{y4} \quad (12.18)$$

Jednačina elipse u Dekartovom koordinatnom sistemu određuje se na osnovu jednačine (7.1). U sistemu S_4 jednačina elipse glasi

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}$$

Položaj planete u sistemu S_4 opisuje se pomoću radijus vektora. Pri tome se može koristiti jednačina (12.14), ili jednačina (12.18). Obzirom da su uvedene polarne koordinate (r, φ) radijus vektor određuje se na osnovu jednačine (7.35)

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

Vektor \vec{e}_r je jedinični vektor i usmeren je od koordinatnog početka sistema S_4 ka trenutnom položaju planete.

Na osnovu jednačina (12.18) i (7.35) dobijam rezultat

$$r \cos(\varphi) \vec{e}_{x_4} + r \sin(\varphi) \vec{e}_{y_4} = r \vec{e}_r$$

, odnosno

$$\vec{e}_r = \cos(\varphi) \vec{e}_{x_4} + \sin(\varphi) \vec{e}_{y_4} \quad (12.19)$$

Veličine r i φ predstavljaju polarne koordinate. Prilikom korišćenja polarnih koordinata uvodi se i vektor \vec{e}_φ . On je takodje jedinični vektor i njegov pravac normalan je na pravac vektora \vec{e}_r . Zamenom jednačine (12.19) u jednačinu (10.104) dobijam

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \vec{e}_{x_4} + \cos(\varphi) \vec{e}_{y_4} \quad (12.20)$$

Uvodi se i vektor \vec{e}_z . Njegov pravac je normalan na ravan u kojoj se kreće planeta. Vektor \vec{e}_z sa vektorima \vec{e}_r i \vec{e}_φ čini trijedar desne orijentacije, i važe sledeće jednačine

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \quad (12.21)$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi \quad (12.22)$$

$$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_r \quad (12.23)$$

Zamenom jednačina (12.19) i (12.20) u jednačinu (12.21) dobija se rezultat

$$\vec{e}_{z_4} = \vec{e}_z \quad (12.24)$$

Diferenciranjem radijus vektora po vremenu dobija se vektor brzine

$$\vec{v} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt}$$

, odnosno

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Ova jednačina dalje se transformiše na sledeći način

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

Korišćenjem jednačine (10.104) dobijam rezultat

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (12.25)$$

Sada ću sa stanovišta gravitoelektromagnetizma dati objašnjenje povećanja astronomske jedinice. Istakao sam da se moje objašnjenje zasniva na pretpostavci da u Sunčevom sistemu postoji gravitoelektrično i gravitomagnetno polje. Jačine ovih polja označio sam sa \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} . Predpostavio sam da su vektori \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} konstantni vektori. Ova pretpostavka implicira da su komponente vektora \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} konstantne veličine. Vektori \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} u sistemu S_4 mogu se izraziti na sledeći način

$$\vec{E}_{gem} = E_{gem x} \vec{e}_{x_4} + E_{gem y} \vec{e}_{y_4} + E_{gem z} \vec{e}_{z_4} \quad (12.26)$$

$$\vec{B}_{gem} = B_{gem x} \vec{e}_{x_4} + B_{gem y} \vec{e}_{y_4} + B_{gem z} \vec{e}_{z_4} \quad (12.27)$$

Ova polja su slaba, ali mogu da izazovu perturbacije u kretanju planeta. Da bi se to matematički opisalo potrebno je korišćenje Gausovih planetarnih jednačina. O primeni tih jednačina na slučaj kretanja satelita oko Zemlje bilo je reči u šestom poglavlju. Podsetimo se određenih rezultata iz tog poglavlja. Na slici 19 punom linijom označen je deo putanje koju opisuje satelit prilikom kretanja oko Zemlje. Sistemi S_1 i S_4 predstavljeni su na istoj slici. Sistemi S_1 je Konvencionalni inercijalni sistem. Na slici 19 označene su njegove ose. Orbita elipse leži u ravni koja se zove orbitalna ravan. U slučaju dinamike satelita koordinatni početak sistema S_4 nalazi se u centru mase Zemlje koji se poklapa sa

žižom elipse. Centar mase Zemlje označen je na slici 19 tačkom O . Trenutni položaj satelita označen je tačkom S . Strelica na slici 19 određuje smer kretanja satelita.

Putanje satelita mogu imati proizvoljan položaj u Konvencionalnom inercijalnom sistemu. Da bi se precizirao položaj satelita uvedeni su Keplerovi orbitalni elementi. To su velika poluosa (a), ekscentricitet (e), inklinacija (i), longituda uzlaznog čvora (Ω), argument perihela (ω) i prava anomalija (v).

Ako bi satelit bio izložen samo dejstvu Njutnove gravitacione sile, a Zemlju smatrali idealnom loptom sa homogenom distribucijom mase onda bi putanja satelita bila kružnica ili elipsa. Putanja bi bila određena odgovarajućim Keplerovim orbitalnim parametrima. U ovom slučaju ti parametri su konstantni, ne menjaju se tokom vremena.

U slučaju kada postoji perturbujuća sila dolazi do promene Keplerovih orbitalnih parametara u toku vremena. Te promene određuju se na osnovu Gausovih planetarnih jednačina. To je sistem od šest diferencijalnih jednačina (jednačine (6.115-120)).

U ovim jednačinama figurišu veličine R , S i W . Potrebno je da se podsetimo postupka određivanja ovih veličina. Neka na satelit deluje perturbujuća sila \vec{F} . Perturbujuće ubrzanje određuje se na osnovu jednačine (6.122). Komponente perturbujućeg ubrzanja (perturbujuće sile) možemo odrediti u Konvencionalnom inercijalnom sistemu (sistemu S_1). Medjutim uvodi se jedan lokalni koordinatni sistem. On ima tri ose koje su međusobno ortogonalne, a jedinične vektore tih osa označio sam sa \vec{e}_r , \vec{e}_s i \vec{e}_w . Početak tog lokalnog koordinatnog sistema poklapa se sa trenutnim položajem satelita. Vektori \vec{e}_r , \vec{e}_s i \vec{e}_w određuju se na osnovu sledećih jednačina

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (12.28)$$

$$\vec{e}_s = \frac{(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}}{|\vec{r} \times \vec{v}|r} \quad (12.29)$$

$$\vec{e}_w = \frac{(\vec{r} \times \vec{v})}{|\vec{r} \times \vec{v}|} \quad (12.30)$$

Vektor \vec{v} je vektor brzine satelita u sistemu S_4 , a vektor \vec{r} je vektor položaja satelita u sistemu S_4 . Veličine R , S i W su komponente vektora perturbujućeg ubrzanja u ovom lokalnom koordinatnom sistemu. One se određuju na osnovu jednačina (6.123-125).

Pojedine rezultate ove analize primeniću na slučaj kretanja planete oko Sunca. To kretanje planete je prikazano na slici 76. Vektori \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} u sistemu S_4 određuju se na osnovu jednačina (12.26) i (12.27). Intenziteti vektora \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} imaju male vrednosti, jer gravitoelektrično i gravitomagnetno polje su slaba polja. Medjutim ova polja mogu da izazovu perturbacije u kretanju planeta. U skladu sa jednačinom (2.28) na planetu delovaće sila

$$\vec{F} = m\vec{E}_{gem} + m\vec{v} \times \vec{B}_{gem} \quad (12.30)$$

Ova sila je perturbujuća sila i izazvaće promenu Keplerovih orbitalnih parametara. U jednačini (12.30) masa planete je označena sa m , a sa \vec{v} označen je vektor brzine planete u sistemu S_4 .

Perturbujuće ubrzanje određuje se na osnovu (6.122). Zamenom jednačine (12.30) u (6.122) dobijam

$$\vec{a} = \vec{E}_{gem} + \vec{v} \times \vec{B}_{gem} \quad (12.31)$$

Gausove planetarne jednačine za slučaj kretanja planete oko Sunca glase

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[Resin(v) + \frac{a(1-e^2)}{r} S \right] \quad (12.32)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[R \sin(v) + \left(\frac{e + \cos(v)}{1 + e \cos(v)} + \cos(v) \right) S \right] \quad (12.33)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-R \cos(v) + \left(1 + \frac{r}{a(1-e^2)} \right) S \sin(v) \right] - \frac{d\Omega}{dt} \cos(i) \quad (12.34)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cos(\omega + v) W \quad (12.35)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\sin(\omega + v)}{\sin(i)} W \quad (12.36)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{1}{na} \left[\frac{2r}{a} - \frac{(1-e^2)}{e} \cos(v) \right] R - \frac{(1-e^2)}{nae} \left[1 + \frac{r}{a(1-e^2)} \right] S \sin(v) \quad (12.37)$$

Veličina n je srednja ugaona brzina planete, i određuje se na osnovu jednačine (7.67)

$$n = \frac{2\pi}{T} = a^{-3/2} \sqrt{\gamma M_S}$$

Period obilaska satelita oko Zemlje označen je sa T . Sa M_S označena je masa Sunca.

Pod dejstvom perturbujuće sile \vec{F} koja se određuje na osnovu jednačine (12.30) dolazi do promene Keplerovih orbitalnih parametara. Da bi se odredila promena Keplerovih orbitalnih parametara potrebno je rešiti sistem diferencijalnih jednačina (jednačine (12.32-37)). Rešavanje ovog sistema diferencijalnih jednačina nije jednostavno. Mene prvenstveno zanimaju promene veličina a i e tokom vremena, i iz tog razloga ja ću analizu ograničiti samo na jednačine (12.32) i (12.33). Medjutim i jednačine (12.32) i (12.33) trebalo bi rešavati kao sistem diferencijalnih jednačina. Problem rešavanja ovog sistema diferencijalnih jednačina još više ću pojednostaviti na taj način što ću ove dve diferencijalne jednačine tretirati kao međjusobno nezavisne diferencijalne jednačine. To praktično znači sledeće. Na osnovu jednačine (12.32) određuje se promena velike poluose sa vremenom. U ovoj jednačini figuriše ekscentricitet elipse. Medjutim ja ću uzeti da je ekscentricitet elipse konstantna veličina, i na taj način pojednostaviću postupak rešavanja diferencijalne jednačine (12.32).

Sličan postupak primenjujem i u slučaju jednačine (12.33). Na osnovu ove jednačine određuje se promena ekscentriciteta sa vremenom. U ovoj jednačini figuriše velika poluosa elipse, ali uzimam da je to konstantna veličina. Na taj način pojednostavljujem postupak rešavanja diferencijalne jednačine (12.33). Primenom ovih metoda pojednostavio sam matematičku analizu sistema diferencijalnih jednačina. Umesto da rešavam sistem od dve diferencijalne jednačine ja ću rešavati dve nezavisne diferencijalne jednačine.

Položaj planete u Orbitalnom koordinatnom sistemu određuje se na osnovu jednačine (12.14). U ovoj jednačini figuriše prava anomalija (v). Istakao sam da ću umesto ugla v u daljem radu koristiti ugao φ . U skladu sa tom zamenom na osnovu jednačine (12.14) dobio sam jednačinu (12.18). U jednačinama (12.32) i (12.33) umesto ugla v pisaću ugao φ , i na taj način dobijam sledeće jednačine

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[R \sin(\varphi) + \frac{a(1-e^2)}{r} S \right] \quad (12.38)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[R \sin(\varphi) + \left(\frac{e + \cos(\varphi)}{1 + e \cos(\varphi)} + \cos(\varphi) \right) S \right] \quad (12.39)$$

Zamenom jednačine (7.15) u jednačinu (12.38) dobijam sledeći rezultat

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [Resin(\varphi) + (1 + ecos(\varphi))S] \quad (12.40)$$

Da bi rešio diferencijalne jednačine (12.39) i (12.40) potrebno je da odredim veličine R i S . Perturbujuće ubrzanje određuje se na osnovu jednačine (12.31), a vektori \vec{e}_r , \vec{e}_s i \vec{e}_w na osnovu jednačina (12.28-30). U jednačinama (12.28-30) sa \vec{r} označen je radijus vektor planete u sistemu S_4 , a sa \vec{v} označen je vektor brzine planete u sistemu S_4 . Zamenom jednačina (7.35) i (12.25) u jednačine (12.28-30) dobijaju se rezultati

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r \quad (12.41)$$

$$\vec{e}_s = \vec{e}_\varphi \quad (12.42)$$

$$\vec{e}_w = \vec{e}_z \quad (12.43)$$

Veličina R određuje se na osnovu jednačine (6.123). Zamenom jednačina (12.31) i (12.41) u (6.123) dobijam

$$R = (\vec{E}_{gem} + \vec{v} \times \vec{B}_{gem})\vec{e}_r$$

, odnosno

$$R = \vec{E}_{gem}\vec{e}_r + (\vec{v} \times \vec{B}_{gem})\vec{e}_r$$

Ova jednačina dalje se transformiše i dobijam sledeći rezultat

$$R = \vec{E}_{gem}\vec{e}_r + (\vec{e}_r \times \vec{v})\vec{B}_{gem} \quad (12.44)$$

Vektor brzine planete u sistemu S_4 određuje se na osnovu jednačine (12.25). Ova jednačina može se napisati u obliku

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi \quad (12.45)$$

U sedmom poglavlju određene su veličine v_r i v_φ . Veličina v_r određuje se na osnovu jednačine (7.54), a veličina v_φ određuje se na osnovu jednačine (7.57).

Da bi lakše zapisao jednačine (7.54) i (7.57) uvodim sledeću skraćenicu

$$V = \sqrt{\frac{\gamma M_s}{a(1-e^2)}} \quad (12.46)$$

U skladu sa tim jednačine (7.54) i (7.57) dobijaju oblik

$$v_r = V\sin\varphi \quad (12.47)$$

$$v_\varphi = V(1 + ecos\varphi) \quad (12.48)$$

Zamenom jednačina (12.47) i (12.48) u jednačinu (12.45) dobijam sledeći rezultat

$$\vec{v} = V\sin\varphi\vec{e}_r + V(1 + ecos\varphi)\vec{e}_\varphi \quad (12.49)$$

Zamenom vektora brzine u jednačinu (12.44) dobijam rezultat

$$R = \vec{E}_{gem}\vec{e}_r + V[\vec{e}_r \times (e\sin\varphi\vec{e}_r + (1 + ecos\varphi)\vec{e}_\varphi)]\vec{B}_{gem}$$

, odnosno

$$R = \vec{E}_{gem}\vec{e}_r + V(1 + ecos\varphi)\vec{e}_z\vec{B}_{gem}$$

Pri dobijanju ovog rezultata korišćena je jednačina (12.21).

Vektori \vec{E}_{gem} i \vec{B}_{gem} određuju se na osnovu jednačina (12.26) i (12.27). Zamenom ovih vektora u jednačinu za veličinu R dobijam rezultat

$$R = (E_{gem\ x}\vec{e}_{x4} + E_{gem\ y}\vec{e}_{y4} + E_{gem\ z}\vec{e}_{z4})\vec{e}_r + V(1 + ecos\varphi)(B_{gem\ x}\vec{e}_{x4} + B_{gem\ y}\vec{e}_{y4} + B_{gem\ z}\vec{e}_{z4})\vec{e}_z$$

Da bi izračunao odgovarajuće skalarnе proizvode vektora koji figurišu u ovoj jednačini potrebno je koristiti jednačine (12.19) i (12.20). Korišćenjem tih jednačina dobijam rezultat

$$R = E_{gem\ x}\cos\varphi + E_{gem\ y}\sin\varphi + V(1 + ecos\varphi)B_{gem\ z} \quad (12.50)$$

Odredjena je veličina R . Potrebno je odrediti i veličinu S . Zamenom jednačina (12.31) i (12.42) u (6.124) dobijam

$$S = \vec{E}_{gem} \vec{e}_\varphi + (\vec{v} \times \vec{B}_{gem}) \vec{e}_\varphi$$

, odnosno

$$S = \vec{E}_{gem} \vec{e}_\varphi + (\vec{e}_\varphi \times \vec{v}) \vec{B}_{gem} \quad (12.51)$$

Zamenom jednačine (12.49) u jednačinu (12.51) i nakon izvršenog vektorskog množenja dobija se rezultat

$$S = \vec{E}_{gem} \vec{e}_\varphi - V \sin \varphi \vec{e}_z \vec{B}_{gem}$$

Dalja transformacija ove jednačine zasniva se na korišćenju jednačina (12.26) i (12.27), i jednačine (12.20), i dobija se sledeći rezultat

$$S = -E_{gem} x \sin \varphi + E_{gem} y \cos \varphi - V \sin \varphi B_{gem} z \quad (12.52)$$

Pošto sam odredio veličine R i S sada mogu rešavati jednačinu (12.40). Istakao sam da ću u ovoj jednačini ekscentricitet smatrati konstantnom veličinom. Leva strana jednačine (12.40) transformiše se na sledeći način

$$\frac{da}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [R \sin(\varphi) + (1 + e \cos(\varphi))S]$$

, odnosno

$$\frac{da}{d\varphi} = \frac{2}{n\dot{\varphi}\sqrt{1-e^2}} [R \sin(\varphi) + (1 + e \cos(\varphi))S] \quad (12.53)$$

Veličina $\dot{\varphi}$ određuje se na osnovu jednačine (7.66). U skladu sa jednačinom (7.67) jednačina (7.66) postaje

$$\dot{\varphi} = n(1-e^2)^{-3/2}(1+e \cos \varphi)^2 \quad (12.54)$$

Zamenom jednačine (12.54) u jednačinu (12.53) dobija se rezultat

$$\frac{da}{d\varphi} = \frac{2}{n^2} (1-e^2) \frac{[R \sin(\varphi) + (1 + e \cos(\varphi))S]}{(1 + e \cos \varphi)^2} \quad (12.55)$$

Kada se koriste Gausove planetarne jednačine obično se određuje srednja vrednost veličine $\frac{da}{dt}$. Ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{\int_0^T \left(\frac{da}{dt} \right) dt}{\int_0^T dt} \quad (12.56)$$

Sa T je označen period rotacije planete oko Sunca. Jednačina (12.56) transformiše se na sledeći način

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \left(\frac{da}{dt} \right) \frac{dt}{d\varphi} d\varphi}{T}$$

, odnosno

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \left(\frac{da}{dt} \right) \frac{1}{\dot{\varphi}} d\varphi}{T} \quad (12.57)$$

Zamenom jednačina (12.40) i (12.54) u jednačinu (12.57) dobija se sledeći rezultat

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{2}{n^2 T} (1-e^2) \int_0^{2\pi} \frac{[R \sin(\varphi) + (1 + e \cos(\varphi))S]}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi \quad (12.58)$$

Veličina n je srednja ugaona brzina rotacije planete oko Sunca. Ona se određuje na osnovu jednačine (7.67), odnosno

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (12.59)$$

Zamenom jednačine (12.59) u jednačine (12.58) dobijam rezultat

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{T}{2\pi^2} (1 - e^2) \int_0^{2\pi} \frac{[R \sin(\varphi) + (1 + e \cos(\varphi))S]}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi \quad (12.60)$$

Zamenom jednačina (12.50) i (12.52) u jednačinu (12.60), i nakon algebarskih transformacija dobija se sledeći rezultat

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{T}{2\pi^2} (1 - e^2) \left[-E_{gem x} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi + E_{gem y} \int_0^{2\pi} \frac{(e + \cos \varphi)}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi \right]$$

Integrali koji figurišu u ovoj jednačini jednaki su nuli, i u skladu sa tim dobijam rezultat

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = 0 \quad (12.61)$$

Na osnovu ove jednačine zaključujem da je promena velike poluose sa vremenom jednaka nuli. Velika poluosa ne menja se u toku vremena, odnosno ima konstantnu vrednost

$$a = const \quad (12.62)$$

Preostaje da se analizira jednačina (12.39). U ovoj jednačini figuriše velika poluosa elipse, ali sam istakao da ću veliku poluosu elipse smatrati konstantnom veličinom. Na taj način pojednostavljuje se postupak rešavanja ove diferencijalne jednačine.

Jednačina (12.39) transformiše se na sledeći način

$$\frac{de}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na} \left[R \sin(\varphi) + \left(\frac{e + \cos(\varphi)}{1 + e \cos(\varphi)} + \cos(\varphi) \right) S \right]$$

, odnosno

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na\dot{\varphi}} \left[R \sin(\varphi) + \left(\frac{e + \cos(\varphi)}{1 + e \cos(\varphi)} + \cos(\varphi) \right) S \right]$$

U ovu jednačinu zamenjuje se jednačina (12.54) i dobija se sledeći rezultat

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{(1 - e^2)^2}{n^2 a} \frac{\left[R \sin(\varphi) + \left(\frac{e + \cos(\varphi)}{1 + e \cos(\varphi)} + \cos(\varphi) \right) S \right]}{(1 + e \cos \varphi)^2}$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačine (12.59)

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{T^2 (1 - e^2)^2}{4\pi^2 a} \frac{\left[R \sin(\varphi) + \left(\frac{e + \cos(\varphi)}{1 + e \cos(\varphi)} + \cos(\varphi) \right) S \right]}{(1 + e \cos \varphi)^2} \quad (12.63)$$

Veličine R i S određuju se na osnovu jednačina (12.50) i (12.52) respektivno. Zamenom jednačina (12.50) i (12.52) u jednačinu (12.63) i nakon algebarskih transformacija dobija se sledeći rezultat

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{T^2 (1 - e^2)^2}{4\pi^2 a} \left[-E_{gem x} \frac{(e \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varphi)}{(1 + e \cos \varphi)^3} + E_{gem y} \frac{(1 + 2e \cos \varphi + \cos^2 \varphi)}{(1 + e \cos \varphi)^3} + V B_{gem z} \frac{(1 - e^2) \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^3} \right] \quad (12.64)$$

Ovo je veoma složena diferencijalna jednačina. Medjutim postoji još jedan problem. Da bi se rešila ova diferencijalna jednačina potrebno je znati veličine $E_{gem x}$, $E_{gem y}$ i $B_{gem z}$, a da bi se one odredile potreban je veći broj podataka. Podaci koji su dati jednačinama (12.2-5) nisu dovoljni za određivanje veličina $E_{gem x}$, $E_{gem y}$ i $B_{gem z}$.

Da bi prevazišli ove probleme konstatujemo najpre da kod većine planeta ekscentriciteti imaju malu vrednost. Ja ću iskoristiti ovu činjenicu da bi transformisao jednačinu (12.64). Postupak transformacije jednačine (12.64) zasniva se na tome da se ekscentricitet izjednači sa nulom. U skladu sa tim jednačina (12.64) dobija oblik

$$\frac{de}{d\varphi} = \frac{T^2}{4\pi^2 a} (-E_{gem\ x} \cos\varphi \sin\varphi + E_{gem\ y}(1 + \cos^2\varphi) + VB_{gem\ z} \sin\varphi)$$

, odnosno

$$\int_{e_0}^{e_1} de = \frac{T^2}{4\pi^2 a} \int_0^{2\pi} (-E_{gem\ x} \cos\varphi \sin\varphi + E_{gem\ y}(1 + \cos^2\varphi) + VB_{gem\ z} \sin\varphi) d\varphi$$

Nakon izračunavanja integrala dobija se sledeći rezultat

$$e_1 - e_0 = \frac{3T^2}{4\pi a} E_{gem\ y} \quad (12.65)$$

Na osnovu ove jednačine zaključujem da se ekscentricitet elipse menja tokom vremena. U jednačini (12.65) sa e_0 označena je početna vrednost ekscentriciteta elipse. Posle vremena T koje je jednako periodu rotacije planete oko Sunca, ekscentricitet elipse imaće vrednost e_1 .

Može se naći i srednja vrednost veličine $\frac{de}{dt}$. Ona se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{\int_0^T \left(\frac{de}{dt} \right) dt}{\int_0^T dt}$$

Ova jednačina transformiše se na sledeći način

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \left(\frac{de}{dt} \right) \frac{dt}{d\varphi} d\varphi}{T}$$

, odnosno

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \left(\frac{de}{dt} \right) \frac{1}{\dot{\varphi}} d\varphi}{T}$$

Ova jednačina dalje se transformiše korišćenjem jednačina (12.39), (12.54) i (12.59), i dobijam sledeći rezultat

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{T(1 - e^2)^2}{4\pi^2 a} \int_0^{2\pi} \frac{\left[R \sin(\varphi) + \left(\frac{e + \cos(\varphi)}{1 + e \cos(\varphi)} + \cos(\varphi) \right) S \right]}{(1 + e \cos\varphi)^2} d\varphi \quad (12.66)$$

Zamenom veličina R i S (jednačine (12.50) i (12.52)) u jednačinu (12.66), i nakon algebarskih transformacija dobijam rezultat

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = & \frac{T(1 - e^2)^2}{4\pi^2 a} \int_0^{2\pi} \left[-E_{gem\ x} \frac{(e \sin\varphi + \cos\varphi \sin\varphi)}{(1 + e \cos\varphi)^3} + E_{gem\ y} \frac{(1 + 2e \cos\varphi + \cos^2\varphi)}{(1 + e \cos\varphi)^3} \right. \\ & \left. + VB_{gem\ z} \frac{(1 - e^2) \sin\varphi}{(1 + e \cos\varphi)^3} \right] d\varphi \quad (12.67) \end{aligned}$$

Da bi se izračunao integral na desnoj strani jednačine (12.67) potrebno je znati veličine $E_{gem\ x}$, $E_{gem\ y}$ i $B_{gem\ z}$. Problem nepoznavanja ovih veličina postojao je i u slučaju jednačine (12.64). Istakao sam da kod većine planeta ekscentriciteti imaju malu vrednost. Da bi rešio integrale na desnoj strani jednačine (12.67) korišću pristup koji je primenjen u slučaju jednačine (12.64). Pristup se zasniva na tome da se ekscentricitet elipse izjednači sa nulom. U skladu sa tim pristupom jednačina (12.67) dobija oblik

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{T}{4\pi^2 a} \int_0^{2\pi} (-E_{gem\ x} \cos\varphi \sin\varphi + E_{gem\ y}(1 + \cos^2\varphi) + VB_{gem\ z} \sin\varphi) d\varphi$$

Nakon integracije dobija se sledeći rezultat

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{3T}{4\pi a} E_{gem\ y} \quad (12.68)$$

Istakao sam da se velika poluosa ne menja u toku vremena odnosno ima konstantnu vrednost (jednačina (12.62)). Na osnovu jednačina (12.65) i (12.68) sledi da se ekscentricitet elipse menja tokom vremena. Obzirom da veličine na desnim stranama jednačina (12.65) i (12.68) imaju pozitivne vrednosti sledi da će se ekscentricitet elipse tokom vremena povećavati.

Ekscentricitet elipse određuje se na osnovu jednačine (7.6). Zbog važnosti ove jednačine za dalju analizu ponovo je navodim

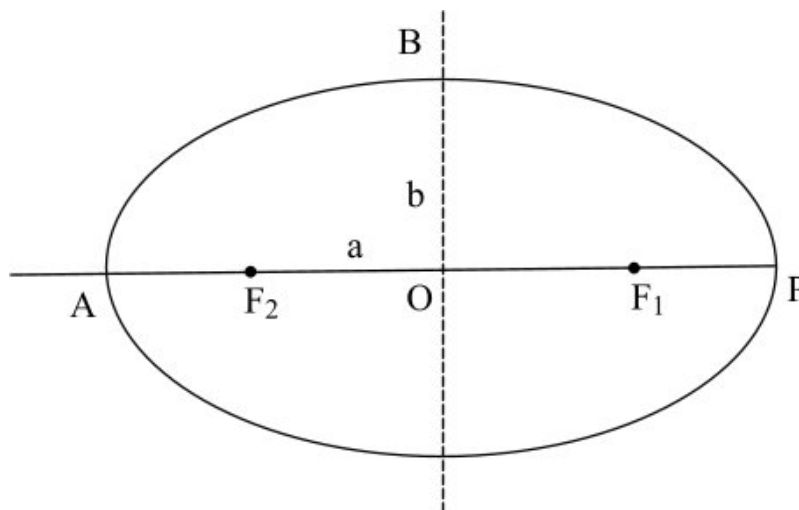
$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Na osnovu ove jednačine dobijam jednačinu za određivanje male poluose elipse

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (12.69)$$

Sa stanovišta gravitoelektromagnetizma dobio sam rezultat da se velika poluosa ne menja u toku vremena, ali se ekscentricitet elipse povećava u toku vremena. Na osnovu ovih rezultata i jednačine (12.69) sledi da će se mala poluosa elipse smanjivati u toku vremena, odnosno elipsa će postojati sve spljoštenija.

Na slici 77 prikazano je kretanje planete oko Sunca. Žiže elipse označene su na slici sa F_1 i F_2 . Centar mase Sunca poklapa se sa žižom F_1 . Tačka na eliptičnoj putanji u kojoj je planeta najbliža Suncu naziva se perihel. Njoj suprotna tačka je afel. Perihel je na slici 77 označen tačkom P , a afel je označen tačkom A . Velika poluosa elipse na slici je označena sa a , i ona je brojno jednaka dužini duži OP . Sa b označena je mala poluosa elipse. Ona je brojno jednaka dužini duži OB .



Slika 77

Kada se planeta nalazi u perihelu onda je ona minimalno udaljena od Sunca. To rastojanje označio sam sa r_{min} , i pokazao sam u sedmom poglavlju da se veličina r_{min} određuje na osnovu sledeće jednačine

$$r_{min} = a(1 - e) \quad (12.70)$$

Kada se planeta nalazi u afelu onda je ona maksimalno udaljena od Sunca. To rastojanje označio sam sa r_{max} . Ono se određuje na osnovu sledeće jednačine

$$r_{max} = a(1 + e) \quad (12.71)$$

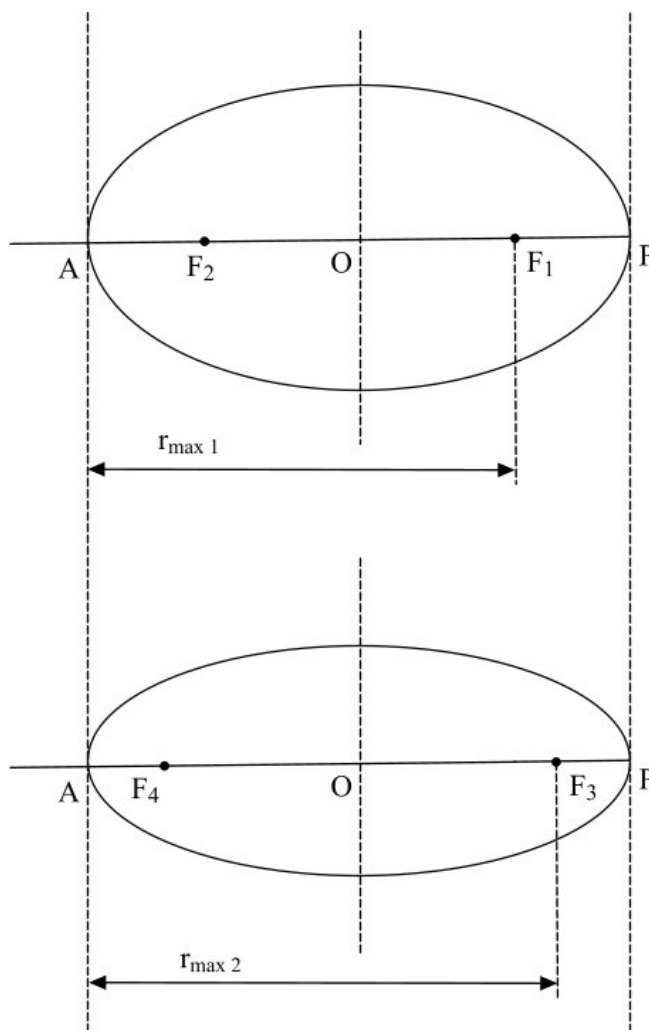
Istakao sam da se velika poluosa ne menja u toku vremena. Na osnovu jednačina (12.65) i (12.68) sledi da se ekscentricitet elipse povećava tokom vremena. Za slučaj elipse prikazane na slici 77 ekscentricitet elipse neka ima vrednost e_0 . Kada se planeta nalazi u afelu onda je ona maksimalno udaljena od Sunca, i na osnovu jednačine (12.71) dobijam rezultat

$$r_{max1} = a(1 + e_0) \quad (12.72)$$

Posle vremena T koji je jednak periodu rotacije planete oko Sunca, ekscentricitet elipse imaće vrednost e_1 . Na osnovu jednačine (12.71) dobijam rezultat

$$r_{max2} = a(1 + e_1) \quad (12.73)$$

Ekscentricitet elipse povećao se nakon vremena T , ali se mala poluosa elipse smanjila. Elipsa je postala spljoštenija. Da bismo bolje sagledali deformaciju elipse na slici 78 prikazana je elipsa sa ekscentricitetom e_0 , i elipsa sa ekscentricitetom e_1 . Ova deformacija elipse ima za posledicu pomeranja žiža. Žiža F_1 pomera se ka perihelu, a žiža F_2 pomera se ka afelu. Nove žiže elipse na slici 78 označene su sa F_3 i F_4 . Označena su i rastojanja r_{max1} i r_{max2} .



Slika 78

Obzirom da je e_1 veće od e_0 , sledi da je r_{max2} veće od r_{max1} . Maksimalno rastojanje između Sunca i planete se tokom vremena povećava, jer se ekscentricitet elipse povećava tokom vrtemena.

Razliku veličina r_{max2} i r_{max1} označiću sa Δr_{max} , odnosno

$$\Delta r_{max} = r_{max2} - r_{max1} \quad (12.74)$$

Zamenom jednačine (12.72) i (12.73) u jednačinu (12.74) dobijam

$$\Delta r_{max} = a(e_1 - e_0)$$

, odnosno

$$\Delta r_{max} = a\Delta e$$

Ova jednačina može se napisati u obliku

$$dr_{max} = ade$$

, odnosno

$$\frac{dr_{max}}{dt} = a \frac{de}{dt}$$

Usrednjavanjem ove jednačine po vremenu dobija se rezultat

$$\left\langle \frac{dr_{max}}{dt} \right\rangle = a \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle \quad (12.75)$$

Zamenom jednačine (12.68) u jednačinu (12.75) dobijam

$$\left\langle \frac{dr_{max}}{dt} \right\rangle = \frac{3T}{4\pi} E_{gem y} \quad (12.76)$$

Da bi procenio veličinu $E_{gem y}$ uzeću primer Zemlje, i korišću neku od jednačina (12.2-5). Maksimalno rastojanje Zemlje od Sunca određuje se na osnovu jednačine (12.71). Jedna od početnih definicija astronomske jedinice zasnivala se na srednjem rastojanju između Sunca i Zemlje, a ono se određuje na osnovu jednačine (12.1). Zbog jednostavnosti dalje analize uzeću da je

$$r_{max} = AU$$

, odnosno

$$\left\langle \frac{dr_{max}}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} AU \quad (12.77)$$

Zamenom jednačine (12.76) u jednačinu (12.77) dobijam

$$\frac{3T}{4\pi} E_{gem y} = \frac{d}{dt} AU \quad (12.78)$$

Što se tiče veličine $\frac{d}{dt} AU$ može se koristiti bilo koja od jednačina (12.2-5). Ja sam odlučio da koristim jednačinu (12.2). Zamenom jednačine (12.2) u jednačinu (12.78) dobijam sledeći rezultat

$$\frac{3T}{4\pi} E_{gem y} = 15 \frac{m}{vek}$$

, odnosno

$$E_{gem y} = \frac{\pi}{5} \frac{m}{(god)^2} \quad (12.79)$$

Korišćenjem ove vrednosti možemo odrediti veličinu $\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle$ za slučaj Zemlje. Zamenom jednačine (12.79) u jednačinu (12.68) dobijam

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{3}{20a} \frac{m}{god} \quad (12.80)$$

Vrednost Zemljine velike poluose iznosi

$$a = 1,000001018 AU$$

Zamenom ove vrednosti i vrednosti astronomske jedinice (jednačina (12.13)) u jednačinu (12.80) dobija se rezultat

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = 1,00269 \cdot 10^{-10} \frac{1}{vek} \quad (12.81)$$

Na slici 78 prikazano je kako se eliptična orbita neke planete deformiše tokom vremena. Jednačine (12.64) i (12.67) imaju složenu matematičku formu. Da bi rešio ove jednačine koristio sam pristup koji se zasniva na tome da se ekscentricitet elipse izjednači sa nulom. Primenom tog pristupa dobio sam jednačine (12.65) i (12.68). Ove jednačine važe za planete koje imaju male ekscentricitete.

Odrediću veličine $\left\langle \frac{dr_{max}}{dt} \right\rangle$ za Veneru i Saturn. Za slučaj Venere korišću oznaku $\left\langle \frac{dr_{max} \text{ venera}}{dt} \right\rangle$, a za slučaj Saturna korišću oznaku $\left\langle \frac{dr_{max} \text{ saturn}}{dt} \right\rangle$. Vrednosti ekscentriciteta za Veneru i Saturn iznose 0,0068 i 0,0542 respektivno.

Na osnovu jednačine (12.76) dobijam jednačinu

$$\left\langle \frac{dr_{max\ venera}}{dt} \right\rangle = \frac{3T_{venera}}{4\pi} E_{gem\ y} \quad (12.82)$$

Period rotacije Venere oko Sunca (T_{venera}) iznosi 224,7 dana, odnosno

$$T_{venera} = 224,7\ d \quad (12.83)$$

Napomenuo sam da je srednji Sunčev dan jednak 86400 *SI* sekundi.

Zamenom jednačina (12.83) i (12.79) u jednačinu (12.82) dobijam

$$\left\langle \frac{dr_{max\ venera}}{dt} \right\rangle = 9,23 \frac{m}{vek} \quad (12.84)$$

Izvršiću analizu i za slučaj Saturna. Za slučaj Venere koristio sam oznaku $\left\langle \frac{dr_{max\ venera}}{dt} \right\rangle$, a za slučaj Saturna korišću oznaku $\left\langle \frac{dr_{max\ saturn}}{dt} \right\rangle$. Na osnovu jednačine (12.76) dobijam jednačinu

$$\left\langle \frac{dr_{max\ saturn}}{dt} \right\rangle = \frac{3T_{saturn}}{4\pi} E_{gem\ y} \quad (12.85)$$

Period rotacije Saturna oko Sunca (T_{saturn}) iznosi 10747 dana, odnosno

$$T_{saturn} = 10747\ d \quad (12.86)$$

Zamenom jednačina (12.86) i (12.79) u jednačinu (12.85) dobijam

$$\left\langle \frac{dr_{max\ saturn}}{dt} \right\rangle = 441,66 \frac{m}{vek} \quad (12.87)$$

Na osnovu ove jednačine zaključujem da se maksimalno rastojanje između Saturna i Sunca za 100 godina poveća 441,66 metra.

Prilog 1 - Potvrda da je autorsko delo *Gravitoelektromagnetizam* deponovano i uneto u evidenciju deponovanih autorskih dela i predmeta srodnih prava u Zavodu za intelektualnu svojinu (Beograd, Srbija), dana 26.07.2016. godine.



РЕПУБЛИКА СРБИЈА
ЗАВОД ЗА ИНТЕЛЕКТУАЛНУ СВОЈИНУ
990 број: 2016/5319 А-0160/2016
Датум: 05.08.2016. године
Београд, Кнегиње Љубице 5
5-1/2

На основу члана 31. Закона о министарствима („Сл. гласник РС”, бр.44/14, 14/15 и 54/15), чл. 202. Закона о ауторском и сродним правима („Сл. гласник РС”, бр.104/09, 99/11 и 119/12), чл. 2. 17. и 18. Уредбе о условима које треба да испуњавају примерци ауторских дела и предмета сродних права који се депонују, уношењу у евиденцију и депоновању ауторских дела и предмета сродних права и садржају евиденције депонованих ауторских дела и предмета сродних права, код надлежног органа („Сл.гласник РС”, бр. 45/10) и решења 990 број 021-2016/2212-01 од 31.03.2016. године, поступајући по захтеву подносиоца пријаве Бранислава Павловића, са српским држављанством и са пребивалиштем у улици [redacted] Ниш, издаје се

ПОТВРДА

Унето је у евиденцију ауторских дела и предмета сродних права и депоновано у Заводу за интелектуалну својину ауторско дело:

Наслов ауторског дела	„ГРАВИТОЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗАМ”
Деловодни број пријаве	А-0160/2016
Датум уношења у евиденцију и депоновања	26.07.2016. године
Носилац права	Бранислав Павловић

Literatura

1. M. L. Ruggiero, A. Tartaglia: Gravitomagnetic effects, Torino, Italy, February 3, 2008, arxiv.org/abs/gr-qc/0207065v2
2. V. B. Bezerra, A. Barros, and C. Romero: On Some Aspects of Gravitomagnetism in Scalar-Tensor Theories of Gravity, *Brazilian Journal of Physics*, vol. 35, no. 4B, December, 2005.
3. S. Capozziello, M. De Laurentis, F. Garufi, L. Milano: Relativistic orbits with gravitomagnetic corrections, *Physica Scripta*, Volume 79, Number 2, 4 February 2009.
4. L. Combrinck: Evaluation of satellites LAGEOS I and II; general relativistic acceleration in the Schwarzschild field of Earth.
5. Harihar Behera: Is there a Gravitational Thomas Precession ? arxiv.org/pdf/astro-ph/0306253v1
6. Harihar Behera: Gravitational Thomas Precession – A Gravitomagnetic Effect ? arxiv.org/abs/astro-ph/0312013v1
7. M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby: *General Relativity An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, February 2006.
8. Chris Pollock: Mercury's Perihelion, March 2003.
9. <http://einstein.stanford.edu/index.html>
10. Claus Lammerzahl, Gernot Neugebauer: The Lense–Thirring Effect: From the Basic Notions to the Observed Effects.
11. C.W. F. Everitt et al. : Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity, *Physical Review Letters* PRL 106, 221101, May 2011.
12. E. Whitcomb: Precision Laser Interferometry in the LIGO Project, *Laser Physics*, Vol. 6, No. 2, 1996.
13. Djordje Mušicki: Uvod u teorijsku fiziku III/2 posebni deo elektrodinamike, Odsek za fizičke i meteorološke nauke Prirodno matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Gaudeamus, Beograd.
14. <https://public.nrao.edu/>
15. Mensalt Ivo: Binaries with relativistic components:Gravitational Radiation
16. Michele Maggiore: *Gravitational Waves Volume 1 Theory and Experiments*, Oxford University Press, 2008.
17. Lorenzo Iorio: Secular increase of the Astronomical Unit and perihelion precessions as tests of the Dvali-Gabadadze-Porrati multi-dimensional braneworld scenario, arxiv.org/abs/gr-qc/0508047v2