

Хмельник С. И.

# Непротиворечивое решение уравнений Максвелла

Редакция 1 – 06.03.2016

Редакция 2 – 16.03.2016

Редакция 3, исправленная и дополненная – 03.04.2016

Редакция 4, дополненная – 18.06.2016

Редакция 5, дополненная – 29.08.2016

Редакция 6, дополненная – 03.10.2016

Редакция 7, дополненная – 27.10.2016

Редакция 8, дополненная – 13.03.2017

Редакция 9, дополненная – 27.07.2017

Редакция 10, исправленная и дополненная – 17.08.2017

Редакция 11, исправленная и дополненная – 12.09.2018

Редакция 12, исправленная и дополненная – 06.11.2018

Редакция 13, исправленная и дополненная – 13.01.2019

Израиль                      2016

Solomon I. Khmelnik

# Inconsistency Solution of Maxwell's Equations (in Russian)

Copyright © 2016 by Solomon I. Khmelnik

Соломон Ицкович Хмельник

<https://orcid.org/0000-0002-1493-6630>

All right reserved. No portion of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, without written permission of the author.

Published by "MiC" - Mathematics in Computer Comp.

BOX 15302, Bene-Ayish, Israel, 60860

E-mail: [solik@netvision.net.il](mailto:solik@netvision.net.il)

Printed in United States of America, Lulu Inc.,

ID 1855552

ISBN 978-1-329-96074-9



Israel 2016

## Аннотация

Предлагается новое решение уравнений Максвелла для вакуума, для провода с постоянным и переменным током, для конденсатора, для сферы и т.д. Предварительно отмечается, что доказательство единственности известного решения основано на законе сохранения энергии, который не соблюдается (для мгновенных значений) в известном решении. Предлагаемое решение

- не противоречит закону сохранения энергии в каждый момент времени, т.е. устанавливает постоянство плотности потока электромагнитной энергии во времени,
- выявляет сдвиг фаз между электрическими и магнитными напряженностями,
- объясняет существование потока энергии вдоль провода, равного потребляемой мощности.

Приводится подробное доказательство для заинтересованного читателя.

Рассматриваются экспериментальные подтверждения теории.

Предлагаются объяснения экспериментов, которые до сих пор не были обоснованы

Рассматриваются технические приложения полученного решения.

# Оглавление

- Глава 0. Предисловие \ 0-1
- Глава 1. Второе решение уравнений Максвелла для вакуума \ 1-1
- Глава 2. Решение уравнений Максвелла для диэлектрической цепи переменного тока \ 2-1
- Глава 2а. Решение уравнений Максвелла для конденсатора с переменным напряжением \ 2а-1
- Глава 2в. Решение уравнений Максвелла для цилиндрического конденсатора с переменным напряжением \ 2в-1
- Глава 3. Решение уравнений Максвелла для магнитной цепи переменного тока \ 3-1
- Глава 4. Решение уравнений Максвелла для низкоомного провода переменного тока \ 4-1
- Глава 4б. Решение уравнений Максвелла для трубчатого провода с переменным током \ 4б-1
- Глава 4с. Специальные трансформаторы \ 4с-1
- Глава 5. Решение уравнений Максвелла для провода постоянного тока \ 5-1
- Глава 5а. Двигатель Мильроя \ 5а-1
- Глава 5с. Магнетосопротивление \ 5с-1
- Глава 5д. Решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током в магнитном поле \ 5д-1
- Глава 5е. Решение уравнений Максвелла для постоянного магнита. Восстановление энергии магнита. \ 5е-1
- Глава 6. Излучение и передача энергии по одному проводу \ 6-1
- Глава 7. Решение уравнений Максвелла для конденсатора в цепи постоянного тока. Природа потенциальной энергии конденсатора. \ 7-1
- Глава 7а. Конденсатор с электропроводным диэлектриком и трансформатор постоянного тока \ 7а-1
- Глава 8. Уравнения Максвелла в сферических координатах \ 8-1
- Глава 8а. Сферический конденсатор \ 8а-1
- Глава 8в. Новый подход к проектированию антенн \ 8б-1
- Глава 9. Природа земного магнетизма \ 9-1
- Глава 10. Решение уравнений Максвелла для шаровой молнии \ 10-1
- Глава 11. Математическая модель плазменного кристалла \ 11-1
- Глава 12. Работа силы Лоренца \ 12-1
- Глава 13. Электромагнитный импульс \ 13-1
- Глава 15. Четвертая электромагнитная индукция \ 15-1
- Литература \ L-1

---

# Глава 0. Предисловие

---

## Оглавление

1. Вступление \ 1
2. О потоке энергии в проводе \ 5
3. Требования к непротиворечивому решению уравнений Максвелла \ 6
4. Варианты уравнений Максвелла \ 6
- Приложение 0. Декартовы координаты. \ 9
- Приложение 1. Цилиндрические координаты. \ 10
- Приложение 2. Сферические координаты. \ 10
- Приложение 3. Некоторые соотношения в системах СГС и СИ. \ 11
- Приложение 4. Известное решение уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. \ 12

## 1. Вступление

Система уравнений Максвелла является одним из величайших открытий человеческого разума. В то же время известные решения этой системы уравнений обладают рядом недостатков. Достаточно сказать, что эти решения не удовлетворяют закону сохранения энергии. Такие решения позволяют некоторым авторам усомниться в достоверности самих уравнений Максвелла. Подчеркнем, однако, что эти **сомнительные результаты следуют только из известного решения**. Но решение уравнений Максвелла может быть иным (уравнения в частных производных имеют, как правило, несколько решений). И необходимо найти такое решение, которое не противоречит физическим законам и эмпирически установленным фактам.

Автор нашел новое решение системы уравнений Максвелла, свободное от указанных недостатков. Это решение найдено для уравнений Максвелла, записанных в покоординатной форме, и не может быть получено в векторном виде из уравнений Максвелла, записанных в векторной форме. Это, видимо, и послужило причиной того, что предлагаемое решение до сих пор не было получено.

На основе нового решения уравнений Максвелла теоретически предсказана и экспериментально подтверждена спиральная структура электромагнитных волн и стационарных электромагнитных полей, а также показано, что спиральные структуры существуют во всех без исключения волнах и технических устройствах. Спиральность структур выражается в том, что покоординатные напряженности электрических и магнитных волн и полей изменяются в зависимости от координат и времени (для волн) по синусоидальным функциям.

Ниже теоретические предсказания обосновываются тем, что эти функции таковы, что

- не противоречат закону сохранения энергии **в каждый момент времени** (*а не в среднем*), т.е. устанавливают постоянство плотности потока электромагнитной энергии во времени,
- выявляют сдвиг фаз между электрическими и магнитными напряженностями не только в технических устройствах, но и в волнах,
- объясняют существование потока энергии вдоль и **внутри** (*а не снаружи*) провода, равного потребляемой мощности,
- объясняют закрученность света, т.е. появление орбитального углового момента, при котором поток энергии не просто летит вперед, а крутится вокруг оси движения.

Ниже теоретические предсказания подтверждаются экспериментальными наблюдениями и объяснениями экспериментов, которые до сих пор не были обоснованы. Среди них

- существование устройств передачи энергии благодаря возникновению э.д.с., необъяснимых электромагнитной индукцией,
- сохранение энергии в диэлектрике конденсатора, освобожденного от обкладок,
- сохранение энергии в замкнутом магнитопроводе,
- вращающий момент в проводе и двигатель Мильроя,
- однопроводная передача энергии,
- постоянное восстановление энергии магнита,
- плазменный кристалл,

- существование э.д.с., необъяснимых электромагнитной индукцией,
- момент импульса в магните,
- заряд конденсатора продольным магнитным полем,
- заряд конденсатора круговым магнитным полем,
- э.д.с. в проводе, находящемся в неоднородном продольном магнитном поле,
- э.д.с. в проводе, находящемся в круговом магнитном поле,
- э.д.с. в проводе, находящемся в поперечном магнитном поле,
- магнитное поле в заряженном конденсаторе,
- неэлектромагнитная индукция (как следствие магнитодвижущей силы),
- продольная магнитная напряженность в полости трубчатого проводника,
- поток энергии, как электродвижущая сила,
- природа потенциальной энергии конденсатора,

"До настоящего времени не было обнаружено ни одного эффекта, который потребовал бы видоизменения уравнений Максвелла" [36]. Тем не менее, в последнее время критика справедливости уравнений Максвелла слышится со всех сторон. Посмотрим на рис. 1, где изображена волна, являющаяся известным решением уравнений Максвелла. Уверенность критиков уравнений Максвелла создается, прежде всего, нарушением закона сохранения энергии в такой волне. И, действительно, *"плотность потока электромагнитной энергии (модуль вектора Умова-Пойнтинга) «нульсирует» по гармоническому закону. Не нарушается ли здесь закон сохранения энергии?"* [1]. Безусловно, нарушается, **если** электромагнитная волна удовлетворяет **известному решению** уравнений Максвелла. Но ведь другого решения нет: *"Доказательство единственности решения в общих чертах сводится к следующему. Если имеется два различных решения, то их разность вследствие линейности системы тоже является решением, но при нулевых зарядах и токах и нулевых начальных и граничных условиях. Отсюда, пользуясь выражением для энергии электромагнитного поля и законом сохранения энергии заключаем, что разность решений тождественно равна нулю, т. е. решения одинаковы. Тем самым единственность решения уравнений Максвелла доказана"* [2]. Таким образом, единственность решения доказывается на основе применения того закона, который нарушается в этом решении.

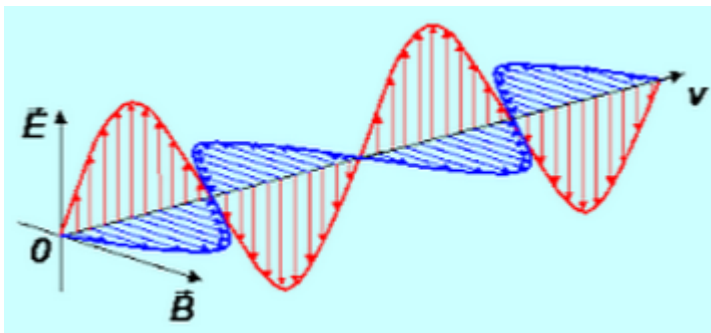


Рис. 1.

Другим результатом, следующим из существующего решения, является синфазность электрической и магнитной компонент напряженностей в электромагнитной волне. Это хорошо видно на рис. 1. Но это противоречит представлению о непрерывном преобразовании электрической и магнитной компонент энергии в электромагнитной волне. В [1], например, этот факт относится к "порокам современной классической электродинамики".

Такие результаты, следующие из известного решения уравнений Максвелла, позволяют некоторым авторам усомниться в достоверности уравнений Максвелла. Подчеркнем, однако, что эти сомнительные результаты следуют **только из найденного решения**. Но это решение может быть иным (уравнения в частных производных имеют, как правило, несколько решений).

Для удобства читателя в приложении 4 описан метод получения известного решения. Ниже выводится другое решение уравнений Максвелла, в котором плотность потока электромагнитной энергии остается постоянной во времени, а электрическая и магнитная компоненты напряженностей в электромагнитной волне сдвинуты по фазе.

Рассмотрим еще электромагнитную волну в проводе. Если полагать, что провод имеет пренебрежимо малое сопротивление, то уравнения Максвелла для этой волны буквально совпадают с уравнениями Максвелла для волны в вакууме. Однако в электротехнике не используется известное решение. Используется только решение, связывающее напряженность кругового магнитного поля с током в проводе (будем для краткости в дальнейшем называть его электротехническим решением). Это решение тоже удовлетворяет уравнениям Максвелла. Однако, во-первых, оно является другим решением тех же уравнений (что



опровергает теорему о единственности известного решения). А, во-вторых, - и это главное, - электротехническое решение не объясняет известный экспериментальный факт.

Речь идет о скин-эффекте. Решение, объясняющее скин-эффект, должно содержать нелинейную зависимость плотности тока (идущего вдоль провода) от радиуса. Такая зависимость в соответствии с уравнениями Максвелла должна сочетаться с существованием радиальных и круговых электрических и магнитных напряженностей, нелинейно зависящих от радиуса. Этого нет в электротехническом решении. Скин-эффект объясняется на основе уравнений Максвелла, но из электротехнического решения он **не** следует. Это и позволяет утверждать, что электротехническое решение не объясняет экспериментальный факт.

Наконец, существующее решение противоречит существованию т.н. закрученного света [65].

## 2. О потоке энергии в проводе

Рассмотрим еще поток энергии в проводе. Существующее представление о передаче энергии по проводу состоит в том, что энергия каким-то образом распространяется вне провода [13]: *"... наша «сумасшедшая» теория говорит, что электроны получают свою энергию, растрачиваемую ими на создание теплоты извне, от потока энергии внешнего поля внутрь провода. Интуиция нам подсказывает, что электрон пополняет свою энергию за счет «давления», которое толкает его вдоль провода, так что энергия как будто должна течь вниз (или вверх) по проводу. А вот теория утверждает, что на самом деле на электрон действует электрическое поле, создаваемое очень далекими зарядами, и электроны теряют свою энергию, расходуемую на тепло именно из этих полей. Энергия отдаленных зарядов каким-то образом растекается по большой области пространства и затем втекает внутрь провода."*

Такая теория противоречит и закону сохранения энергии. Действительно, поток энергии, путешествуя в пространстве, должен терять часть энергии. Однако это никак не обнаруживается ни экспериментально, ни теоретически. Но, главное, эта теория противоречит следующему эксперименту. Пусть по центральному проводу коаксиального кабеля течет постоянный ток. Этот провод изолирован от внешнего потока энергии. Откуда же появляется поток энергии, компенсирующий тепловые потери в проводе? Но, кроме потерь в проводе, этот поток из-вне должен проникнуть в нагрузку, например, в обмотки электромоторов, закрытые стальными кожухами статора. Этот вопрос существующая теория не обсуждает.

Итак, существующая теория утверждает, что входящий (перпендикулярно проводу) электромагнитный поток позволяет току преодолевать сопротивление движению и совершает работу, которая превращается в тепло. Этот известный вывод вуалирует естественный вопрос: как ток может привлекать поток, если ток появляется благодаря потоку? Естественно предположить, что поток создает некоторую э.д.с., которая "движет ток". При этом поток энергии электромагнитной волны присутствует в самой волне и для этого не используется пространство, внешнее по отношению к волне.

Решение уравнений Максвелла должно моделировать такую структуру электромагнитной волны, в которой присутствует поток электромагнитной энергии.

Интуиция, о которой говорит Фейнман, нас **не** обманывает. Автор доказывает это ниже, **не** выходя за рамки уравнений Максвелла.

### 3. Требования к непротиворечивому решению уравнений Максвелла

Итак, решение уравнений Максвелла должно

- описывать волну в вакууме и волну в проводе,
- не противоречить закону сохранения энергии в каждый момент времени, т.е. устанавливать постоянство плотности потока электромагнитной энергии во времени,
- выявлять сдвиг фаз между электрическими и магнитными напряженностями,
- объяснять существование потока энергии вдоль провода, равного потребляемой мощности.

Ниже выводится такое решение уравнений Максвелла.

### 4. Варианты уравнений Максвелла

Далее выделяются различные частные случаи (варианты) системы уравнений Максвелла, которые мы пронумеруем для удобства изложения.

#### Вариант 1.

Уравнения Максвелла в общем случае в системе СГС имеют вид [3]:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (4)$$

$$I = \sigma E, \quad (5)$$

где

$I$ ,  $H$ ,  $E$  - ток проводимости, магнитная и электрическая напряженности соответственно,  
 $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  - диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, проводимость среды.

### Вариант 2.

Для вакуума надо принять  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$ . Тогда система уравнений (1-5) примет вид:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (9)$$

Решение этой системы рассмотрено в главе 1.

### Вариант 3.

Рассмотрим вариант 1 в комплексном представлении:

$$\operatorname{rot}(E) + i\omega \frac{\mu}{c} H = 0, \quad (10)$$

$$\operatorname{rot}(H) - i\omega \frac{\varepsilon}{c} E - \frac{4\pi}{c} (\operatorname{real}(I) + i \cdot \operatorname{imag}(I)) = 0, \quad (11)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (12)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (13)$$

$$\operatorname{real}(I) = \sigma \cdot \operatorname{abs}(E). \quad (14)$$

Здесь важно отметить, что в (14) указывается не весь ток, а только его реальная часть, т.е. ток проводимости. Мнимая часть тока является током смещения и не зависит от электрических зарядов.

Решение этой системы рассмотрено в главе 4.

**Вариант 4.**

Для провода, в котором протекает синусоидальный ток  $I$  от внешнего источника, иногда можно исключить  $\operatorname{curl}(I)$  в уравнениях (11-14). Это возможно для низкоомного провода и для диэлектрического провода (подробнее см. в главе 2). При этом система (11-14) принимает вид:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (16)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (17)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (18)$$

Здесь важно отметить, что ток  $I$  **не** является током проводимости, даже если он течет по проводнику.

Решение этой системы рассмотрено в **главе 2**.

**Вариант 5.**

Для провода постоянного тока система по варианту 1 упрощается благодаря отсутствию производных по времени и принимает вид:

$$\operatorname{rot}(E) = 0, \quad (21)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (22)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (24)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (25)$$

$$I = \sigma E \quad (26)$$

или

**Вариант 6.**

$$\operatorname{rot}(I) = 0, \quad (27)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (28)$$

$$\operatorname{div}(I) = 0, \quad (29)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (30)$$

Решение этой системы рассмотрено в **главе 5**

Мы будем искать монохроматическое решение указанных систем. Переход к полихроматическому решению может быть выполнен с помощью преобразования Фурье.

## Приложение 0. Декартовы координаты.

В декартовых координатах  $x, y, z$ , как известно [4], скаляр-дивергенция вектора  $H$ , вектор-градиент скалярной функции  $a(x, y, z)$ , вектор-ротор вектора  $H$  имеют соответственно вид

$$\operatorname{div}(H) = \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right),$$

$$\operatorname{grad}(a) = \left[ \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z} \right],$$

$$\operatorname{rot}(H) = \left( \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \right).$$

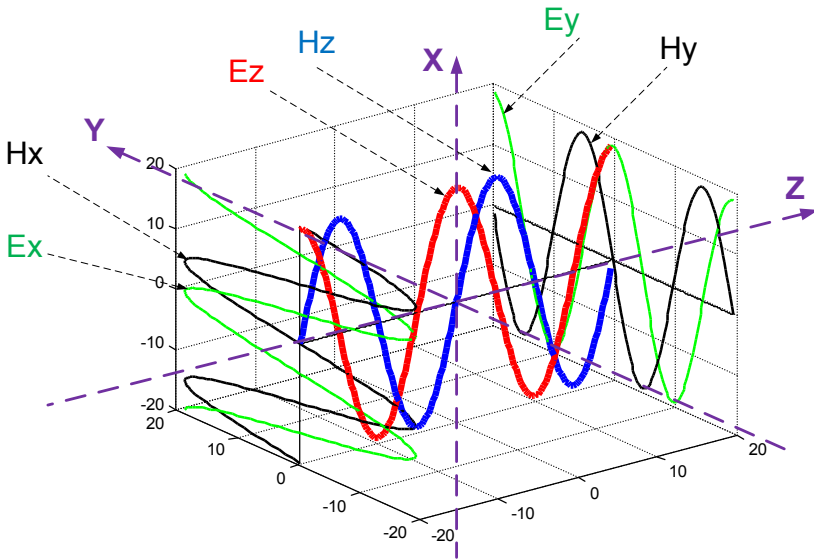


Рис. 1.

Электрические и магнитные напряженности в декартовых координатах, получаемые в результате полученного решения, показаны на следующем рис. 1.

### Приложение 1. Цилиндрические координаты.

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ , как известно [4], скаляр-дивергенция вектора  $H$ , вектор-градиент скалярной функции  $a(r, \varphi, z)$ , вектор-ротор вектора  $H$  имеют соответственно вид

$$\operatorname{div}(H) = \left( \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right), \quad (a)$$

$$\operatorname{grad}_r(a) = \frac{\partial a}{\partial r}, \quad \operatorname{grad}_\varphi(a) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a}{\partial \varphi}, \quad \operatorname{grad}_z(a) = \frac{\partial a}{\partial z}, \quad (b)$$

$$\operatorname{rot}_r(H) = \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right), \quad (c)$$

$$\operatorname{rot}_\varphi(H) = \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (d)$$

$$\operatorname{rot}_z(H) = \left( \frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right). \quad (e)$$

### Приложение 2. Сферические координаты.

На рис. 1 показана система сферических координат  $(\rho, \theta, \varphi)$ , а в табл. 1 приведены выражения для ротора и дивергенции вектора  $E$  в этих координатах [4].

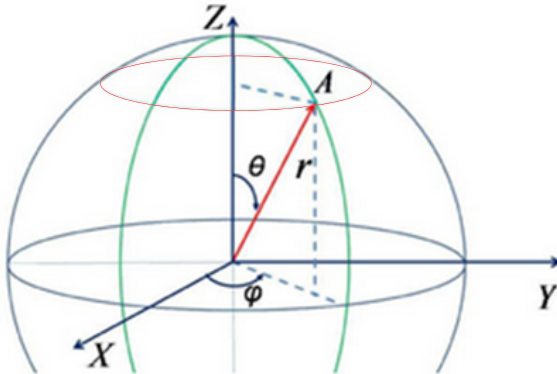


Рис. 1.

Таблица 1.

1	2	3
1	$\operatorname{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$

2	$\text{rot}_\theta(E)$	$\frac{\partial E_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\rho \partial \varphi}$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$

### Приложение 3. Некоторые соотношения в системах СГС и СИ.

Далее формулы приводятся в системе СГС, но некоторые примеры для наглядности даются в системе СИ. Поэтому в табл. 1 для удобства читателя указаны соотношения между некоторыми единицами измерения в этих системах.

Наименование единицы	СГС	СИ
Сила электрического тока	1 СГС	$3,33 \cdot 10^{-10}$ А
Электрическое напряжение	1 СГС	$3 \cdot 10^2$ В
Мощность, плотность потока энергии	1 СГС	$10^{-7}$ Вт
Плотность потока энергии на единицу длины провода	1 СГС	$10^{-5}$ Вт/м
Плотность электрического тока	1 СГС	$3,33 \cdot 10^{-6}$ А/м <sup>2</sup> $3,33 \cdot 10^{-12}$ А/мм <sup>2</sup>
Напряженность электрического поля	1 СГС	$3 \cdot 10^4$ В/м
Напряженность магнитного поля	1 СГС, Эрстед	80 А/м
Магнитная индукция	1 СГС, Гаусс	$10^{-4}$ Т
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	1 СГС	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Абсолютная магнитная проницаемость	1 СГС	$1,26 \cdot 10^{-8}$ Гн/м
Электрическая ёмкость	1 СГС	$1,1 \cdot 10^{-12}$ Ф
Индуктивность	1 СГС	$10^{-9}$ Гн
Электрическое сопротивление	1 СГС	$9 \cdot 10^{11}$ Ом
Электрическая проводимость	1 СГС	$1,1 \cdot 10^{-12}$ см
Удельное электрическое	1 СГС	$9 \cdot 10^9$ Ом·м

сопротивление		
Удельная электрическая проводимость	1 СГС	$1,1 \cdot 10^{-10}$ см/м

#### Приложение 4. Известное решение уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в вакууме (приведенную выше в разделе 4):

$$\operatorname{rot}(E) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (4)$$

Возьмем ротор от обеих частей уравнения (1) и получим:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) = \operatorname{rot}\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}\right) \quad (5)$$

или

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot}(H)). \quad (6)$$

Совместим уравнения (2, 6) и найдем:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E). \quad (6a)$$

Известно [4, стр. 131], что

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(E)) - \Delta E. \quad (7)$$

где в декартовых координатах

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Из (3, 7) находим:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) = -\Delta E. \quad (9)$$

Совместим уравнения (6a, 8, 9) и найдем:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}. \quad (10)$$

В декартовых координатах это уравнение имеет комплексное решение вида

$$E(t, x, y, z) = |E| e_p e^{(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0)}, \quad (11)$$



что проверяется непосредственной подстановкой. Для этого предварительно вычисляются первые и вторые производные, входящие в (10). Константы  $(|E|, e_p, k_x, k_y, k_z, \omega, \varphi_0)$  имеют определенный физический смысл (что мы здесь не будем обсуждать)

Найденное решение является комплексным. Известно, что реальная часть комплексного решения также является решением. Следовательно, в качестве решения вместо (11) можно принять решение вида

$$E(t, x, y, z) = |E|e_p \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0), \quad (12)$$

Аналогично из находится решение вида

$$H(t, x, y, z) = |H|h_p \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0). \quad (13)$$

Заметим, что энергия, определяется как интеграл

$$\begin{aligned} W &= \int_i \left( \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \int_i \left( \varepsilon (|E|e_p \cos(\dots \omega t))^2 + \mu (|H|h_p \cos(\dots \omega t))^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon (|E|e_p)^2 + \mu (|H|h_p)^2 \right) \int_i (\cos^2(\dots \omega t)) dt = \quad , \quad (14) \\ &= \frac{1}{8\omega} \left( \varepsilon (|E|e_p)^2 + \mu (|H|h_p)^2 \right) \Big|_0^t \sin(\dots 2\omega t) \end{aligned}$$

Из (12, 13, 14) с очевидностью следует

- 1) энергия изменяется во времени, что противоречит закону сохранения энергии,
- 2) напряженности  $E$  и  $H$  синфазны, что противоречит электротехнике.

# Глава 1. Второе решение уравнений Максвелла для вакуума

---

## Оглавление

1. Введение \ 1
2. Решение уравнений Максвелла \ 1
3. Напряженности \ 3
4. Потоки энергии \ 9
5. Скорость движения энергии \ 10
7. Импульс и момент импульса \ 12
6. Обсуждение \ 14
- Приложение 1 \ 15

## 1. Введение

В главе "Предисловие" показана противоречивость известного решения уравнений Максвелла. Ниже предлагается новое решение уравнений Максвелла для вакуума [5].

## 2. Решение уравнений Максвелла

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла для вакуума, которая приведена в главе "Предисловие", как вариант 1, и имеет вид

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (a)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (b)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (c)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (d)$$

В системе цилиндрических координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = M_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = M_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = M_z, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (8)$$

$$J = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (9)$$

$$M = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (10)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\omega$  – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$J_r = j_r(r)co, \quad (13)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$J_z = j_z(r)si, \quad (15)$$

$$H_r = h_r(r)co, \quad (16)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (17)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (18)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (19)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (20)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (21)$$

$$M_r = m_r(r)co, \quad (21a)$$

$$M_\varphi = m_\varphi(r)si, \quad (22)$$

$$M_z = m_z(r)si, \quad (23)$$

где  $j(r)$ ,  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $m(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-23) преобразуют систему уравнений (1-10) с тремя аргументами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $j(r)$ ,  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $m(r)$ .

В приложении 1 показано, что у такой системы существует решение, имеющее следующий вид (в приложении 1 см. (3.1, 39, 33, 34, 32) соответственно):

$$h_z(r) = 0, e_z(r) = 0, \tag{24}$$

$$e_r(r) = e_\varphi(r) = \frac{A}{2} r^{(\alpha-1)}, \tag{25}$$

$$h_\varphi(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_r(r), \tag{26}$$

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi(r), \tag{27}$$

$$\chi = \pm \omega \sqrt{\mu \varepsilon} / c, \tag{28}$$

где  $A, \varepsilon, \mu, c, \alpha, \chi, \omega$  - константы.

Тем самым мы получили монохроматическое решение системы уравнений (1-10). Переход к полихроматическому решению может быть выполнен с помощью преобразования Фурье. Очевидно, если решение существует в цилиндрической системе координат, то оно существует и в любой иной системе координат.

Таким образом, мы получили общее решение уравнений Максвелла в вакууме.

### 3. Напряженности

Рассмотрим решение (2.25):

$$e_r = e_\varphi = 0.5A \cdot r^{\alpha-1}, \tag{1}$$

где  $A$  - некоторая константа. На рис. 1 показаны, например, графики функций (1, 2) при  $A = -1$ ,  $\alpha = 0.8$ .

На рис. 2 показаны векторы напряженностей, исходящие из точки  $A(r, \varphi)$ . Напомним, что проекции  $h_\varphi(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_r(r)$  и

$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi(r)$ , - см. (2.26, 2.27). Направления векторов  $e_r(r)$  и

$e_\varphi(r)$  выбраны так:  $e_r(r) > 0$ ,  $e_\varphi(r) < 0$ . При этом **векторы  $E$ ,  $H$  всегда ортогональны**.

Для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны рассмотрим функции (2.11, 2.12) и (2.16-2.21). Видно, что **в каждой точке с координатами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  напряженности  $H$ ,  $E$  сдвинуты по фазе на четверть периода** – см. рис. 0.

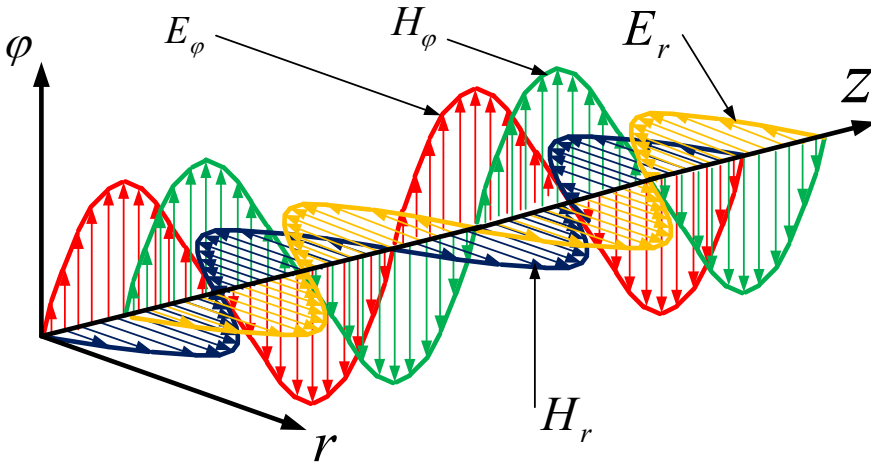


Рис. 0 (4hehe2.vsd).

Плотность энергии

$$W = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon H^2 + \mu E^2) \quad (2)$$

Учитывая (2.17, 2.18, 2.20, 2.21, 2.26, 2.27), находим:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi}(\varepsilon((e_r \sin i)^2 + (e_\varphi \cos o)^2) + \mu((h_r \cos o)^2 + (h_\varphi \sin i)^2)) \\ &= \frac{1}{8\pi}(\varepsilon((e_r \sin i)^2 + (e_\varphi \cos o)^2) + \mu \frac{\varepsilon}{\mu}((e_r \cos o)^2 + (e_\varphi \sin i)^2)) \end{aligned}$$

или

$$W(r) = \frac{\varepsilon}{4\pi}(e_r(r))^2 \quad (3)$$

- см. также рис. 1. Из (3, 3.2) находим:

$$W(r) = \frac{A^2 \varepsilon}{16\pi} r^{2(\alpha - 1)} \quad (3a)$$

Таким образом, **плотность энергии электромагнитной волны постоянна во времени и одинакова на всех точках цилиндра данного радиуса**.

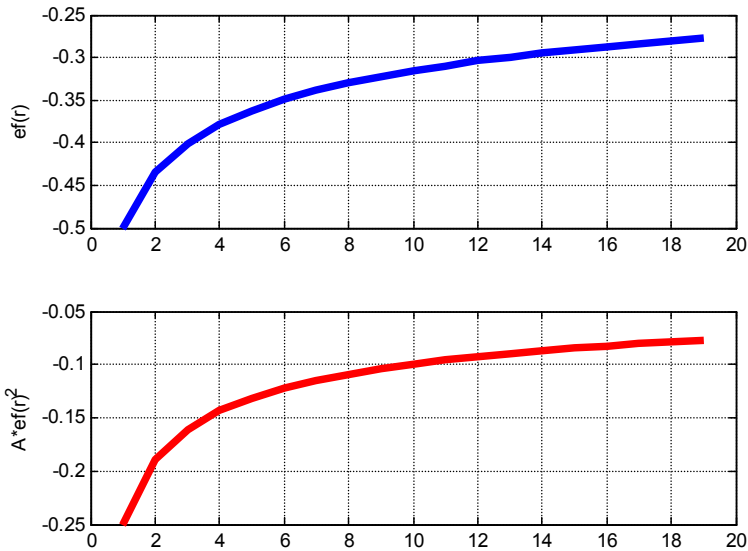


Fig.1. SecondSolMax.m

Решение существует и при измененных знаках функций (2.11, 2.12). Этому случаю соответствует рис. 3. Рис. 2 и рис. 3 иллюстрируют то, что возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны.

Рассмотрим функции (2.11, 2.12) и (2.28) Тогда найдем

$$co = \cos(\alpha\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} z + \omega t), \quad si = \sin(\alpha\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} z + \omega t). \quad (4)$$

Рассмотрим точку, движущуюся по цилиндру постоянного радиуса  $r$ , у которой значение напряженности зависит от времени по формуле

$$H_{r.} = h_r(r) \cos(\omega t) \quad (5)$$

Сравнивая эту формулу с (2.16) и учитывая (4), замечаем, что формулы (5) и (2.16) совпадают, если в любой момент времени

$$\alpha\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} z = 0 \quad (6)$$

или

$$\varphi = -\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha \cdot c} z. \quad (7)$$

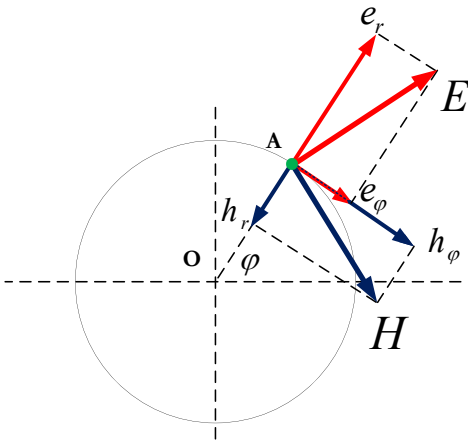


Рис. 2.

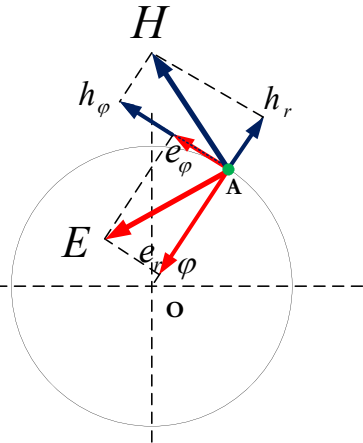


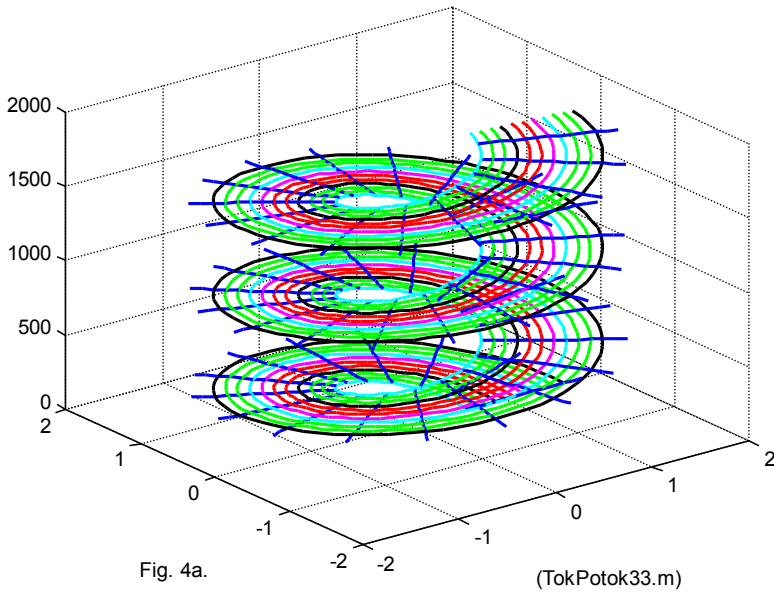
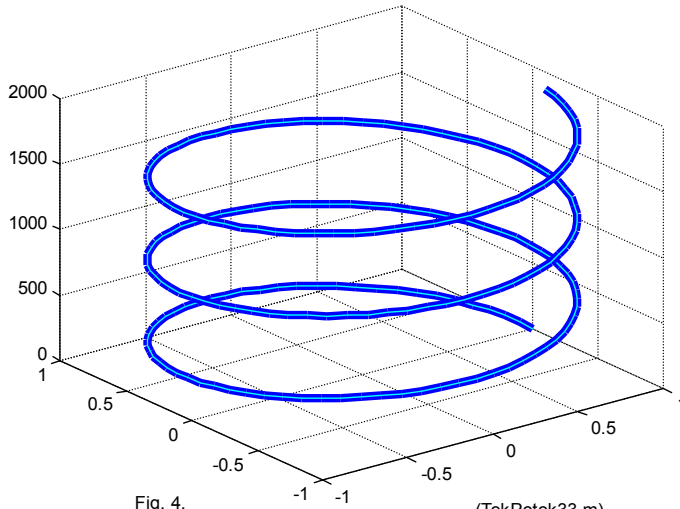
Рис. 3.

Таким образом, на цилиндре постоянного радиуса  $r$  существует траектория точки, описываемая формулами (4, 7), где все напряженности изменяются синусоидально. С другой стороны, такая траектория является винтовой линией. Следовательно, линия, по которой точка движется так, что ее напряженность  $H_r$  изменяется синусоидально во времени, является винтовой линией. Эти же рассуждения можно повторить для других напряженностей (2.17-2.21). Итак,

**траектория точки, которая движется по цилиндру данного радиуса так, что значение любой напряженности в этой точке изменяется синусоидально во времени, является винтовой линией.**

(А)

Например, на рис. 4 показана винтовая линия при  $r = 1, c = 300000, \omega = 3000, \alpha = -3, \varphi = [0 \div 2\pi]$ . На рис. 4а показаны винтовые линии при тех же условиях, но для различных значений радиуса  $r = [0.5, 0.6, \dots 1.0, 1.1]$ . Прямыми линиями показаны геометрические места точек с равными  $\varphi$ .



Последний тезис (А) означает, что в точке  $T$ , движущейся по данной винтовой линии, векторы напряженностей (2.16-2.21) имеют следующий вид:

$$H_{r.} = h_r(r)\cos(\omega t), \quad H_{\varphi.} = h_{\varphi}(r)\sin(\omega t), \quad H_{z.} = h_z(r)\sin(\omega t),$$

$$E_{r.} = e_r(r)\sin(\omega t), \quad E_{\varphi.} = e_{\varphi}(r)\cos(\omega t), \quad E_{z.} = e_z(r)\cos(\omega t).$$



**Глава 1. Второе решение уравнений Максвелла для вакуума**

Выше было показано (см. (2.24-2.27), что  $h_z(r) = 0$ ,  $e_z(r) = 0$ ,  
 $e_r(r) = e_\varphi(r) = e_{r\varphi}(r)$ ,  $h_\varphi(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r)$ ,  $h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r)$ .

Следовательно, в каждой точке имеются только векторы

$$H_{r\cdot} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r) \cos(\omega t), \quad H_{\varphi\cdot} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r) \sin(\omega t),$$

$$E_{r\cdot} = e_{r\varphi}(r) \sin(\omega t), \quad E_{\varphi\cdot} = e_{r\varphi}(r) \cos(\omega t).$$

При этом суммарные векторы  $H_{r\varphi} = H_r + H_\varphi$  и  $E_{r\varphi} = E_r + E_\varphi$  находятся в плоскости  $r, \varphi$  и имеют модули

$$|H_{r\varphi}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r), \quad |E_{r\varphi}| = e_{r\varphi}(r).$$

На рис. 4б показаны все эти векторы.

Видно, что при движении точки  $T$  по винтовой линии суммарные векторы  $H_{r\varphi}$  и  $E_{r\varphi}$  вращаются в плоскости  $r, \varphi$ . Их модули остаются постоянными и равными между собой. Эти векторы  $H_{r\varphi}$  и  $E_{r\varphi}$  всегда ортогональны.

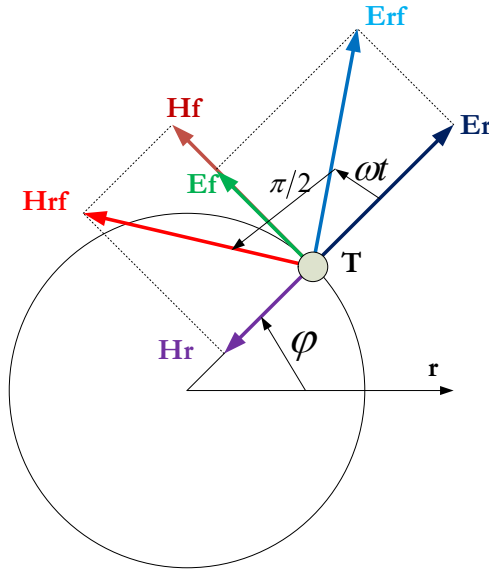


Рис. 4б.

Итак, синусоидальная волна распространяется по винтовой линии, при этом в каждой точке  $T$ , движущейся по данной винтовой линии, проекции векторов магнитной и электрической напряженностей

- существуют только в плоскости, перпендикулярной оси винтовой линии, т.е. существуют только две проекции этих векторов,
- изменяются синусоидально,
- сдвинуты по фазе на четверть периода.

Суммарные векторы

- вращаются в этой плоскости,
- имеют постоянные модули,
- ортогональны друг другу.

## 4. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В системе СИ  $\eta = 1$  и последняя формула (1) принимает вид:

$$S = E \times H, \quad (3)$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_r, S_\varphi, S_z$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Таким образом, плотности потока электромагнитной энергии, распространяющейся по радиусу, по окружности, вдоль оси OZ определяются соответственно формулами следующего вида:

$$\frac{e_r}{r} + \dot{e}_r - \frac{e_r}{r}\alpha - \chi e_z = 0, \quad (1)$$

$$\frac{e_r}{r} + \dot{e}_r - \frac{e_r}{r}\alpha + \frac{\mu\omega}{c}h_z = 0, \quad (4)$$

$$-\frac{e_z}{r}\alpha + e_r\chi - \frac{\mu\omega}{c}h_r = 0, \quad (2)$$

$$e_r \chi - \dot{e}_z - \frac{\mu\omega}{c} h_r = 0, \quad (3)$$

$$\frac{h_r}{r} + \dot{h}_r - \frac{h_r}{r} \alpha + \chi h_z = 0, \quad (5)$$

$$-\frac{h_r}{r} - \dot{h}_r + \frac{h_r}{r} \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z = 0, \quad (8)$$

$$\frac{h_z}{r} \alpha + h_r \chi - \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r = 0, \quad (6)$$

$$-h_r \chi - \dot{h}_z + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r = 0. \quad (7)$$

Поток, проходящий через данное сечение цилиндрической волны в данный момент времени,

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_r \\ \bar{S}_\varphi \\ \bar{S}_z \end{bmatrix} = \iint_{r,\varphi} \left( \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi \right) \quad (6)$$

Выше показано, что  $h_z(r) = 0$ ,  $e_z(r) = 0$ . Следовательно,  $S_r = 0$ ,  $S_\varphi = 0$ , т.е. поток энергии распространяется только вдоль оси OZ и равен

$$\bar{S} = \bar{S}_z = \eta \iint_{r,\varphi} ((e_r h_\varphi \sin^2 - e_\varphi h_r \cos^2) dr \cdot d\varphi) \quad (7)$$

Отсутствие потока энергии по радиусу означает, что область существования волны **НЕ** расширяется. Подтверждением этому является существование лазера.

Из (2.26, 2.27, 2.25) получаем:

$$e_r h_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_r^2, \quad (8)$$

$$e_\varphi h_r = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi^2, \quad (9)$$

$$e_r = e_\varphi. \quad (10)$$

Таким образом,

$$S_z = \eta e_r^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{c}{4\pi} e_r^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (11)$$

или, с учетом (2, 2.25),

$$S_z = \frac{A^2}{16\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} c r^{2(\alpha-1)} \quad (12)$$

Следовательно, поток энергии электромагнитной волны является постоянным во времени.

Отсюда следует, что поток энергии, проходящий через площадь сечения, не зависит от  $t$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Эта величина не изменяется во времени, что соответствует закону сохранения энергии.

## 5. Скорость движения энергии

Прежде всего, найдем скорость распространения монохроматической электромагнитной волны. Очевидно, эта скорость равна производной  $\frac{dz}{dt}$  от функции  $z(t)$ , заданной неявно в виде (2.16-2.21). Рассмотрим, например, функцию (2.16). Имеем:

$$\frac{d(H_r)}{dz} = h_r \frac{d}{dz} (\cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t)) = -si \cdot h_r \chi,$$

$$\frac{d(H_r)}{dt} = h_r \frac{d}{dt} (\cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t)) = -si \cdot h_r \omega.$$

Тогда скорость распространения монохроматической электромагнитной волны

$$v_m = \frac{dz}{dt} = - \frac{d(H_r)}{dt} / \frac{d(H_r)}{dz} = - \frac{\omega}{\chi}. \quad (1a)$$

Учитывая (2.28), получаем

$$v_m = - \omega / (\pm \omega \sqrt{\mu\varepsilon}/c) = m \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \quad (1b)$$

Поскольку в вакууме  $\mu = \varepsilon = 1$ , то скорость распространения монохроматической электромагнитной волны в вакууме равна скорости света.

Общепринятой является концепция Умова [81], согласно которой плотность потока энергии  $S$  является произведением плотности энергии  $W$  и скорости движения энергии  $v_e$ :

$$S = W \cdot v_e. \quad (2)$$

Из (4.11, 3.3) получаем:

$$v_e = \frac{S_z}{W} = \left( \frac{c}{4\pi} e_r^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \right) / \left( \frac{\varepsilon}{4\pi} e_r^2 \right) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (3)$$

Таким образом, **скорость движения энергии постоянна для всех точек сечения волны** (не зависит от  $r$ ).

Скорость движения электромагнитной энергии  $v_e$  не всегда равна скорости света. Например, в стоячей волне  $v_e = 0$ , и, вообще, в волне, являющейся суммой двух монохроматических электромагнитных волн одинаковой частоты, распространяющихся в противоположных направлениях, перенос энергии ослаблен и  $v_e < c$ .

Заметим, что на основании известного решения и формулы (2) нельзя найти скорость  $v_e$ . Действительно, в системе СИ найдем:

$$v_e = \frac{S}{W} = \text{EH} / \left( \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{H^2}{2\mu} \right) = 2\mu / \left( \varepsilon\mu \frac{E}{H} + \frac{H}{E} \right).$$

Если  $\frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{H^2}{2\mu}$ , то  $\frac{H}{E} = \sqrt{\mu\varepsilon}$ . Тогда для вакуума

$$v_e = 2\mu / \left( \varepsilon\mu \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \sqrt{\varepsilon\mu} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx 376,$$

что **не** соответствует действительности. Вообще, полученное здесь решение не может быть найдено в векторной форме.

## 6. Импульс и момент импульса

Известно, что поток энергии связан с другими характеристиками волны зависимостями следующего вида [21, 25, 63] (в системе СИ):

$$|f| = W. \quad (1)$$

$$S = W \cdot c, \quad (2)$$

$$p = W/c, \quad p = S/c^2, \quad (3)$$

$$f = p \cdot c, \quad f = S/c, \quad (4)$$

$$m = p \cdot r, \quad (5)$$

где

$W$  - плотность энергии (скаляр),  $\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ ,

$S$  - плотность потока энергии (вектор),  $\text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$ ,

$p$  - плотность импульса (вектор),  $\text{кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ,

$f$  - плотность потока импульса (вектор),  $\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ ,

$m$  - плотность момента импульса в данной точке вокруг оси, отстоящей от данной точки на расстояние  $r$  (вектор),  $\text{кг}\cdot\text{с}^{-2}$ ,

$V$  - объем электромагнитного поля (скаляр),  $\text{м}^3$ .

Из вышеизложенного следует, что в электромагнитной волне существуют потоки энергии, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси. Следовательно, в электромагнитной волне существуют также импульсы, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси. Существуют также моменты импульса относительно любого радиуса, любой окружности и относительно оси.

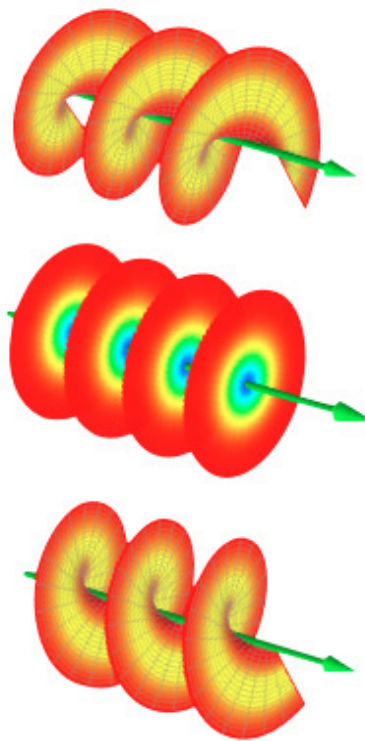


Рис. 7а.

Рассмотрим момент импульса относительно оси  $z$ . В соответствии с (3) найдем этот момент:

$$L_z = p_z r = s_z r / c^2. \quad (6)$$

Этот момент является орбитальным угловым моментом, который обнаруживается в т.н. закрученном свете. Далее приводится сокращенная цитата из [64]. *О том, что световая волна несет не только энергию и импульс, но еще и угловой момент, было известно столетие назад. Поначалу, конечно, угловой момент ассоциировался только с поляризацией*

света. ... Шло время. Были созданы лазеры, лазерным светом научились управлять, развивалась теория описания его электромагнитного поля. И в какой-то момент пришло осознание того, что эти два свойства - направленность светового пучка и его закрученность - вовсе не противоречат друг другу. ... Были предложены и конкретные схемы создания и детектирования закрученности. Три года спустя ... экспериментаторы убедились, что специальным образом приготовленная мода лазерного света, которую умели создавать и раньше, действительно отвечает закрученному свету. ... После этого начался лавинообразный поток исследований закрученного света. ... Параллельно с фундаментальными исследованиями начали развиваться и разнообразные применения закрученного света..."

Вместе с тем, следует заметить, что закрученность света не следует из существующего решения уравнений Максвелла. Однако, она естественным образом следует из предложенного решения – см. (6). На рис. 7а (взятом из [64]) "картинка с закрученным светом показывает не электрическое поле, а именно волновой фронт (на среднем фрагменте показан незакрученный свет, а на верхнем и нижнем фрагментах – свет, закрученный в ту или иную сторону). Он не плоский, тут фаза волны меняется не только при движении вдоль луча, но и при смещении в поперечной плоскости ... Поскольку поток энергии световой волны обычно направлен перпендикулярно волновому фронту, то получается, что в закрученном свете энергия и импульс волны не просто летят вперед, а как бы крутятся при этом вокруг оси движения." Именно это и получено выше – см. для сравнения рис. 3.4а.

## 7. Обсуждение

На рис. 8 показаны напряженности в декартовых координатах. Полученное решение описывает волну. Основные отличия этого решения от известного решения состоят в следующем:

1. Мгновенный (а не средний по некоторому периоду) поток энергии не изменяется во времени, что соответствует закону сохранения энергии.
2. Поток энергии имеет положительное значение.
3. Поток энергии распространяется вдоль волны
4. Магнитная и электрическая напряженности на некоторой оси координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  сдвинуты по фазе на четверть периода.
5. Решение для магнитных и электрических напряженностей является вещественным.
6. Решение существует при постоянной скорости распространения волны.

7. Область существования волны не расширяется, что подтверждается существованием лазера.
8. Векторы электрической и магнитной напряженностей ортогональны.
9. Возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны
10. Точка, движущаяся по цилиндру постоянного радиуса так, что значение любой напряженности в этой точке изменяется синусоидально во времени, является винтовой линией.

## Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.10) в виде функций (2.13-2.23). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.10) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi = m_r(r), \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) = m_\varphi(r), \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = m_z(r), \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (6)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - j_z(r) = 0, \quad (8)$$

$$j_r = \frac{\varepsilon \omega}{c} e_r, \quad j_\varphi = -\frac{\varepsilon \omega}{c} e_\varphi, \quad j_z = -\frac{\varepsilon \omega}{c} e_z, \quad (9)$$

$$m_r = \frac{\mu \omega}{c} h_r, \quad m_\varphi = -\frac{\mu \omega}{c} h_\varphi, \quad m_z = -\frac{\mu \omega}{c} h_z, \quad (10)$$

Мы рассматриваем бегущую волну в вакууме. В этом случае  $e_z(r) = 0$ , поскольку нет внешнего источника энергии.

При этом в соответствии с (9) получим  $j_z(r) = 0$ . Тогда исходная система (1, 5-8) примет вид:



$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (17)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (19)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (20)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (21)$$

Подставим (9) в (17). Тогда получим:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) + \frac{j_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (22)$$

Подставим (19, 20) в (22). Тогда получим:

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi + \frac{1}{r} \cdot h'_z(r) \alpha - h'_\varphi(r) \chi + (-h_r(r) \chi - h'_z(r)) \frac{\alpha}{r} = 0$$

или

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi - h'_\varphi(r) \chi - h_r(r) \frac{\chi \alpha}{r} = 0 \quad (23)$$

При этом для вычисления трех напряженностей получим три уравнения (19, 21, 23). Исключим  $h'_\varphi(r)$  из (21, 23):

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi + \left( \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) + h_r(r) \frac{\alpha}{r} \right) \chi - h_r(r) \frac{\chi \alpha}{r} = 0$$

или  $\frac{-1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha = 0$  или  $h_z(r) = 0$ . Таким образом, при  $e_z(r) = 0$

должно соблюдаться условие  $h_z(r) = 0$ . Отсюда следует

Лемма 1. При  $e_z(r) = 0$  система уравнений (1, 5-9) совместима только в том случае, когда  $h_z(r) = 0$ .

При  $e_z(r) = 0$  и  $h_z(r) = 0$  уравнения (1, 5-9) принимают следующий вид - уравнения (1, 5, 8) упрощаются, а уравнения (6, 7) с учетом (9) заменяются нижеприведенными уравнениями (1.3, 1.4):

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{c\chi}{\varepsilon\omega} h_\varphi(r) = e_r(r) \quad (1.3)$$

$$-\frac{c\chi}{\varepsilon\omega}h_r(r)=e_\varphi(r), \quad (1.4)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r}+h'_\varphi(r)+\frac{h_r(r)}{r}\cdot\alpha=0. \quad (1.5)$$

Аналогично доказывается

Лемма 2. При  $e_z(r)=0$  система уравнений (1-5, 10) совместима только в том случае, когда  $h_z(r)=0$ .

При этом аналогично формулам (24, 28) получаем формулы

$$\frac{e_r(r)}{r}+e'_r(r)-\frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha=0, \quad (2.1)$$

$$e_\varphi(r)\chi=-\frac{\mu\omega}{c}h_r(r), \quad (2.2)$$

$$e_r(r)\chi=\frac{\mu\omega}{c}h_\varphi(r), \quad (2.3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r}+e'_\varphi(r)-\frac{e_r(r)}{r}\cdot\alpha=0, \quad (2.4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r}+h'_r(r)+\frac{h_\varphi(r)}{r}\alpha=0. \quad (2.5)$$

Из леммы 1 и леммы 2 следует

Лемма 3. Система уравнений (1-10) совместима только при  $h_z(r)=0$ ,  $e_z(r)=0$ . (3.1)

Следовательно, исходная система уравнений (1-10) принимает вид уравнений, перечисленных в леммах 1 и 2. Объединим их для удобства читателя:

$$\frac{e_r(r)}{r}+e'_r(r)-\frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha=0, \quad (24)$$

$$e_\varphi(r)\chi=-\frac{\mu\omega}{c}h_r(r), \quad (25)$$

$$e_r(r)\chi=\frac{\mu\omega}{c}h_\varphi(r), \quad (26)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r}+e'_\varphi(r)-\frac{e_r(r)}{r}\cdot\alpha=0, \quad (27)$$

$$\frac{h_r(r)}{r}+h'_r(r)+\frac{h_\varphi(r)}{r}\alpha=0, \quad (28)$$

$$h_\varphi(r)\chi=\frac{\varepsilon\omega}{c}e_r(r) \quad (29)$$

$$-h_r(r)\chi = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r), \quad (30)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (31)$$

Умножим уравнения (26, 29). Тогда получим:

$$-e_r(r)h_\varphi(r)\chi^2 = -\mu\varepsilon\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e_r(r)h_\varphi(r)$$

или

$$\chi = \pm\omega\sqrt{\mu\varepsilon}/c. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (26, 29), получаем:

$$h_\varphi(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_r(r). \quad (33)$$

Таким образом, при условии (32) уравнения (26, 29) эквивалентны одному уравнению (33). Аналогичное соотношение следует из (25, 30):

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi(r), \quad (34)$$

Итак, система уравнений (24-31) эквивалентна системе уравнений (24, 27, 28, 31-34).

Далее выполняется решение уравнений (24, 27).

Предварительно рассмотрим уравнение вида

$$\frac{ay}{x} + y' = 0, \quad (34a)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$y = x^{-a} \text{ или } y = 0. \quad (34b)$$

Сложим уравнения (24) и (27):

$$(e_r + e_\varphi)' + \frac{(e_r + e_\varphi)}{r}(1 - \alpha) = 0, \quad (35)$$

Вычтем уравнение (27) из (24):

$$(e_r - e_\varphi)' + \frac{(e_r - e_\varphi)}{r}(1 + \alpha) = 0, \quad (36)$$

В соответствии с (34a, 34b) из (35) находим:

$$(e_r + e_\varphi) = Ar^{-(1-\alpha)} \text{ или } (e_r + e_\varphi) = 0. \quad (37)$$

В соответствии с (34a, 34b) из (36) находим:

$$(e_r - e_\varphi) = Cr^{-(1+\alpha)} \text{ или } (e_r - e_\varphi) = 0. \quad (38)$$

Складывая и вычитая уравнения (38) из (37), найдем 4 решения:

$$e_r = e_\varphi = \frac{A}{2} r^{-(1-\alpha)}, \quad (39)$$

$$e_r = -e_\varphi = \frac{C}{2} r^{-(1+\alpha)}, \quad (40)$$

$$\begin{cases} e_r(r) = \frac{1}{2} (Ar^{-(1-\alpha)} + Cr^{-(1+\alpha)}) \\ e_\varphi(r) = \frac{1}{2} (Ar^{-(1-\alpha)} - Cr^{-(1+\alpha)}) \end{cases} \quad (41)$$

$$e_r = e_\varphi = 0. \quad (42)$$

В дальнейшем мы рассмотрим решение (39). Таким образом, исходная система уравнений (1-10) имеет решение следующего вида:

$$h_z(r) = 0, \quad e_z(r) = 0, \quad (3.1)$$

$$\chi = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} / c, \quad (32)$$

$$e_r = e_\varphi = 0.5Ar^{(\alpha-1)}, \quad (39)$$

$$h_\varphi(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_r(r), \quad (33)$$

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi(r). \quad (34)$$

# Глава 2. Решение уравнений Максвелла для диэлектрической цепи переменного тока

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Монохроматическое решение системы уравнений \ 2
- 2а. УНР-теорема \ 6
- 3. Обратимость решения \ 7
- 4. Полихроматическое решение системы уравнений \ 7
- Приложение 1 \ 8
- Приложение 2 \ 10
- Приложение 3 \ 12
- Приложение 4 \ 13

### 1. Введение

В главе 1 рассматривается электромагнитное поле в вакууме. Очевидным образом полученное там решение распространяется на непроводящую – диэлектрическую среду с определенными  $\epsilon$ ,  $\mu$  - диэлектрической и магнитной проницаемостью. Следовательно, электромагнитное поле существует и в конденсаторе. Однако существенным отличием конденсатора является то, что его поле имеет ненулевую электрическую напряженность по одной из координат, создаваемую внешним источником. При рассмотрении электромагнитного поля в вакууме отсутствие внешнего источника постулировалось.

Точно также можно говорить о диэлектрической цепи переменного тока. Далее рассматривается система уравнений Максвелла для такой цепи. Показывается, что в такой цепи также возникает электромагнитная волна. Важным отличием этой волны от волны в вакууме является то, что в первой имеется продольная электрическая напряженность, создаваемая внешним источником энергии.

## Глава 2. Решение для диэлектрической цепи переменного тока

Здесь рассматриваются уравнения Максвелла в системе СГС следующего вида (как и в главе 1, но с отличными от единицы величинами  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и с учетом токов смещения):

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon \partial E}{c \partial t} - \frac{4\pi J}{c} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (4)$$

где  $H$ ,  $E$  - магнитная и электрическая напряженности соответственно,  $J$  - токи смещения.

### 2. Монохроматическое решение системы уравнений

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла с учетом токов смещения. В системе цилиндрических координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = v \frac{dH_r}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = v \frac{dH_\varphi}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = v \frac{dH_z}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = q \frac{dE_r}{dt} + g \cdot J_r, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = q \frac{dE_\varphi}{dt} + g \cdot J_\varphi, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = q \frac{dE_z}{dt} + g \cdot J_z, \quad (8)$$

где

$$v = -\mu/c, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} q &= \varepsilon/c, \\ g &= 4\pi/c, \end{aligned} \quad (10)$$

- электрические напряженности  $E_r, E_\varphi, E_z,$
- магнитные напряженности  $H_r, H_\varphi, H_z.$

Решение должно быть найдено при ненулевой напряженности  $E_z.$

При этом появляется и ненулевая напряженность  $H_z.$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где  $\alpha, \chi, \omega$  – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r = h_r(r)co, \quad (13)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (15)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (16)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (17)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (18)$$

$$J_r = j_rco, \quad (18a)$$

$$J_\varphi = j_\varphi si, \quad (18b)$$

$$J_z = j_z si. \quad (18c)$$

где  $h(r), e(r), j(r)$  – некоторые функции координаты  $r$ .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-18) преобразуют систему уравнений (1-8) с четырьмя аргументами  $r, \varphi, z, t$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $h(r), e(r), j(r)$ . Эта система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (21)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r)\alpha + e_\varphi(r)\chi - \frac{\mu\omega}{c}h_r = 0, \quad (22)$$

$$e_r(r)\chi - e'_z(r) + \frac{\mu\omega}{c}h_\varphi = 0, \quad (23)$$

$$\frac{e_{\varphi}(r)}{r} + e'_{\varphi}(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\mu\omega}{c} h_z = 0, \quad (24)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_{\varphi}(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{r} h_z(r) \alpha - h_{\varphi}(r) - \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) - \frac{4\pi}{c} j_r(r) = 0, \quad (26)$$

$$-h_r(r) \chi - h_z(r) + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_{\varphi}(r) - \frac{4\pi}{c} j_{\varphi}(r) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{h_{\varphi}(r)}{r} + h_{\varphi}(r) + \frac{-h_r(r)}{r} \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) - \frac{4\pi}{c} j_z(r) = 0, \quad (28)$$

Также, как и в главе 1, плотности потоков энергии по координатам определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_{\varphi} \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_{\varphi} H_z - E_z H_{\varphi} \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_{\varphi} - E_{\varphi} H_r \end{bmatrix}. \quad (29)$$

или, с учетом предыдущих формул,

$$S_r = \eta(e_{\varphi} h_z - e_z h_{\varphi}) \cos \theta \cdot \sin \theta \quad (30)$$

$$S_{\varphi} = \eta(e_z h_r \cos^2 \theta - e_r h_z \sin^2 \theta) \quad (31)$$

$$S_z = \eta(e_r h_{\varphi} \sin^2 \theta - e_{\varphi} h_r \cos^2 \theta) \quad (32)$$

Далее будет показано, что эти плотности потоков энергии удовлетворяют закону сохранения энергии, если

$$h_r = k e_r, \quad (33)$$

$$h_{\varphi} = -k e_{\varphi}. \quad (34)$$

$$h_z = -k e_z. \quad (35)$$

Из (30, 34, 35) следует, что

$$S_r = \eta(-e_{\varphi} k e_z + k e_z e_{\varphi}) \cos \theta \cdot \sin \theta = 0, \quad (36)$$

т.е. отсутствует радиальный поток энергии.

Из (31, 33, 15) следует, что

$$S_{\varphi} = \eta k e_r e_z (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \eta k e_r e_z, \quad (37)$$

т.е. плотность потока энергии по окружности на данном радиусе не зависит от времени и других координат.

Из (32, 33, 34) следует, что

$$S_z = \eta k e_r h_{\varphi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \eta k e_r h_{\varphi}, \quad (38)$$



## Глава 2. Решение для диэлектрической цепи переменного тока

т.е. плотность потока энергии по вертикали при данном радиусе не зависит от времени и других координат. Эти утверждения и были целью предположений (12-14).

Выполним замену переменных по (33-35) в уравнениях (21-28) и перепишем их, не меняя нумерации:

$$\frac{e_r}{r} + \dot{e}_r - \frac{e_\varphi}{r}\alpha - \chi e_z = 0, \quad (41)$$

$$-\frac{e_z}{r}\alpha + e_\varphi\chi - \frac{\mu\omega}{c}ke_r = 0, \quad (42)$$

$$-\dot{e}_z + e_r\chi - k\frac{\mu\omega}{c}e_\varphi = 0, \quad (43)$$

$$\frac{e_\varphi}{r} + \dot{e}_\varphi - \frac{e_r}{r}\alpha - k\frac{\mu\omega}{c}e_z = 0, \quad (44)$$

$$k\frac{e_r}{r} + k\dot{e}_r - k\frac{e_\varphi}{r}\alpha - k\chi e_z = 0, \quad (45)$$

$$-k\frac{e_z}{r}\alpha + ke_\varphi\chi - \frac{\varepsilon\omega}{c}e_r - \frac{4\pi}{c}j_r = 0, \quad (46)$$

$$k\dot{e}_z - ke_r\chi + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_\varphi - \frac{4\pi}{c}j_\varphi = 0, \quad (47)$$

$$-k\frac{e_\varphi}{r} - k\dot{e}_\varphi + k\frac{e_r}{r}\alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_z - \frac{4\pi}{c}j_z = 0. \quad (48)$$

Можно заметить, что уравнения (41) и (45) совпадают и поэтому уравнение (45) можно удалить из системы уравнений. Оставшиеся 7 уравнений (41-44, 46-48) являются системой дифференциальных уравнений с 7-ю неизвестными

$$e_r, e_\varphi, e_z, j_r, j_\varphi, j_z, k.$$

В приложении 1 рассматривается решение этой системы уравнений. Там показано, что по системе уравнений Максвелла могут быть найдены все функции напряженностей и токов, если задать параметры  $\alpha, \chi, \omega$  и значение амплитуды временной функции

$$E_z = e_z(r)\cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t) \quad (49)$$

в точке  $r = 0$ , т.е. определить величины  $e_z(0) = A, \alpha, \chi, \omega$ .

Следовательно, все функции напряженностей и токов определяются значением параметров:  $A, \alpha, \chi, \omega$ .

## Глава 2. Решение для диэлектрической цепи переменного тока

---

Функция (29) в точке ( $r = 0, \varphi = 0, z = 0$ ) имеет вид

$$E_{z0} = A \cos(\omega t). \quad (50)$$

Таким образом, функция (50) определяет монохроматическое решение системы уравнений Максвелла.

Найдем еще значения других напряженностей в точке ( $r = 0, \varphi = 0, z = 0$ ). Из (1, p1.40) следует:

$$E_{\varphi 0} = \frac{\alpha}{m} A \cos(\omega t). \quad (51)$$

Из (1, p1.41) следует:

$$E_{r0} = \frac{1}{m} A \sin(\omega t). \quad (52)$$

Из (15, 35) следует:

$$H_{z0} = -k A \sin(\omega t). \quad (53)$$

Из (2, 14, 34) следует:

$$H_{\varphi 0} = -k A \sin(\omega t). \quad (54)$$

Из (3, 13, 33) следует:

$$H_{r0} = k A \cos(\omega t). \quad (55)$$

### 2а. УНР-теорема

Вне зависимости от параметров провода существует однозначная зависимость между электрическим напряжением  $U$  на проводе, продольной магнитной напряженностью  $H_z$  в проводе и активной мощностью  $P$ , передаваемой по проводу.

Выше было показано, что все функции напряженностей и токов определяются значением параметров:  $A, \alpha, \chi, \omega$ . Величина  $\omega$  определяется извне, а параметр  $\chi$  зависит от  $\omega$ :

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \epsilon}. \quad (1)$$

Следовательно, все функции напряженностей и токов определяются значением двух параметров:  $A, \alpha$ . Значением этих двух параметров определяются также потоки энергии (2.36-2.37), которые зависят от напряженностей. Следовательно, если задать значение двух величин из множества

$$E_r, E_\varphi, E_z, H_r, H_\varphi, H_z, S_r, S_\varphi, S_z, \quad (2)$$

то из приведенных уравнений можно найти значение параметров  $A, \alpha$ , а затем найти значение остальных величин из множества (2).

Пусть, например, в множестве (2) определены величины  $E_z, S_z$ . Тем самым определены напряжение на проводе с длиной  $L$

$$U = E_z L \quad (3)$$

и активная мощность, передаваемая по проводу,

$$P = S_z \quad (4)$$

Тогда при известных  $U, P$  можно найти  $E_z, S_z$ , из приведенных уравнений можно найти значение параметров  $A, \alpha$ , а затем найти значение остальных величин из множества (2).

Точно также при известных продольной магнитной напряженности в проводе  $H_z$  и активной мощности (4) можно найти значение остальных величин из множества (2).

Из этого, в частности, следует, что вне зависимости от параметров провода существует однозначная зависимость

$$U = f(H, P). \quad (5)$$

В главе 4с будет описан эксперимент, доказывающий справедливость этой теоремы.

### 3. Обратимость решения

В силу симметрии полученного решения существует другое решение, где вместо функции продольной электрической напряженности (2.49) задается функция продольной магнитной напряженности как значение амплитуды временной функции

$$H_z = h_z(r) \sin(\alpha \varphi + \chi z + \omega t) \quad (1)$$

в точке  $r = 0$ , т.е. определяются величины  $h_z(0) = A, \alpha, \chi, \omega$ .

Найдем напряжение на проводе с длиной  $L$  из (2.18):

$$U = \int_0^L E_z dz = e_z \int_0^L co \cdot dz \quad (2)$$

Найдем магнитодвижущую силу на проводе с длиной  $L$  из (2.15):

$$F = \int_0^L H_z dz = h_z \int_0^L si \cdot dz = -ke_z \int_0^L si \cdot dz, \quad (3)$$

При большом  $L$  имеем:

$$\int_0^L co \cdot dz = \int_0^L si \cdot dz = Q \quad (4)$$

Из (2-4) находим:

$$U = e_z Q, \quad (5)$$

$$F = -ke_z Q = -kU \quad (6)$$

Формула (6) показывает связь между внешним напряжением внешней магнитодвижущей силой, которые создают равные токи в проводе.

#### 4. Полихроматическое решение системы уравнений

Очевидно, если функция (2.50) определяет монохроматическое решение системы уравнений Максвелла, то функция

$$E_{zo} = \sum_b (A_b \cos(\omega_b t)). \quad (1)$$

определяет полихроматическое решение системы уравнений Максвелла. Обозначим эту функцию как

$$f(t) = \sum_b (A_b \cos(\omega_b t)). \quad (2)$$

Обратимое полихроматическое решение определяет функция

$$H_{zo} = \sum_b (A_b \sin(\omega_b t)). \quad (3)$$

Обозначим эту функцию как

$$y(t) = \sum_b (A_b \sin(\omega_b t)) \quad (4)$$

Коэффициенты функций (2) и (3) совпадают.

По аналогии с (2.51-2.55) найдем еще значения других напряженностей в точке ( $r = 0, \varphi = 0, z = 0$ ):

$$E_{\varphi 0} = \frac{\alpha}{m} A \cos(\omega t), \quad (5)$$

$$E_{r0} = \frac{1}{m} A \sin(\omega t), \quad (6)$$

$$H_{z0} = -k A \sin(\omega t), \quad (7)$$

$$H_{\varphi 0} = -k A \cos(\omega t), \quad (8)$$

$$H_{r0} = kA \cos(\omega t). \quad (9)$$

### Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.41-2.44, 2.46-2.48):

$$\frac{e_r}{r} + \dot{e}_r - \frac{e_\varphi}{r} \alpha - \chi e_z = 0, \quad (21)$$

$$-\frac{e_z}{r} \alpha + e_\varphi \chi - \frac{\mu\omega}{c} k e_r = 0, \quad (22)$$

$$-\dot{e}_z + e_r \chi - k \frac{\mu\omega}{c} e_\varphi = 0, \quad (23)$$

$$\frac{e_\varphi}{r} + \dot{e}_\varphi - \frac{e_r}{r} \alpha - k \frac{\mu\omega}{c} e_z = 0, \quad (24)$$

$$-k \frac{e_z}{r} \alpha + k e_\varphi \chi - \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r - \frac{4\pi}{c} j_r = 0, \quad (26)$$

$$k \dot{e}_z - k e_r \chi + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi - \frac{4\pi}{c} j_\varphi = 0, \quad (27)$$

$$-k \frac{e_\varphi}{r} - k \dot{e}_\varphi + k \frac{e_r}{r} \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z - \frac{4\pi}{c} j_z = 0, \quad (28)$$

В приложении 2 приведено решение системы уравнений (21-23). Оно имеет следующий вид:

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} - e_z (\chi^2 - (k\mu\omega/c)^2) - \frac{e_z}{r^2} \alpha^2 = 0. \quad (29)$$

В приложении 3 приведено решение системы уравнений (22-24). Оно имеет следующий вид:

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} \left( 1 + \alpha \left( 2 \frac{k\mu\omega}{c\chi} - \frac{c\chi}{k\mu\omega} \right) \right) - e_z (\chi^2 - (k\mu\omega/c)^2) - \frac{e_z}{r^2} \alpha^2 = 0. \quad (30)$$

Оба этих решения должны совпадать, т.к. они должны являться общим решением для системы уравнений (21-24). Следовательно, должно выполняться условие

$$\left( 1 + \alpha \left( 2 \frac{k\mu\omega}{c\chi} - \frac{c\chi}{k\mu\omega} \right) \right) = 1 \quad (31)$$

или

$$2\frac{k\mu\omega}{c\chi} - \frac{c\chi}{k\mu\omega} = 0,$$

откуда находим

$$k = \frac{c\chi}{\mu\omega\sqrt{2}}. \quad (32)$$

$$\text{Если } \chi = \pm \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}, \text{ то } k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\mu}}. \quad (33)$$

Итак, функция  $e_z$  определяется уравнениями (29, 32):

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} - e_z \left( \chi^2 - \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{c\chi}{\mu\omega} \mu\omega/c \right)^2 \right) - \frac{e_z}{r^2} \alpha^2 = 0$$

или

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} - e_z \left( \frac{\chi^2}{2} + \frac{\alpha^2}{r^2} \right) = 0. \quad (34)$$

Это уравнение является модифицированным уравнением Бесселя и его решение  $e_z$  рассмотрено в приложении 4. Там же рассмотрена функция  $\dot{e}_z$ .

При известных  $e_z, \dot{e}_z, k$  можно найти  $e_r, e_\varphi$  по (22, 23). Складывая (22, 23), находим:

$$-\frac{e_z}{r}\alpha - \dot{e}_z + (e_\varphi + e_r) \left( \chi - \frac{k\mu\omega}{c} \right) = 0, \quad (35)$$

Вычитая (23) из (22), находим:

$$-\frac{e_z}{r}\alpha + \dot{e}_z + (e_\varphi - e_r) \left( \chi + \frac{k\mu\omega}{c} \right) = 0, \quad (36)$$

Подставляя (32) в (35, 36), получаем:

$$-\frac{e_z}{r}\alpha - \dot{e}_z + m(e_\varphi + e_r) = 0, \quad (37)$$

$$-\frac{e_z}{r}\alpha + \dot{e}_z + m(e_\varphi - e_r) = 0, \quad (38)$$

где

$$m = \chi \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \right). \quad (39)$$

Складывая и вычитая (37, 38), находим:

$$e_\varphi = \frac{e_z \alpha}{r m}, \quad (40)$$

$$e_r = \frac{\dot{e}_z}{m}, \quad (41)$$

откуда следует:

$$\dot{e}_\varphi = \frac{\alpha}{m} \left( \frac{\dot{e}_z}{r} - \frac{e_z}{r^2} \right), \quad (42)$$

$$\dot{e}_r = \frac{\ddot{e}_z}{m}, \quad (43)$$

При известных  $e_r, e_\varphi, e_z, k$  можно найти токи смещения по (26-28):

$$j_r = \frac{c}{4\pi} \left( -k \frac{e_z}{r} \alpha + k e_\varphi \chi - \frac{\varepsilon \omega}{c} e_r \right), \quad (42)$$

$$j_\varphi = \frac{c}{4\pi} \left( k \dot{e}_z - k e_r \chi + \frac{\varepsilon \omega}{c} e_\varphi \right), \quad (43)$$

$$j_z = \frac{c}{4\pi} \left( -k \frac{e_\varphi}{r} - k \dot{e}_\varphi + k \frac{e_r}{r} \alpha + \frac{\varepsilon \omega}{c} e_z \right). \quad (44)$$

Подставляя сюда (40-43), получаем:

$$j_r = \frac{c}{4\pi} \left( \frac{e_z}{r} k \alpha \left( \frac{\chi}{m} - 1 \right) - \frac{\varepsilon \omega}{c m} \dot{e}_z \right), \quad (45)$$

$$j_\varphi = \frac{c}{4\pi} \left( k \dot{e}_z \left( 1 - \frac{\chi}{m} \right) + \frac{e_z \varepsilon \omega \alpha}{r c m} \right), \quad (46)$$

$$j_z = \frac{c}{4\pi} \left( -k \frac{e_z \alpha}{r^2 m} - k \frac{\alpha}{m} \left( \frac{\dot{e}_z}{r} - \frac{e_z}{r^2} \right) + k \frac{\dot{e}_z \alpha}{r m} + \frac{\varepsilon \omega}{c} e_z \right)$$

или

$$j_z = \frac{\varepsilon \omega}{4\pi} e_z. \quad (47)$$

## Приложение 2

Рассмотрим решение системы уравнений (21, 22, 23) из приложения 1:

$$\frac{e_r}{r} + \dot{e}_r - \frac{e_\varphi}{r} \alpha - \chi e_z = 0, \quad (21)$$

$$-\frac{e_z}{r}\alpha + e_\varphi\chi - \frac{\mu\omega}{c}ke_r = 0, \quad (22)$$

$$-\dot{e}_z + e_r\chi - k\frac{\mu\omega}{c}e_\varphi = 0. \quad (23)$$

Решение будем рассматривать подробно для того, чтобы читатель без труда мог его проверить. Из (23) находим:

$$e_\varphi = \frac{c}{k\mu\omega}(e_r\chi - \dot{e}_z), \quad (31)$$

Совмещая (21, 31), находим:

$$\frac{e_r}{r} + \dot{e}_r - \frac{c}{k\mu\omega r}\alpha(e_r\chi - \dot{e}_z) - \chi e_z = 0,$$

или

$$\frac{e_r}{r}\left(1 - \frac{c\alpha\chi}{k\mu\omega}\right) + \dot{e}_r - \chi e_z + \frac{c}{k\mu\omega r}\alpha\dot{e}_z = 0, \quad (32)$$

Совмещая (22, 31), находим:

$$-\frac{e_z}{r}\alpha + \frac{c\chi}{k\mu\omega}(e_r\chi - \dot{e}_z) - \frac{\mu\omega}{c}ke_r = 0,$$

или

$$-\frac{e_z}{r}\alpha - \frac{c\chi}{k\mu\omega}\dot{e}_z + e_r\left(\frac{c\chi^2}{k\mu\omega} - \frac{k\mu\omega}{c}\right) = 0,$$

или

$$e_r = \left(\frac{e_z}{r}\alpha + \frac{c\chi}{k\mu\omega}\dot{e}_z\right) / \left(\frac{c\chi^2}{k\mu\omega} - \frac{k\mu\omega}{c}\right). \quad (33)$$

Из (33) находим:

$$\dot{e}_r = \left(-\frac{e_z}{r^2}\alpha + \frac{\dot{e}_z}{r}\alpha + \frac{c\chi}{k\mu\omega}\ddot{e}_z\right) / \left(\frac{c\chi^2}{k\mu\omega} - \frac{k\mu\omega}{c}\right), \quad (34)$$

Совмещая (32, 33, 34), находим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r}\left(1 - \frac{c\alpha\chi}{k\mu\omega}\right)\left(\frac{e_z}{r}\alpha + \frac{c\chi}{k\mu\omega}\dot{e}_z\right) / \left(\frac{c\chi^2}{k\mu\omega} - \frac{k\mu\omega}{c}\right) + \\ & \left(-\frac{e_z}{r^2}\alpha + \frac{\dot{e}_z}{r}\alpha + \frac{c\chi}{k\mu\omega}\ddot{e}_z\right) / \left(\frac{c\chi^2}{k\mu\omega} - \frac{k\mu\omega}{c}\right) - \chi e_z + \\ & \frac{c}{k\mu\omega r}\alpha\dot{e}_z = 0 \end{aligned}$$

или



$$\frac{1}{r}\left(1 - \frac{c\alpha\chi}{k\mu\omega}\right)\left(\frac{e_z}{r}\alpha + \frac{c\chi}{k\mu\omega}\dot{e}_z\right) + \left(-\frac{e_z}{r^2}\alpha + \frac{\dot{e}_z}{r}\alpha + \frac{c\chi}{k\mu\omega}\ddot{e}_z\right) + \left(\frac{c}{k\mu\omega r}\alpha\dot{e}_z - \chi e_z\right)\left(\frac{c\chi^2}{k\mu\omega} - \frac{k\mu\omega}{c}\right) = 0$$

ИЛИ

$$\frac{c\chi}{k\mu\omega}\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r}\left(\left(1 - \frac{c\alpha\chi}{k\mu\omega}\right)\frac{c\chi}{k\mu\omega} + \alpha + \frac{c\alpha}{k\mu\omega}\left(\frac{c\chi^2}{k\mu\omega} - \frac{k\mu\omega}{c}\right)\right) - e_z\left(\frac{c\chi^2}{k\mu\omega} - \frac{k\mu\omega}{c}\right)\chi + \frac{e_z}{r^2}\left(\left(1 - \frac{c\alpha\chi}{k\mu\omega}\right)\alpha - \alpha\right) = 0$$

ИЛИ

$$\frac{c\chi}{k\mu\omega}\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r}\left(\frac{c\chi}{k\mu\omega} - \alpha\left(\frac{c\chi}{k\mu\omega}\right)^2 + \alpha + \left(\frac{c\alpha}{k\mu\omega k\mu\omega} - \alpha\right)\right) - e_z\left(\frac{c\chi^2}{k\mu\omega} - \frac{k\mu\omega}{c}\right)\chi - \frac{e_z c \alpha^2 \chi}{r^2 k\mu\omega} = 0$$

ИЛИ

$$\frac{c\chi}{k\mu\omega}\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r}\frac{c\chi}{k\mu\omega} - e_z\left(\frac{c\chi^2}{k\mu\omega} - \frac{k\mu\omega}{c}\right)\chi - \frac{e_z c \alpha^2 \chi}{r^2 k\mu\omega} = 0$$

ИЛИ

$$c\chi\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r}c\chi - e_z\left(c\chi^2 - \frac{(k\mu\omega)^2}{c}\right)\chi - \frac{e_z c \alpha^2 \chi}{r^2} = 0$$

ИЛИ

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} - e_z\left(\chi^2 - (k\mu\omega/c)^2\right) - \frac{e_z}{r^2}\alpha^2 = 0.$$

(35)

### Приложение 3

Рассмотрим решение системы уравнений (22, 23, 24) из приложения 1:

$$-\frac{e_z}{r}\alpha + e_\varphi\chi - \frac{\mu\omega}{c}ke_r = 0, \quad (22)$$

$$-\dot{e}_z + e_r\chi - k\frac{\mu\omega}{c}e_\varphi = 0, \quad (23)$$

$$\frac{e_\varphi}{r} + \dot{e}_\varphi - \frac{e_r}{r}\alpha - k\frac{\mu\omega}{c}e_z = 0. \quad (24)$$

Решение будем рассматривать подробно для того, чтобы читатель без труда мог его проверить. Из (23) находим:

$$e_r = \frac{1}{\chi} \left( \dot{e}_z + \frac{k\mu\omega}{c} e_\varphi \right) \quad (31)$$

Совмещая (24, 31), находим:

$$\frac{e_\varphi}{r} + \dot{e}_\varphi - \frac{1}{\chi} \left( \dot{e}_z + \frac{k\mu\omega}{c} e_\varphi \right) \frac{\alpha}{r} - k \frac{\mu\omega}{c} e_z = 0,$$

или

$$\frac{e_\varphi}{r} \left( 1 - \frac{k\alpha\mu\omega}{c\chi} \right) + \dot{e}_\varphi - \frac{k\mu\omega}{c} e_z - \frac{1\alpha}{\chi r} e_z = 0. \quad (32)$$

Совмещая (22, 31), находим:

$$-\frac{e_z}{r} \alpha + e_\varphi \chi - \frac{k\mu\omega}{c} \frac{1}{\chi} \left( \dot{e}_z + \frac{k\mu\omega}{c} e_\varphi \right) = 0$$

или

$$-\frac{e_z}{r} \alpha - \frac{k\mu\omega}{c\chi} e_z + e_\varphi \left( \chi - \frac{1}{\chi} \left( \frac{k\mu\omega}{c} \right)^2 \right) = 0$$

или

$$e_\varphi = \left( \frac{e_z}{r} \alpha + \frac{k\mu\omega}{c\chi} e_z \right) / \left( \chi - \frac{1}{\chi} \left( \frac{k\mu\omega}{c} \right)^2 \right). \quad (33)$$

Из (33) находим:

$$\dot{e}_\varphi = \left( -\frac{e_z}{r^2} \alpha + \frac{\dot{e}_z}{r} \alpha + \frac{k\mu\omega}{c\chi} \dot{e}_z \right) / \left( \chi - \frac{1}{\chi} \left( \frac{k\mu\omega}{c} \right)^2 \right). \quad (34)$$

Совмещая (32, 33, 34), находим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{k\alpha\mu\omega}{c\chi} \right) \left( \frac{e_z}{r} \alpha + \frac{k\mu\omega}{c\chi} e_z \right) / \left( \chi - \frac{1}{\chi} \left( \frac{k\mu\omega}{c} \right)^2 \right) + \\ & \left( -\frac{e_z}{r^2} \alpha + \frac{\dot{e}_z}{r} \alpha + \frac{k\mu\omega}{c\chi} \dot{e}_z \right) / \left( \chi - \frac{1}{\chi} \left( \frac{k\mu\omega}{c} \right)^2 \right) - \\ & \frac{k\mu\omega}{c} e_z - \frac{1\alpha}{\chi r} e_z = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{k\alpha\mu\omega}{c\chi} \right) \left( \frac{e_z}{r} \alpha + \frac{k\mu\omega}{c\chi} e_z \right) + \left( -\frac{e_z}{r^2} \alpha + \frac{\dot{e}_z}{r} \alpha + \frac{k\mu\omega}{c\chi} \dot{e}_z \right) - \\ & \left( \frac{k\mu\omega}{c} e_z + \frac{1\alpha}{\chi r} e_z \right) \left( \chi - \frac{1}{\chi} \left( \frac{k\mu\omega}{c} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{k\mu\omega}{c\chi} e_z + \frac{\dot{e}_z}{r} \left( \left( 1 - \frac{k\alpha\mu\omega}{c\chi} \right) \frac{k\mu\omega}{c\chi} + \frac{\alpha}{\chi} \left( \chi - \frac{1}{\chi} \left( \frac{k\mu\omega}{c} \right)^2 \right) \right) - \\ & \left( \frac{k\mu\omega}{c} e_z \right) \left( \chi - \frac{1}{\chi} \left( \frac{k\mu\omega}{c} \right)^2 \right) + \frac{e_z}{r^2} \left( \left( 1 - \frac{k\alpha\mu\omega}{c\chi} \right) \alpha - \alpha \right) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{k\mu\omega}{c\chi} \dot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} \left( k\mu\omega - \alpha \left( \frac{k\mu\omega}{c\chi} \right)^2 + \alpha - \frac{\alpha}{\chi^2} \left( \frac{k\mu\omega}{c} \right)^2 \right) - e_z \left( \chi \frac{k\mu\omega}{c} - \frac{1}{\chi} \left( \frac{k\mu\omega}{c} \right)^3 \right) - \frac{e_z k \alpha^2 \mu \omega}{r^2 c \chi} = 0$$

или

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} \left( 1 - 2\alpha \frac{k\mu\omega}{c\chi} + \alpha \frac{c\chi}{k\mu\omega} \right) - e_z \left( \chi^2 - \left( \frac{k\mu\omega}{c} \right)^2 \right) - \frac{e_z}{r^2} \alpha^2 = 0$$

или

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} \left( 1 + \alpha \left( 2 \frac{k\mu\omega}{c\chi} - \frac{c\chi}{k\mu\omega} \right) \right) - e_z \left( \chi^2 - (k\mu\omega/c)^2 \right) - \frac{e_z}{r^2} \alpha^2 = 0. \tag{35}$$

#### Приложение 4.

Известно модифицированное уравнение Бесселя, имеющее следующий вид:

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{x} - y \left( 1 + \frac{v^2}{x^2} \right) = 0, \tag{1}$$

где  $v$  - порядок уравнения. При действительном аргументе оно имеет действительное решение. Это решение и его производная могут быть найдены численным методом.

Уравнение (34)

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} - e_z \left( \frac{\chi^2}{2} + \frac{\alpha^2}{r^2} \right) = 0. \tag{2}$$

в приложении 1 подобно уравнению (1) и его решение и его производная также могут быть найдены численным методом.

При  $r \rightarrow 0$  уравнение (2) принимает вид:

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} - e_z \frac{\alpha^2}{r^2} = 0. \tag{3}$$

Его решение имеет вид:

$$e_z = Ar^\beta, \tag{4}$$

где  $A$  – константа, а  $\beta$  определяется из уравнения

$$\beta^2 + \beta - \alpha^2 = 0, \quad (5)$$

т.е.

$$\beta = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha^2}), \quad \beta < 0. \quad (6)$$

Таким образом, на первых итерациях можно функцию  $e_z$  искать в виде (4), а затем вычислять ее по (2). Величина  $A$  представляет собой амплитуду функции  $E_z$  в точке  $r=0$ , изменяющейся во времени согласно (2.18, 2.11):

$$E_z = e_z(r)\cos(\alpha \varphi + \chi z + \omega t)$$

# Глава 2а. Решение уравнений Максвелла для конденсатора с переменным напряжением

---

## Оглавление

1. Введение \ 1
2. Решение уравнений Максвелла \ 2
3. Скорость распространения электромагнитной волны \ 3
4. Плотность энергии \ 3
5. Потоки энергии \ 4
7. Напряжение в конденсаторе \ 5
8. Обратимость конденсатора \ 6
9. Обсуждение \ 7

## 1. Введение

В главе 2 получено новое решение уравнений Максвелла для монохроматической волны в диэлектрической среде с определенными  $\varepsilon$ ,  $\mu$  - диэлектрической и магнитной проницаемостью. Основной особенностью этого решения является то, что поле имеет ненулевую продольную электрическую напряженность, создаваемую внешним источником. При рассмотрении электромагнитного поля в вакууме отсутствие внешнего источника постулировалось.

Диэлектрик конденсатора, находящийся под переменным напряжением, также является такой средой. Поэтому для него полученное в главе 2 решение может быть применено без оговорок.

По существующему представлению, в потоке энергии через конденсатор сохраняется только среднее (по времени) значение потока энергии [3]. Существующее решение таково, что предполагает синхронное изменение электрической и магнитной напряженностей такого поля в зависимости от радиуса по функции Бесселя, которая имеет нули по оси аргумента, т.е. на некоторых значениях радиуса. В этих точках (точнее – окружностях данного радиуса) энергия радиального поля оказывается равной нулю [13]. А затем возрастает с увеличением радиуса ... Это противоречит

закону сохранения энергии (что уже обсуждалось в выше для бегущей волны). Поэтому ниже предлагается новое решение уравнений Максвелла для конденсатора, в котором закон сохранения энергии выполняется без исключений и для каждого момента времени.

## 2. Решение уравнений Максвелла

Далее мы будем использовать цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  и решение уравнений Максвелла, полученное в главе 2. Здесь отметим только следующее:

1. Существуют электрические и магнитные напряженности, направленные вдоль всех осей координат  $r, \varphi, z$ . В частности, существует продольная магнитная напряженность  $H_z$ , пропорциональная продольной электрической напряженности  $E_z$ .

2. Магнитная и электрическая напряженности на каждой оси координат  $r, \varphi, z$  сдвинуты по фазе на четверть периода.

3. Векторы электрической и магнитной напряженностей на каждой оси координат  $r, \varphi, z$  ортогональны.

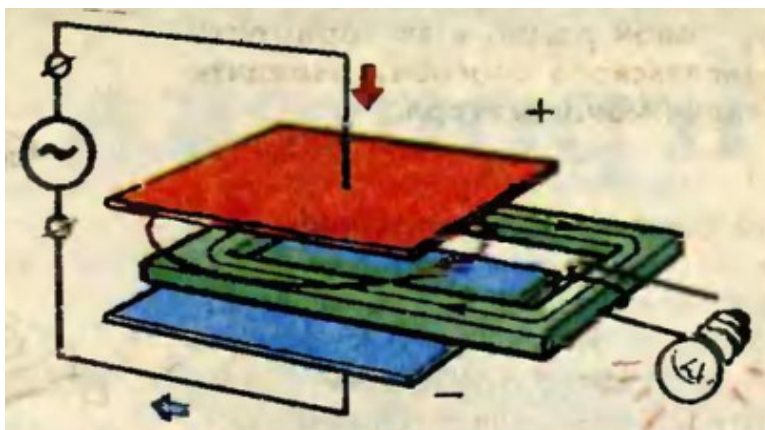


Рис. 1.

Важно отметить, в частности, что существует продольная магнитная напряженность  $H_z$ , пропорциональная продольной электрической напряженности  $E_z$ . Этот факт известен. Например, на рис. 1 изображен конденсаторный преобразователь переменного напряжения в переменную магнитную напряженность, которая в магнитном сердечнике преобразуется в переменное напряжение на

обмотке [117, 1992 г.]. Но, как осторожно отмечает автор статьи, «работа внешне нехитрого прибора и по сей день в своих тонкостях не совсем ясна».

### 3. Скорость распространения электромагнитной волны

Очевидно, скорость распространения электромагнитной волны равна производной  $\frac{dz}{dt}$  от функции  $z(t)$ , заданной неявно в виде функций (2.2.13-2.2.18). Определив эту производную, найдем скорость распространения электромагнитной волны

$$v_m = \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{\chi}. \quad (1)$$

В рассматриваемом случае на величину  $\chi$  не накладываются какие-либо ограничения. Поэтому

$$v_m \leq c. \quad (2)$$

Следовательно, скорость распространения электромагнитной волны в конденсаторе меньше скорости света.

### 4. Плотность энергии

Плотность энергии равна

$$W = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon H^2 + \mu E^2) \quad (1)$$

или, с учетом предыдущих формул главы 2,

$$W = \frac{\varepsilon}{8\pi}((e_r si)^2 + (e_\varphi co)^2 + (e_z co)^2) + \frac{\mu}{8\pi}((h_r co)^2 + (h_\varphi si)^2 + (h_z si)^2)$$

или, с учетом (2.2.33-2.2.35),

$$W = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon + k\mu)((e_r si)^2 + (e_\varphi co)^2 + (e_z co)^2). \quad (2)$$

Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны в конденсаторе одинакова на всех точках цилиндра данного радиуса.

### 5. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии по координатам  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  найдены в главе 2 – см. (2.2.36-2.2.38) соответственно. Там показано, что

- отсутствует радиальный поток энергии,
- плотность потока энергии по окружности на данном радиусе не зависит от времени и других координат,
- плотность потока энергии по вертикали при данном радиусе не зависит от времени и других координат.

Поток энергии, который распространяется вдоль оси OZ через сечение конденсатора, равен

$$\vec{S}_z = \iint_{r,\varphi} (S_z dr d\varphi) = \iint_{r,\varphi} (\eta k e_r e_\varphi dr d\varphi) = 2\pi\eta k \int_0^R (e_r e_\varphi dr). \quad (1)$$

Этот поток является активной мощностью

$$P = \overline{S}_z, \quad (2)$$

передаваемой через конденсатор. Есть только один параметр, который в математической модели волны не определен – это параметр  $\chi$  и от него зависит мощность. Точнее, наоборот, мощность  $P = \overline{S}_z$  определяет значение параметра  $\chi$ . Из (1, 2) находим:

$$k = \frac{P}{2\pi\eta} \int_0^R (e_r e_\varphi dr). \quad (3)$$

Далее, из (3, 2p1.32) находим:

$$\frac{c\chi}{\mu\omega\sqrt{2}} = \frac{P}{2\pi\eta} \int_0^R (e_r e_\varphi dr), \quad (4)$$

$$\chi = \frac{P\mu\omega}{\pi c\eta\sqrt{2} \int_0^R (e_r e_\varphi dr)}. \quad (5)$$

Из (5, 3.1) можно найти скорость распространения электромагнитной волны:

$$v_m = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi c\eta\sqrt{2} \int_0^R (e_r e_\varphi dr)}{P\mu}. \quad (7)$$

## 7. Напряжение в конденсаторе

Из (2.2.18) следует, что

$$E_z = e_z(r) \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t). \quad (1)$$



Будем полагать, что потенциал на нижней пластине при  $z = 0$  и некоторых  $\varphi_o, r_o$  равен нулю, а потенциал на верхней пластине при  $z = d$  и тех же  $\varphi_o, r_o$  численно равен напряжению  $U$  на конденсаторе. Тогда

$$U = e_z(r_o)\cos(\alpha\varphi_o + \chi d + \omega t) \quad (2)$$

При некотором промежуточном значении  $z$  напряжение при тех же  $\varphi_o, r_o$  будет равно

$$u(z) = e_z(r_o)\cos(\alpha\varphi_o + \chi z + \omega t) \quad (3)$$

т.е. напряжение вдоль конденсатора меняется по функции  $\cos(\chi z)$ .

## 8. Обратимость конденсатора

При определенном внешнем напряжении между обкладками (т.е. при заданной электрической напряженности  $E_z$ ) в конденсаторе возникает магнитная напряженность  $H_z$ . Выше рассмотрен конденсатор, в котором определено внешнее напряжение между обкладками. Точно также можно рассмотреть конденсатор, в котором задана магнитная напряженность  $H_z$ . При этом (в силу обратимости решения системы уравнений Максвелла – см. главу 2.3) в конденсаторе возникает также электрическая напряженность  $E_z$ , т.е. на обкладках конденсатора возникает напряжение. Такой конденсатор может рассматриваться как преобразователь переменной магнитной индукции в переменное электрическое напряжение.

Известен «трансформатор Миславского» изобретенный учеником 7-го класса в 1992 г., где явным образом используется это преобразование электрической напряженности в магнитную индукцию непосредственно в теле конденсатора – см. рис. 2 [117, 118]. В этом трансформаторе происходит преобразование электрической напряженности в магнитную напряженность (см. левую часть на рис. 1) и обратное преобразование магнитной напряженности в электрическую напряженность (см. правую часть на рис. 1).

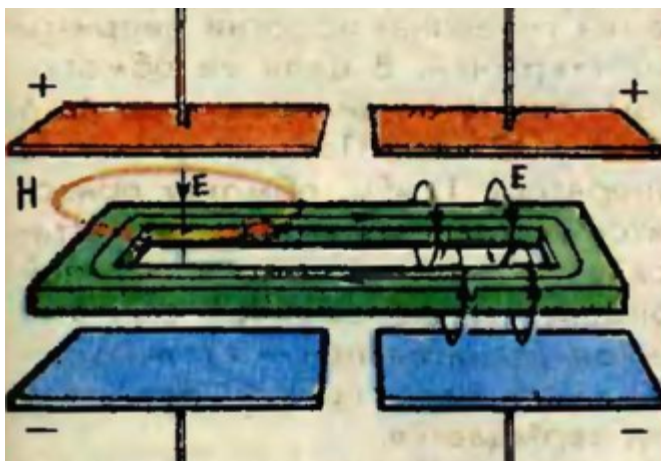


Рис. 1.

## 9. Обсуждение

Предлагаемое решение уравнений Максвелла для конденсатора, находящегося под переменным напряжением, интерпретируется как электромагнитная волна. Отметим следующие особенности этой волны:

4. Существуют электрические и магнитные напряженности, направленные вдоль всех осей координат  $r, \varphi, z$ . В частности, существует продольная магнитная напряженность  $H_z$ , пропорциональная продольной электрической напряженности  $E_z$ .

5. Магнитная и электрическая напряженности на каждой оси координат  $r, \varphi, z$  сдвинуты по фазе на четверть периода.

6. Векторы электрической и магнитной напряженностей на каждой оси координат  $r, \varphi, z$  ортогональны.

7. Мгновенный (а не средний по некоторому периоду) поток энергии через конденсатор не изменяется во времени, что соответствует закону сохранения энергии.

8. Поток энергии по оси конденсатора равен активной мощности, передаваемой через конденсатор.

9. Скорость распространения электромагнитной волны меньше скорости света

10. Эта скорость уменьшается с увеличением передаваемой мощности (в частности, при отсутствии мощности скорость равна нулю и волна становится стоячей).

11. Продольная электрическая напряженность изменяется по модифицированной функции Бесселя от радиуса.

12. Все остальные электрические и магнитные напряженности также зависят от радиуса и изменяются по модифицированной функции Бесселя или по ее производной.

13. Волна распространяется также по радиусам.

14. Поток энергии вдоль радиуса отсутствует на любом радиусе. Заметим, что этот вывод противоречит известному утверждению [13] о том, что существуют радиусы, где поток существует.

15. Существует электромагнитный импульс, пропорциональный квадрату активной мощности, передаваемой через конденсатор.

16. Конденсатор обратим в том смысле, что при определенном внешнем напряжении между обкладками (т.е. при заданной электрической напряженности  $E_z$ ) в конденсаторе возникает магнитная напряженность  $H_z$ , а при определенной внешней индукции между обкладками (т.е. при заданной магнитной напряженности  $H_z$ ) в конденсаторе возникает электрическая напряженность  $E_z$ . Этот эффект может быть использован в различных конструкциях.

# Глава 2в. Решение уравнений Максвелла для цилиндрического конденсатора с переменным напряжением

## Оглавление

1. Вступление \ 1
2. Уравнения Максвелла \ 1
3. Энергия \ 2
4. Потoki энергии \ 2

## Вступление

Далее мы рассмотрим конденсатор в виде трубы, стенки которой представляют собой диэлектрик, покрытый металлической пленкой с внутренней и внешней стороны.

## 1. Уравнения Максвелла

Мы будем решать эту задачу аналогично главе 2. Однако, при поиске решения для дискового конденсатора мы искали такое решение, в котором должен присутствовать продольный поток энергии вдоль оси  $Z$ , что соответствует физическому смыслу задачи. В случае трубчатого конденсатора должен присутствовать радиальный поток энергии вдоль оси  $r$ , что соответствует физическому смыслу данной задачи. Для выполнения этого требования необходимо модифицировать вид неизвестных функций (2.13-2.18) и условий (2.2.33-2.2.35) в главе 2. В данном случае они должны иметь следующий вид:

$$H_{r.} = h_r(r)co, \quad (13)$$

$$H_{\phi.} = h_{\phi}(r)si, \quad (14)$$

$$H_{z.} = h_z(r)si, \quad (15)$$

$$E_{r.} = e_r(r)si, \quad (16)$$

$$E_{\phi.} = e_{\phi}(r)co, \quad (17)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (18)$$

$$J_r = j_rco, \quad (18a)$$

$$J_\varphi = j_\varphi si, \quad (18b)$$

$$J_z = j_z si. \quad (18c)$$

Тогда по аналогии с разделом 2 в главе 2 найдем:

$$S_r = \eta(e_\varphi h_z co^2 - e_z h_\varphi si^2), \quad (30)$$

$$S_\varphi = \eta(e_z h_r si^2 - e_r h_z co^2), \quad (31)$$

$$S_z = \eta(e_r h_\varphi - e_\varphi h_r)co \cdot si. \quad (32)$$

Далее также по аналогии найдем:

$$S_r = \eta k e_z e_\varphi (co^2 + si^2) = \eta k e_z e_\varphi, \quad (36)$$

т.е. плотность радиального потока энергии на данном радиусе не зависит от времени и других координат.

$$S_\varphi = \eta k e_r e_z (-si^2 - co^2) = -\eta k e_r e_z, \quad (37)$$

т.е. плотность потока энергии по окружности на данном радиусе не зависит от времени и других координат.

$$S_z = \eta(-k e_r h_\varphi + k h_\varphi e_r)co \cdot si = 0, \quad (38)$$

т.е. отсутствует поток энергии по вертикали.

Далее решение может быть получено аналогично главе 2.

Далее мы сравним цилиндрический конденсатор с дисковым конденсатором, рассмотренным в главе 2а.

### 3. Энергия

Плотность энергии равна

$$W = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon H^2 + \mu E^2) \quad (1)$$

Учитывая предыдущие формулы, находим:

$$W = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon + k\mu)((e_r si)^2 + (e_\varphi co)^2 + (e_z co)^2). \quad (2)$$

Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны в конденсаторе одинакова на всех точках цилиндра данного радиуса.

### 4. Потоки энергии

Поток энергии, который распространяется по радиусам конденсатора, равен

$$\vec{S}_r = \iint_{\varphi,z} (S_r d\varphi dz) = \iint_{\varphi,z} (\eta k e_z e_\varphi dz d\varphi) = 2\pi\eta k L e_r e_\varphi. \quad (1)$$

где  $L$  - длина цилиндра. Этот поток является активной мощностью

$$P = \overline{S_z}, \quad (2)$$

передаваемой через конденсатор. Есть только один параметр, а Скорость движения энергии по радиусам трубы

$$v = \frac{S_r}{W}. \quad (4)$$

Поток энергии, который распространяется по окружностям конденсатора, равен

$$\vec{S}_\varphi = \iint_{r,z} (S_\varphi dr dz) = -\eta k \iint_{r,z} (e_r e_z dz dr). \quad (5)$$

## Глава 3. Решение уравнений Максвелла для магнитной цепи переменного тока

В главе 2 рассматривается электромагнитное поле в диэлектрической цепи переменного тока. Точно также можно рассмотреть электромагнитное поле в магнитной цепи переменного тока. Простейшим примером такой цепи является соленоид переменного тока. Однако, если в диэлектрической цепи имеется продольная электрическая напряженность, создаваемая внешним источником энергии, то в магнитной цепи имеется продольная магнитная напряженность, создаваемая внешним источником энергии и передаваемая в цепь обмоткой соленоида.

Здесь также рассматриваются уравнения Максвелла в системе СГС вида (2.2.1-2.2.8) и решение этих уравнений в виде (2.2.11-2.2.18с), где функции  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $j(r)$  определяются в приложении 1 главы 2 при данных значениях параметров  $A, \alpha, \chi, \omega$ .

Здесь также, как в главе 2, определяются потоки электромагнитной энергии с плотностями (2.2.36-2.2.37). Поток электромагнитной энергии вдоль магнитной цепи  $S_z$  равен и активной мощности  $P$ , передаваемой по магнитной цепи,

$$P = S_z. \quad (1)$$

В главе 2, раздел 2а показано, что, если задать значение двух величин из множества

$$E_r, E_\varphi, E_z, H_r, H_\varphi, H_z, S_r, S_\varphi, S_z, \quad (2)$$

то из полученного решения уравнений Максвелла можно найти значение параметров  $A, \alpha$ , а затем найти значение остальных величин из множества (2).

Пусть, например, определена магнитодвижущая сила в магнитной цепи с длиной  $L$

$$F = H_z L \quad (3)$$

и активная мощность, передаваемая по магнитной цепи,

$$P = S_z. \quad (4)$$

Тогда при известных  $F$  и  $P$  можно найти  $H_z$  и  $S_z$ , из полученного решения уравнений Максвелла можно найти значение параметров  $A$ ,  $\alpha$ , а затем найти значение остальных величин из множества (2).

Дальнейшие выводы аналогичны тем, которые получены в главах 1 и 2. Итак, в магнитной цепи синусоидального тока распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решением уравнений Максвелла. При этом напряженности и поток энергии распространяются в такой цепи по винтовой траектории.

Такая электромагнитная волна распространяется в магнитной цепи трансформатора. Вместе с ней по магнитной цепи распространяется магнитный поток и поток электромагнитной энергии. Важно отметить, что величина магнитного потока не изменяется при изменении нагрузки. Следовательно, именно поток электромагнитной энергии переносит энергию от первичной обмотки ко вторичной обмотке. Итак, поток энергии не зависит от магнитного потока. Здесь можно заметить аналогию с передачей тока по электрической цепи, где один и тот же ток может предавать различную энергию. Этот вопрос подробно рассматривается в главе 5. Там показано, что поток энергии при данной плотности тока (в рассматриваемом случае, при данной плотности магнитного потока) передаваемая мощность может принимать практически любое значение в зависимости от значений величин  $\chi$ ,  $\alpha$ , т.е. от плотности винтовой траектории тока (в рассматриваемом случае, при данной плотности магнитного потока). Следовательно, передаваемая мощность определяется плотностью винтовой траектории электромагнитной энергии при фиксированной величине магнитного потока.



# Глава 4. Решение уравнений Максвелла для низкоомного провода переменного тока

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Решение уравнений Максвелла \ 2
- 3. Напряженности и токи \ 4
- 4. Потoki энергии \ 8
- 5. Ток и поток энергии в проводе \ 12
- 6. Обсуждение \ 15
- Приложение 1 \ 15

## 1. Введение

Уравнения Максвелла в общем случае в системе СГС имеют вид (см. вариант 1 в главе "Предисловие"):

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} J = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (4)$$

$$J = \frac{1}{\rho} E, \quad (5)$$

где

$J$ ,  $H$ ,  $E$  - ток, магнитная и электрическая напряженности соответственно,

$\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  - диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, удельное сопротивление материала провода.

Далее эти уравнения применяются для анализа структуры переменного тока в проводе [15]. При синусоидальном токе в

проводе с удельной индуктивностью  $L$  и удельным сопротивлением  $\rho$  напряженность и ток связаны соотношением вида

$$J = \frac{1}{\rho + i\omega L} E = \frac{\rho - i\omega L}{\rho^2 + (\omega L)^2} E.$$

Отсюда при  $\rho \ll \omega L$  находим:

$$J \approx \frac{-i}{\omega L} E.$$

Следовательно, для анализа структуры синусоидального тока в проводе при достаточно высокой частоте условием (5) можно пренебрегать. При этом необходимо решать систему уравнений (1-4), где известен ток  $J_z$ , протекающий вдоль провода, т.е. проекция вектора  $J$  на ось  $oz$  (см. вариант 4 в главе "Предисловие").

## 2. Решение системы уравнений

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла (1.1-1.4) для провода. В системе цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  эти уравнения имеют вид [4]:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = v \frac{dH_r}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = v \frac{dH_\varphi}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = v \frac{dH_z}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = q \frac{dE_r}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = q \frac{dE_\varphi}{dt}, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = q \frac{dE_z}{dt} + \frac{4\pi}{c} J_z. \quad (8)$$

где

$$v = -\mu/c, \quad (9)$$

$$q = \varepsilon/c, \quad (10)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\omega$  – некоторые константы.

Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r = h_r(r)co, \quad (13)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (15)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (16)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (17)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (18)$$

$$J_r = j_r(r)co, \quad (19)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r)si, \quad (20)$$

$$J_z = j_z(r)si, \quad (21)$$

где  $h(r)$ ,  $e(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-21) преобразуют систему уравнений (1-8) с четырьмя аргументами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ,  $t$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $j(r)$ .

Далее предполагается, что существует только ток (21), направленный вдоль оси  $Z$ . Этот ток создается внешним источником. Показывается, что наличие этого тока является причиной существования электромагнитной волны в проводе.

В приложении 1 показано, что у такой системы **существует** решение, имеющее следующий вид:

$$e_\varphi(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (22)$$

$$e_r(r) = e_\varphi(r), \quad (23)$$

$$e_z(r) = \hat{\chi} \frac{(M-1)}{\sqrt{M}} \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c} r e_\varphi(r), \quad (24)$$

$$h_r(r) = \hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi(r), \quad (25)$$

$$h_\varphi(r) = -h_r(r), \quad (26)$$

$$h_z(r) = 0, \tag{27}$$

$$j_z(r) = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi} e_z(r) = \frac{\chi\varepsilon\omega}{2\pi\alpha} Ar^\alpha, \tag{28}$$

где  $A, c, \alpha, \omega$  – константы.

Сравним это решение и решение, полученное в главе 1 для вакуума – см. табл. 1. Видно, что (несмотря на идентичность уравнений) эти решения существенно отличаются. Эти различия вызваны наличием внешней электродвижущей силы, в которой  $e_z(r) \neq 0$ . Она вызывает продольный ток, который существенно изменяет структуру электромагнитной волны.

Таблица 1.

	вакуум	провод
$\chi$	$\hat{\chi} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$	$\hat{\chi} \frac{\omega}{c} \sqrt{M\varepsilon\mu}, \hat{\chi} = \pm 1$
$j_z$	<b>0</b>	$\frac{\varepsilon\omega}{4\pi} e_z(r)$
$e_r$	$Ar^{\alpha-1}$	$Ar^{\alpha-1}$
$e_\varphi$		
$e_z$	<b>0</b>	$\hat{\chi} \frac{(M-1)\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{M}} \frac{1}{\alpha c} r e_\varphi(r)$
$h_r$	$-e_\varphi(r)$	$\hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi(r)$
$h_\varphi$	$-h_r(r)$	$-h_r(r)$
$h_z$	<b>0</b>	<b>0</b>

### 3. Напряженности и токи

Далее мы будем рассматривать только функции  $j_z(r)$ ,  $e_r(r)$ ,  $e_\varphi(r)$ ,  $e_z(r)$ ,  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ . На рис. 1 показаны, например, графики этих функций при  $A=1, \alpha=3, \mu=1, \varepsilon=1, \omega=300$ . Величина  $j_z(r)$  показана в единицах (А/мм<sup>2</sup>) – в отличие от всех остальных величин, показанных в системе СИ. Увеличение функции  $j_z(r)$  при увеличении радиуса объясняет скин-эффект.

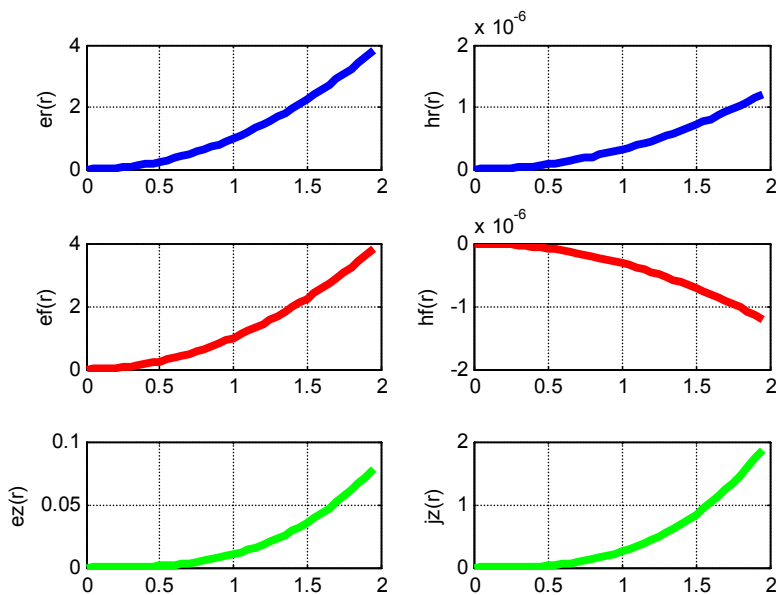


Fig.1. (SSMB)

Плотность энергии электромагнитной волны определяется как сумма модулей векторов  $E$ ,  $H$  определяется из (2.13, 2.14, 2.16, 2.17, 2.23, 2.24) и равна

$$W = E^2 + H^2 = (e_r(r)\delta i)^2 + (e_\varphi(r)\delta i)^2 + (h_r(r)\epsilon o)^2 + (h_\varphi(r)\epsilon o)^2$$

или

$$W = (e_r(r))^2 + (e_\varphi(r))^2 \tag{1}$$

- см. также рис. 1. Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны постоянна на всех точках окружности данного радиуса.

Для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны рассмотрим функции (2.11-2.19). Видно, что в каждой точке с координатами  $r, \varphi, z$  напряженности  $H, E$  сдвинуты по фазе на четверть периода.

Найдем среднее значение плотности амплитуды тока в проводе с радиусом  $R$ :

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r,\varphi} [J_z] dr \cdot d\varphi. \tag{5}$$

С учетом (2.21) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r,\varphi} [j_z(r)\delta i] dr \cdot d\varphi \tag{5a}$$

Далее найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \int_0^{2\pi} (si \cdot d\varphi) \right) dr.$$

С учетом (2) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha \pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \cos(2\alpha\pi + \frac{2\omega}{c} z) - \cos(\frac{2\omega}{c} z) \right) dr$$

или

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha \pi R^2} (\cos(2\alpha\pi) - 1) \cdot J_{zr}, \tag{6}$$

где

$$J_{zr} = \int_0^R j_z(r) dr. \tag{7}$$

С учетом (2.28) найдем:

$$J_{zr} = \frac{A \chi \varepsilon \omega}{2\pi \alpha} \int_0^R (r^\alpha) dr \tag{9}$$

или

$$J_{zr} = \frac{A \chi \varepsilon \omega}{2\pi \alpha (\alpha + 1)} R^{\alpha+1}. \tag{10}$$

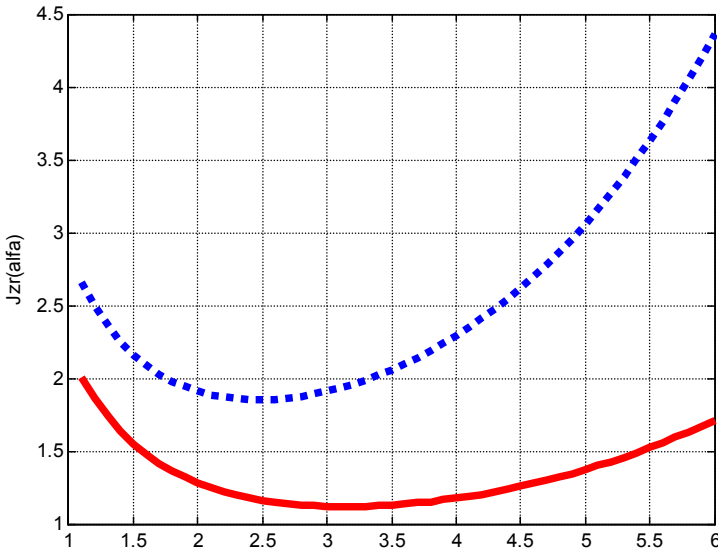


Fig.3. (SSMB)

На рис. 3 показана функция  $\overline{J}_z(\alpha)$  (6, 10) при  $A=1$ ,  $\chi=0.03$ . На этом рисунке пунктирная и сплошная кривые относятся соответственно к  $R=2$  и  $R=1.75$ . Из (6, 8) и рис. 3 следует, что при определенном распределении величины  $j_z(r)$  среднее значение плотности амплитуды тока  $\overline{J}_z$  существенно зависит от  $\alpha$ .

Ток определяется как

$$J = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (11)$$

или, с учетом (2.13-2.21):

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{\varepsilon \omega}{c} e_r(r) \varepsilon_0, \\ J_\phi &= \frac{\varepsilon \omega}{c} e_\phi(r) si, \\ J_z &= \left( \frac{\varepsilon \omega}{c} e_z(r) + j_z \right) si. \end{aligned} \quad (12)$$

Можно говорить о линиях этих токов. Так, например, ток  $J_z$  течет по прямым, параллельным оси провода. Мы рассмотрим линию суммарного тока.

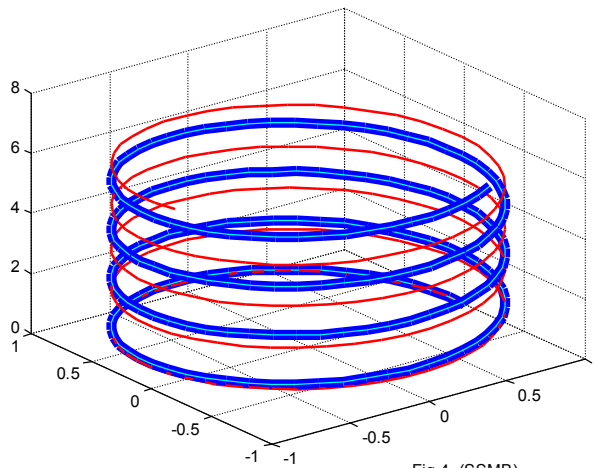


Fig.4. (SSMB)

Можно полагать, что скорость распространения тока смещения не зависит от направления тока. В частности, при фиксированном радиусе путь, пройденный током по окружности, и путь, пройденный им по вертикали будут равны. Следовательно, при фиксированном радиусе можно полагать, что

$$z = \gamma \cdot \phi \quad (13)$$

где  $\gamma$  – константа. На основе этого предположения можно преобразовать функции (4в) к виду

$$co = \cos(\alpha\varphi + 2\chi\gamma\varphi), \quad si = \sin(\alpha\varphi + 2\chi\gamma\varphi) \quad (14)$$

и построить соответствующую траекторию тока. На рис. 4 показаны две винтовые линии суммарного тока, описываемые функциями вида

$$co = \cos((\alpha + 2)\varphi), \quad si = \sin((\alpha + 2)\varphi).$$

На рис. 4 толстая линия построена при  $\alpha = 1.8$ , а тонкая линия – при  $\alpha = 2.5$ .

Из (2.19-2.21, 14) следует, что токи будут сохранять свою величину при данных  $r, \varphi$  (независимо от  $z$ ) в том случае, если постоянной является величина

$$\beta = (\alpha + 2\chi\gamma). \quad (15)$$

Далее на основе (14, 15) будем применять формулы

$$co = \cos(\beta\varphi), \quad si = \sin(\beta\varphi). \quad (16)$$

## 4. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга определяется в этом случае точно также, как и в главе 1, раздел 4. Но здесь мы для удобства читателя повторим первые 6 формул отсюда. Итак

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_r, S_\varphi, S_z$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Из (2.12-2.17, 3.4) следует, что поток, проходящий через данное сечение провода в данный момент времени,

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_r \\ \bar{S}_\varphi \\ \bar{S}_z \end{bmatrix} = \eta \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \quad (5)$$



где

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z). \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \end{aligned} \quad (6)$$

Этим величинам равна плотность того потока энергии, который при данном радиусе распространяется по радиусу, по окружности и вдоль оси OZ равен. На рис. 5 показаны графики этих функций в зависимости от радиуса при  $A=1$ ,  $\alpha=3$ ,  $\mu=1$ ,  $\varepsilon=1$ ,  $\omega=300$ .

Поток энергии вдоль оси OZ и равен

$$\overline{S_z} = \eta \iint_{r,\varphi} [s_z \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (7)$$

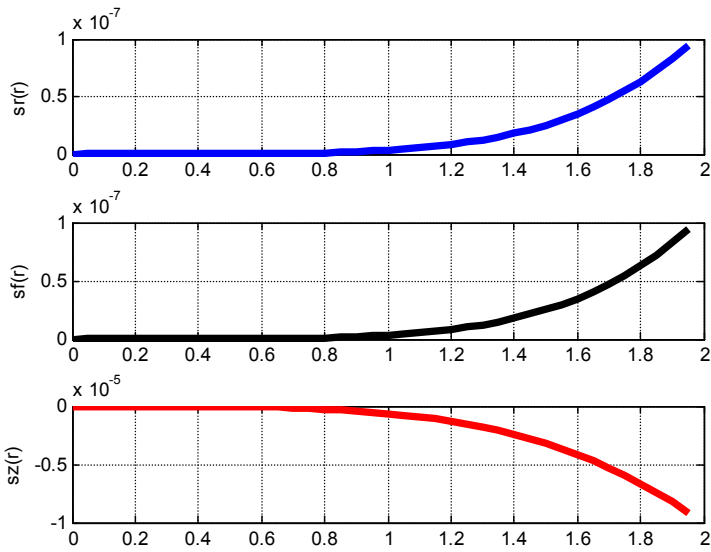


Fig.5. (SSMB)

Найдем  $s_z$ . Из (6, 2.22, 2.23, 2.26) получаем:

$$s_z = -2e_\varphi h_r = -\hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi^2(r) \quad (9)$$

или

$$s_z = Qr^{2\alpha-2}, \quad (10)$$

где

$$Q = A^2 \hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} \quad (11)$$

В приложении 2 главы 1 показано, что из (7) следует, что

$$\bar{S} = \frac{c}{16\alpha\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (s_z(r) dr). \quad (12)$$

Пусть  $R$  – радиус цилиндрического провода. Тогда из (12) получаем, как в главе 1,

$$S_{\text{int}} = \int_{r=0}^R (s_z(r) dr) = \frac{Q}{2\alpha - 1} R^{2\alpha - 1}, \quad (13)$$

$$S_{\text{alfa}} = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)), \quad (14)$$

$$\bar{S} = \frac{c}{16\pi} S_{\text{alfa}} S_{\text{int}}. \quad (15)$$

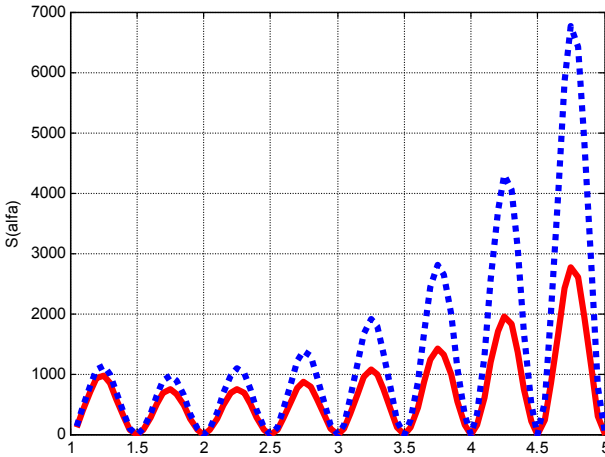


Fig.7. (SSMB)

Объединяя формулы (11-15), получаем:

$$\bar{S}_z = \frac{c}{16\pi} \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)) A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} \frac{\hat{\chi}}{2\alpha - 1} R^{2\alpha - 1}$$

или

$$\bar{S}_z = \frac{\hat{\chi} A^2 c (1 - \cos(4\alpha\pi))}{8\pi\alpha(2\alpha - 1)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} R^{2\alpha - 1}. \quad (16)$$

Этот поток энергии не зависит от координаты и потому сохраняет свое значение на протяжении всей волны.

На рис. 7 показана функция  $\bar{S}(\alpha)$  (16) при  $A=1$ ,  $M=10^{13}$ ,  $\mu=1$ ,  $\varepsilon=1$ . На рис. 7 пунктирная и сплошная кривые относятся соответственно к  $R=2$  и  $R=1.8$ .

Поскольку поток энергии и энергия связаны соотношением  $S = W \cdot c$ , то из (15) можно найти энергию в единице длины провода:

$$\bar{W} = \frac{A}{16\pi} S_{alfa} S_{int}. \quad (17)$$

Как следует из (7, 3.16), плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = s_z \sin(2\beta\varphi). \quad (18)$$

На рис. 8 показана функция (18) при  $s_z = r^{2\alpha-2}$  - см. (10). Показаны две кривые при  $\alpha = 1.4$  и двух значениях радиуса:  $r = 1$  (толстая линия) и  $r = 2$  (тонкая линия).

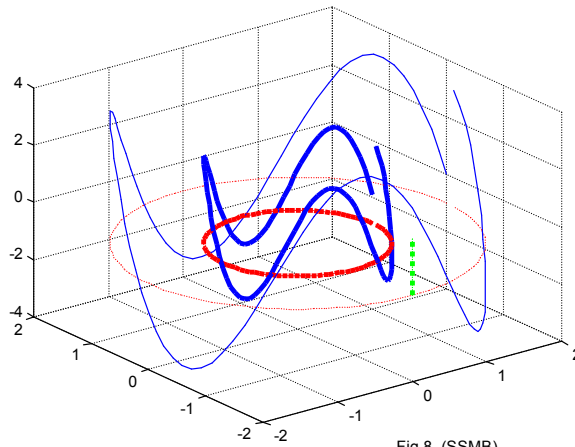
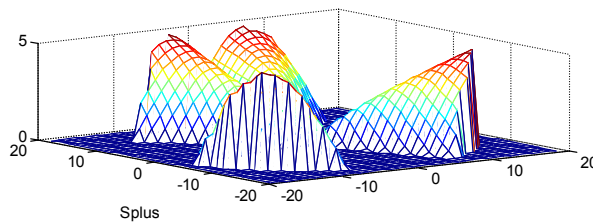
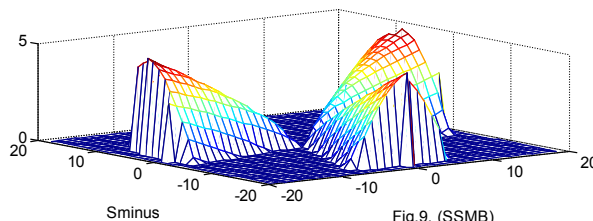


Fig.8. (SSMB)



Splus



Sminus

Fig.9. (SSMB)

На рис. 9 показана функция  $S$  (18) на всей плоскости сечения провода при  $s_z = r^{2\alpha-2}$  и  $\alpha = 1.4$ . При этом в верхнем окне показана та часть графика функции  $S$ , где  $S > 0$  -  $S_{\text{plus}}$ , а в нижнем окне показана та часть графика функции  $S$ , где  $S < 0$  -  $S_{\text{minus}}$ , причем эта часть для наглядности показана с обратным знаком. На этом рисунке видно, что

$$S = S_{\text{plus}} + S_{\text{minus}} > 0,$$

т.е. суммарный вектор плотности потока направлен в сторону увеличения  $z$  - в сторону нагрузки. Однако существуют две составляющие этого вектора: составляющая  $S_{\text{plus}}$ , направленная в сторону нагрузки, и составляющая  $S_{\text{minus}}$ , направленная в сторону источника тока. Эти составляющие потока переносят активную и реактивную энергию соответственно. Итак,

- плотность потока неравномерно распределена по сечению потока – существует картина распределения плотности потока по сечению провода;
- эта картина сохраняется при перемещении по оси  $OZ$ ;
- поток энергии (15), проходящий через площадь сечения, не зависит от  $t$ ,  $z$  и это соответствует закону сохранения энергии,
- поток энергии имеет две противоположно направленные составляющие, которые переносят активную и реактивную энергии; таким образом, отсутствует необходимость в представлении мнимого вектора Пойнтинга.

## 5. Ток и поток энергии в проводе

Можно сказать, что поток массовых частиц (массовый ток) "*несёт*" поток кинетической энергии, которая выделяется при столкновении с преградой. Точно также электрический ток "*несёт*" поток электромагнитной энергии, которая выделяется в нагрузке. Это утверждение обсуждается и обосновывается в [4-9]. Отличие между этими двумя случаями состоит в том, что величина массового тока полностью определяет величину кинетической энергии. Однако во втором случае величина электрического тока НЕ определяет величину электромагнитной энергии, которая выделяется в нагрузке. Следовательно, переносимая величина электромагнитной энергии – поток энергии определяется структурой тока. Покажем это.

Как следует из (3.10), среднее значение плотности амплитуды тока  $\overline{J_z}$  в проводе с данным радиусом  $R$  зависит от двух параметров:  $\alpha$  и  $A$ . При данной плотности можно найти зависимость между этими параметрами, которая следует из (3.10):

$$A = \frac{2\pi\alpha(\alpha+1)}{\chi\epsilon\omega} R^{-\alpha-1} J_{zr}. \quad (1)$$

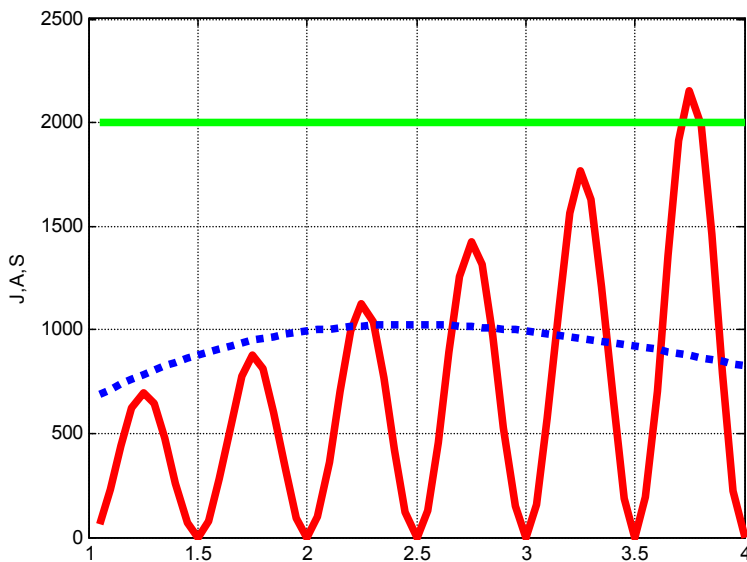


Fig.10. (SSMB)

Как следует из (4.16), плотность потока энергии  $S$  вдоль провода также зависит от двух параметров:  $\alpha$  и  $A$ . На рис. 10 показаны зависимости (1) и (4.16) при данных  $\overline{J_z} = 2$ ,  $R = 2$ . При этом прямая линия изображает постоянную плотность тока (в масштабе 1000), сплошная линия – плотность потока, пунктирная линия – параметр  $A$  (в масштабе 1000). Здесь  $A$  вычисляется по (1), плотность потока энергии  $S$  по (4.16) при данном  $A$ . Видно, что при одной и той же плотности тока плотность потока может принимать совершенно различные значения.

Выше из формул (4.7, 3.16) была найдена плотность потока энергии на окружности данного радиуса в виде функции (см. (4.18)):

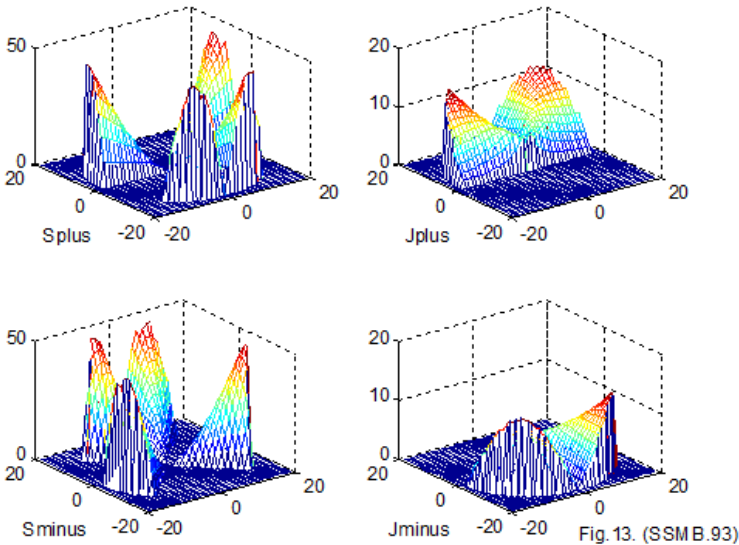
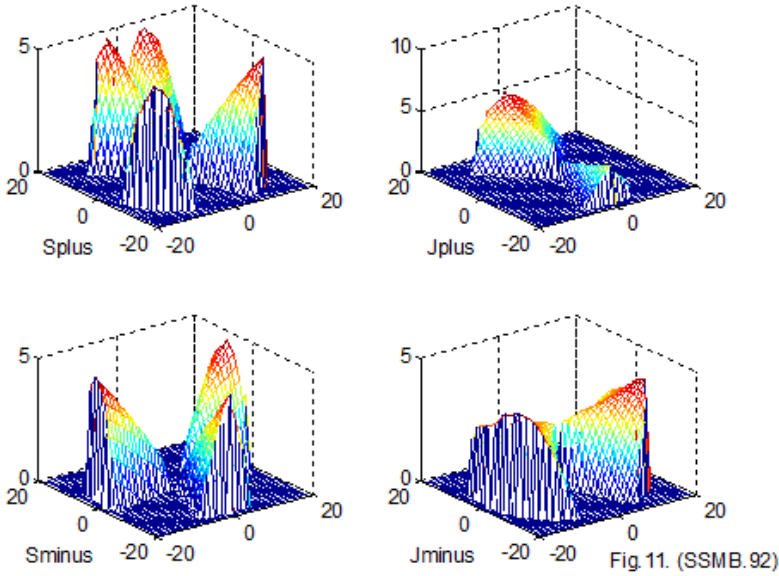
$$\overline{S}_{rz} = s_z \sin(2\beta\varphi). \quad (2)$$

Аналогично из формул (3.5а, 3.16) может быть найдена плотность тока на окружности данного радиуса в виде функции

$$\overline{J}_{rz} = j_z \sin(\beta\varphi). \quad (3)$$

Функция (2) была показана на рис. 9. На рис. 11 в левых окнах повторены графики этой функции  $\bar{S}_{rz}$  (2), а в правых окнах для сопоставления показаны построенные аналогичным образом при  $A=1, \alpha=1.4, \beta=1.6, R=19$  графики функции  $\bar{J}_{rz}$  (3).

На рис. 11 видно, что в проводе могут существовать токи и потоки энергии, разделенные на противоположно направленные "струи".



Существуют такие сочетания параметров, при которых суммарные токи противоположно направленных "струй" равны по абсолютной величине и, одновременно с этим, суммарные потоки энергии противоположно направленных "струй" также равны по абсолютной величине. На рис. 13 показан такой случай: при  $A=1$ ,  $\alpha=1.8$ ,  $\beta=2$ ,  $R=19$  равны следующие интегралы по площади сечения  $Q$  провода (здесь важно, что  $\beta$  кратно 2):

$$\int_Q S_{\text{plus}} \cdot dQ = - \int_Q S_{\text{minus}} \cdot dQ,$$

$$\int_Q J_{\text{plus}} \cdot dQ = - \int_Q J_{\text{minus}} \cdot dQ.$$

## 6. Обсуждение

Показано, что в проводе переменного тока распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решение уравнений Максвелла.

Это решение во многом совпадает с тем, которое ранее найдено для электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме – см. главу 1.

Оказалось, что ток распространяется в проводе по винтовой траектории, а шаг винтовой траектории зависит от плотности потока электромагнитной энергии, передаваемой по проводу в нагрузку, т.е. от передаваемой мощности. При этом поток энергии распространяется вдоль и внутри провода.

## Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.8) в виде функций (2.13-2.18). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.8) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\phi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\phi(r) \chi - \frac{\mu\omega}{c} h_r = 0, \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) + \frac{\mu\omega}{c} h_\phi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{e_\phi(r)}{r} + e'_\phi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\mu\omega}{c} h_z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi - \frac{\varepsilon \omega}{c} e_r = 0, \quad (6)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) + \frac{\varepsilon \omega}{c} e_\varphi = 0, \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\varepsilon \omega}{c} e_z(r) = \frac{4\pi}{c} j_z(r). \quad (8)$$

Умножим (5) на  $\left(-\frac{\mu\omega}{c\chi}\right)$ . Тогда получим:

$$-\frac{\mu\omega}{c\chi} \frac{h_r(r)}{r} - \frac{\mu\omega}{c\chi} h'_r(r) - \frac{\mu\omega}{c\chi} \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha - \frac{\mu\omega}{c} h_z(r) = 0. \quad (9)$$

Сравнивая (4) и (9), замечаем, что они совпадают, если

$$\left\{ \begin{array}{l} h_z \neq 0 \\ -\frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_\varphi(r) = e_r(r), \\ \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_r(r) = e_\varphi(r), \end{array} \right\} \quad (9a)$$

или, если

$$\left\{ \begin{array}{l} h_z = 0, \\ -M \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_\varphi(r) = e_r(r), \\ M \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_r(r) = e_\varphi(r), \end{array} \right\} \quad (9b)$$

где -  $M$  - константа. Далее будем пользоваться формулами

$$-M \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (10)$$

$$M \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_r(r) = e_\varphi(r), \quad (11)$$

где -  $M = 1$  для случая (9a). Перепишем (2, 3, 6, 7) в виде:

$$e_z(r) = \frac{\chi r}{\alpha} e_\varphi(r) - \frac{r}{\alpha} \frac{\mu\omega}{c} h_r(r), \quad (12)$$

$$e'_z(r) = e_r(r) \chi + \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (13)$$



$$h_z(r) = \frac{\chi r}{\alpha} h_\varphi(r) + \frac{r}{\alpha} \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} e_r(r), \quad (14)$$

$$h'_z(r) = -h_r(r)\chi + \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} e_\varphi(r), \quad (15)$$

Подставим (10, 11) в уравнения (12, 13). Тогда получим:

$$e_z(r) = \left( \chi - \frac{\chi}{M} \right) \frac{r}{\alpha} e_\varphi(r) = \frac{(M-1)\chi r}{M\alpha} e_\varphi(r), \quad (16)$$

$$e'_z(r) = \left( \chi - \frac{\chi}{M} \right) e_r(r)\chi = \frac{(M-1)}{M} \chi e_r(r). \quad (17)$$

Подставим (10, 11) в уравнения (14, 15). Тогда получим:

$$h_z(r) = \left( \chi - M \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} \right) \frac{r}{\alpha} h_\varphi(r) = \frac{r}{\alpha c^2 \chi} (c^2 \chi^2 - M\varepsilon\mu\omega^2) h_\varphi(r), \quad (18)$$

$$h'_z(r) = \left( -\chi + M \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} \right) h_r(r) = \frac{-1}{c^2 \chi} (c^2 \chi^2 - M\varepsilon\mu\omega^2) h_r(r). \quad (19)$$

Дифференцируя (16) и сравнивая с (17), находим:

$$\frac{(M-1)\chi}{M\alpha} (r e_\varphi(r))' = \frac{(M-1)}{M} \chi e_r(r)$$

или

$$(r e_\varphi(r))' = \alpha e_r(r)$$

или

$$(e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r)) = \alpha e_r(r). \quad (20)$$

Из (1, 16) находим:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \frac{(M-1)}{M} \chi^2 \frac{r}{\alpha} e_\varphi(r) = 0 \quad (23)$$

Из физических соображений следует принять, что

$$h_z(r) = 0. \quad (24)$$

Тогда из (18) находим:

$$(c^2 \chi^2 - M\varepsilon\mu\omega^2) = 0$$

или

$$\chi = \hat{\chi} \frac{\omega}{c} \sqrt{M\varepsilon\mu}, \quad \hat{\chi} = \pm 1. \quad (25)$$

Из (16, 25) находим:

$$e_z(r) = (M-1) \frac{\chi r}{\alpha} e_\varphi(r) = \frac{(M-1)}{M} \hat{\chi} \frac{\omega}{c} \sqrt{M\varepsilon\mu} \frac{r}{\alpha} e_\varphi(r)$$

или

$$e_z(r) = \hat{\chi} \frac{(M-1)}{\sqrt{M}} \frac{\omega \sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c} r e_\varphi(r) \quad (25a)$$

При  $\omega \ll c$  из (25) находим, что

$$|\chi| \ll 1. \quad (26)$$

Тогда в уравнении (23) величиной  $\chi^2$  можно пренебречь и получить уравнение вида

$$\alpha \cdot e_\varphi(r) = e_r(r) + r \cdot e'_r(r). \quad (27)$$

Из (27, 20) в силу симметрии находим:

$$e_r(r) = e_\varphi(r), \quad (28)$$

$$\alpha \cdot e_\varphi(r) = e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r). \quad (29)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$e_\varphi(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (30)$$

что можно проверить подстановкой (30) в (29). Из (11, 25) находим

$$h_r(r) = \hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi(r), \quad (31)$$

а из (10, 28) находим

$$h_\varphi(r) = -h_r(r). \quad (32)$$

Наконец, из (8, 32) находим

$$j_z(r) = \frac{c}{4\pi} \left( -\frac{h_r(r)}{r} - h'_r(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z(r) \right) \quad (33)$$

С учетом (30,31) замечаем, что сумма первых трех слагаемых равна нулю, и тогда

$$j_z(r) = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi} e_z(r). \quad (34)$$

Итак, окончательно получаем:

$$e_\varphi(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (30)$$

$$e_r(r) = e_\varphi(r), \quad (28)$$

$$e_z(r) = \hat{\chi} \frac{(M-1)}{\sqrt{M}} \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c} r e_\varphi(r) \quad (25a)$$

$$h_r(r) = \hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi(r), \quad (31)$$

$$h_\varphi(r) = -h_r(r), \quad (32)$$

$$h_z(r) = 0, \quad (24)$$

$$j_z(r) = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi} e_z(r). \quad (34)$$

## Точность решения

Для анализа точности решения можно при данных значениях всех констант найти невязки уравнений (1-7). На рис. 0 показана зависимость логарифма среднеквадратичной невязки  $N$  от параметра  $\alpha$  -  $\ln N = f(\alpha)$  при  $A = 1$ ,  $\omega = 300$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ .



Fig.0. (SSMB)

## Глава 4в. Решение уравнений Максвелла для трубчатого провода с переменным током

В главе 2 рассматривалось решение уравнений Максвелла для провода с синусоидальным переменным током. Ниже мы рассмотрим решение для трубчатого провода. Мы будем искать решение при известном радиусе трубы  $R$  и малой ее толщине, когда

$$r \approx R, \quad (0)$$

и все производные по  $r$  равны нулю. Тогда система уравнений (4а.2.41-4а.2.48) примет вид:

$$\frac{e_r}{r} - \frac{e_\varphi}{r}\alpha - \chi e_z = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{e_z}{r}\alpha + e_\varphi\chi - \frac{\mu\omega}{c}ke_r = 0, \quad (2)$$

$$e_r\chi - k\frac{\mu\omega}{c}e_\varphi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi}{r} - \frac{e_r}{r}\alpha - k\frac{\mu\omega}{c}e_z = 0, \quad (4)$$

$$k\frac{e_r}{r} - k\frac{e_\varphi}{r}\alpha - k\chi e_z = 0, \quad (5)$$

$$-k\frac{e_z}{r}\alpha + ke_\varphi\chi - \frac{\varepsilon\omega}{c}e_r - \frac{4\pi}{c}j_r = 0, \quad (6)$$

$$-ke_r\chi + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_\varphi - \frac{4\pi}{c}j_\varphi = 0, \quad (7)$$

$$-k\frac{e_\varphi}{r} + k\frac{e_r}{r}\alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_z - \frac{4\pi}{c}j_z = 0. \quad (8)$$

Для дальнейшего важно отметить, что в этом решении существует  $j_\varphi \neq 0$ , т.е. существует кольцевой ток с плотностью

$$J_{\varphi} = j_{\varphi} \sin(\alpha \varphi + \chi z + \omega t). \quad (9)$$

Очевидно, такой ток создает в полости трубчатого проводника продольную магнитную напряженность

$$H_z = h_z \sin(\alpha \varphi + \chi z + \omega t), \quad (10)$$

где

$$h_z = \frac{j_{\varphi}}{2(R - a)}, \quad (11)$$

$a$  - расстояние от центра трубки до точки наблюдения  $H_z$ . Важно отметить, что существующие представления отрицают такое явление. Ниже в главе 4с будет приведено экспериментальное доказательство существования этого явления.

## Глава 4с. Специальные трансформаторы

В главе 2, раздел 3 показано, что в проводе ток может возникнуть не только в результате приложенного переменного напряжения  $U$ , но в результате приложенной внешней продольной магнитодвижущей силы  $F$ . Для того и другого случая в проводе создаются равные токи, если в системе СИ

$$F = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\mu}} U \quad (1)$$

Известен **трансформатор Зацаринина** [120]. Этот трансформатор представляет собой соленоид, по оси которого расположен стержень из любого токопроводящего материала. Если на обмотку соленоида подается напряжение  $U_1$ , то на стержне также возникает напряжение  $U_2$ . Стержень может быть соединен с нагрузкой (например, лампочкой) и тогда мощность  $P_1$  от источника напряжения  $U_1$  передается в нагрузку, которая потребляет мощность  $P_1 < P_2$ . Известны и другие эксперименты с трансформатором Зацаринина.

Этот факт - *появление напряжения в стержне* не является следствием закона электромагнитной индукции. Магнитное поле внутри соленоида не имеет продольной составляющей магнитной напряженности, направленной перпендикулярно радиусу. Однако в соленоиде присутствует продольная составляющей магнитной напряженности и, следовательно, есть магнитодвижущая сила  $F$ . Следовательно, трансформатор Зацаринина доказывает предыдущее теоретическое утверждение: ток может возникнуть в результате приложенной внешней продольной магнитодвижущей силы  $F$ .

Известен **коаксиальный трансформатор Позынича** - КТП [121]. В этом трансформаторе оболочка и центральный провод включаются как обмотки трансформатора. Возможны две схемы включения.

## Глава 4в. Коаксиальный трансформатор

---

1. Центральный провод – это первичная обмотка КТП, подключенная к источнику напряжения; оболочка – это вторичная обмотка КТП.
2. Оболочка Центральный провод – это первичная обмотка КТП, подключенная к источнику напряжения; центральный провод – это вторичная обмотка КТП.

При этом первичная обмотка КТП подключается к источнику напряжения, а вторичная – к нагрузке.

Эксперименты показали, что в обоих режимах коэффициент трансформации был равен 1.

КТП нельзя отождествить с трансформатором Запарина [120] (хотя внешние проявления похожи). Схема КТП не совпадает со схемой известного коаксиального трансформатора (поскольку последний является двух-полюсником, а КТП является четырех-полюсником).

Как будет показано ниже, функционирование КТП в режиме 2 не может быть объяснено законом электромагнитной индукции.

Все эти особенности КТП требуют объяснения.

В **режиме 1** в центральном проводе существует ток с плотностью

$$J_{zp} = j_{zp} \sin(\alpha \varphi + \chi z + \omega t) \quad (1)$$

см. главу 4а. В соответствии с законом электромагнитной индукции этот ток создает в оболочке магнитную напряженность

$$H_{\varphi o} = \frac{dJ_{zp}}{dt} = \omega j_{zp} \cos(\alpha \varphi + \chi z + \omega t). \quad (2)$$

Эта напряженность создает (как показано в главе 4в) в оболочке продольную волну и, в частности, ток

$$J_{zo} = j_{zo} \cos(\alpha \varphi + \chi z + \omega t). \quad (3)$$

Таким образом, ток (1) трансформируется в ток (3).

В **режиме 2** оболочка кабеля находится под переменным напряжением, т.е. эта оболочка является трубчатым проводом. Ток оболочки в целом не должен создавать в центре трубы магнитную напряженность, поскольку элементарные токи по всем образующим цилиндра создают напряженности, которые в силу симметрии взаимно компенсируются. Однако, как показывает эксперимент, ток по центральному проводу течет. Он может быть вызван только магнитной напряженностью. Итак, "по Фарадею" магнитной

напряженности нет, а "по Позыничу" магнитная напряженность есть. Это требует объяснения.

В **режиме 2** в оболочке, как в трубчатом проводе, существует ток с плотностью

$$J_{z0} = j_{z0} \sin(\alpha \varphi + \chi z + \omega t) \quad (4)$$

– см. главу 4в. При этом (как там показано) в полости трубчатого провода создается продольная магнитная напряженность

$$H_{zp} = h_{zp} \sin(\alpha \varphi + \chi z + \omega t), \quad (5)$$

Центральный провод находится в области существования этой напряженности. Эта напряженность (5) создает (как показано в главе 4) в проводе продольную волну и, в частности, ток

$$J_{zp} = j_{zp} \cos(\alpha \varphi + \chi z + \omega t). \quad (6)$$

Таким образом, ток (4) трансформируется в ток (6).

Этот факт (как показывалось) не является следствием закона электромагнитной индукции. В связи с этим следует заметить, что уравнения Максвелла явились обобщением этого и некоторых других частных законов. Это обобщение охватывает такую область явлений, которая больше областей, относящихся к каждому частному закону. Поэтому следствие уравнений Максвелла может описать явление, не подпадающее под действие закона электромагнитной индукции (но не может противоречить этому закону там, где он действует).

Рассмотрим математическую модель КТП подробнее. Уравнения Максвелла для центрального провода описаны в главе 2. Будем обозначать решение этих уравнений как  $(E_p, H_p, J_p)$ . Уравнения Максвелла для оболочки описаны в главе 4в. Будем обозначать решение этих уравнений как  $(E_o, H_o, J_o)$ . Оболочка и провод находятся в общей цилиндрической области. Поэтому продольные магнитные напряженности в решениях  $(E_p, H_p, J_p)$  и  $(E_o, H_o, J_o)$  совпадают, т.е.

$$H_{pz} = H_{oz} = H_z. \quad (7)$$

В главе 2 доказана УНР-теорема, в которой утверждается, что **вне зависимости от параметров провода** существует однозначная зависимость между электрическим напряжением  $U$  на проводе,



## Глава 4в. Коаксиальный трансформатор

---

продольной магнитной напряженностью в проводе  $H$  и активной мощностью  $P$ , передаваемой по проводу,

$$U = f(H, P). \quad (8)$$

В нашем случае на оболочке и центральном проводе существует общая напряженность  $H$ , а между оболочкой и центральным проводом при любом режиме включения КТП передается мощность  $P$ . Следовательно, напряжения  $U$  на оболочке и центральном проводе должны совпадать при любом режиме включения КТП.

**Именно это и наблюдается в экспериментах.**

Таким образом, КТП описывается 16-ю уравнениям с 16-ю неизвестными вида

$$\begin{aligned} E_{pr}, H_{pr}, J_{pr}, E_{p\varphi}, H_{p\varphi}, J_{p\varphi}, J_{pz}, \\ E_{or}, H_{or}, J_{or}, E_{o\varphi}, H_{o\varphi}, J_{o\varphi}, J_{oz}, E_{z}, H_z. \end{aligned} \quad (9)$$

Такая система уравнений имеет единственное решение. Эта система является системой дифференциальных уравнений (поскольку таковыми являются уравнения для провода в главе 2). Следовательно, решение зависит от начальных условий.

По полученному решению (9) может быть определен поток энергии, проходящий через КТП, т.е. мощность, передаваемую через КТП или мощность нагрузки, равную мощности генератора. Следовательно, начальные условия определяют мощность нагрузки.

Физически, конечно, все происходит наоборот: мощность генератора определяет начальные условия, а начальные условия определяют вид решения.

Таким образом, существование коаксиального трансформатора Позыничя является еще одним экспериментальным подтверждением развиваемой в этой книге теории.

# Глава 5. Решение уравнений Максвелла для провода ПОСТОЯННОГО ТОКА

## Оглавление

1. Введение \ 1
  2. Математическая модель \ 3
  3. Потoki энергии \ 10
  4. Скорость движения энергии в проводе \ 15
  5. Скорость движения энергии из аккумулятора \ 16
  6. Практические вычисления \ 17
  7. Обсуждение \ 19
- Приложение 1 \ 20  
Приложение 2 \ 22  
Приложение 3 \ 24  
Приложение 4 \ 25

## 1. Введение

В [7, 9-11] было показано, что постоянный ток в проводе имеет сложную структуру. Ток  $J$  в проводе создает в теле провода магнитную индукцию  $B$ , которая действует на электроны с зарядом  $q_e$ , движущиеся со средней скоростью  $v$  в направлении, противоположном току  $J$ , силой Лоренца  $F$ , заставляя их смещаться к центру провода – см. рис. А.

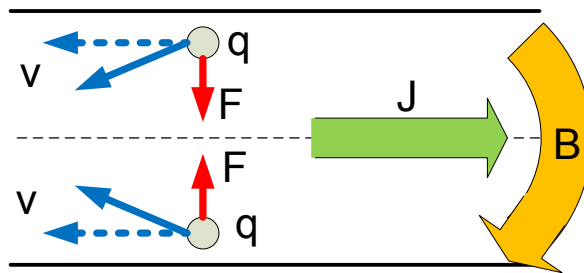


Рис А.

В связи с известным распределением индукции  $B$  по сечению провода сила  $F$  убывает от поверхности провода к центру – см. рис. В, где показано изменение силы  $F$  в зависимости от радиуса  $r$ , на котором находится электрон.

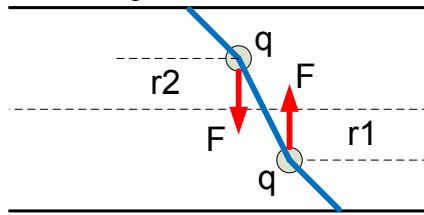


Рис В.

Таким образом, можно полагать, что в теле провода существуют элементарные токи  $I$ , начинающиеся на оси и направленные по некоторым углом  $\alpha$  к оси провода – см. рис. С.

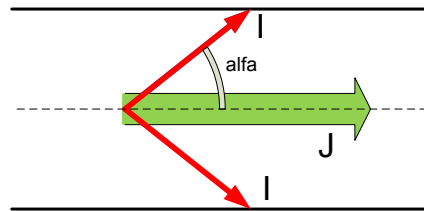


Рис С.

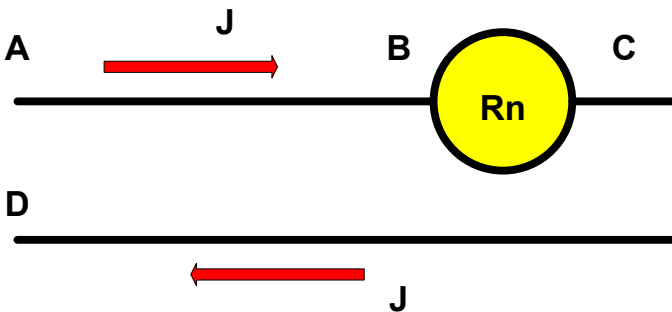


Рис. 1.

В [9-11] была предложена и рассматривалась математическая модель тока и потока, построенная исключительно на уравнениях Максвелла. Остался невыясненным следующий вопрос – см. рис. 1. Электрический  $J$  ток и поток электромагнитной энергии  $S$  распространяется внутри провода  $ABCD$  и проходит через нагрузку  $Rn$ . В этой нагрузке расходуется некоторая мощность  $P$ .

Следовательно, поток энергии на участке **AB** должен быть больше потока энергии на участке **CD**. Точнее, **S<sub>ab</sub>=S<sub>cd</sub>+P**. Однако сила тока после прохождения нагрузки не изменилась. Как должна измениться структура тока, чтобы уменьшилась соответствующая ему электромагнитная энергия? Этот вопрос рассматривался в [7]

Ниже рассматривается более общая (по сравнению с [7, 9-11]) математическая модель. Эта математическая модель также построена исключительно на уравнениях Максвелла. В [12] описывается эксперимент, который был выполнен группой авторов в 2008 г. В [17] показано, что этот эксперимент может быть объяснен на основании нелинейной структуры постоянного тока в проводе и может служить экспериментальным доказательством существования такой структуры.

## 2. Математическая модель

Уравнения Максвелла для провода постоянного тока даны в главе "Предисловие" – см. вариант б:

$$\operatorname{rot}(J) = 0, \quad (\text{a})$$

$$\operatorname{rot}(H + H(J_o)) - J - J_o = 0, \quad (\text{b})$$

$$\operatorname{div}(J) = 0, \quad (\text{c})$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (\text{d})$$

При моделировании будем использовать цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$  и рассматривать

- основной ток  $J_o$  и вызванную им напряженность  $H_{\varphi o}$ ,
- дополнительные токи  $J_r, J_{\varphi}, J_z$ ,
- магнитные напряженности  $H_r, H_{\varphi}, H_z$ ,
- электросопротивление  $\rho$ .

Здесь в уравнения (a- d) добавлена известная плотность тока  $J_o$ , передаваемого по проводу в нагрузку. Этот ток создает напряженность  $H_{\varphi} = J_o r$ . Поскольку в определение ротора входит производная  $\partial H / \partial r$  и  $\partial H_{\varphi} / \partial r = J_o$ , то уравнение (b) упрощается, принимая вид

$$\operatorname{rot}(H) - J = 0. \quad (\text{b1})$$

Решение уравнений (a, b1, c, d) принято считать равным нулю. Однако ниже показывается, что при наличии тока  $J_o$  должно существовать ненулевое решение этих уравнений.

В решении необходимо найти плотности распределения всех напряженностей и токов. Ток в проводе принято рассматривать как усредненный поток электронов. Механические взаимодействия электронов с атомами считаются эквивалентными электрическому сопротивлению. Очевидно,

$$E = \rho \cdot J. \quad (0)$$

Уравнения (a-d) для цилиндрических координат имеют вид:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad \text{см. (d)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad \text{см. (b1)} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad \text{см. (b1)} \quad (3)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad \text{см. (b1)} \quad (4)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0, \quad \text{см. (c)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial J_\varphi}{\partial z} = 0, \quad \text{см. (a)} \quad (6)$$

$$\frac{\partial J_r}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial r} = 0, \quad \text{см. (a)} \quad (7)$$

$$\frac{J_\varphi}{r} + \frac{\partial J_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_r}{\partial \varphi} = 0. \quad \text{см. (a)} \quad (8)$$

Модель основана на том, что

1. основная электрическая напряженность  $E_o$  направлена вдоль оси провода,
2. она создает основной ток  $J_o$  – вертикальный поток зарядов,
3. вертикальный ток  $J_o$  формирует кольцевое магнитное поле с напряженностью  $H_\varphi(J_o) = J_o r$  и радиальное магнитное поле  $H_r$  - см. (4),
4. магнитное поле  $H_\varphi$  отклоняет силами Лоренца заряды вертикального потока в радиальном направлении, создавая– радиальный поток зарядов - радиальный ток  $J_r$ ,

5. магнитное поле  $H_\varphi$  отклоняет силами Лоренца заряды радиального потока перпендикулярно радиусам, создавая вертикальный ток  $J_z$  (дополнительно к току  $J_o$ ),
6. магнитное поле  $H_r$  отклоняет силами Лоренца заряды вертикального потока перпендикулярно радиусам, создавая кольцевой ток  $J_\varphi$ ,
7. магнитное поле  $H_r$  отклоняет силами Лоренца заряды кольцевого потока вдоль радиусов, создавая вертикальный ток  $J_z$  (дополнительно к току  $J_o$ ),
8. ток  $J_r$  формирует вертикальное магнитное поле  $H_z$  и кольцевое магнитное поле  $H_\varphi$  - см. (2),
9. ток  $J_\varphi$  формирует вертикальное магнитное поле  $H_z$  и радиальное магнитное поле  $H_r$  - см. (3).
10. ток  $J_z$  формирует кольцевое магнитное поле  $H_\varphi$  и радиальное магнитное поле  $H_r$  - см. (4); и т.д.

Таким образом, основной ток  $J_o$  создает дополнительные токи  $J_r$ ,  $J_\varphi$ ,  $J_z$  и магнитные поля  $H_r$ ,  $H_\varphi$ ,  $H_z$ . Они должны удовлетворять уравнениям Максвелла. Кроме того, потоки электромагнитной энергии должны быть такими, чтобы

- A. Вертикальный поток энергии был равен передаваемой мощности,
- B. Сумма всех потоков энергии должна быть равна передаваемой мощности в сумме с мощностью тепловых потерь в проводе.

Таким образом, токи и напряженности должны удовлетворять уравнениям Максвелла и условия A и B. Для поиска решения мы разобьем задачу на две следующих задачи (что можно сделать в силу линейности уравнений Максвелла):

- a) поиск решения уравнений (1-8) при отсутствии тока  $J_o$ ; это решение оказывается многозначным;
- b) поиск дополнительных ограничений, налагаемых на первоначальное решение условиями A и B; здесь учитывается ток  $J_o$  и создаваемая им напряженность  $H_{o\varphi}$ .

Прежде всего, необходимо доказать, что решение системы (1-8) существует при ненулевых токах  $J_r$ ,  $J_\varphi$ ,  $J_z$ .

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (10)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z), \quad (11)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$  – некоторые константы. В приложении 1 показано, что существует решение, имеющее следующий вид:

$$J_r = j_r co, \quad (12)$$

$$J_\varphi = j_\varphi si, \quad (13)$$

$$J_z = j_z si, \quad (14)$$

$$H_r = h_r co, \quad (15)$$

$$H_\varphi = h_\varphi si, \quad (16)$$

$$H_z = h_z si, \quad (17)$$

где  $j(r)$ ,  $h(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Можно полагать, что средняя скорость электрических зарядов не зависит от направления тока. В частности, при фиксированном радиусе путь, пройденный в единицу времени зарядом по окружности, и путь, пройденный им по вертикали, будут равны. Следовательно, при фиксированном радиусе можно полагать, что

$$\Delta\varphi \equiv \Delta z. \quad (18)$$

Таким образом, на цилиндре постоянного радиуса  $r$  существует траектория точки, описываемая формулами (10, 11, 18). Такая траектория является винтовой линией. С другой стороны, в соответствии с (12-17) на этой траектории все напряженности и плотности токов изменяются синусоидально в зависимости от  $\varphi$ . Следовательно,

линия на цилиндре постоянного радиуса  $r$ , по которой точка движется так, что все напряженности и плотности токов в ней изменяются синусоидально в зависимости от  $\varphi$ , является винтовой линией.

На основе этого предположения можно построить траекторию движения заряда в соответствии с функциями (10, 11). На рис. 1 показаны три винтовые линии при  $\Delta\varphi = \Delta z$ , описываемые функциями (10, 11) тока: толстая линия при  $\alpha = 2$ ,  $\chi = 0.8$ , средняя линия при  $\alpha = 0.5$ ,  $\chi = 2$  и тонкая линия при  $\alpha = 2$ ,  $\chi = 1.6$ .

На рис. 1 показаны винтовые линии для функций  $J$  и  $H$ , определенных по (10-17), а именно для суммарного тока с

проекциями  $J_\varphi$  и  $J_z$  при  $r = const$ . Эти проекции определяются по (13, 14), т.е. зависят от функции  $si$ . Однако функции  $J$  и  $H$  могут быть определены следующим образом:

$$J_r = j_r co, \tag{19}$$

$$J_\varphi = j_\varphi si, \tag{20}$$

$$J_z = j_z si, \tag{21}$$

$$H_r = h_r co, \tag{22}$$

$$H_\varphi = h_\varphi si, \tag{23}$$

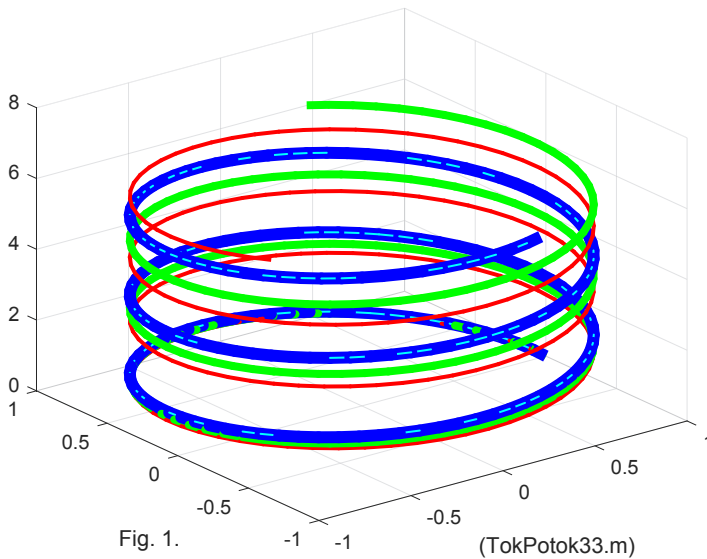
$$H_z = h_z si. \tag{24}$$

Отличие этих функций от функций (10-17) состоит в том, что функции  $co$  заменены на функции  $si$  и наоборот.

На рис. 1Р показаны винтовые линии

- для функций  $J$  и  $H$ , определенных по (13, 14), как на рис. 1, и зависящих от функции  $co$  (см. тонкую линию) и
- для функций  $J$  и  $H$ , определенных по (20, 21) и зависящих от функции  $si$  (см. толстую линию).

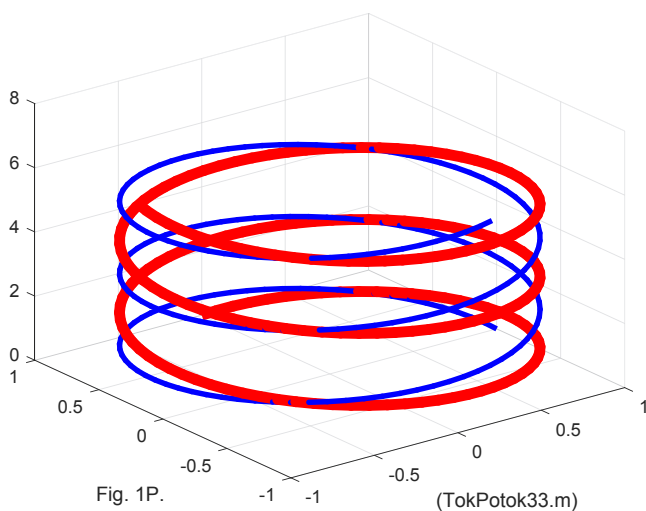
Видно, что функции (12-17) отличаются от функций (19-24) разной **поляризацией**. Какое из них существует физически?



Ниже будет рассмотрено решение в виде функций (12-17). Далее будет показана аналогия между решениями (12-17) и (19-24).



Затем будет показано, что полное решение состоит из суммы решений для (12-17) и (19-24).



Сам факт существования вокруг проводника с постоянным током магнитного поля, имеющего спиралеобразную конфигурацию, установлен еще Эрстедом в 1820 г. [127, стр. 184]. На рис. 2 показана фотография провода, смоченного магнитной жидкостью (увеличено в 20 раз). Видны спиральные линии, образуемые в магнитной жидкости. Эта фотография свидетельствует о существовании спиральных линий магнитной напряженности.



Рис. 2.

В приложении 1 показано, что существует модифицированная функция Бесселя, обозначаемая как  $F_\alpha(r)$ , от которой зависят функции напряженности  $h(r)$  и плотности тока  $j(r)$ , а именно

$$j_\varphi(r) = F_\alpha(r), \quad (25)$$

$$j_r(r) = \frac{-1}{\alpha} (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)), \quad (26)$$

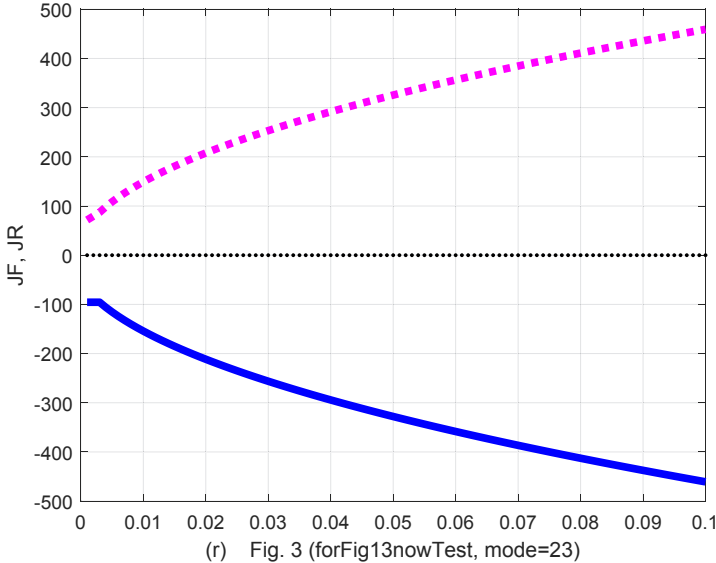
$$j_z(r) = \frac{\chi}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r), \quad (27)$$

$$h_z(r) = \frac{1}{2\alpha} \int_{r=R}^0 \vartheta_z(r) dr, \quad (28)$$

$$h_\varphi(r) = \frac{1}{\chi} \left( \frac{h_z(r)}{r} \alpha - j_r(r) \right) \quad (29)$$

$$h_r(r) = \frac{-1}{\chi} (j_\varphi(r) + h'_z(r)), \quad (30)$$

где функция  $\vartheta_z(r)$  определена в приложении 4.



В приложении 3 показано, что при малых  $r$  функция (25) принимает вид

$$y = Ax^\beta, \quad (30a)$$

где  $A$  – константа, и

$$\beta = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{3 + 4\chi^2}), \quad \beta < 0. \quad (30в)$$

При этом для расчета по уравнениям (25-30) должны быть известны величины  $A, \alpha, \chi$ . В разделе 6 описан порядок вычислений по вышеприведенным уравнениям.

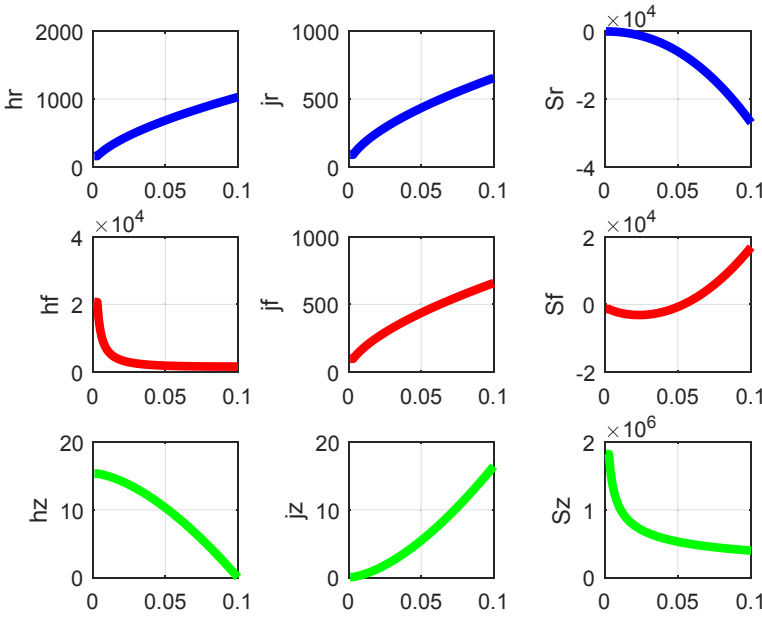


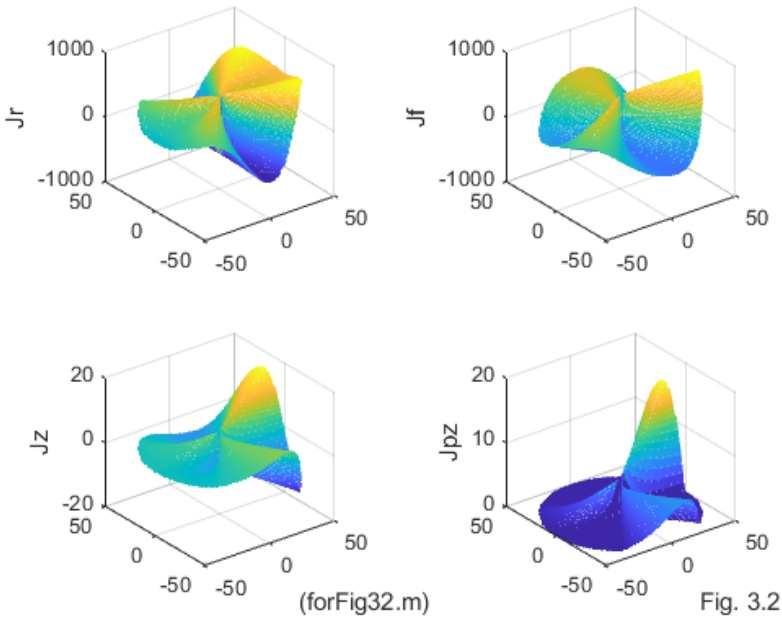
Fig. 3.1 (fig-5-3-1.m)

Функция (25) имеет множество вариантов, определяемых константами  $A, \alpha, \chi$ . На рис. 3 показаны функции  $j_\phi(r), j_r(r)$  – соответственно сплошной и пунктирной линиями. Физически это означает, что в области  $r < R$  существуют радиальные токи  $J_r(r)$ , направленные от центра. Здесь  $R$  является радиусом провода.

**Пример 1.** На рис. 3.1 показаны графики функций  $j_r(r), j_\phi(r), j_z(r), h_r(r), h_\phi(r), h_z(r)$ . Эти функции вычисляются при данных  $A = -2 \cdot 10^{-5}10, \alpha = 1.5, \chi = 0.4$  и радиусе провода  $R = 0.1$ . В первой колонке показаны функции  $j_r(r), j_\phi(r), j_z(r)$ , во второй колонке показаны функции  $h_r(r), h_\phi(r), h_z(r)$ , а функции, показанные в третьей колонке, будут рассмотрены далее.

На рис. 3.2 показаны функции (12-14) при  $z = const$ . В четвертом окне показана функция

$$Jp_z(r, \varphi) = \begin{cases} J_z(r, \varphi), & \text{if } J_z(r, \varphi) > 0, \\ 0, & \text{if } J_z(r, \varphi) \leq 0. \end{cases}$$



Найдем значение плотности тока в проводе с радиусом R:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r, \varphi} [J_z] dr \cdot d\varphi. \quad (31)$$

С учетом (14) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r, \varphi} [j_z(r) si] dr \cdot d\varphi = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \int_0^{2\pi} (si \cdot d\varphi) \right) dr. \quad (32)$$

С учетом (11) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha \pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \cos\left(2\alpha\pi + \frac{2\omega}{c} z\right) - \cos\left(\frac{2\omega}{c} z\right) \right) dr. \quad (33)$$

Отсюда следует, что суммарный ток  $\overline{J_z}$  изменяется в зависимости от координаты  $z$ . Однако суммарный заданный ток с плотностью  $J_o$  остается постоянным.

### 3. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга определяется в этом случае по формуле (1.4.3):

$$S = E \times H. \quad (1)$$

Токам соответствуют одноименные электрические напряженности, т.е.

$$E = \rho \cdot J, \quad (2)$$

где  $\rho$  - электросопротивление. Совмещая (1, 2), получаем:

$$S = \rho J \times H = \frac{\rho}{\mu} J \times B. \quad (3)$$

Магнитная сила Лоренца, действующая на все заряды проводника в единичном объеме, - объемная плотность силы Лоренца равна

$$F = J \times B. \quad (4)$$

Из (3, 4) находим:

$$F = \mu S / \rho. \quad (5)$$

Следовательно, в проводе с постоянным током плотность магнитной силы Лоренца пропорциональна вектору Пойнтинга.

**Пример 1.** Для проверки рассмотрим размерности величин в вышеприведенных формулах в системе СИ – см. табл. 1.

Параметр		Размерность
Плотность потока энергии	$S$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Плотность тока	$J$	$\text{А} \cdot \text{м}^{-2}$
Индукция	$B$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}$
Объемная плотность силы Лоренца	$F$	$\text{Н} \cdot \text{м}^{-3} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{м}^{-2}$
Магнитная проницаемость	$\mu$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-2}$
Удельное сопротивление	$\rho$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{А}^{-2}$
$\mu/\rho$	$\mu/\rho$	$\text{с} \cdot \text{м}^{-2}$

Итак, ток с плотностью  $J$  и магнитное поле создают поток энергии с плотностью  $S$ , который тождественен магнитной силе Лоренца с плотностью  $F$  - см. (5). Эта сила Лоренца действует на заряды, движущиеся в токе  $J$ , в направлении, перпендикулярном этому току. Следовательно, можно утверждать, что вектор Пойнтинга создает э.д.с. в проводнике. Этот вопрос с другой стороны рассмотрен в [19], где такая э.д.с. названа четвертым видом электромагнитной индукции.

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  плотность потока электромагнитной энергии (3) имеет три компоненты  $S_r, S_\varphi, S_z$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно.

**3.1.** В каждой точке цилиндрической поверхности существует два потока электромагнитной энергии, направленных по радиусу, с плотностями

$$S_{r1} = \rho J_\varphi H_z, \quad S_{r2} = -\rho J_z H_\varphi \quad (6)$$

- см. рис 5. Суммарная плотность потока в каждой точке цилиндрической поверхности, направленного по радиусу,

$$S_r = S_{r1} + S_{r2} = \rho(J_\varphi H_z - J_z H_\varphi) \quad (7)$$

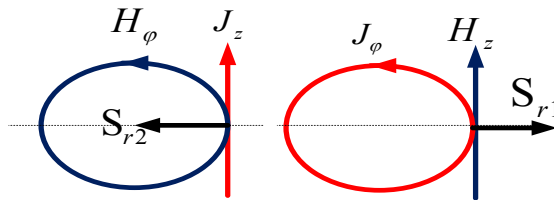


Рис. 5.

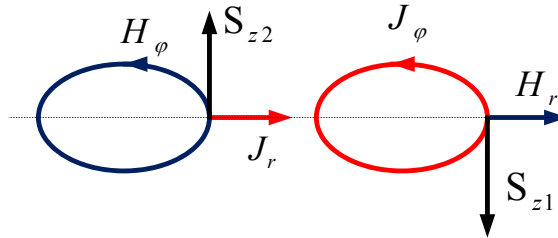


Рис. 6.

**3.2.** В каждой точке сечения цилиндра существует два потока электромагнитной энергии, направленных вертикально, с плотностями

$$S_{z1} = -\rho J_\varphi H_r, \quad S_{z2} = \rho J_r H_\varphi \quad (8)$$

- см. рис 6. Суммарная плотность потока в каждой точке сечения цилиндра, направленного по вертикали,

$$S_z = S_{z1} + S_{z2} = \rho(J_r H_\varphi - J_\varphi H_r) \quad (9)$$

3.3. В каждой точке сечения цилиндра существует два потока электромагнитной энергии, направленных по окружности, с плотностями

$$S_{\varphi 1} = \rho J_z H_r, \quad S_{\varphi 2} = -\rho J_r H_z, \quad (10)$$

- см. рис 7. Суммарная плотность потока в каждой точке цилиндрической поверхности, направленного по окружности,

$$S_{\varphi} = S_{\varphi 1} + S_{\varphi 2} = \rho(J_z H_r - J_r H_z) \quad (11)$$

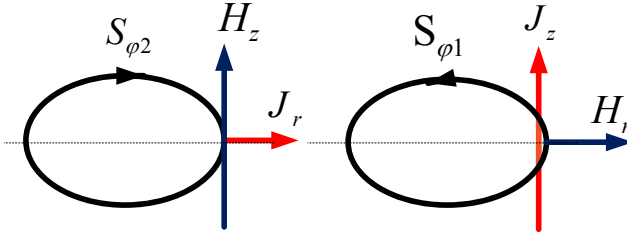


Рис. 7.

С учетом вышеизложенного запишем формулу плотности потока электромагнитной энергии в проводе постоянного тока:

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_{\varphi} \\ S_z \end{bmatrix} = \rho(J \times H) = \rho \begin{bmatrix} J_{\varphi} H_z - (J_z + J_o)(H_{\varphi} + H_{o\varphi}) \\ J_z H_r - J_r H_z + J_o H_r \\ J_r H_{\varphi} - J_{\varphi} H_r + J_r H_{o\varphi} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Дополнительные слагаемые в (12) появляются в связи с тем, что на потоки энергии влияют также плотность тока  $J_o$  и напряженность

$$H_{o\varphi} = J_o r \quad (13)$$

- см. (2.4). Подставим (13) в (12):

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_{\varphi} \\ S_z \end{bmatrix} = \rho(J \times H) = \rho \begin{bmatrix} J_{\varphi} H_z - (J_z + J_o)(H_{\varphi} + J_o r) \\ J_z H_r - J_r H_z + J_o H_r \\ J_r H_{\varphi} - J_{\varphi} H_r + J_r J_o r \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Вычисления по этой формуле весьма громоздки и выходят за объем этой книги. Мы выделим из этой формулы только часть вида

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_r \\ S_{\varphi} \\ S_z \end{bmatrix} = \rho(J \times H) = \rho \begin{bmatrix} J_{\varphi} H_z - J_z H_{\varphi} \\ J_z H_r - J_r H_z \\ J_r H_{\varphi} - J_{\varphi} H_r \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Обозначим:

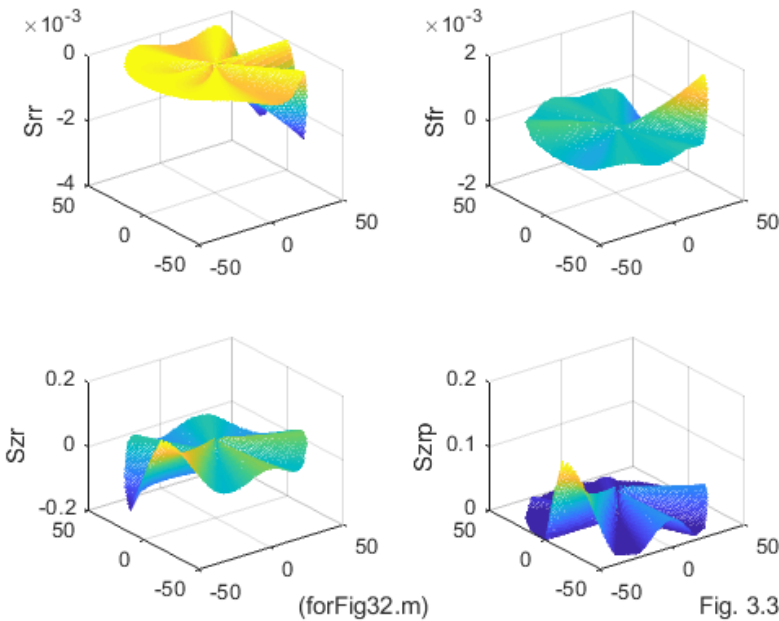
$$\begin{bmatrix} \overline{S}_r(r) \\ \overline{S}_\varphi(r) \\ \overline{S}_z(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (j_\varphi h_z - j_z h_\varphi) \\ (j_z h_r - j_r h_z) \\ (j_r h_\varphi - j_\varphi h_r) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Из (2.12-2.17, 15, 16) следует, что

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho \iiint_{r,\varphi,z} \begin{bmatrix} \overline{S}_r(r) \cdot si^2 \\ \overline{S}_\varphi(r) \cdot si \cdot co \\ \overline{S}_z(r) \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi \cdot dz. \quad (17)$$

На рис. 3.1 в правой колонке показаны функции (16). На рис. 3.3 показаны функции (17) при  $z = const$ . В четвертом окне показана функция

$$Sp_z(r, \varphi) = \begin{cases} S_z(r, \varphi), & \text{if } S_z(r, \varphi) > 0, \\ 0, & \text{if } S_z(r, \varphi) \leq 0. \end{cases}$$



Формула (17) относится к решению в виде функций (2.12-2.17). Это решение имеет вид функций

$$J_r = j_r co, \quad (21)$$

$$J_\varphi = j_\varphi si, \quad (22)$$



$$J_z = j_z si, \quad (23)$$

$$H_r = h_r co, \quad (24)$$

$$H_\varphi = h_\varphi si, \quad (25)$$

$$H_z = h_z si, \quad (26)$$

где функции  $J_r, J_\varphi, J_z, h_r, h_\varphi, h_z$ , найдены выше. Очевидно, аналогично можно найти решение для функций (21-26) в виде

$$\bar{J}_r = \bar{j}_r si, \quad (27)$$

$$\bar{J}_\varphi = \bar{j}_\varphi co, \quad (27a)$$

$$\bar{J}_z = \bar{j}_z co, \quad (28)$$

$$\bar{H}_r = \bar{h}_r si, \quad (30)$$

$$\bar{H}_\varphi = \bar{h}_\varphi co, \quad (31)$$

$$\bar{H}_z = \bar{h}_z co. \quad (32)$$

При существовании обоих решений одновременно плотности потоков энергии необходимо вычислять по аналогии с (16, 17):

$$S_r = J_\varphi H_z + J_\varphi \bar{H}_z + \bar{J}_\varphi H_z + \bar{J}_\varphi \bar{H}_z - J_z H_\varphi - J_z \bar{H}_\varphi - \bar{J}_z H_\varphi - \bar{J}_z \bar{H}_\varphi$$

или

$$S_r = \rho \iiint_{r,\varphi,z} \boxed{S_r} dr d\varphi dz \quad (33)$$

где

$$\boxed{S_r} = (j_\varphi h_z - j_z h_\varphi) si^2 + (\bar{j}_\varphi h_z - \bar{j}_z h_\varphi) co^2 + (j_\varphi \bar{h}_z + \bar{j}_z h_\varphi - j_z \bar{h}_\varphi - \bar{j}_z h_\varphi) si \cdot co$$

Интеграл от последнего слагаемого в этой формуле равен нулю, потому можно принять, что

$$\boxed{S_r} = (j_\varphi h_z - j_z h_\varphi) si^2 + (\bar{j}_\varphi h_z - \bar{j}_z h_\varphi) co^2. \quad (34)$$

Аналогично находим

$$S_\varphi = \rho \iiint_{r,\varphi,z} \boxed{S_\varphi} dr d\varphi dz, \quad (35)$$

где

$$\boxed{S_\varphi} = (j_z \bar{h}_r - \bar{j}_r h_z) si^2 + (\bar{j}_z h_r - j_r \bar{h}_z) co^2; \quad (36)$$

$$S_z = \rho \iiint_{r,\varphi,z} \boxed{S_z} dr d\varphi dz, \quad (37)$$

где

$$\boxed{S_z} = (\bar{j}_r h_\varphi - j_\varphi \bar{h}_r) si^2 + (j_r \bar{h}_\varphi - \bar{j}_\varphi h_r) co^2. \quad (38)$$

Можно показать, что функции  $j_r, j_\varphi, j_z, h_r, h_\varphi, h_z$  и функции  $\bar{j}_r, \bar{j}_\varphi, \bar{j}_z, \bar{h}_r, \bar{h}_\varphi, \bar{h}_z$  попарно равны. При этом из (34, 36, 38) находим:

$$\boxed{S_r} = (j_\varphi h_z - j_z h_\varphi), \quad (39)$$

$$\boxed{S_\varphi} = (j_z h_r - j_r h_z), \quad (40)$$

$$\boxed{S_z} = (j_r h_\varphi - j_\varphi h_r). \quad (41)$$

Подставляя (39-41) в (33, 35, 37) соответственно, получаем:

$$S_r = \rho \int_r \boxed{S_r} dr = const, \quad (42)$$

$$S_\varphi = \rho \int_\varphi \boxed{S_\varphi} dr = const, \quad (43)$$

$$S_z = \rho \int_z \boxed{S_z} dr = const. \quad (44)$$

Постоянство этих величин свидетельствует о выполнении закона сохранения энергии. С другой стороны, это означает, что оба решения с разной поляризацией существуют в проводе одновременно.

Итак, в проводе циркулируют потоки электромагнитной энергии, сохраняющие постоянную величину. Они являются внутренними. Они порождаются токами и магнитными напряженностями, создаваемые этими токами. В свою очередь, эти потоки воздействует на токи, как силы Лоренца. При этом суммарная энергия этих потоков частично расходуется на тепловые потери, но в основном передается в нагрузку.

Продольный поток энергии  $\bar{S}_z$  равен мощности  $P$ , передаваемой по проводу:

$$P = \bar{S}_z. \quad (45)$$

Заметим, что эта мощность изменяется вдоль провода, т.к. часть энергии тратится на тепловые потери (подробнее об этом см. в разделе б).

#### 4. Скорость движения энергии в проводе

Рассмотрим скорость движения энергии в проводе постоянного тока. Так же, как и в главе 1, мы будем использовать концепцию Умова [81], согласно которой плотность потока энергии  $S$  является произведением плотности энергии  $W$  и скорости движения энергии  $v_e$ :

$$s = w \cdot v_e. \quad (1)$$

Мы будем рассматривать только поток энергии вдоль провода. Этот поток равен мощности  $P$ , передаваемой по проводу в нагрузку:

$$s = P / \pi R^2. \quad (2)$$

где  $R$  - радиус провода. Внутренняя энергия провода – это энергия магнитного поля основного тока  $I_o$ . Эта энергия равна

$$W_m = \frac{L_i L I_o^2}{2}, \quad (3)$$

где  $L$  - длина провода,  $L_i$  - индуктивность единицы длины провода, причем [83]

$$L_i \approx \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \frac{1}{R}. \quad (4)$$

Объем провода

$$V = L\pi \cdot R^2. \quad (5)$$

Из (3-5) найдем плотность энергии в проводе

$$w = \frac{W_m}{V} = \frac{L_i I_o^2}{2\pi R^2}. \quad (6)$$

Из (1, 2, 6) найдем скорость движения энергии

$$v_\phi = \frac{s}{w} = \frac{P}{\pi R^2} \bigg/ \left( \frac{L_i I_o^2}{2\pi R^2} \right) = \frac{2P}{L_i I_o^2}. \quad (7)$$

Сопротивление нагрузки

$$R_H = \frac{P}{I_o^2} \quad (8)$$

Следовательно,

$$v_\phi = \frac{2R}{L_i}. \quad (9)$$

Например, при  $R = 10^{-3}$  и  $R_H = 1$  имеем:  $\ln \frac{1}{r} \approx 7$ ,

$L_i \approx \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \approx 7 \cdot 10^{-7}$ ,  $v_\phi = 3 \cdot 10^6$ . Эта скорость значительно меньше скорости света в вакууме. С этой скоростью энергия втекает в провод и из него вытекает в нагрузку. Энергию тепловых потерь мы не учитываем, т.к. она не передается в нагрузку.

При включении такой нагрузки ток в проводе нарастает по функции

$$I_o = \frac{U}{R_H} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right), \quad (10)$$

где  $U$  - входное напряжение и

$$\tau = \frac{L_i L}{R_H}. \quad (11)$$

Из (9, 10) находим:

$$v_\varphi = \frac{2P}{L_i I_o^2} = \frac{2U}{L_i I_o} = \frac{2U}{L_i} \bigg/ \frac{U}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) = \frac{2R}{L_i} \bigg/ \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right). \quad (12)$$

Таким образом, скорость движения энергии в переходном процессе уменьшается от бесконечности (скорости света в вакууме) до величины (9).

## 5. Скорость движения энергии из аккумулятора

Характеристики "среднего аккумулятора" представлены ниже [92]:

$E_m$ – емкость аккумулятора	60 Ач
$\rho$ - плотность электролита	1250 кг\м <sup>3</sup>
$G$ - вес электролита	1.5 кг
$V = G/\rho$ - объем электролита	0.0012 м <sup>3</sup>
$R$ – сопротивление нагрузки	0.047 Ом
$U$ – напряжение на нагрузке	12.8 В
$I$ – ток нагрузки (стартовый)	270 А
$P = U \cdot I = U^2/R$ – мощность нагрузки	3456 Вт
$W = 3600 \cdot E_m \cdot U$ – энергия конденсатора (электролита)	2764800 Дж
$w = W/V$ – плотность энергии	2.3*10 <sup>9</sup> Дж\м <sup>3</sup>
$S = P$ – поток энергии	3456 Вт
$b$ - сечение провода	100 мм <sup>2</sup>
$s = S/(b \cdot 10^{-6})$ - плотность потока энергии	3.5*10 <sup>7</sup>
$v_\varphi = \frac{w}{s}$ - скорость движения энергии	100 м\сек
$c$ - скорость света	300*10 <sup>6</sup> м\сек

Таким образом, скорость движения энергии по проводу из аккумулятора **намного меньше** скорости света.

## 6. Практические вычисления

Для удобства читателя объединим все расчетные соотношения, приведенные выше.

В разделе 2 определены плотность основного тока  $J_o$ , плотности дополнительных токов  $J_r, J_\varphi, J_z$  и магнитные напряженности  $H_r, H_\varphi, H_z$ , имеющие следующий вид:

$$J_r = j_r(r) \cdot \text{co}, \quad (2.12)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r) \cdot \text{si}, \quad (2.13)$$

$$J_z = j_z(r) \cdot \text{si}, \quad (2.14)$$

$$H_r = h_r(r) \cdot \text{co}, \quad (2.15)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r) \cdot \text{si}, \quad (2.16)$$

$$H_z = h_z(r) \cdot \text{si}, \quad (2.17)$$

где

$$\text{co} = \cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (2.10)$$

$$\text{si} = \sin(\alpha\varphi + \chi z), \quad (2.11)$$

где, в свою очередь,  $\alpha, \chi$  – некоторые константы и  $j(r), h(r)$  – некоторые функции координаты  $r$ , имеющие следующий вид:

$$j_\varphi(r) = F_\alpha(r), \quad (2.25)$$

$$j_r(r) = \frac{-1}{\alpha} (j_\varphi(r) + r \cdot j_\varphi'(r)), \quad (2.26)$$

$$j_z(r) = \frac{\chi}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r), \quad (2.27)$$

$$h_z(r) = \frac{1}{2\alpha} \int_{r=R}^0 \vartheta_z(r) dr, \quad (2.28)$$

$$h_\varphi(r) = \frac{1}{\chi} \left( \frac{h_z(r)}{r} \alpha - j_r(r) \right) \quad (2.29)$$

$$h_r(r) = \frac{-1}{\chi} (j_\varphi(r) + h_z'(r)). \quad (2.30)$$

Здесь функция (2.25) определена в приложении 3 и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 j_\varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{3\partial j_\varphi(r)}{r \partial r} - j_\varphi(r) \left( \frac{\alpha^2 - 1}{r^2} + \chi^2 \right) = 0. \quad (2)$$

В приложении 3 показано, что для решения этого уравнения должны быть заданы величины  $A, \alpha, \chi$ .

Из (3.45) имеем

$$P = S_z. \quad (3)$$

Заметим, что эта мощность изменяется вдоль провода, т.к. часть энергии тратится на тепловые потери.

В приложении 4 показано, что  $h_z(r)$  может принимать любые значения в зависимости от  $A, \alpha, \chi$ . Однако из практики известно, что  $h_z(r) = 0$ . Будем поэтому полагать в расчетах, что для проводника вне магнитного поля

$$h_z(r) \approx 0, \quad (5)$$

а для проводника в магнитном поле  $h_z(r)$  известно.

### 6.1. Проводник вне магнитного поля

При этом уравнения (2.28-230) принимают вид:

$$h_\varphi(r) = -\frac{1}{\chi} j_r(r), \quad (6)$$

$$h_r(r) = -\frac{1}{\chi} j_\varphi(r). \quad (7)$$

$$\int_{r=R}^0 \vartheta_z(r) dr = 0. \quad (8)$$

В этом случае расчет состоит в решении системы уравнений (2.25-2.27, 6-7, 3) при известных  $P, \cdot J_o$  и неизвестных  $j_r(r), j_\varphi(r), j_z(r), h_\varphi(r), h_r(r), A, \alpha, \chi$ .

### 6.2. Проводник вне магнитного поля

В этом случае расчет состоит в решении системы уравнений (2.25-2.20, 3) при известных  $P, \cdot J_o, h_z(r)$  и неизвестных  $j_r(r), j_\varphi(r), j_z(r), h_\varphi(r), h_r(r), A, \alpha, \chi$ .

## 7. Обсуждение

Итак, полное решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током состоит из двух частей:

- 1) известного уравнения (3.13) вида  $H_{o\varphi} = J_o r$  и
- 2) полученных выше уравнений (2.10-2.17, 2.25-2.30).

Поток энергии вдоль оси провода  $S_z$  создается токами и напряженностями, направленными по радиусу и окружности. Этот поток энергии равен мощности, выделяемой в нагрузке  $R_H$  и в сопротивлении провода. Токи, текущие вдоль радиуса и окружности, также создают тепловые потери. Их мощность равна потокам энергии  $S_r, S_\varphi$ , направленным по радиусу и окружности.

Вопрос о том, каким образом поток электромагнитной энергии создает электрический ток, рассматривается в главе 15. Там показано, что существует четвертая электромагнитная индукция,

создаваемая потоком электромагнитной энергии. Затем определяется зависимость э.д.с. этой индукции от плотности потока электромагнитной энергии и параметров провода.

Показано, что постоянный ток в проводе имеет сложную структуру и распространяется **внутри** провода по винтовой траектории. При постоянной величине тока плотность винтовой траектории уменьшается по мере уменьшения оставшегося сопротивления нагрузки. Имеется две составляющие тока. Плотность первой составляющей  $J_o$  постоянна на всем сечении провода. Плотность второй составляющей изменяется по сечению провода таким образом, что ток распространяется по винтовой траектории. В цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  эта вторая плотность имеет три компоненты  $J_r$ ,  $J_\varphi$ ,  $J_z$ . Они найдены как решение уравнений Максвелла. Кратко решение описано в разделе 6.

При неизменной плотности основного тока в проводе передаваемая по нему мощность зависит от параметров структуры ( $\alpha$ ,  $\chi$ ), которые влияют на плотность витков винтовой траектории тока. Таким образом, один и тот же ток в данном проводе может передавать различную мощность (зависящую от нагрузки).

Снова рассмотрим рис. 1. На участке **AB** по проводу передается энергия нагрузки **P**. Ей соответствует определенное значение параметров структуры ( $\alpha$ ,  $\chi$ ) и, как следствие, плотность витков винтовой траектории тока. На участке **CD** по проводу передается незначительная энергия. Ей соответствует малая плотность витков винтовой траектории тока.

Естественно, нагрузкой является и сопротивление самого провода. Следовательно, по мере прохождения тока по проводу винтовая траектория тока выпрямляется.

Таким образом, показано, что существует такое решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током, которому соответствует представление о

- законе сохранения энергии,
- винтовой траектории постоянного тока в проводе,
- передаче энергии вдоль и внутри провода,
- зависимости плотности винтовой траектории от передаваемой мощности.

## Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.5-2.9) в виде функций (2.10-2.17). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. При этом перепишем уравнения (2.1-2.8) в следующем порядке (2.5, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.6, 2.7, 2.8) и перенумеруем их:

$$\frac{j_r(r)}{r} + \frac{d}{dr}(j_r(r)) + \frac{j_\varphi(r)}{r}\alpha + \chi j_z(r) = 0, \quad (2.5) \quad (1)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r}\alpha + \chi h_z(r) = 0, \quad (2.1) \quad (2)$$

$$\frac{h_z(r)}{r}\alpha - \chi h_\varphi(r) = j_r(r), \quad (2.2) \quad (3)$$

$$-h_r(r)\chi - h_z(r) = j_\varphi(r), \quad (2.3) \quad (4)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r}\alpha = j_z(r), \quad (2.4) \quad (5)$$

$$\frac{j_z(r)}{r}\alpha - \chi j_\varphi(r) = 0, \quad (2.6) \quad (6)$$

$$-j_r(r)\chi - \frac{d}{dr}(j_z(r)) = 0, \quad (2.7) \quad (7)$$

$$\frac{j_\varphi(r)}{r} + \frac{d}{dr}(j_\varphi(r)) + \frac{j_r(r)}{r}\alpha = 0. \quad (2.8) \quad (8)$$

Сначала рассмотрим группу 4-х уравнений (1, 6, 7, 8) относительно 3-х неизвестных функций  $j(r)$ . В приложении 2 показано, что эти четыре уравнения совместимы, а уравнение (7) следует из уравнений (1, 6, 8). При этом

$$j_\varphi(r) = F_\alpha(r), \quad (14)$$

$$j_z(r) = \frac{\chi}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r), \quad (15)$$

$$j_r(r) = \frac{-1}{\alpha} (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)). \quad (16)$$

Функция  $F_\alpha(r)$  определена в приложении 2.

При известных функциях  $j(r)$  решаем систему 4-х уравнений (2-5) относительно 3-х неизвестных функций  $h(r)$ . Из (3, 4) находим:



$$h_{\varphi}(r) = \frac{1}{\chi} \left( \frac{h_z(r)}{r} \alpha - j_r(r) \right), \quad (17)$$

$$h_r(r) = \frac{-1}{\chi} \left( j_{\varphi}(r) + h'_z(r) \right). \quad (18)$$

Подставим (17, 18) в (5). Тогда найдем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\chi r} \left( \frac{h_z(r)}{r} \alpha - j_r(r) \right) + \frac{1}{\chi} \left( \frac{h_z(r)}{r} \alpha - \frac{h_z(r)}{r^2} \alpha - \frac{\partial}{\partial r} j_r(r) \right) \\ & - \frac{\alpha}{\chi r} (j_{\varphi}(r) + h'_z(r)) - j_z(r) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

В приложении 4 найдено решение уравнения (19). Оно имеет следующий вид:

$$h_z(r) = \frac{1}{2\alpha} \int_{r=R}^0 \vartheta_z(r) dr. \quad (20)$$

где функция  $\vartheta_z(r)$  определена в приложении 4.

Итак, искомые функции  $j_r(r)$ ,  $j_{\varphi}(r)$ ,  $j_z(r)$ ,  $h_r(r)$ ,  $h_{\varphi}(r)$ ,  $h_z(r)$  определяются по (14, 16, 15, 18, 17, 20) соответственно.

В полученном решении не использовалось уравнение (2).

Теперь подставим (17, 18) в (2). Тогда найдем

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\chi r} (h_z(r) + j_{\varphi}(r)) - \frac{1}{\chi} \left( h_z(r) + \frac{\partial}{\partial r} j_{\varphi}(r) \right) \\ & + \frac{\alpha}{\chi r} \left( \frac{\alpha}{r} h_z(r) - j_r(r) \right) + \chi h_z(r) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & - (h_z(r) + j_{\varphi}(r)) - r \left( h_z(r) + \frac{\partial}{\partial r} j_{\varphi}(r) \right) \\ & + \alpha \left( \frac{\alpha}{r} h_z(r) - j_r(r) \right) + \chi^2 r h_z(r) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left( \chi^2 r + \frac{\alpha^2}{r} \right) h_z(r) - h_z(r) - r h'_z(r) - \\ & \left( j_{\varphi}(r) + r \frac{\partial}{\partial r} j_{\varphi}(r) + \alpha j_r(r) \right) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

В приведенных преобразованиях не использовалось уравнение (2).

Таким образом, уравнение  $\operatorname{div}(H)=0$ , из которого получено уравнение (2), преобразовано в уравнение (22). При ранее найденных функциях  $h_z(r)$ ,  $j_r(r)$ ,  $j_{\varphi}(r)$ ,  $j_z(r)$  это уравнение (22) выполняется не всегда, т.е. уравнение  $\operatorname{div}(H)=0$  выполняется не всегда. В главе 14 показано, что

$div(H) = 0$ , если все токи $(j_r(r), j_\varphi(r), j_z(r))$ отсутствуют	(23)
$div(H) = 0$ , если токи $(j_r(r), j_\varphi(r), j_z(r))$ существуют.	

В связи с этим заметим, что эксперименты также свидетельствуют о том, дивергенция магнитной напряженности не равна нулю всюду. Действительно, наблюдение магнитных силовых линий в опилках или магнитной жидкости свидетельствуют о том, что напряженность на такой линии отличается от напряженности в ближайшей окрестности – см., например, рис. 2а в разделе 2. Это возможно только тогда, когда дивергенция испытывает скачок.

Поэтому можно искать решение поставленной задачи, исключая уравнения дивергенции магнитной напряженности, Требует проверки только равенство этой дивергенции нулю в среднем.

С другой стороны, свободный член справа (вместо нуля) можно рассматривать как плотность магнитных монополей. В главе 14 показано, что отсюда следует существование в проводнике магнитных диполей.

## Приложение 2

Рассмотрим уравнения (1, 6, 7, 8) из приложения 1, сохранив их нумерацию:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) + \frac{j_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot j_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot j_z(r) \alpha - j_\varphi(r) \chi = 0, \quad (6)$$

$$-j_r(r) \chi - j'_z(r) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{j_\varphi(r)}{r} + j'_\varphi(r) + \frac{j_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (8)$$

Из (6) находим:

$$j_z(r) = \frac{\chi}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r), \quad (11)$$

$$j'_z(r) = \frac{\chi}{\alpha} (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)). \quad (12)$$

Из (7, 12) находим:

$$-j_r(r)\chi - \frac{\chi}{\alpha} (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)) = 0,$$

или

$$\frac{j_\varphi(r)}{r} + j'_\varphi(r) + \frac{j_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (13)$$

Но уравнение (13) совпадает с (8). Следовательно, уравнение (7) может быть исключено из системы уравнений (1, 6, 7, 8).

Из (6) находим:

$$j_\varphi = \frac{\alpha}{r\chi} \cdot j_z, \quad (14)$$

Из (1, 14) находим:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) + \alpha \frac{j_\varphi(r)}{r} + \frac{\chi^2}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r) = 0. \quad (15)$$

Из (8) находим:

$$j_r(r) = -\frac{1}{\alpha} (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)), \quad (16)$$

$$j'_r(r) = -\frac{1}{\alpha} (2j'_\varphi(r) + r \cdot j''_\varphi(r)). \quad (17)$$

Из (15-17) находим:

$$-\frac{1}{\alpha} \left( \frac{j_\varphi(r)}{r} + j'_\varphi(r) \right) - \frac{1}{\alpha} (2j'_\varphi(r) + r \cdot j''_\varphi(r)) + \alpha \frac{j_\varphi(r)}{r} + \frac{\chi^2}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r) = 0. \quad (18)$$

Упрощая (18), получаем:

$$-\left( \frac{j_\varphi(r)}{r} + \frac{\partial j_\varphi(r)}{\partial r} \right) - \left( 2 \frac{\partial j_\varphi(r)}{\partial r} + r \frac{\partial^2 j_\varphi(r)}{\partial r^2} \right) + \alpha^2 \frac{j_\varphi(r)}{r} + \chi^2 r j_\varphi(r) = 0$$

или

$$j_\varphi(r) \left( \frac{\alpha^2 - 1}{r} + \chi^2 r \right) - 3 \frac{\partial j_\varphi(r)}{\partial r} - r \frac{\partial^2 j_\varphi(r)}{\partial r^2} = 0 \quad (19)$$

или

$$\frac{\partial^2 j_\varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial j_\varphi(r)}{\partial r} - j_\varphi(r) \left( \frac{\alpha^2 - 1}{r^2} + \chi^2 \right) = 0 \quad (20)$$

Уравнение (20) является модифицированным уравнением Бесселя – см. приложение 3. Далее мы будем обозначать это решение как  $F_\alpha(r)$ . Итак,

$$j_\varphi(r) = F_\alpha(r), \quad (21)$$

$$j'_\varphi(r) = \frac{d}{dr} F_\alpha(r). \quad (22)$$

### Приложение 3.

Уравнение (20) из приложения 2 является модифицированным уравнением Бесселя, имеющее следующий вид:

$$\ddot{y} + 3\frac{\dot{y}}{x} - y\left(\frac{\alpha^2 - 1}{x^2} + \chi^2\right) = 0, \quad (1)$$

При  $x \rightarrow 0$  уравнение (1) принимает вид:

$$\ddot{y} + 3\frac{\dot{y}}{x} - y\chi^2 = 0. \quad (2)$$

Его решение имеет вид:

$$y = Ax^\beta, \quad (3)$$

где  $A$  – константа, а  $\beta$  определяется из уравнения

$$\beta^2 + 3\beta - \chi^2 = 0, \quad (4)$$

т.е.

$$\beta = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{3 + 4\chi^2}), \quad \beta < 0. \quad (5)$$

Таким образом, на первых итерациях можно функцию  $U$  искать в виде (3), а затем вычислять ее по (2). Следовательно, для расчета по (1, 3) должны быть известны величины  $A, \alpha, \chi$ .

На рис. 1 для примера показаны функция Бесселя и ее производные при  $A = 1, \alpha = 1.5, \chi = 0.4$ .

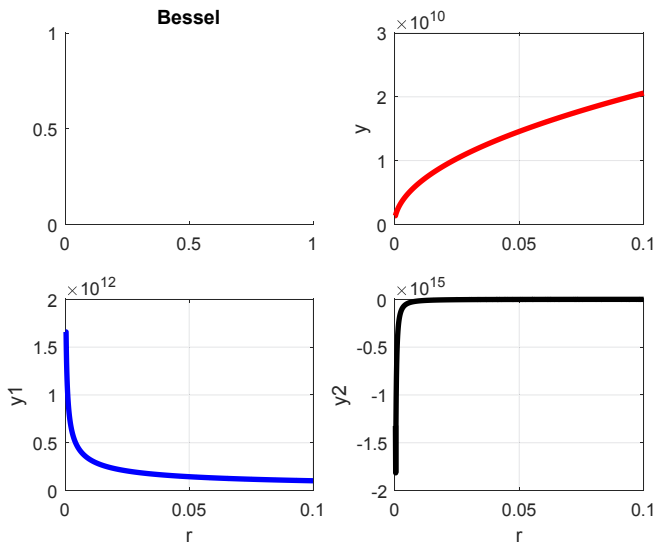


Рис. 1.

## Приложение 4.

Рассмотрим уравнение (19) из приложения 1:

$$\frac{1}{\chi r} \left( \frac{h_z(r)}{r} \alpha - j_r(r) \right) + \frac{1}{\chi} \left( \frac{h_z(r)}{r} \alpha - \frac{h_z(r)}{r^2} \alpha - \frac{\partial}{\partial r} j_r(r) \right) - \frac{\alpha}{\chi r} (j_\varphi(r) + h_z(r)) - j_z(r) = 0. \quad (1)$$

Преобразуем его:

$$\left( \frac{h_z(r)}{r} \alpha - j_r(r) \right) + r \left( \frac{h_z(r)}{r} \alpha - \frac{h_z(r)}{r^2} \alpha - \frac{\partial}{\partial r} j_r(r) \right) - \alpha (j_\varphi(r) + h_z(r)) - \chi r j_z(r) = 0$$

или

$$-2 \alpha h_z(r) + \vartheta_z(r) = 0 \quad (2)$$

или

$$h_z(r) = \frac{1}{2 \alpha} \vartheta_z(r), \quad (2)$$

где

$$\vartheta_z(r) = -j_r(r) - r \cdot \frac{d}{dr} j_r(r) - \alpha \cdot j_\varphi(r) - \chi \cdot r \cdot j_z(r). \quad (3)$$

Следовательно,

$$h_z(r) = \frac{1}{2 \alpha} \int_{r=R}^0 \vartheta_z(r) dr. \quad (4)$$

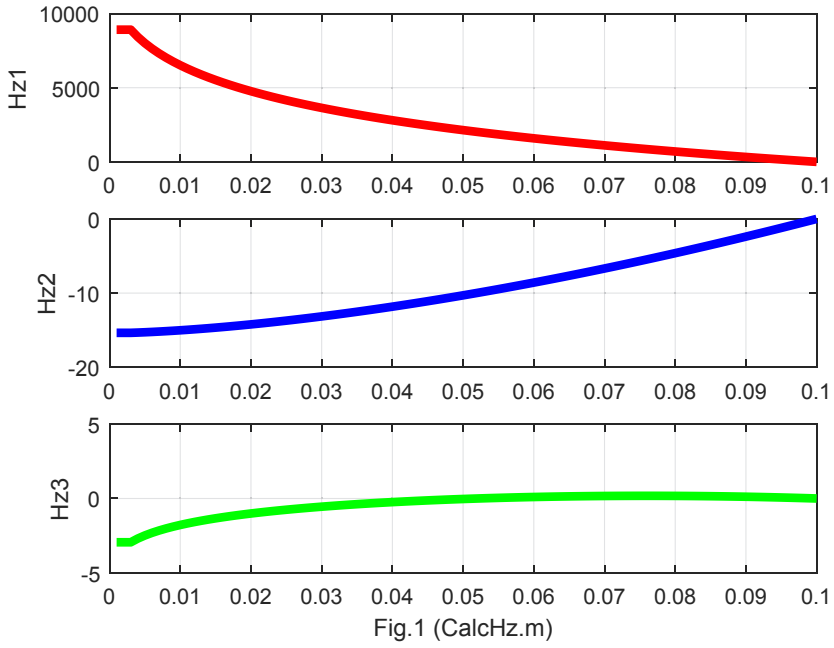
Таким образом,  $h_z(r)$  определяется по (11), где  $\Psi(r, j_\varphi(r))$  определяется по (10) в зависимости от функции  $j_\varphi(r)$ , которая, в свою очередь, определяется по формуле (21) из приложения 1.

На рис. 1 показан результат вычисления по формуле (11):

Hz1 при  $A = -2 \cdot 10^{-5}$ ,  $R = 0.1$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\chi = 0.64$ ,

Hz2 при  $A = -2 \cdot 10^{-5}$ ,  $R = 0.1$ ,  $\alpha = -1.6$ ,  $\chi = -0.4$ ,

Hz3 при  $A = 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $R = 0.1$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $\chi = 1.4$ .



# Глава 5а. Двигатель Мильроя

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Математическая модель \ 2
- 3. Потоки электромагнитной энергии \ 4
- 3а. Вращающий момент \ 5
- 4. Дополнительный эксперимент \ 7
- 5. О законе сохранения импульса \ 7
- Приложение 1. Расчет вращающего момента \ 8
- Фотографии \ 10

### 1. Введение

Известен двигатель Мильроя [67] – в дальнейшем - ДМ. В "youtube" можно посмотреть эксперименты с ДМ [68-73]. Известны попытки теоретического объяснения функционирования ДМ [74-77, 80]. В [80] функционирование этого двигателя объясняется действием непотенциальных поперечных сил Лоренца. В [74] функционирование этого двигателя объясняется взаимодействием магнитного потока, созданного спиралью тока в вале и модулированного переменным магнитным сопротивлением зазора между обоймами подшипника с индуцированными во внутренней обойме подшипника токами. Не обсуждая правомерность этих теорий, следует отметить, что они не доведены до той стадии, когда на их основе можно было бы рассчитать технические параметры ДМ. Но такие расчеты необходимы перед началом массового производства.

На фотографиях в конце главы показаны различные конструкции ДМ. Токопроводящий вал с надетыми на него маховиками может вращаться в двух подшипниках. Через внешние кольца подшипников и этот вал пропускается электрический ток. Вал начинает раскручиваться в любую сторону после первого толчка.

Вместе с исключительной простотой ДМ, он обладает двумя существенными недостатками:

- 1. Малым к.п.д.
- 2. Необходимостью начального разгона дополнительным двигателем (при этом ДМ продолжает крутиться в ту

сторону, куда его толкнули, и увеличивает скорость вращения).

Сразу же отметим, что второй недостаток иногда не имеет значения. Например, ДМ, установленный на велосипеде, мог бы разогнаться велосипедистом.

ДМ изобрел английский физик Р. Мильрой в 1967 г. В.В. Косырев, В.Д. Рябко и Н.Н. Вельман раньше Мильроя, в 1963 предложили двигатель другой конструкции [82]. Их двигатель принципиально отличается от двигателя Мильроя тем, что один из подшипников отсутствует. Токпроводящий вал запрессован во внутреннее кольцо подшипника, расположенного горизонтально. При этом вал висит на подшипнике. Электрическая цепь замыкается через внешнее кольцо подшипника и щетку, касающуюся нижнего торца вала. Авторы видят причину вращения в том, что вал "вращается в результате упругой деформации деталей при нагреве последних протекающим по ним электрическим током"

Наконец, часто функционирование этого двигателя объясняют эффектом Губера [77, 84].

Ниже дается иное объяснение принципа действия этих двигателей. Показывается, что **внутри** проводника с током возникает крутящий момент. Автору представляется, что двигатель Косырева не может быть объяснен иначе.

## 2. Математическая модель

В главе 5 рассматривалось решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током с плотностью  $J_{oz}$ . Плотность этого тока одинакова на всем сечении провода. Уравнения Максвелла в этом случае имеют вид:

$$\operatorname{rot}(J) = 0, \quad (a)$$

$$\operatorname{rot}(H) - J = 0, \quad (b)$$

$$\operatorname{div}(J) = 0, \quad (c)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (d)$$

а плотность тока  $J_{oz}$  не включена в уравнения (a, d), потому что все производные этого тока равны нулю.

Было показано, что полное решение уравнений Максвелла в этом случае состоит из двух частей:

- 1) известного уравнения вида

$$H_{o\varphi} = J_{oz} r, \quad (1)$$



- 2) полученных в главе 5 уравнений вида (5.2.10-5.2.17) и (5.2.25-5.2.30); эти уравнения связывают магнитные напряженности и плотности токов с известными константами ( $\alpha$ ,  $\chi$ ) и радиусом провода  $R$ .

Токи и напряженности, определяемые этими уравнениями, формально не зависят от заданного тока  $J_{oz}$ . Но они определяют поток энергии, передаваемый по проводу, т.е. ту мощность, которая выделяется током в нагрузке.

Ниже мы рассмотрим случай, когда существует еще постоянный ток, направленный по окружности, кольцевой ток. Например, обмотку соленоида можно представить как сплошной кольцевой цилиндр, по окружности которого течет постоянный ток. Будем обозначать плотность этого заданного тока как  $J_{o\phi}$ . Так же, как и в случае заданного тока  $J_{oz}$ , полное решение уравнений Максвелла (а-д) в этом случае состоит из двух частей:

- 1) известного уравнения вида

$$-\frac{\partial H_{z0}}{\partial r} = J_{\phi 0}, \quad (17)$$

- 2) уравнений (5.2.10-5.2.17) и (5.2.25-5.2.30).

Рассмотрим вопрос об источнике тока  $J_{o\phi}$ . В отсутствии вращения стержня вдоль него протекает постоянный ток с плотностью  $J_{oz}$ . Свободные электроны этого тока движутся с некоторой скоростью вдоль стержня. При вращении стержня свободные электроны этого тока приобретают еще и окружную скорость. При этом возникает т.н. конвекционный ток, который является током с плотностью  $J_{o\phi}$ . Эйхенвальд показал [86], что конвекционный ток также создает магнитную напряженность. Следовательно, ток с плотностью  $J_{o\phi}$  создает магнитную напряженность (17).

Итак, вдоль провода в токе  $J_o$  движутся заряды с плотностью  $q$  и со скоростью  $v$  (*скорость электронов в проводе*), причем

$$J_o = qv. \quad (18)$$

Если стержень вращается с угловой скоростью  $\omega$ , то

$$J_{\phi 0} = q\omega \cdot r \quad (19)$$

или, с учетом (18),

$$J_{\omega}(r) = J_o \omega \cdot r / v. \quad (20)$$

Таким образом, во вращающемся стержне двигателя Мильроя вместе с осевым током  $J_o$  по окружности провода также течет постоянный конвекционный ток с плотностью (20).

Из (17, 20) находим:

$$H_{zo} = \frac{J_o \omega \cdot r^2}{2v}. \quad (21)$$

Далее будет показано, что из решения уравнений (1-16) следует существование вращающего момента  $M$  в стержне. Этот вращающий момент увеличивает скорость вращения, благодаря чему увеличивается конвекционный ток  $J_{o\phi}$ . Равновесие наступает при равенстве указанного момента и тормозного момента на валу двигателя (при данном токе  $J_{oz}$ ). Это явление аналогично тому, что токи, текущие вдоль провода, под действием силы Ампера смещают провод в целом (в обычных электромоторах).

Наконец, можно представить **конструкцию, где в стержне создается дополнительная радиальная магнитная напряженность  $H_{or}$** .

Можно также представить **конструкцию, где в стержне создается дополнительная осевая магнитная напряженность  $H_{2oz}$** .

### **3. Потоки электромагнитной энергии**

В разделе 3 главы 5 показано, что плотность потока электромагнитной энергии и плотность магнитной силы Лоренца в проводе постоянного тока связаны следующими соотношениями:

$$S = E \times H, \quad (1)$$

$$S = \rho J \times H = \frac{\rho}{\mu} J \times B, \quad (3)$$

$$F = J \times B, \quad (4)$$

$$F = \mu S / \rho, \quad (5)$$

где  $\rho$ ,  $\mu$  - электросопротивление и магнитная проницаемость. Следовательно, в проводе с постоянным током плотность магнитной силы Лоренца пропорциональна вектору Пойнтинга.

В цилиндрических координатах плотности этих потоков энергии по координатам выражаются формулой вида – см. (5.3.12):

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho(J \times H) = \rho \begin{bmatrix} J_\varphi H_z - (J_z + J_o)(H_\varphi + H_{o\varphi}) \\ J_z H_r - J_r H_z + J_o H_r \\ J_r H_\varphi - J_\varphi H_r + J_r H_{o\varphi} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Для двигателя Мильроя эта формула дополняется из-за появления величин  $H_{zo}$ ,  $H_{ro}$ ,  $J_{\varphi o}$ ,  $H_{2zo}$  и принимает вид:

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} (J_\varphi + J_{\varphi o})(H_z + H_{zo} + H_{2zo}) - (J_z + J_o)(H_\varphi + H_{o\varphi}) \\ (J_z + J_o)(H_r + H_{ro}) - J_r(H_z + H_{zo} + H_{2zo}) \\ J_r(H_\varphi + H_{o\varphi}) - (J_\varphi + J_{\varphi o})(H_r + H_{ro}) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

В соответствии с (5) находим силы Лоренца, действующие на единицу объема,

$$F = \begin{bmatrix} F_r \\ F_\varphi \\ F_z \end{bmatrix} = \frac{\mu}{\rho} \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix}. \quad (8)$$

### 3а. Вращающий момент

В (3.8)  $F_\varphi$  - плотность вращающей силы, действующей на вал в единице объема. Тогда плотность вращающего момента, действующего на вал в слое с радиусом  $r$ , равна

$$M(r) = r \cdot F_\varphi. \quad (9)$$

Из (7, 8) находим:

$$S_\varphi = \rho[(J_z + J_o)H_r - J_r(H_z + H_{zo} + H_{2zo})], \quad (11)$$

$$F_\varphi = \frac{\mu}{\rho} S_\varphi = \mu \begin{bmatrix} (J_z + J_o)(H_r + H_{ro}) - \\ - J_r(H_z + H_{zo} + H_{2zo}) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Из (9, 12) находим:

$$M(r) = r \cdot F_\varphi = \mu \cdot r \begin{bmatrix} (J_z + J_o)(H_r + H_{ro}) - \\ - J_r(H_z + H_{zo} + H_{2zo}) \end{bmatrix}$$

или, с учетом (2.21),

$$M(r) = \mu \cdot r \begin{bmatrix} (J_z + J_o)(H_r + H_{ro}) - \\ - J_r \left( H_z + H_{2zo} + \frac{J_o \omega \cdot r^2}{2\nu} \right) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

В главе 5 показано, что  $H_z \equiv 0$ . Тогда

$$M(r) = \mu \cdot r \left[ \begin{array}{l} (J_z + J_o)(H_r + H_{ro}) - \\ - J_r \left( H_{2zo} + \frac{J_o \omega \cdot r^2}{2\nu} \right) \end{array} \right]. \quad (14)$$

Формула (14) определяет плотность вращающего момента, действующего на вал в слое с радиусом  $r$ . Напомним из главы 5, что

$$J_{r.} = -j_r(r) \cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (15)$$

$$J_{z.} = j_z(r) \sin(\alpha\varphi + \chi z), \quad (16)$$

$$H_{r.} = h_r(r) \cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (17)$$

где

$$j_\varphi(r) = F_\alpha(r), \quad (18)$$

$$j_r(r) = (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)) / \alpha, \quad (19)$$

$$j_z(r) = -\frac{\chi}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r), \quad (20)$$

$$h_r(r) = j_\varphi(r) / \chi, \quad (21)$$

Здесь константы  $\chi$ ,  $\alpha$  и функция Бесселя  $F_\alpha(r)$  определены в главе 5. Объединяя (14-17), получаем:

$$M(r) = \mu \cdot r \left[ \begin{array}{l} \left[ (j_z(r) \sin(\alpha\varphi + \chi z) + J_o) \cdot \right. \\ \left. \cdot (h_r(r) \cos(\alpha\varphi + \chi z) + H_{ro}) \right] + \\ - H_{2zo} j_r(r) \cos(\alpha\varphi + \chi z) + \\ + \frac{J_o \omega \cdot r^2 j_r(r)}{2\nu} \cos(\alpha\varphi + \chi z) \end{array} \right] \quad (22)$$

Полный вращающий момент вычисляется как интеграл вида

$$\overline{M} = \iiint_{r,\varphi,z} M(r) dr d\varphi dz. \quad (23)$$

Этот интеграл можно представить суммой интегралов:

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 + \overline{M}_4 + \overline{M}_5 + \overline{M}_6, \quad (24)$$

где слагаемые интегралы определены в приложении 1.

Эти соотношения позволяют выполнить механический расчет вращающего момента в двигателе Мильроя.

В приложении 1 показано, что в обычном двигателе Мильроя величина момента (21) незначительна при  $\omega = 0$ , т.е. отсутствует пусковой момент. Однако при  $H_{ro} \neq 0$  и\или  $H_{2zo} \neq 0$  **существует значительный пусковой момент.**

#### 4. Дополнительный эксперимент

Можно предложить эксперимент, в котором ранее предложенные объяснения причины вращения двигателя Мильроя не приемлемы (на взгляд автора). Необходимо предоставить стержню с током свободно вращаться без подшипников. Это можно осуществить следующим образом – см. рис. 2. Вал с заостренными концами зажимается между двумя угольными щетками так, чтобы он мог крутиться. Угольные щетки нужны для того, чтобы контакты не приваривались при больших токах. В соответствии с тем, что изложено в статье, в такой конструкции вал должен вращаться. Это позволит отказаться от рассмотрения ряда гипотез по объяснению функционирования двигателя Мильроя.

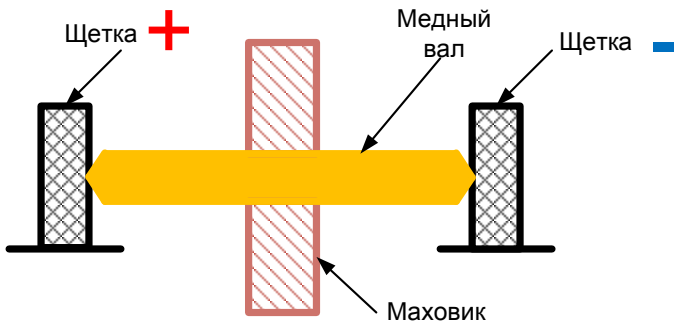


Рис. 2.

#### 5. О законе сохранения импульса

Необходимо обратить внимание на то, что в двигателе Мильроя явным образом нарушается закон сохранения механического импульса. Это объясняется тем, что в стержне присутствует электромагнитный импульс - вместе с потоком электромагнитной энергии. И это еще раз подтверждает, что вращающий момент существует **внутри** провода.

## Приложение 1. Расчет вращающего момента

Преобразуем (3а.22). Тогда получим:

$$M(r) = \mu \cdot r \left[ \begin{aligned} & j_z(r) h_r(r) \sin(\alpha\varphi + \chi z) \cdot \cos(\alpha\varphi + \chi z) + \\ & j_z(r) \sin(\alpha\varphi + \chi z) H_{r0} + J_o H_{r0} + \\ & + \left[ J_o \left( h_r(r) + \frac{\omega \cdot r^2 j_r(r)}{2\nu} \right) - H_{2z0} j_r(r) \right] \cos(\alpha\varphi + \chi z) \end{aligned} \right]. \quad (1)$$

Полный вращающий момент вычисляется как интеграл вида

$$\overline{M} = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot r \left[ \begin{aligned} & j_z(r) h_r(r) \sin(\dots) \cdot \cos(\dots) + \\ & j_z(r) \sin(\dots) H_{r0} + J_o H_{r0} + \\ & + \left[ J_o \left( h_r(r) + \frac{\omega \cdot r^2 j_r(r)}{2\nu} \right) - H_{2z0} j_r(r) \right] \cos(\dots) \end{aligned} \right] dr d\varphi dz. \quad (2)$$

Этот интеграл можно представить суммой интегралов:

$$\overline{M}_1 = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot r [J_o H_{r0}] dr d\varphi dz, \quad (3)$$

$$\overline{M}_2 = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot r [j_z(r) h_r(r) \sin(\dots) \cdot \cos(\dots)] dr d\varphi dz, \quad (4)$$

$$\overline{M}_3 = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot r [j_z(r) \sin(\dots) H_{r0}] dr d\varphi dz, \quad (5)$$

$$\overline{M}_4 = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot J_o r h_r(r) \cos(\dots) dr d\varphi dz, \quad (6)$$

$$\overline{M}_5 = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot J_o r \left( \frac{\omega \cdot r^2 j_r(r)}{2\nu} \right) \cos(\dots) dr d\varphi dz, \quad (7)$$

$$\overline{M}_6 = - \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot r H_{2z0} j_r(r) \cos(\dots) dr d\varphi dz \quad (8)$$

ИЛИ

$$\overline{M}_1 = \mu \cdot J_o H_{r0} \iiint_{r,\varphi,z} r dr d\varphi dz = \mu \cdot J_o H_{r0} \pi R^2 L, \quad (9)$$

$$\overline{M}_2 = \mu \cdot \left( \int_r M_{2r}(r) dr \right) M_{S2}, \quad (10)$$

$$\overline{M}_3 = \mu \cdot H_{r0} \left( \int_r M_{3r}(r) dr \right) M_{S3}, \quad (11)$$

$$\overline{M}_4 = \mu \cdot J_o \left( \int_r M_{4r}(r) dr \right) M_{S4}, \quad (12)$$

$$\overline{M}_5 = \frac{\mu \cdot \omega}{2\nu} J_o \left( \int_r M_{5r}(r) dr \right) M_{S4}, \quad (13)$$

$$\overline{M}_6 = -\mu \cdot H_{2z0} \left( \int_r M_{6r}(r) dr \right) M_{S4}. \quad (14)$$

где

$$M_{S2} = \left( \iint_{\varphi, z} [\sin(\dots) \cdot \cos(\dots)] d\varphi dz \right), \quad (15)$$

$$M_{S3}(r) = \left( \iint_{\varphi, z} \sin(\dots) d\varphi dz \right), \quad (16)$$

$$M_{S4} = \left( \iint_{\varphi, z} \cos(\dots) d\varphi dz \right), \quad (17)$$

$$M_{2r}(r) = r \cdot j_z(r) h_r(r), \quad (18)$$

$$M_{3r}(r) = r \cdot j_z(r), \quad (19)$$

$$M_{4r}(r) = r \cdot h_r(r), \quad (20)$$

$$M_{5r}(r) = r^3 j_r(r), \quad (21)$$

$$M_{6r}(r) = r \cdot j_r(r). \quad (22)$$

В интегралы (10-14) входят функции  $h_r(r)$ ,  $j_r(r)$ ,  $j_z(r)$ ,  $f(r) = [j_z(r) h_r(r)]$ , (18-22).

Важно отметить следующее. В обычном двигателе Мильроя отсутствуют напряженности  $H_{r0}$ ,  $H_{2z0}$ . При этом слагаемые (9, 11, 14) равны нулю, т.е. в обычном двигателе Мильроя вращающий момент

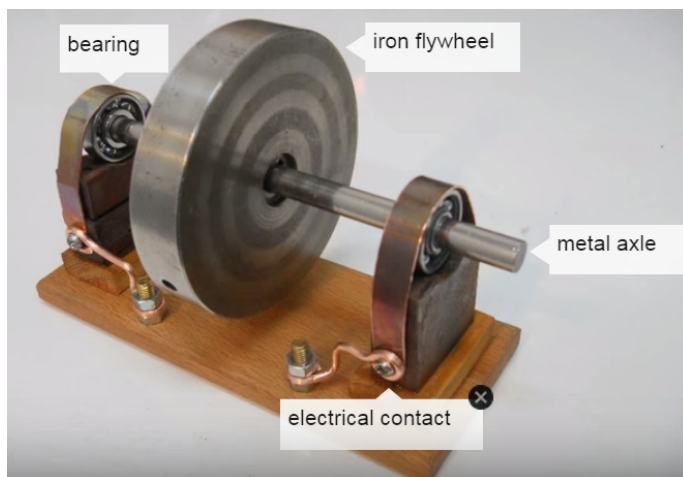
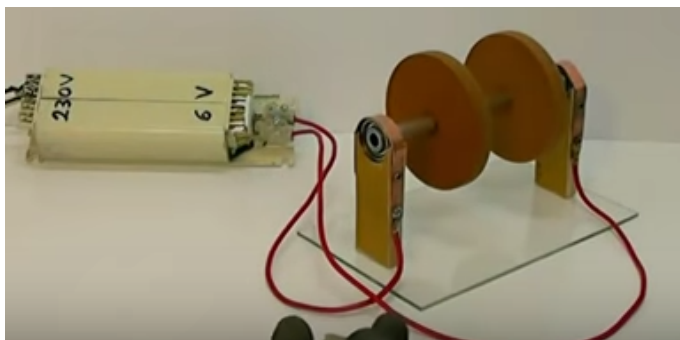
$$\overline{M} = \overline{M}_2 + \overline{M}_4 + \overline{M}_5. \quad (23)$$

При  $\omega = 0$  остается только вращающий момент

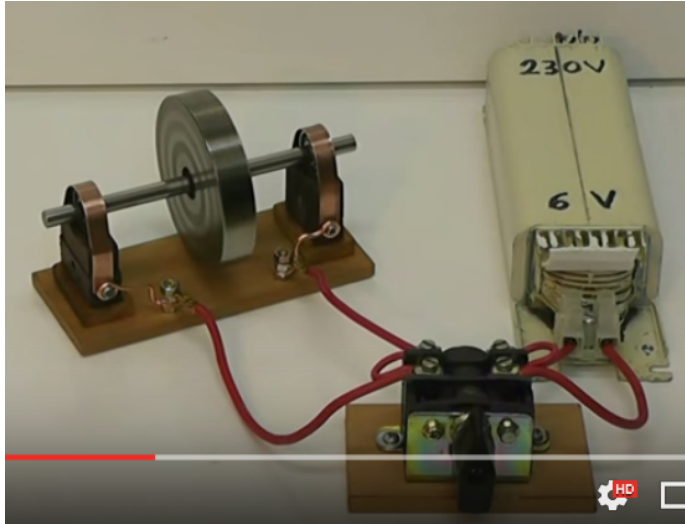
$$\overline{M} = \overline{M}_2 + \overline{M}_4, \quad (24)$$

Этот момент является пусковым в обычном двигателе Мильроя и величина его незначительна. Однако при  $H_{ro} \neq 0$  и\или  $H_{2zo} \neq 0$  вращающий момент существует даже при  $\omega = 0$ . Следовательно, при  $H_{ro} \neq 0$  и\или  $H_{2zo} \neq 0$  существует значительный пусковой момент.

## Фотографии







## Глава 5с. Магнетосопротивление

---

Известен магниторезистивный эффект, заключающийся в том, что электрическое сопротивление материала зависит от магнитной индукции магнитного поля, в котором находится материал, т.н. магнетосопротивление [114]. Ниже мы рассмотрим проводник с постоянным током в магнитном поле и покажем, что существование магнетосопротивления непосредственно следует из решения уравнений Максвелла.

В главе 5 рассматривалось решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током. Там показано, что в проводе с постоянным током плотность магнитной силы Лоренца, действующей вдоль оси провода, пропорциональна вектору Пойнтинга – плотности потока энергии. Эта сила движет электрические заряды. Именно эта сила преодолевает сопротивление материала провода движению зарядов.

В главе 5а приведен расчет этой силы. Показано, что она зависит также от напряженности внешнего магнитного поля. Следовательно, воздействие внешнего магнитного поля проявляется как изменение сопротивления провода.

# Глава 5d. Решение уравнений Максвелла для провода с ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ.

---

## Оглавление

1. Введение \ 1
2. Провод с постоянным током \ 2
3. Провод в продольном магнитном поле \ 3
4. Провод в круговом магнитном поле \ 4
5. Провод в поперечном магнитном поле \ 5
6. Обобщение \

## 1. Введение

Здесь мы рассмотрим провод, находящийся в постоянном магнитном поле.

## 2. Провод с постоянным током

В главе 5 рассматриваются уравнения Максвелла для провода, по которому протекает постоянный ток с плотностью  $J_o$ . Полученное там решение может быть без изменения использовано в данном случае. Оно имеет следующий вид:

$$J_r = j_r(r) \cdot \cos, \quad (2)$$

$$J_\phi = -j_\phi(r) \cdot \sin, \quad (3)$$

$$J_z = j_z(r) \cdot \sin, \quad (4)$$

$$H_r = -h_r(r) \cdot \cos, \quad (5)$$

$$H_\phi = -h_\phi(r) \cdot \sin, \quad (6)$$

$$H_z = h_z(r) \cdot \sin, \quad (7)$$

$$\cos = -\cos(\alpha\phi + \chi z), \quad (8)$$

$$\sin = \sin(\alpha\phi + \chi z), \quad (9)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$  – некоторые константы,  $j(r)$ ,  $h(r)$  – некоторые функции координаты  $r$ , а именно

$$j_\varphi(r) = F_\alpha(r), \quad (10)$$

$$j_r(r) = (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)) / \alpha, \quad (11)$$

$$j_z(r) = -\frac{\chi}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r), \quad (12)$$

$$h_z(r) \equiv 0, \quad (13)$$

$$h_\varphi(r) = j_r(r) / \chi, \quad (14)$$

$$h_r(r) = j_\varphi(r) / \chi, \quad (15)$$

причем функция  $F_\alpha(r)$  является решением модифицированного уравнения Бесселя. При малых  $r$  эта функция принимает вид

$$y = Ax^\beta, \quad (16)$$

где  $A$  – константа, и

$$\beta = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{3 + 4\chi^2}), \quad \beta < 0. \quad (17)$$

Для расчета по этим уравнениям должны быть известны величины  $A, \alpha, \chi$ . Полученное решение определяет величину входящего в провод потока энергии  $S$ , т.е. мощности  $P$ , входящей в провод. Таким образом, величины  $A, \alpha, \chi$  определяют величину мощности  $P$ .

Величина  $J_0$  определяется величиной мощности  $P$  и сопротивлением нагрузки. Существование ненулевой плотности тока  $J_0$  обеспечивает существование ненулевого решения системы уравнений Максвелла, что следует из уравнения

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (18)$$

Действительно, если существует  $J_z$ , то должны существовать и магнитные напряженности  $H_r$  и/или  $H_\varphi$ . При этом система уравнений Максвелла должна иметь ненулевое решение. Однако постоянная величина  $J_0$  формально не входит в решение этих уравнений. Это объясняется тем, что  $J_0$  создает напряженность  $H_{\varphi 0} = J_0 r$  и обе эти величины –  $H_{\varphi 0}, J_0$  могут быть исключены из уравнения (18).

В главе 5 показано, что плотность этого потока энергии определяются (в системе СИ) формулой вида:

$$S(r) = \rho(j_r(r)h_\varphi(r) - j_\varphi(r)h_r(r)), \quad (19)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление провода. Итак, решение уравнений Максвелла в виде функций  $j(r), h(r)$  определяет плотность потока энергии  $S(r)$ . Очевидно, что существует и обратная зависимость:  $S(r)$  определяет функции  $j(r), h(r)$ . Эта обратная задача математически намного сложнее рассмотренного решения, но нам для дальнейшего важно подчеркнуть, что Природа решает именно эту обратную задачу.

### 3. Провод в продольном магнитном поле.

В разделе 2 предполагалось, что в проводе присутствует постоянный ток с плотностью  $J_0$ . Этот ток создается **потоком энергии, входящей в провод с торца**. Предположим теперь, что существует **продольная** магнитная напряженность  $H_z$ . Существование ненулевой и **неравномерно распределенной по радиусу** продольной магнитной напряженности  $H_z$  обеспечивает существование ненулевого решения системы уравнений Максвелла, что следует из уравнения

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\phi, \quad (1)$$

Действительно, если существует  $\frac{\partial H_z}{\partial r}$ , (поскольку существует магнитная напряженность  $H_z$ , неравномерно распределенная по радиусу), то должны существовать и магнитная напряженность  $H_r$  и плотность тока  $J_\phi$ . При этом система уравнений Максвелла должна иметь ненулевое решение. Оно, по-прежнему, имеет вид, приведенный в разделе 2.

Отсюда следует, что в проводе, который находится в неоднородном продольном магнитном поле, существует решение уравнений Максвелла в том виде, который приведен в разделе 2. Следовательно, в этом проводе существует и поток энергии, плотность которого определяется по (2.19) Источником этого потока энергии, очевидно, является источник магнитной напряженности  $H_z$ .

Этот поток энергии генерирует в проводе продольный постоянный ток. Таким образом, здесь происходит преобразование энергии продольного постоянного магнитного поля в проводе в электрическую энергию, переносимую постоянным током вдоль провода.

**Пример 1.**

Рассмотрим соленоид, металлический стержень, расположенный вдоль оси соленоида и замкнутый снаружи соленоида. Ток в обмотке соленоида создает магнитную напряженность в стержне. Однако магнитное поле внутри соленоида является однородным. В соответствии с вышесказанным в стержне ток НЕ появляется.

**4. Провод в круговом магнитном поле.**

Теперь предположим, что существует **круговая** магнитная напряженность  $H_\phi$ , **неравномерно распределенная по радиусу**. Существование такой напряженности обеспечивает существование ненулевого решения системы уравнений Максвелла, что следует из уравнения

$$\frac{H_\phi}{r} + \frac{\partial H_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = J_z, \quad (1)$$

Действительно, если существует  $\frac{\partial H_\phi}{\partial r}$  (поскольку существует магнитная напряженность  $H_\phi$ , неравномерно распределенная по радиусу), то должны существовать магнитная напряженность  $H_r$  и/или плотность тока  $J_z$ . При этом система уравнений Максвелла должна иметь ненулевое решение.

Аналогично предыдущему отсюда следует, что в проводе, который находится в неоднородном круговом магнитном поле, существует решение уравнений Максвелла в том виде, который приведен в разделе 2. Следовательно, в этом проводе существует и поток энергии, плотность которого определяется по (2.19). Источником этого потока энергии, очевидно, является источник магнитной напряженности  $H_\phi$ .

Этот поток энергии генерирует в проводе продольный постоянный ток. Таким образом, здесь происходит преобразование энергии кольцевого постоянного магнитного поля в проводе в электрическую энергию, переносимую постоянным током вдоль провода.

**Пример 1.**

На рис. 1 показан трубчатый провод 1, внутри которого проходит провод 2, изолированный от провода 1 диэлектриком 3. Если по проводу 2 идет ток  $J_2$ , то в теле провода 1 возникает

кольцевое магнитная напряженность  $H_\varphi$ . В соответствии со сказанным выше круговое кольцевое магнитное поле в проводе 1 создает в этом проводе постоянный ток  $J_1$ . Эффект должен проявиться сильнее, если провод 1 будет ферромагнитным.

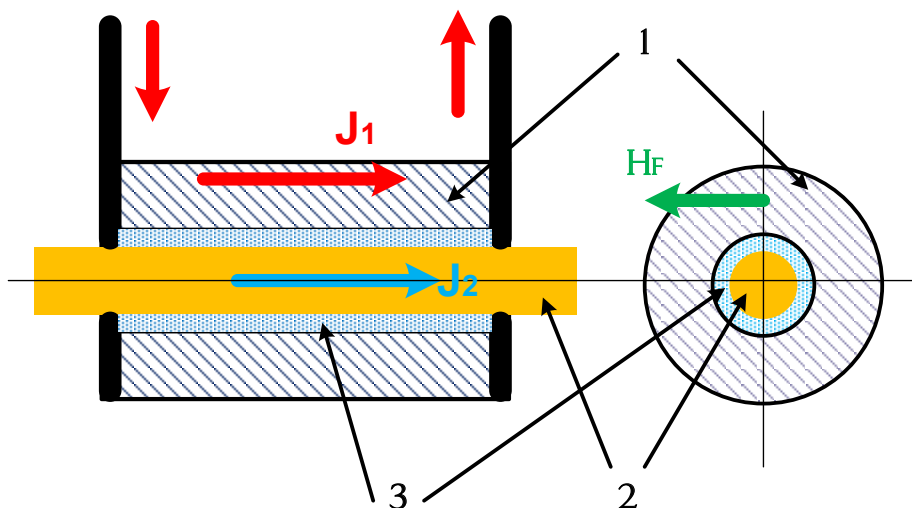


Рис. 1.

## 5. Провод в поперечном магнитном поле.

Теперь предположим, что существует **поперечная** магнитная напряженность  $H_r$ . Существование такой напряженности обеспечивает существование ненулевого решения системы уравнений Максвелла, что следует из уравнения

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z,$$

Действительно, если существует  $H_r$ , то должны существовать магнитная напряженность  $H_\varphi$  и/или плотность тока  $J_z$ . При этом система уравнений Максвелла должна иметь ненулевое решение.

Аналогично предыдущему отсюда следует, что в проводе, который находится в круговом магнитном поле, существует решение уравнений Максвелла в том виде, который приведен в разделе 2. Следовательно, в этом проводе существует и поток энергии, плотность которого определяется по (2.19). Источником этого потока энергии, очевидно, является источник магнитной напряженности  $H_r$ .

Этот поток энергии генерирует в проводе продольный постоянный ток. Таким образом, здесь происходит преобразование энергии радиального постоянного магнитного поля в проводе в электрическую энергию, переносимую постоянным током вдоль провода.

### Пример 1.

На рис. 1 показан кольцевой провод 1, находящийся в зазоре двух постоянных магнитов 2. Магнитная напряженность в этом зазоре является напряженностью  $H_r$ , которая пронизывает провод 1 вдоль радиуса. В соответствии со сказанным выше радиальное магнитное поле в проводе 1 создает в этом проводе постоянный ток  $J$ . Эффект должен проявиться сильнее, если провод 1 будет ферромагнитным.

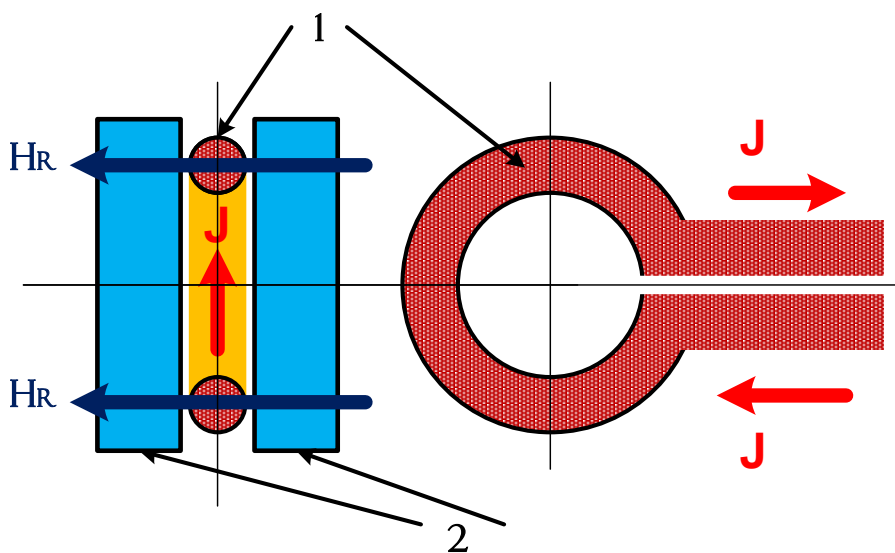


Рис. 1.

### Пример 2.

Магнитная напряженность  $H_r$  может быть создана кольцевым постоянным магнитом в проводе – обмотке этого постоянного магнита - см. рис. 1 и рис. 2.



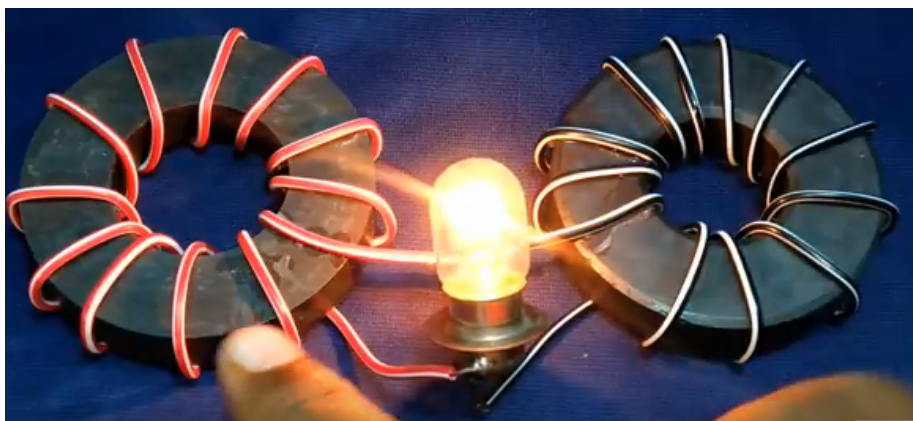


Рис. 1 из <https://www.youtube.com/watch?v=sPH1WNXMlow>.



Рис. 2 из <http://www.inventedelectricity.com/free-energy-generator-magnet-coil-100-real-new-technology-new-idea-project/>

## 6. Обобщение

Вышеизложенное показывает, что

1. в провод, находящийся в магнитном поле, из источника магнитного поля передается поток электромагнитной энергии,
2. в магнитном поле вместе с магнитным потоком циркулирует поток электромагнитной энергии – см. главу 5е.

3. поток электромагнитной энергии создает электродвижущую силу, перемещающую заряды в проводе [19],
4. при этом в проводе возникает продольный постоянный ток.

Эксперименты, показанные в разделе 5, часто рассматриваются как генераторы неограниченной энергии, хранящейся в постоянных магнитах. Однако на самом деле они демонстрируют прямо противоположное – ограниченность энергии постоянного магнита: лампочки постепенно гаснут.

# Глава 5е. Решение уравнений Максвелла для постоянного магнита. Восстановление энергии постоянного магнита.

---

## Оглавление

1. Постоянный токопроводящий магнит \ 1
2. Стационарный поток электромагнитной энергии \ 2

### 1. Постоянный токопроводящий магнит

В главе 5д показано, что в проводе, который находится в продольном магнитном поле, существует электромагнитное поле и потоки электромагнитной энергии.

Рассмотрим постоянный токопроводящий магнит. Очевидно, его можно отождествить с проводом в продольном магнитном поле. Следовательно, в таком магните есть продольный поток электромагнитной энергии. Таким образом, в постоянном магните кроме магнитного потока существует электромагнитный поток.

Этот поток замыкается по воздуху и частично рассеивается. Рассеивание должно было бы привести к потере энергии и размагничиванию постоянного магнита. Почему же он сохраняет свою энергию сколь угодно долго?

Для ответа на этот вопрос вспомним, что поток электромагнитной энергии – это электромагнитная волна, а стационарный поток электромагнитной энергии – это стоячая электромагнитная волна. Следовательно, внутри и вокруг постоянного магнита существует стоячая электромагнитная волна. В [124] показано, что стоячая электромагнитная волна охлаждает воздух и тем самым привлекает в свою область тепловой поток, который увеличивает энергию этой волны. Тем самым поток электромагнитной энергии постоянно восполняется тепловым потоком.

Энергия теплового потока может превышать потери энергии за счет рассеивания, но энергия постоянного магнита не может превышать энергии насыщенного состояния. Энергия теплового

потока при пониженной температуре может быть меньше потерь энергии за счет рассеивания и тогда магнит размагничивается. Последнее утверждение соответствует реальности.

Что касается основного предположения о влиянии теплового потока на сохранение энергии постоянного магнита, то его можно проверить простым (но недоступным для автора) экспериментом: поместим постоянный магнит с внутренним обогревателем в вакуумную камеру и убедимся, что он размагнитится.

## 2. Стационарный поток электромагнитной энергии

Если магнитную цепь постоянного магнита замкнуть ферритовой перемычкой, то в этой цепи будет циркулировать магнитный поток и электромагнитный поток. При этом применять термин “поток” к стационарному магнитному полю можно лишь условно, ибо у магнитного потока нет скорости перемещения.

Существование стационарного потока не противоречит существующим физическим представлениям [3]. Существование такого потока в статической системе рассматривает Фейнман в [13]. Он приводит пример потока энергии в системе, содержащей только электрический заряд и постоянный магнит, покоящиеся рядом.

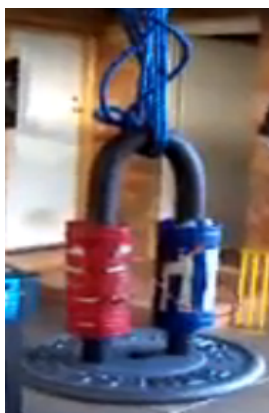


Рис. 2.



Рис. 3.

Существуют и другие эксперименты, демонстрирующие тот же эффект [38]. На рис. 2 показан электромагнит, сохраняющий силу притяжения после отключения тока. Предполагают, что такими электромагнитами пользовался Эд Леедскалнин при строительстве знаменитого Кораллового замка – см. рис. 3 [38]. В таких

конструкциях в момент отключения ток электромагнитная энергия имеет некоторое значение. Эта энергия может рассеяться путем излучения и тепловых потерь. Однако, если эти факторы не существенны (по крайней мере, в начальный период) электромагнитная энергия должна сохраняться. При наличии электромагнитных колебаний должен возникнуть и распространяться поток электромагнитной энергии ВНУТРИ конструкции. Прерывание этого потока может быть достигнуто разрушением конструкции. При этом в силу закона сохранения энергии должна быть совершена работа, эквивалентная той электромагнитной энергии, которая исчезает при разрушении конструкции. Это означает, что "разрушителю" нужно преодолеть некоторую силу. Именно это и демонстрируется в указанных экспериментах.

В [39] рассматриваются математические модели таких конструкций, построенные на основе уравнений Максвелла. Выявляются условия, при соблюдении которых поток электромагнитной энергии сохраняется сколь угодно долго.

# Глава 6. Излучение и передача энергии по одному проводу

## Оглавление

1. Излучение провода \ 1
2. Однопроводная передача энергии \ 3
3. Обсуждение экспериментов \ 6

### 1. Излучение провода

Рассмотрим снова (как в главе 2) низкоомный провод переменного тока. Несмотря на отсутствие тепловых потерь, в нем есть потери на излучение. Излучает боковая поверхность провода. Вектор плотности потока энергии излучения направлен по радиусу провода и имеет величину  $S_r$  - см. (2.4.4-2.4.6) в главе 2. Итак,

$$\overline{S_r} = \eta \iint_{r,\varphi} [s_r \cdot si^2] dr \cdot d\varphi, \quad (1)$$

где

$$s_r = (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \quad (2)$$

или, с учетом формул, приведенных в табл. 1 главы 2,

$$s_r = -e_z(R)h_\varphi(R) = -\frac{2\chi R}{\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi^2(R) = -\frac{2A^2\chi R}{\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} R^{2\alpha-2}, \quad (3)$$

где  $R$  – радиус провода. Будем учитывать еще формулу (см. (32) в приложении 1 главы 2)

$$\chi = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \text{ или } \chi = \text{sign}(\chi) \cdot \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}, \text{ где } \text{sign}(\chi) = \pm 1. \quad (4)$$

Отсюда получаем:

$$s_r = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{2A^2\omega\varepsilon}{\alpha c} R^{2\alpha-1}, \quad (5)$$

Из (1, 5) получаем:

$$\overline{S_r} = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{2A^2\omega\varepsilon}{\alpha c} R^{2\alpha-1} \eta \int_\varphi si^2 d\varphi = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{2A^2\omega\varepsilon}{\alpha c} R^{2\alpha-1} \eta \pi.$$

Учитывая еще (1.4.2), окончательно получаем:

$$\overline{S}_r = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{A^2 \omega \varepsilon}{2\alpha} R^{2\alpha-1}. \quad (6)$$

Очевидно, эта величина должна быть положительной, поскольку излучение существует. Кстати говоря, этот факт служит опровержением известной теории о том, что поток энергии распространяется вне провода и входит в провод из-вне.

Поскольку величина (6) положительна, то должно выполняться условие

$$-\text{sign}(\chi) \cdot \text{sign}(\alpha) = 1, \quad (7)$$

т.е. знаки величин  $\chi$ ,  $\alpha$  должны быть противоположны. В связи с этим в дальнейшем будем пользоваться формулой вида

$$\overline{S}_r = \frac{A^2 \omega \varepsilon}{2|\alpha|} R^{2\alpha-1}. \quad (8)$$

Эта формула определяет величину потока энергии, излучаемой проводом единичной длины. Сопоставим эту формулу с формулой (2.4.15) плотности потока энергии вдоль провода:

$$\overline{S}_z = \frac{A^2 c \sqrt{\varepsilon/\mu} (1 - \cos(4\alpha\pi))}{8\pi\alpha(2\alpha-1)} R^{2\alpha-1}. \quad (9)$$

Следовательно,

$$\zeta = \frac{\overline{S}_r}{\overline{S}_z} = \frac{4\pi(2\alpha-1)\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c \cdot (1 - \cos(4\alpha\pi))}. \quad (10)$$

Таким образом, провод излучает часть продольного потока энергии, равную

$$\overline{S}_r = \zeta \cdot \overline{S}_z. \quad (11)$$

Пусть в начале провода поток энергии равен  $\overline{S}_{z0}$ . Поток энергии, который излучает провод на длине  $L$ , может быть найден по следующей формуле:

$$\overline{S}_{rL} = \overline{S}_{z0} (1 - \zeta)^L. \quad (12)$$

При этом оставшийся в проводе поток энергии

$$\overline{S}_{zL} = \overline{S}_{z0} - \overline{S}_{rL} = \overline{S}_{z0} (1 - (1 - \zeta)^L). \quad (13)$$

Отсюда можно найти длину провода, на которой сохранился поток

$$\overline{S}_{zL} = \beta \cdot \overline{S}_{z0}. \quad (14)$$

Эта длина определяется из выражения

$$\beta = (1 - (1 - \zeta)^L),$$

т.е.

$$L = \ln(1 - \beta) / \ln(1 - \zeta). \quad (15)$$

**Пример 1.** При  $\alpha = 1.2$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$  имеем:  $\zeta \approx 10\omega/c$ . Если  $\omega = 3 \cdot 10^3$ . Тогда  $\zeta \approx 3 \cdot 10 \cdot 10^3 / 3 \cdot 10^{10} = 10^{-6}$ . Длина провода, в конце которого сохранился 1% первоначального потока,

$$L = \ln(1 - 0.01) / \ln(1 - \zeta) \approx 9950 \text{ см.}$$

## 2. Однопроводная передача энергии

Существует ряд экспериментов, которые, без сомнения, демонстрируют передачу энергии по одному проводу.

1. В [29] анализируется передающая антенна «длинный провод», которая используется в радиолюбительской коротковолновой связи. Автор отмечает, эта антенна имеет *"удовлетворительную круговую диаграмму направленности, дающую возможность устанавливать связь почти во всех направлениях"*, а в направлении оси провода *"достигается значительное усиление, которое увеличивается по мере увеличения длины антенны... С увеличением длины антенны направление основного лепестка диаграммы направленности все больше и больше приближается к оси антенны. Одновременно увеличивается и интенсивность излучения в направлении основного лепестка."* Из того факта, что длинный провод излучает во всех направлениях, и из предыдущего раздела следует, что вдоль провода распространяется поток энергии. Этот поток достигает конца провода, где он переходит в излучение, направленное вдоль оси провода. Важно отметить, что поток энергии существует без внешнего электрического напряжения на концах провода.

2. Известен давний эксперимент С.В. Авраменко по однопроводной передаче электроэнергии – так называемая вилка Авраменко. Она впервые описана в [30], а затем в [31] – см. рис. 1. Сообщалось [30], что в экспериментальную установку входил машинный генератор 2 мощностью до 100 кВт, генерирующий напряжение с частотой 8 кГц, подаваемое на трансформатор Тесла. Один конец вторичной обмотки был свободен. Ко второму концу была подсоединена собственно «вилка Авраменко». Вилка Авраменко представляла собой замкнутый контур, содержащий два последовательно соединенных диода 3 и 4, у которых общая точка подсоединялась к проводу 1, и нагрузку, параллельно которой был включен конденсатор 5. Нагрузкой (в первом варианте) служили несколько лампочек накаливания – сопротивление 6 или (во втором варианте) разрядник 7. По этой разомкнутой цепи Авраменко смог



передать от генератора к нагрузке электрическую мощность порядка 1300 Вт. Электрические лампочки ярко светились. Ток в проводе имел очень малую величину, а тонкий вольфрамовый провод в линии 1 даже не грелся. Именно это обстоятельство послужило главной причиной трудности объяснения результатов эксперимента Авраменко.

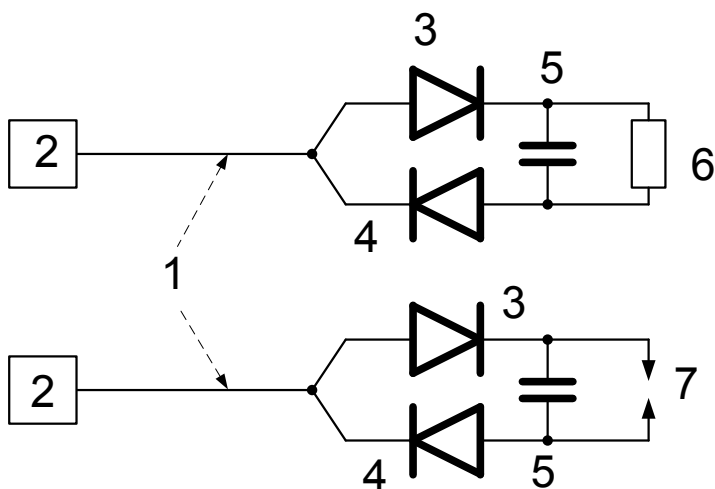


Рис. 1.

Эта конструкция демонстрирует, с одной стороны, весьма привлекательный способ передачи электроэнергии, но, с другой стороны, - кажущееся нарушение законов электротехники. С тех пор многие авторы экспериментировали с этой конструкцией и предлагали теории, объясняющие наблюдаемые феномены – см., например, [32-34]. Однако пока не найдена общепринятая теория. Здесь также поток энергии существует без внешнего электрического напряжения на концах провода.

3. В этот же перечень следует включить лазерный луч. Очевидно, что лазер передает поток энергии в лазерный луч. Эта энергия может быть весьма значительной, передается по лазерному лучу практически без потерь и преобразуется в тепловую энергию на выходе из луча.

4. Известны эксперименты Косинова [35], в которых демонстрировалось свечение перегоревших ламп накаливания. Отмечалось, что "чаще всего лампы накаливания перегорали в двух и более местах, причем перегорала не только спираль, но и токоподводящие проводники внутри лампы. При этом после первого разрыва цепи лампы продолжали некоторое время светить даже более ярко, чем до перегорания.

*Лампа светилась до тех пор, пока не перегорал другой участок цепи. Внутренняя цепь одной лампы в нашем эксперименте перегорела в четырех местах! При этом спираль перегорела в двух местах и, кроме спирали, перегорели оба подводящих электрода внутри лампы. Лампа погасла только после перегорания четвертого участка цепи – электрода, на котором закреплена спираль.*" Здесь также поток энергии существует без внешнего электрического напряжения на концах провода. Важно отметить еще, что лампа после перегорания потребляет еще больше энергии, и этой энергии достаточно для перегорания следующего участка спирали.

5. Известен эксперимент заряда конденсатора через вилку Авраменко [66]. В этом эксперименте используется схема, показанная на рис. 1 сверху, но отсутствует резистор б. Автор эксперимента отмечает, что заряд конденсатора от нуля через вилку Авраменко идёт медленно (3 вольта за 2 часа), но быстрее, чем без этой вилки (заряд без вилки – это заряд конденсатора вместе с емкостью между землей и одной из обкладок конденсатора). Увеличение длины провода до 30м не влияет на результат. Этот эксперимент свидетельствует о том, что постоянный ток заряда идет по одному проводу.

Рассматривая уравнения электромагнитной волны в проводе, невозможно выявить физическую причину существования волны: любая компонента напряженности, тока и плотности потока энергии могут рассматриваться, как внешние воздействия, от которых зависят все остальные. Принято считать, что внешним воздействием является продольная электрическая напряженность. Указанные выше факты свидетельствуют о том, что могут быть исключения – внешним воздействием является поток энергии на входе провода. В [19, 17] показано, что поток энергии может рассматриваться как четвертая электромагнитная индукция.

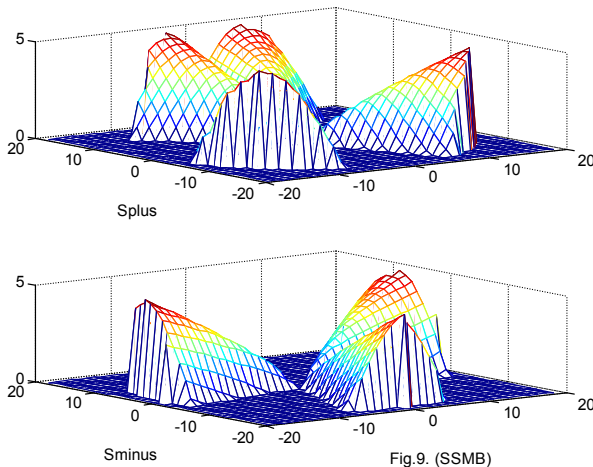
Итак, входной поток энергии распространяется по проводу и может (практически, без потерь - см. выше п.п. 2, 3, 4) достигать другого конца провода. Вместе с потоком энергии может распространяться ток. Но такая взаимосвязь может и отсутствовать (см. выше п.п. 2, 3). Важно отметить, что выходной поток энергии может быть значительным и использоваться в нагрузке. Отсутствие взаимосвязи между потоком энергии и током уже обсуждалось и обосновывалось в разделе 2.5.

### 3. Обсуждение экспериментов

Вернемся снова к антенне «длинный провод». Она излучает во все стороны. Как следует и раздела 1, излучаемый поток энергии  $\overline{S}_r$  является частью продольного потока энергии  $\overline{S}_z$  – см. (1.11). Коэффициент пропорциональности  $\zeta$  между ними, в свою очередь, зависит от частоты  $\omega$  – см. пример 1. Следовательно, при уменьшении частоты  $\omega$  излучаемый поток энергии  $\overline{S}_r$  уменьшается.

В разделе 2.5 рассматривались и сопоставлялись токи и потоки энергии в проводе. Показывалось, что, как правило, в проводе существуют токи и потоки энергии, разделенные на противоположно направленные "струи". Это соответствует существованию потоков активной и реактивной энергий.

Можно предположить, что в "длинном проводе" образуются такие "струи". Если "длинный провод" излучает всю поступающую в него энергию, то превалирует один из этих потоков (поток активной мощности) и генератор расходует энергию на его поддержание. Если "длинный провод" НЕ излучает, то поток энергии проходит в одном направлении и возвращается в другом – генератор НЕ расходует энергию (циркулирует поток реактивной мощности), а ток в проводе отсутствует. Существуют, естественно, и промежуточные случаи, когда "длинный провод" излучает не всю поступающую в него энергию.



Существуют и такие сочетания параметров, при которых суммарные токи противоположно направленных "струй" равны по абсолютной величине и, одновременно с этим, суммарные потоки энергии противоположно направленных "струй" также равны по абсолютной величине. Выше (для удобства читателя) повторен рис. 9 из главы 4. На нем изображены функции противоположно направленных струй:

$S_{plus}$  - струя потока энергии, направленная от источника энергии,

$S_{minus}$  - струя потока энергии, направленная к источнику энергии,

Графики функций для наглядности показаны с обратным знаком. Здесь соблюдаются следующие соотношения между интегралами по площади сечения  $Q$  провода:

$$\int_Q S_{plus} \cdot dQ = - \int_Q S_{minus} \cdot dQ,$$

$$\int_Q J_{plus} \cdot dQ = - \int_Q J_{minus} \cdot dQ.$$

Возможен, как следует из экспериментов (рассмотренных выше) случай, когда токи и потоки замыкаются на обрыве провода – см. рис. 3, где 1 – провод, 2 – прямая "струя", 3 – обратная "струя", 4 – ток замыкания. В этом случае прежде всего возникает вопрос о природе э.д.с., заставляющей ток преодолевать искровой промежуток. В [19, 17] показано, что поток энергии может рассматриваться как четвертая электромагнитная индукция.

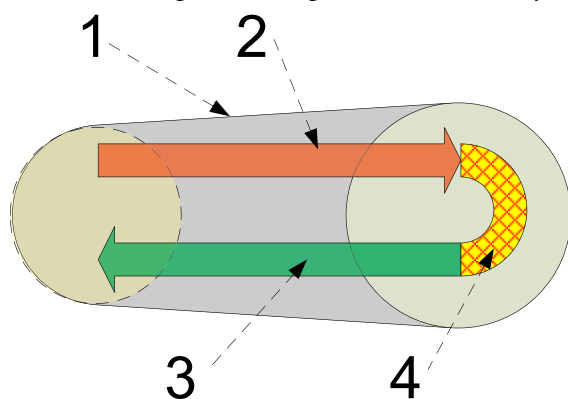


Рис. 3.

Яркие эксперименты Косинова [35] явным образом подтверждают предложенную гипотезу: дуга, возникающая на обрыве спирали, должна иметь начало и конец. Между ними должна быть приложена э.д.с. Когда дуга, расширяясь, достигает следующего участка спирали, этот участок вместе с соединяющей дугой включается в длинную линию и т.д. Косинов наблюдал 8 таких участков

Вилка Авраменко представляет собой контур, содержащий два последовательно соединенных диода и нагрузку – см. рис. 1. Этот контур создает ту дугу, которая изображена на рис. 3. Нагрузкой может быть воздушный промежуток разрядника 7, что эквивалентно дуге в экспериментах Косинова. Нагрузкой может быть резистор 6 - приемник энергии в системе однопроводной передачи энергии. Провод 1 в этой конструкции можно отождествить с "длинным проводом". В данном случае (при низкой частоте 8 кГц) провод 1 не излучает. Следовательно, в нем существуют два противоположно направленных потока энергии и отсутствует ток.

Таким образом, передача энергии по одному проводу не противоречит уравнениям Максвелла, а, напротив, следует из них.

# Глава 7. Решение уравнений Максвелла для конденсатора в цепи постоянного тока. Природа потенциальной энергии конденсатора.

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Потоки энергии \ 3
- 3. Напряженности \ 4
- 4. Кольцевой конденсатор \ 7
- 5. Разряд конденсатора \ 9
- Приложение 1 \ 10
- Приложение 2 \ 10

## 1. Введение

Заряженный конденсатор всегда разряжается через некоторое сопротивление  $R$ , даже, если шунтирующее сопротивление отсутствует. Даже в вакууме конденсатор разряжается в силу того, что он излучает энергию, что тоже можно рассматривать, как существование некоторого сопротивления утечки. При этом вдоль конденсатора распространяется поток электромагнитной энергии, равный мощности тепловых потерь в сопротивлении  $R$ . Следовательно, в конденсаторе должно существовать электромагнитное поле, в котором существует продольная электрическая напряженность и потоки энергии. Далее находится решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее этим условиям.

При существовании потоков энергии в конденсаторе должны существовать магнитные напряженности. При этом уравнения Максвелла для заряженного конденсатора в системе цилиндрических координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  имеют следующий вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = 0. \quad (8)$$

Будем искать неизвестные функции в виде

$$H_r = h_r(r) \cos, \quad (9)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r) \sin, \quad (10)$$

$$H_z = h_z(r) \sin, \quad (11)$$

$$E_r = e_r(r) \sin, \quad (12)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r) \cos, \quad (13)$$

$$E_z = e_z(r) \cos, \quad (14)$$

где  $h(r)$ ,  $e(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ ,

$$\cos = \cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (15)$$

$$\sin = \sin(\alpha\varphi + \chi z), \quad (16)$$

где, в свою очередь,  $\alpha$ ,  $\chi$  - некоторые константы.

## 2. Потоки энергии

Также, как и в главе 1, плотности потоков энергии по координатам определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix} \quad (1)$$

или, с учетом предыдущих формул,

$$S_r = \eta(e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

$$S_\varphi = \eta(e_z h_r \cos^2 \alpha - e_r h_z \sin^2 \alpha) \quad (3)$$

$$S_z = \eta(e_r h_\varphi \sin^2 \alpha - e_\varphi h_r \cos^2 \alpha) \quad (4)$$

Далее будет показано, что эти плотности потоков энергии удовлетворяют закону сохранения энергии, если

$$h_r = k e_r, \quad (5)$$

$$h_\varphi = -k e_\varphi. \quad (6)$$

$$h_z = -k e_z. \quad (7)$$

Из (2, 6, 7) следует, что

$$S_r = \eta(-e_\varphi k e_z + k e_z e_\varphi) \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 0, \quad (8)$$

т.е. отсутствует радиальный поток энергии. Из (3, 5, 7) следует, что

$$S_\varphi = \eta(e_z k e_r \cos^2 \alpha + k e_r e_z \sin^2 \alpha) = \eta k e_r e_z, \quad (9)$$

т.е. плотность потока энергии по окружности на данном радиусе не зависит от времени и других координат.

Из (5-7) следует, что

$$S_z = \eta k e_r h_\varphi (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \eta k e_r h_\varphi, \quad (10)$$

т.е. плотность потока энергии по вертикали при данном радиусе не зависит от времени и других координат. Эти утверждения и были целью предположений (5-7).

Таким образом, в заряженном конденсаторе

1. Отсутствует радиальный поток энергии.
2. Поток энергии по оси конденсатора равен активной мощности, расходуемой при заряде или разряде конденсатора.
3. Присутствует поток энергии по окружности.

Следовательно, в заряженном конденсаторе существует стационарный поток электромагнитной энергии, а та энергия, которая содержится в конденсаторе и которую принято считать электрической потенциальной энергией, является



электромагнитной энергией, хранящейся в конденсаторе в виде стационарного потока. Именно в этом потоке циркулирует электромагнитная энергия, запасенная в конденсаторе. Следовательно, та энергия, которая содержится в конденсаторе и которую принято считать электрической потенциальной энергией, является электромагнитной энергией, хранящейся в конденсаторе в виде стационарного потока.

Известен эксперимент, который является (на наш взгляд), неоспоримым доказательством того, что энергия конденсатора хранится в диэлектрике [122]. Для проведения опытов была изготовлена установка из двух конденсаторов, между которыми перемещается диэлектрик. В результате в одном конденсаторе диэлектрик заряжается энергией от высоковольтного источника, а из другого конденсатора эта энергия извлекается – конденсатор разряжается через разрядник. Автор эксперимента объясняет это явление переносом заряда в диэлектрике. Это и не удивительно: до настоящего времени дебатировался вопрос о том, где же хранится заряд. Подобные, но значительно менее эффектные эксперименты, до сих пор объяснялись тем, что на поверхности диэлектрика после съема металлической обкладки всегда сохраняется пленка влаги, сохраняющая заряд [123]. Но как эта пленка успевает возникнуть и как **вода** успевает зарядиться – этот вопрос не рассматривается.

### 3. Напряженности

Уравнения (1.1-1.16) и (2.5-2.7) принимают вид:

$$\frac{e_r}{r} + \dot{e}_r - \frac{e_\varphi}{r}\alpha - \chi e_z = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{e_z}{r}\alpha + e_\varphi\chi = 0, \quad (2)$$

$$-\dot{e}_z + e_r\chi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi}{r} + \dot{e}_\varphi - \frac{e_r}{r}\alpha = 0, \quad (4)$$

$$k\frac{e_r}{r} + k\dot{e}_r - k\frac{e_\varphi}{r}\alpha - k\chi e_z = 0, \quad (5)$$

$$-k\frac{e_z}{r}\alpha + ke_\varphi\chi = 0, \quad (6)$$

$$k\dot{e}_z - ke_r\chi = 0, \quad (7)$$

$$-k\frac{e_\varphi}{r} - k\dot{e}_\varphi + k\frac{e_r}{r}\alpha = 0 \quad (8)$$

Видно, что уравнения (1-4) и (5-8) совпадают. Поэтому достаточно решить уравнения (1-4). В приложении 1 приведено решение системы уравнений (1-4). Оно имеет следующий вид:

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} - e_z\chi^2 - \frac{e_z}{r^2}\alpha^2 = 0. \quad (9)$$

Это уравнение является модифицированным уравнением Бесселя и его решение  $e_z$  рассмотрено в приложении 2. Там же рассмотрена функция  $\dot{e}_z$ .

При известных  $e_z, \dot{e}_z$  можно найти  $e_r, e_\varphi$  по (2, 3). Складывая (2, 3), находим:

$$-\frac{e_z}{r}\alpha - \dot{e}_z + (e_\varphi + e_r)\chi = 0, \quad (10)$$

Вычитая (3) из (2), находим:

$$-\frac{e_z}{r}\alpha + \dot{e}_z + (e_\varphi - e_r)\chi = 0, \quad (11)$$

Складывая и вычитая (10, 11), находим:

$$e_\varphi = \frac{e_z\alpha}{r\chi}, \quad (12)$$

$$e_r = \frac{\dot{e}_z}{\chi}. \quad (13)$$

Уравнения (9, 12, 13, 2.5-2.7) определяют функции  $h(r), e(r)$ , а эти функции вместе с константами  $\alpha, \chi$  определяют электрические и магнитные напряженности (1.9-1.14)

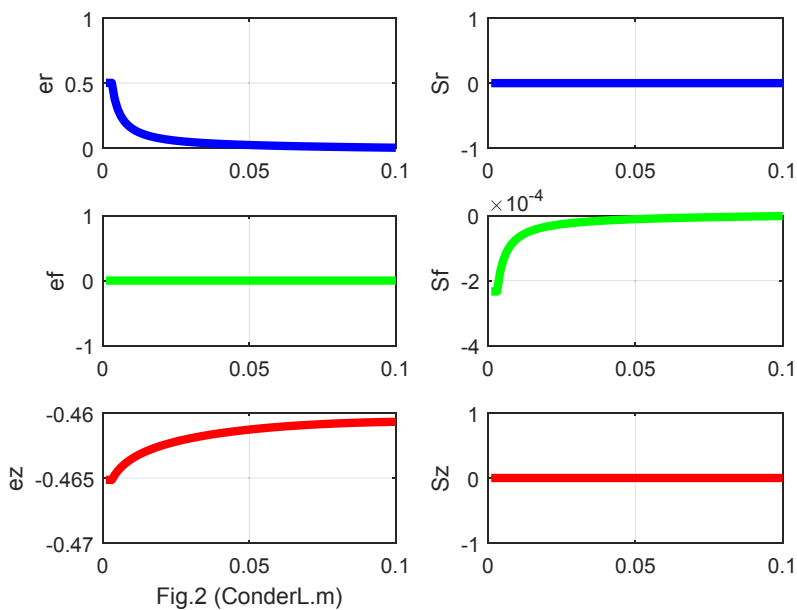
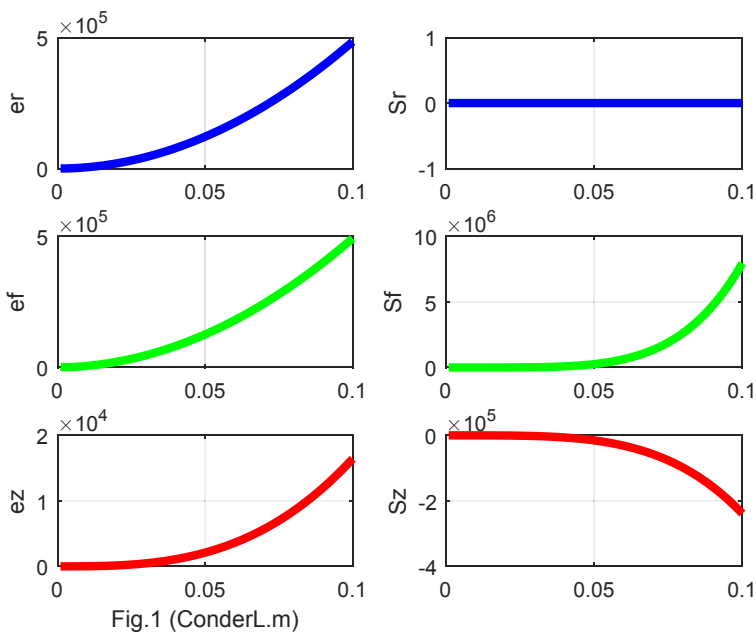
Отсюда следует, что в заряженном конденсаторе присутствуют **электрические и магнитные** напряженности. Поэтому можно утверждать, что в заряженном конденсаторе существует электромагнитное поле, а математическое описание этого поля является решением уравнений Максвелла.

Известны эксперименты по обнаружению магнитного поля между обкладками заряженного конденсатора с помощью компаса [49, 50]. В соответствии с изложенным, в круглом конденсаторе должно наблюдаться только расположение стрелки компаса перпендикулярно радиусу круглого конденсатора. Наблюдаемое в

этих экспериментах отклонение стрелки от оси конденсатора можно объяснить неравномерностью распределения заряда по квадратной пластине.

### Пример 1.

На рис. 1 показаны функции  $e_r, e_\varphi, S e_z, S_r, S_\varphi, S_z$  при  $\eta = 1, k = 0.001, \alpha = 3, \chi = 1, A = -2 \cdot 10^4, R = 0.1$ . На рис. 2 показаны те же функции, где в отличие от предыдущего  $\alpha = 3$ . Видно, что в этом случае отсутствует поток энергии по оси конденсатора. Однако поток энергии по окружности присутствует всегда.



### 4. Кольцевой конденсатор

Рассмотрим теперь кольцевой конденсатор, в котором обкладками являются не диски, кольца, причем ширина кольца такова, что второй производной от  $e_z$  по  $r$  можно пренебречь:  $\ddot{e}_z = 0$ . Тогда уравнение (3.9) примет вид:

$$\frac{e_z}{r} - e_z \chi^2 - \frac{e_z}{r^2} \alpha^2 = 0. \tag{1}$$

или

$$\dot{e}_z = e_z (\chi^2 r + \alpha^2 / r). \tag{2}$$

#### Пример 2.

На рис. 3 показаны функции  $e_r, e_\varphi, e_z, S_r, S_\varphi, S_z$  при  $\eta = 1, k = 0.001, \alpha = 3, \chi = 1, e_z = 2 \cdot 10^4, R_1 = 0.1, R_2 = 0.11$ . На рис. 4 показаны те же функции, где в отличие от предыдущего  $\alpha = 3$ . Видно, что в этом случае отсутствует поток энергии по оси конденсатора. Однако поток энергии по окружности присутствует всегда.

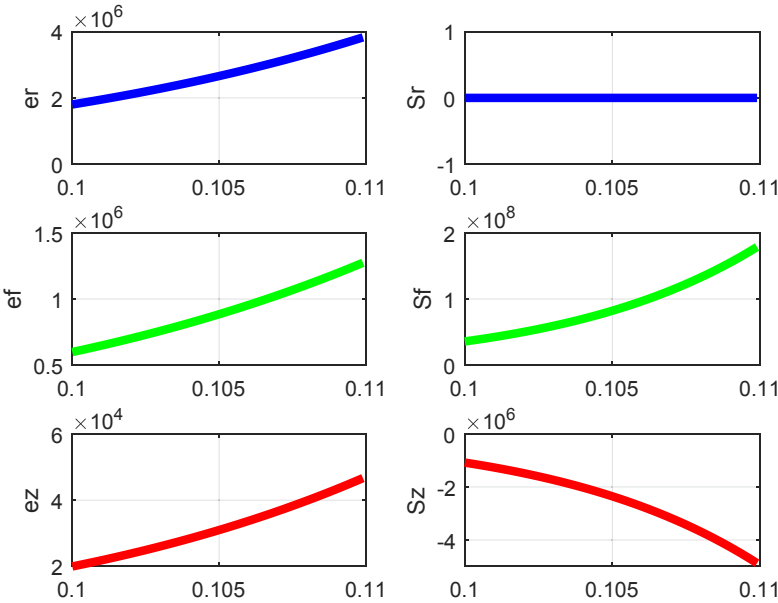


Fig.1 (ConderLK.m)

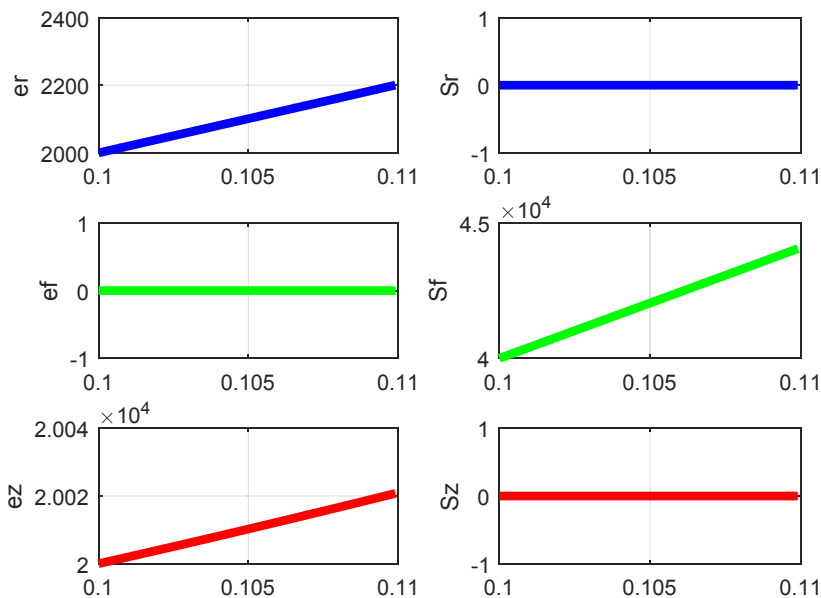


Fig.2 (ConderLK.m)

Известен электрический двигатель высокого напряжения, представляющий собой высоковольтный воздушный конденсатор [131]. В нем одна обкладка выполнена в виде провода, а вторая в виде полосы фольги – см. рис. 3. При высоком напряжении между обкладками возникает ионный ветер, что позволяет рассматривать это устройство, как постоянно разряжающийся конденсатор. Устройство взлетает. Этот эффект вначале объясняли действием ионного тока и ионного ветра. Более тщательные измерения показывают, что ионный ветер создает примерно 60% подъемной силы. Источник 40% подъемной силы не выявлен. Авторы утверждают, что подъемная сила возникает также и в вакууме (где нет ионного ветра).

В первом приближении можно рассматривать этот конденсатор, как кольцевой конденсатор. Тогда можно утверждать, что в этом устройстве постоянно присутствует поток электромагнитной энергии вдоль периметра конденсатора. При постоянном разряде есть также вертикальный поток электромагнитной энергии. Далее будет показано, что такие явления могут быть причиной появления подъемной силы.



Рис. 3

## 5. Разряд конденсатора

Как и ранее, в главах 1 и 5 рассмотрим скорость движения энергии. Общепринятой является концепция Умова [81], согласно которой плотность потока энергии  $s$  является произведением плотности энергии  $w$  и скорости движения энергии  $v_e$ :

$$s = w \cdot v_e. \quad (6)$$

Энергия конденсатора

$$W_e = \frac{CU^2}{2}, \quad (7)$$

а плотность энергии

$$w_e = \frac{W_e}{bd}. \quad (8)$$

где  $U, b, d$  - напряжение на конденсаторе, площадь пластин, толщина диэлектрика соответственно, причем емкость

$$C = \varepsilon \cdot b/d. \quad (9)$$

При разряде конденсатора на резистор  $R$  поток энергии  $S$  в резистор равен выделяемой в резисторе мощности, т.е.

$$S = P = UI = \frac{U^2}{R}. \quad (10)$$

Если конденсатор подключен к нагрузке всей поверхностью пластин, то плотность потока энергии

$$s = \frac{S}{b} = \frac{U^2}{bR}, \quad (11)$$

а мощность источника

$$P = sb. \quad (12)$$

Тогда скорость движения энергии через конденсатор, определяемая по (8),

$$v_{\varphi} = \frac{s}{w_e} = \frac{U^2}{bR} \bigg/ \frac{W_e}{bd} = \frac{U^2}{bR} \bigg/ \frac{CU^2}{2bd} = \frac{2d}{CR}. \quad (13)$$

или, с учетом (9),

$$v_{\varphi} = \frac{2d^2}{\varepsilon bR}, \quad (14)$$

т.е. эта скорость не зависит от напряжения! Она может иметь значение, существенно меньшее скорости света.

## Приложение 1

Рассмотрим решение системы уравнений (3.1, 3.2, 3.3) из раздела 3. После подстановки  $e_{\varphi}$  из (3.2) и  $e_r$  из (3.3) в (3.1), находим:

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} - e_z \chi^2 - \frac{e_z}{r^2} \alpha^2 = 0. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим решение системы уравнений (3.2, 3.3, 3.4) из раздела 3. После подстановки  $e_{\varphi}$  из (3.2) и  $e_r$  из (3.3) в (3.4), вновь находим (1). Следовательно, решение четырех уравнений (3.2-3.4) имеет вид (1).

## Приложение 2.

Известно модифицированное уравнение Бесселя, имеющее следующий вид:

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{x} - y \left( 1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) = 0, \quad (1)$$

где  $\nu$  - порядок уравнения. При действительном аргументе оно имеет действительное решение. Это решение и его производная могут быть найдены численным методом.

Уравнение (3.9)

$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} - e_z \left( \frac{\chi^2}{2} + \frac{\alpha^2}{r^2} \right) = 0. \quad (2)$$

в разделе 2 подобно уравнению (1) и его решение и его производная также могут быть найдены численным методом.

При  $r \rightarrow 0$  уравнение (2) принимает вид:



$$\ddot{e}_z + \frac{\dot{e}_z}{r} - e_z \frac{\alpha^2}{r^2} = 0 \quad (3)$$

Его решение имеет вид:

$$e_z = Ar^\beta, \quad (4)$$

где  $A$  – константа, а  $\beta$  определяется из уравнения

$$\beta^2 + \beta - \alpha^2 = 0, \quad (5)$$

т.е.

$$\beta = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha^2}), \quad \beta < 0 \quad (6)$$

Таким образом, на первых итерациях можно функцию  $e_z$  искать в виде (4), а затем вычислять ее по (2).

# Глава 7а. Конденсатор с электропроводным диэлектриком

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Заряд конденсатора продольным магнитным полем \ 1
- 3. Заряд конденсатора круговым магнитным полем \ 3
- Приложение 1 \ 5
- Приложение 2 \ 6

## 1. Введение

Здесь (отличие от главы 7) рассмотрим конденсатор с электропроводным диэлектриком.

## 2. Заряд конденсатора продольным магнитным полем

В главе 5д показано, что в проводе, который находится в неоднородном продольном магнитном поле, создается продольный постоянный ток. Следовательно, в конденсаторе с токопроводящим диэлектриком также создается постоянный ток. Этот ток заряжает конденсатор. Другими словами, конденсатор заряжается во внешнем неоднородном магнитном поле.

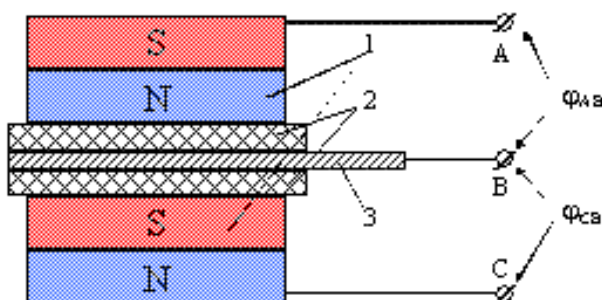


Рис. 1.

Это явление обнаруживается экспериментально. В [116] описывается конструкция, показанная на рис. 1, где показан один из вариантов практической реализации данного явления. В межполюсное пространство токопроводящих магнитов 1 помещены две изоляционные прокладки 2 и металлическая фольга 3. Магниты 1 и фольга 3 выполняют роль электродов *A*, *B* и *C*. Между электродами *AB* и *CB* фиксируется постоянная разность потенциалов, которая возникает в момент создания данной конструкции.

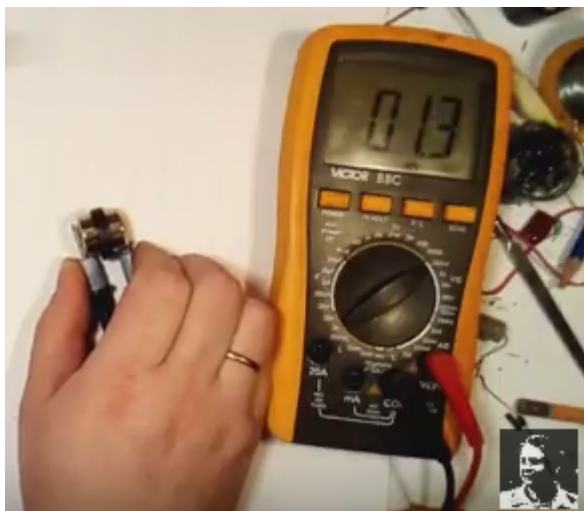


Рис. 2.

В [125] описывается эксперимент (см. рис. 2), где его автор проверяет напряжение на нескольких конструкциях:

- 1) одиночный дисковый неодимовый магнит (НМ),
- 2) несколько НМ,
- 3) ферритовый диск ФД
- 4) ферритовый дисковый магнит ФДМ
- 5) стопка блоков вида 4).

В этих конструкциях феррит является токопроводящим диэлектриком. Автор отмечает, что

1. в 1) отсутствует напряжение,
2. в 2)-4) есть напряжение,
3. в 4) напряжение больше, чем в 3),
4. в 5) напряжение больше, чем в 4),
5. напряжение со временем падает, но в следующем эксперименте восстанавливается.

Такая схема функционирует следующим образом. В некоторый момент времени конденсатор под воздействием магнитов накапливает магнитную энергию  $W_m$  и заряжается до напряжения  $U$ , т.е. приобретает электрическую энергию  $W_c$ . Далее конденсатор разряжается через собственное внутреннее сопротивление  $R$ . При этом напряжение на обкладках уменьшается. Однако от магнитной энергии он вновь заряжается до напряжения  $U$ . Таким образом, этот процесс можно рассматривать, как постоянный разряд конденсатора, напряжение на котором поддерживается внешним источником энергии.

Формальные соотношения рассмотрены в приложении 1.

### **3. Заряд конденсатора круговым магнитным полем**

В главе 5д показано, что в проводе, который находится в круговом магнитном поле, создается продольный постоянный ток. Следовательно, в конденсаторе с токопроводящим диэлектриком также создается постоянный ток. Этот ток заряжает конденсатор. Другими словами, конденсатор заряжается во внешнем круговом магнитном поле.

Таким образом, если через конденсатор проходит провод с постоянным током, то в конденсаторе возникает продольная напряженность.

Пример 1.

Рассмотрим конструкцию, показанную на рис. 3, где показан конденсатор с токопроводящим диэлектриком 1 и обкладками 2. В этом конденсаторе имеется отверстие, через которое проходит провод 3. Если по проводу проходит ток  $I$ , то в конденсаторе создается круговое магнитное поле с напряженностью  $H_\varphi$ . В соответствии с вышеизложенным в токопроводящем диэлектрике создается продольный постоянный ток (направленный параллельно току в проводе). Этот ток проходит через внешнее сопротивление  $R$ .

Такая схема функционирует следующим образом. В некоторый момент времени конденсатор под воздействием тока  $I$  накапливает магнитную энергию  $W_m$  и заряжается до напряжения  $U$ , т.е. приобретает электрическую энергию  $W_c$ . Далее конденсатор разряжается через собственное внутреннее сопротивление  $R$ . При этом напряжение на обкладках уменьшается. Однако от магнитной

энергии он вновь заряжается до напряжения  $U$ . Таким образом, этот процесс можно рассматривать, как постоянный разряд конденсатора, напряжение на котором поддерживается внешним источником энергии.

Формальные соотношения рассмотрены в приложении 1.

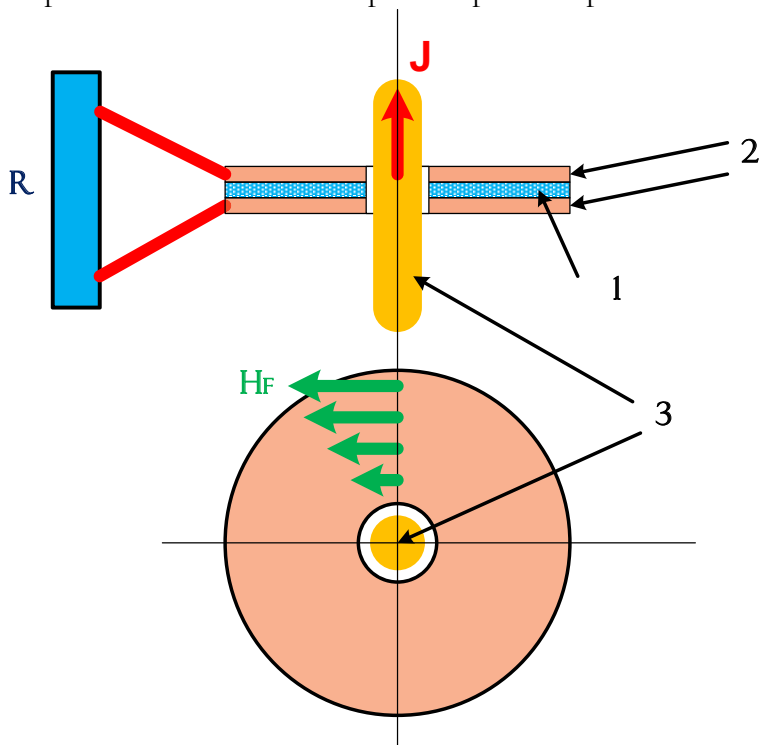


Рис. 3.

## Приложение 1.

Рассмотрим формальные соотношения для разделов 2 и 3.

Обозначим:

$P$  - мощность, потребляемая нагрузкой конденсатора,

$P_1$  - мощность источника тока  $I$ ,

$\rho$  - сопротивление провода (в разделе 2) или обмоток электромагнитов (в разделе 3),

$L$  - индуктивность конденсатора,

$W_c, W_m$  - электрическая и магнитная энергия конденсатора,

$P_2$  - мощность потерь в проводе,

$r$  - кажущееся сопротивление провода (в разделе 2) или обмоток электромагнитов (в разделе 3) - сопротивление нагрузки для источника тока  $I$ .

Имеем:

$$P_2 = I^2 \rho, \quad (1)$$

$$P = U^2 R, \quad (2)$$

$$W_m = LI^2/2, \quad (3)$$

$$W_c = CU^2/2, \quad (4)$$

$$P_1 = I^2 r = P + P_2 = U^2 R + I^2 \rho, \quad (5)$$

Тогда

$$r = I^2 / P_1 = \frac{U^2 R}{I^2} + \rho. \quad (6)$$

Очевидно, для согласованной работы должны совпадать постоянные времени цепи заряда индуктивности  $L$  и цепи разряда емкости  $C$ , т.е.

$$L/\rho = RC. \quad (7)$$

Тогда

$$R = \frac{L}{\rho C} \quad (8)$$

Известно, что для тора

$$L = \frac{\mu q}{l} \quad (9)$$

где

$\mu$  – абсолютная магнитная проницаемость тора,

$q$  – площадь поперечного сечения сердечника,

$l$  – длина средней магнитной силовой линии тора.

Очевидно,

$$q = Dd/2, \quad (10)$$

$$l = \pi D, \quad (11)$$

где  $D$  – диаметр тора,  $d$  – высота тора. Тогда из (9-11) находим:

$$L = \frac{\mu d}{2\pi} \quad (13)$$

Емкость конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon \pi D^2}{4d} \quad (14)$$

Тогда из 8, 13, 14 находим:

$$R = \left( \frac{\mu d}{2\pi \rho} \right) / \left( \frac{\varepsilon \pi D^2}{4d} \right) = \frac{2\mu d^2}{\pi^2 \varepsilon D^2 \rho} \quad (15)$$

## Приложение 2.

В главе 5 определены плотность основного тока  $J_o$ , плотности дополнительных токов  $J_r$ ,  $J_\phi$ ,  $J_z$  и магнитные напряженности  $H_r$ ,  $H_\phi$ ,  $H_z$ .

Рассмотрим еще плотность тепловой энергии, выделяемой в проводе,

$$T = \rho(J_r^2 + J_\phi^2 + J_z^2 + J_o^2). \quad (2)$$

Те же величины определены и в электропроводном конденсаторе. Рассмотрим еще электрическую энергию этого конденсатора:

$$W_e = 0.5\varepsilon E^2, \quad (3)$$

где

$$E^2 = E_r^2 + E_\phi^2 + E_z^2 = \rho^2(J_r^2 + J_\phi^2 + J_z^2 + J_o^2). \quad (4)$$

Емкость конденсатора можно определить через его электрическую энергию:

$$C = 2W_e/U^2. \quad (5)$$

Совмещая (2-5), находим:

$$C = \varepsilon\rho T/U^2. \quad (6)$$

Для неэлектропроводного конденсатора емкость определяется величиной  $\varepsilon$  и геометрическими размерами. Однако в рассматриваемом случае емкость зависит от удельного сопротивления  $\rho$  диэлектрика и параметров электрической цепи  $U$  и  $P$ , в которую он включен.

Рассмотрим еще случай, когда вся тепловая энергия выделяется в конденсаторе. В этом случае из (2-4) находим:

$$W_e = 0.5\varepsilon\rho T. \quad (7)$$

Поскольку

$$T = U^2/R, \quad (8)$$

где  $R$  – электрическое сопротивление конденсатора, то

$$W_e = 0.5\varepsilon\rho U^2/R. \quad (9)$$

Обозначим через  $b$ ,  $d$  площадь обкладки и расстояние между обкладками конденсатора. Тогда

$$C = \varepsilon b/d, \quad (10)$$

$$R = \rho d/b. \quad (11)$$

Из (9-11) получаем:

$$W_e = 0.5\epsilon\rho U^2 b/\rho d = 0.5\epsilon U^2 b/d = 0.5CU^2, \quad (12)$$

что совпадает с формулой (5). Таким образом, электропроводность конденсатора не изменяет его энергию.



# Глава 8. Уравнения Максвелла в сферических координатах

---

## Оглавление

- Первое решение.** Уравнения Максвелла в сферических координатах при отсутствии зарядов и токов. \ 1
1. Решение уравнений Максвелла \ 1
  2. Потоки энергии \ 5
  3. Заключение \ 7
- Приложение 1 \ 7
- Таблицы \ 8
- Второе решение.** Уравнения Максвелла в сферических координатах в общем случае. \ 12
1. Введение \ 12
  2. Решение уравнений Максвелла \ 12
  3. Потоки энергии \ 15
  4. Заключение \ 18
- Приложение 1 \ 18
- Таблицы \ 20
- Третье решение.** Уравнения Максвелла в сферических координатах для электропроводной среды. \ 27
1. Приближенное решение \ 27
  2. Точное решение \ 28
- Таблицы \ 28

## Первое решение. Уравнения Максвелла в сферических координатах при отсутствии зарядов и токов.

### 1. Решение уравнений Максвелла

На рис. 1 показана система сферических координат  $(\rho, \theta, \varphi)$ . В табл. 1 приведены выражения для ротора и дивергенции вектора  $\mathbf{E}$  в этих координатах [4]. Здесь и далее

$E$  - напряженность электрического поля,

$H$  - напряженность магнитного поля,

$\mu$  - абсолютная магнитная проницаемость,

$\varepsilon$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость.

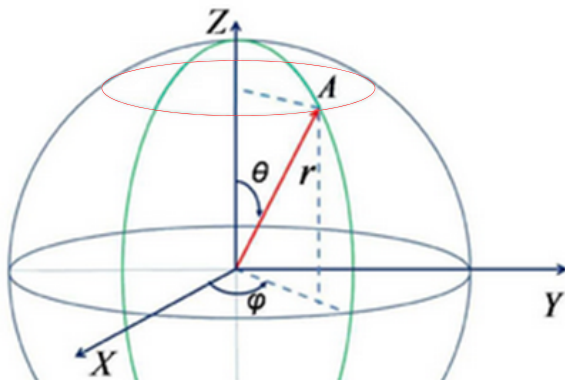


Рис. 1.

Уравнения Максвелла в сферических координатах при отсутствии зарядов и токов имеют вид, приведенный в табл. 2. Далее мы будем искать решение при  $E_\rho = 0$ ,  $H_\rho = 0$  и в виде функций  $E$ ,  $H$ , представленных в табл. 3, где функцию  $g(\theta)$  и функции вида  $E_{\varphi\rho}(\rho)$  предстоит вычислить. Будем полагать, что напряженности  $E$ ,  $H$  не зависят от аргумента  $\varphi$ . При этих условиях преобразуем табл. 1 в табл. 3а. Далее подставим функции  $E$ ,  $H$  из табл. 3 в табл. 3а. Тогда получим табл. 4.

Подставляя выражения для роторов и дивергенций из табл. 4 в уравнения Максвелла (см. табл. 2), дифференцируя по времени и сокращая общие множители, получаем новую форму уравнений Максвелла – см. табл. 5.

Рассмотрим табл. 5. Из строки 2 следует:

$$\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial \rho} = 0, \quad (2)$$

$$\chi H_{\varphi\rho} + \frac{\omega \varepsilon}{c} E_{\theta\rho} = 0. \quad (3)$$

Следовательно,

$$H_{\varphi\rho} = \frac{h_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad (4)$$

$$H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega \varepsilon}{\chi c} E_{\theta\rho}, \quad (5)$$

где  $h_{\varphi\rho}$  – некоторая константа. Аналогично, из строк 3, 5, 5 следует соответственно:

$$H_{\theta\rho} = \frac{h_{\theta\rho}}{\rho}, \quad (6)$$

$$H_{\theta\rho} = \frac{\omega \varepsilon}{\chi c} E_{\varphi\rho}, \quad (7)$$

$$E_{\varphi\rho} = \frac{e_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad (8)$$

$$E_{\varphi\rho} = \frac{\omega \mu}{\chi c} H_{\theta\rho}, \quad (9)$$

$$E_{\theta\rho} = \frac{e_{\theta\rho}}{\rho}, \quad (10)$$

$$E_{\theta\rho} = -\frac{\omega \mu}{\chi c} H_{\varphi\rho}. \quad (11)$$

Из (5) следует, что

$$E_{\theta\rho} = -\frac{\chi c}{\omega \varepsilon} H_{\varphi\rho}, \quad (12)$$

а из сравнения (11) и (12) следует, что

$$\frac{\omega \mu}{\chi c} = \frac{\chi c}{\omega \varepsilon}$$

или

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (13)$$

Эта же формула следует из сравнения (7) и (9).

Из (5, 13) следует, что

$$H_{\varphi\rho} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\theta\rho}, \quad (14)$$

а из (14, 4, 11, 12) следует, что

$$h_{\varphi\rho} = -e_{\theta\rho} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad (15)$$

Аналогично, из (7, 13) следует, что

$$H_{\theta\rho} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\varphi\rho}, \quad (16)$$

а из (16, 6, 8, 12) следует, что

$$h_{\theta\rho} = -e_{\varphi\rho} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (17)$$

Из сравнения (15) и (17) следует, что

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{h_{\theta\rho}} = \frac{e_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = q, \quad (18)$$

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{e_{\theta\rho}} = \frac{h_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (19)$$

Далее замечаем, что строки 1, 4, 7 и 8 совпадают, откуда следует, что функция  $g(\theta)$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0. \quad (20)$$

В приложении 1 показано, что решением этого уравнения является функция

$$g(\theta) = \frac{1}{A \cdot |\sin(\theta)|}, \quad (20a)$$

где  $A$  – константа. Заметим, что в известном решении  $g(\theta) = \sin(\theta)$ . Легко убедиться, что такая функция не удовлетворяет уравнению (20). Следовательно,

**в известном решении не выполняются 4 уравнения Максвелла с выражениями  $\operatorname{rot}_\rho(E)$ ,  $\operatorname{rot}_\rho(H)$ ,  $\operatorname{div}(E)$ ,  $\operatorname{div}(H)$ .**

Итак, решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне имеет вид напряженностей, представленных в табл. 3, где

$$H_{\varphi\rho} = \frac{h_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad H_{\theta\rho} = \frac{h_{\theta\rho}}{\rho}, \quad E_{\varphi\rho} = \frac{e_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad E_{\theta\rho} = \frac{e_{\theta\rho}}{\rho} \quad (21)$$

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (\text{см. 13}), \quad g(\theta) = \frac{1}{A \cdot |\sin(\theta)|} \quad (\text{см. 20a})$$

и константы  $h_{\varphi\rho}$ ,  $h_{\theta\rho}$ ,  $e_{\varphi\rho}$ ,  $e_{\theta\rho}$  удовлетворяют условиям

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{h_{\theta\rho}} = \frac{e_{\varphi\rho}}{e_{\theta\rho}} = q \quad (\text{см. 18}), \quad \frac{h_{\varphi\rho}}{e_{\theta\rho}} = \frac{h_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (\text{см. 19})$$

Из табл. 3 следует, что

**одноименные (по координатам  $\varphi$  и  $\theta$ ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.**

Это соответствует экспериментальной электротехнике. На рис. 2 показаны векторы напряженностей в сферической системе координат.

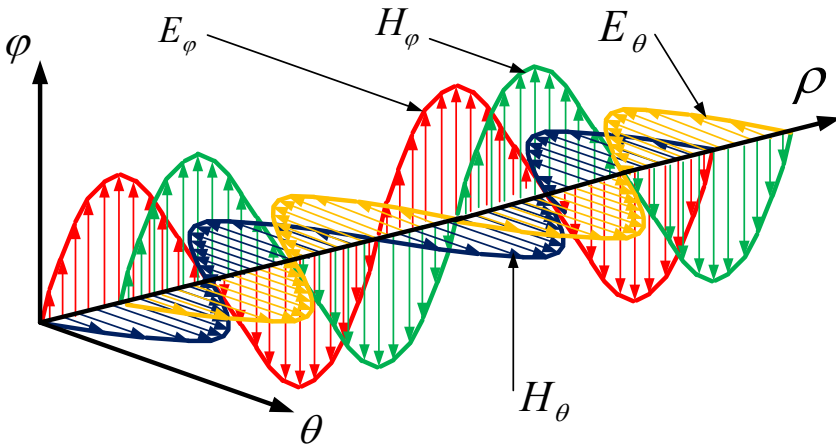


Рис. 2 (4hehe.vsd).

## 2. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В сферических координатах  $\varphi, \theta, \rho$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_\varphi, S_\theta, S_\rho$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_\varphi \\ S_\theta \\ S_\rho \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta \\ E_\rho H_\varphi - E_\varphi H_\rho \\ E_\varphi H_\theta - E_\theta H_\varphi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Отсюда и из табл. 3 следует, что

$$\begin{aligned} S_\varphi &= 0 \\ S_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$S_\rho = \eta \begin{pmatrix} E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} (g(\theta) \sin(\chi\rho + \omega t))^2 - \\ - E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} (g(\theta) \cos(\chi\rho + \omega t))^2 \end{pmatrix}$$

Из (1.9, 1.11) следует, что

$$E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} = \frac{\omega\mu}{\chi c} (H_{\theta\rho})^2, \quad (6)$$

$$E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega\mu}{\chi c} (H_{\varphi\rho})^2. \quad (7)$$

Далее из (6, 7, 1.4, 1.6) следует, что

$$E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} = \frac{\omega\mu}{\chi c} (h_{\theta\rho})^2 \frac{1}{\rho^2}, \quad (8)$$

$$E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega\mu}{\chi c} (h_{\varphi\rho})^2 \frac{1}{\rho^2}. \quad (9)$$

Из (5, 8, 9) получаем:

$$S_\rho = \eta \cdot g^2(\theta) \frac{\omega\mu}{\chi c} \frac{1}{\rho^2} \left( (h_{\theta\rho})^2 (\sin(\chi\rho + \omega t))^2 + (h_{\varphi\rho})^2 (\cos(\chi\rho + \omega t))^2 \right). \quad (9)$$

Далее из (9, 1.13, 1.18) следует, что

$$S_\rho = \eta \cdot g^2(\theta) \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\rho^2} \left( (h_{\theta\rho})^2 (\sin(\chi\rho + \omega t))^2 + (qh_{\varphi\rho})^2 (\cos(\chi\rho + \omega t))^2 \right), \quad (10)$$

где  $q$  – ранее неопределенная константа. Если принять

$$q = 1, \quad (10a)$$

то получим

$$S_{\rho} = \eta \cdot g^2(\theta) \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h_{\theta\rho}^2}{\rho^2}. \quad (11)$$

Заметим еще, что площадь поверхности сферы с радиусом  $\rho$  равна  $4\pi\rho^2$ . Тогда поток энергии, проходящий сквозь сферу с радиусом  $\rho$  равен

$$\bar{S}_{\rho} = \int_{\theta} 4\pi\rho^2 S_{\rho} d\theta = 4\pi\rho^2 \eta \omega \frac{h_{\theta\rho}^2}{\rho^2} \int_{\theta} g^2(\theta) d\theta$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} g^2(\theta) d\theta = C,$$

где  $C$  – константа, то

$$\bar{S}_{\rho} = 4\pi C \eta \omega h_{\theta\rho}^2. \quad (12)$$

Из (12) следует, что

**в сферической электромагнитной волне поток энергии, проходящий сквозь сферы по радиусу, остается постоянным с увеличением радиуса и НЕ изменяется во времени.**

Это строго соответствует закону сохранения энергии.

Из (12) следует, что плотность потока энергии меняется вдоль меридиана по закону  $g^2(\theta)$ .

### 3. Заключение

Получено строгое решение уравнений Максвелла для дальней зоны, которое представлено в табл. 3, где

$H_{\varphi\rho}(\rho)$ ,  $H_{\theta\rho}(\rho)$ ,  $E_{\varphi\rho}(\rho)$ ,  $E_{\theta\rho}(\rho)$  - функции,

определенные по (1.21, 1.18, 1.19),

$g(\theta)$  - функция, определяемая по (1.20а),

$\chi$  - константа, определяемая по (1.13).

- Одноименные (по координатам  $\varphi$  и  $\theta$ ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.
- В сферической электромагнитной волне поток энергии, проходящий сквозь сферы по радиусу, остается постоянным с увеличением радиуса и НЕ изменяется во времени и это строго соответствует закону сохранения энергии.
- Плотность энергии меняется вдоль меридиана по закону  $g^2(\theta)$ .

## Приложение 1

Рассмотрим (1.20):

$$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0 \quad (1)$$

или

$$\frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = -\operatorname{ctg}(\theta) \cdot g(\theta) \quad (2)$$

Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} (\ln(g(\theta))) = \frac{\partial(g(\theta))}{g(\theta)}. \quad (3)$$

Из (2, 3) находим:

$$\ln(g(\theta)) = -\int_{\theta} \operatorname{ctg}(\theta) \partial\theta. \quad (4)$$

Известно, что

$$\int_{\theta} \operatorname{ctg}(\theta) \partial\theta = \ln(A \cdot |\sin(\theta)|). \quad (5)$$

где  $A$  – константа. Из (4, 5) получаем:

$$\ln(g(\theta)) = -\ln(A \cdot |\sin(\theta)|) \quad (6)$$

или

$$g(\theta) = \frac{1}{A \cdot |\sin(\theta)|}. \quad (8)$$

## Таблицы

Таблица 1.

1	2	3
1	$\operatorname{rot}_{\rho}(E)$	$\frac{E_{\varphi}}{\rho \operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_{\varphi}}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial E_{\theta}}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$
2	$\operatorname{rot}_{\theta}(E)$	$\frac{\partial E_{\rho}}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{E_{\varphi}}{\rho} - \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial \rho}$
3	$\operatorname{rot}_{\varphi}(E)$	$\frac{E_{\theta}}{\rho} + \frac{\partial E_{\theta}}{\partial \rho} - \frac{\partial E_{\rho}}{\rho \partial \varphi}$
4	$\operatorname{div}(E)$	$\frac{E_{\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{E_{\theta}}{\rho \operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_{\theta}}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial E_{\varphi}}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$



Таблица 2.

1	2
1.	$\text{rot}_\rho H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\rho}{\partial t} = 0$
2.	$\text{rot}_\theta H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\theta}{\partial t} = 0$
3.	$\text{rot}_\varphi H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = 0$
4.	$\text{rot}_\rho E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\rho}{\partial t} = 0$
5.	$\text{rot}_\theta E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = 0$
6.	$\text{rot}_\varphi E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0$
7.	$\text{div}(E) = 0$
8.	$\text{div}(H) = 0$

Таблица 3.

1	2
	$E_\theta = E_{\theta\rho}(\rho)g(\theta)\cos(\chi\rho + \omega t)$
	$E_\varphi = E_{\varphi\rho}(\rho)g(\theta)\sin(\chi\rho + \omega t)$
	$E_\rho = 0$
	$H_\theta = H_{\theta\rho}(\rho)g(\theta)\sin(\chi\rho + \omega t)$
	$H_\varphi = H_{\varphi\rho}(\rho)g(\theta)\cos(\chi\rho + \omega t)$
	$H_\rho = 0$

Таблица 3а.

1	2	3
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$-\frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho}$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta}$

Таблица 4.

1	2	3
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$-\left(\frac{E_{\varphi\rho}}{\rho} \sin(\dots) + \frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \sin(\dots) + \chi E_{\varphi\rho} \cos(\dots)\right) g(\theta)$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\left(\frac{E_{\theta\rho}}{\rho} \cos(\dots) + \frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial \rho} \cos(\dots) - \chi E_{\theta\rho} \sin(\dots)\right) g(\theta)$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta}$
5	$\text{rot}_\rho(H)$	$\frac{H_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \theta}$
6	$\text{rot}_\theta(H)$	$-\left(\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} \cos(\dots) + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \cos(\dots) - \chi H_{\varphi\rho} \sin(\dots)\right) g(\theta)$
7	$\text{rot}_\varphi(H)$	$\left(\frac{H_{\theta\rho}}{\rho} \sin(\dots) + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial \rho} \sin(\dots) + \chi H_{\theta\rho} \cos(\dots)\right) g(\theta)$
8	$\text{div}(H)$	$\frac{H_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\theta}{\rho \partial \theta}$

Таблица 5.

1	2
1.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$
2.	$-\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} \cos(\dots) - \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial\rho} \cos(\dots) + \chi H_{\varphi\rho} \sin(\dots) + \frac{\omega\varepsilon}{c} E_{\theta\rho} \sin(\dots) = 0$
3.	$\frac{H_{\theta\rho}}{\rho} \sin(\dots) + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial\rho} \sin(\dots) + \chi H_{\theta\rho} \cos(\dots) - \frac{\omega\varepsilon}{c} E_{\varphi\rho} \cos(\dots) = 0$
4.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$
5.	$-\frac{E_{\varphi\rho}}{\rho} \sin(\dots) - \frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial\rho} \sin(\dots) - \chi E_{\varphi\rho} \cos(\dots) + \frac{\omega\mu}{c} H_{\theta\rho} \sin(\dots) = 0$
6.	$\frac{E_{\theta\rho}}{\rho} \cos(\dots) + \frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial\rho} \cos(\dots) - \chi E_{\theta\rho} \sin(\dots) - \frac{\omega\mu}{c} H_{\varphi\rho} \sin(\dots) = 0$
7.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$
8.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$

## Второе решение. Уравнения Максвелла в сферических координатах в общем случае.

### 1. Введение

Выше в «Первом решении» предложено решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне. Далее рассматривается решение уравнений Максвелла для сферической волны во всей области существования волны (без разбиения на зоны).

### 2. Решение уравнений Максвелла

Итак, будем использовать сферические координаты  $(\rho, \theta, \varphi)$ . Далее формулы мы будем размещать в таблицах и использовать следующие обозначения:

$T(\text{номер\_таблицы})-(\text{номер\_столбца})-(\text{номер\_строки})$

В таблице **T1-3** приведены выражения для ротора и дивергенции вектора в этих координатах [4]. Здесь и далее

$E$  - напряженность электрического поля,

$H$  - напряженность магнитного поля,

$J$  - плотность электрического тока смещения,

$M$  - плотность магнитного тока смещения,

$\mu$  - абсолютная магнитная проницаемость,

$\varepsilon$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Примем следующие обозначения:

$$\Psi(E_\rho) = \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} \quad (1)$$

$$T(E_\varphi) = \left( \frac{E_\varphi}{tg(\theta)} + \frac{\partial(E_\varphi)}{\partial(\theta)} \right) \quad (2)$$

С учетом этих обозначений формулы в таблице **T1-3** принимают вид, приведенный в таблице **T1-4**. В таблице **T1A-2** запишем уравнения Максвелла.

Итак, имеется 8 уравнений Максвелла с 6-ю неизвестными. Эта система является переопределенной. Принято считать, что в сферической волне отсутствуют радиальные напряженности (хотя это и не доказано). При этом появляется система 8 уравнений

Максвелла с 4-мя неизвестными. Выше в «Первом решении» найдено решение этой задачи. В сущности, там находится решение 4-х уравнений (см. **T1A-2.2, 3, 6, 7**). В этом решении функции напряженностей имеют одинаковый для всех функций множитель – функцию  $g(\theta)$  от аргумента  $\theta$ . Остальные 4 уравнения выполняются при определенном выборе этой функции. Она оказывается такой, что у нее существуют бесконечные значения – это делает то решение практически неприменимым.

Приходится признать, что в сферической волне присутствуют радиальные напряженности. Однако и при этом система уравнений Максвелла остается переопределенной. Допустим еще, что существуют радиальные электрические токи смещения. Это допущение не снимает проблему переопределенности, но добавляет еще одну проблему. Дело в том, что сфера имеет идеальную симметрию и решение, очевидно, должно быть симметричным.

Напрашивается предположение о том, что существуют еще и радиальные магнитные токи смещения. Такое предположение не требует существования магнитных монополей также, как существование электрических токов смещения не следует из существования электрических зарядов.

Итак, далее мы будем искать решение в виде функций  $E, H, J, M$ , представленных в таблице **T2-2**, где действительные функции вида  $g(\theta)$  и  $e(\rho), h(\rho), j(\rho), m(\rho)$ , предстоит вычислить, а коэффициенты  $\alpha, \omega$  известны.

При этих условиях преобразуем формулы **T1-3** в **T1-4**, где приняты следующие обозначения:

$$\boxed{e_\varphi} = \frac{\partial(e_\varphi(\rho))}{\partial(\rho)}, \quad (3)$$

$$q = \chi\rho + \omega t \quad (4)$$

Из (2, 4) найдем:

$$T(E_\varphi) = \left(\frac{\sin(\theta)}{tg(\theta)} + \cos(\theta)\right)e_\varphi \cos(q) = 2e_\varphi \cos(\theta) \cos(q) \quad (5)$$

Аналогично,

$$T(E_\theta) = 2e_\theta \cos(\theta) \sin(q) \quad (6)$$

$$T(H_\varphi) = 2h_\varphi \cos(\theta) \sin(q) \quad (7)$$

$$T(H_\theta) = 2h_\theta \cos(\theta) \cos(q) \quad (8)$$

С учетом этих обозначений формулы в таблице **T1-3** принимают вид, приведенный в таблице **T1-4**.

Далее по приведенным выше формулам и формулам из таблицы **T2** построим таблицы  $T2i, T2\rho, T2\psi$ .

В таблице **T1A-2** запишем уравнения Максвелла с учетом радиальных токов смещения. Далее примем условие

$$\alpha = 0 \quad (9)$$

Подставим роторы и дивергенции из таблицы **T1-4** в уравнения **T1A-2**, учтем условие (9), сократим полученные выражения на функции аргумента  $\theta$  и результат запишем в таблицу **T1A-3**. Затем подставим функции из таблиц  $T2i, T2\rho, T2\psi$  в функции **T1A-3** и запишем результат в таблицу **T4-2**. В этой таблице и далее применены обозначения вида

$$si = \sin(\chi\rho + \omega t), \quad (10)$$

$$co = \cos(\chi\rho + \omega t). \quad (11)$$

Далее каждое уравнение в таблице **T4-2** заменим на два уравнения, одно из которых содержит слагаемые со множителем  $si$ , а другое – со множителем  $co$ . Результат запишем в таблицу **T5-2**.

Уравнения **T5-2-2, 6, 3, 7** имеют решение, найденное в «Первом решении» и имеющее следующий вид (что можно проверить непосредственной подстановкой):

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu} \quad (12)$$

$$e_\varphi = A/\rho, e_\theta = A/\rho, \quad (13)$$

$$h_\varphi = -B/\rho, h_\theta = B/\rho, \quad (14)$$

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad (15)$$

Рассмотрим уравнения **T5-2.4, T5-2.8**. Их решение рассмотрено в приложении 1, где найдены функции  $e_\rho(\rho), \bar{e}_\rho(\rho), h_\rho(\rho), \bar{e}_\rho(\rho)$ . После этого по уравнениям **T5-2.1, T5-2.5** могут быть найдены функции  $j_\rho(\rho), \bar{j}_\rho(\rho), m_\rho(\rho), \bar{m}_\rho(\rho)$ .

Тем самым задача решена.

В частности, при  $A=B$  и малой величине  $\chi$  эти функции принимают следующий вид:

$$h_\rho = e_\rho = -\frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho)), \quad (16)$$

$$\bar{h}_\rho = \bar{e}_\rho = \frac{D}{\rho}, \quad (17)$$

$$j_\rho = \frac{2A}{\rho^2} - \frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}, \quad (18)$$

$$\bar{j}_\rho = -\frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho)), \quad (19)$$

$$m_\rho = -\frac{2B}{\rho^2} + \frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}, \quad (20)$$

$$\bar{m}_\rho = -\frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\rho} (G + 2A \cdot \ln(\rho)) \quad (21)$$

Здесь

$G$  – константа, которая может принимать различные значения для функций  $e_\rho$  и  $h_\rho$ ,

$D$  – константа, которая может принимать различные значения для функций  $\bar{e}_\rho$  и  $\bar{h}_\rho$ .

### 3. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В системе СИ  $\eta = 1$  и формула (1) принимает вид:

$$S = E \times H. \quad (3)$$

В сферических координатах  $\varphi, \theta, \rho$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_\varphi, S_\theta, S_\rho$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Выше показано, что они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_\varphi \\ S_\theta \\ S_\rho \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta \\ E_\rho H_\varphi - E_\varphi H_\rho \\ E_\varphi H_\theta - E_\theta H_\varphi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Найдем вначале радиальный поток энергии. Подставляя сюда формулы из таблицы **T2** и (1.4, 2.13, 2.14), находим:

$$\begin{aligned} S_\rho &= \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \sin(q) \frac{B}{\rho} \sin(\theta) \sin(q) - \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \cos(q) \frac{-B}{\rho} \sin(\theta) \cos(q) = \\ &= \frac{AB}{\rho^2} \sin^2(\theta) (\sin^2(q) + \cos^2(q)) \end{aligned} \quad (4a)$$

или, с учетом (2.15),

$$S_\rho = \frac{A^2}{\rho^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin^2(\theta) \quad (5)$$

Заметим, что площадь поверхности сферы с радиусом  $\rho$  равна  $4\pi\rho^2$ . Тогда поток энергии, проходящий сквозь сферу с радиусом  $\rho$  равен

$$\bar{S}_\rho = \int_0^\pi 4\pi\rho^2 S_\rho d\theta = -4\pi\rho^2\eta\frac{A^2}{\rho^2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\int_0^\pi \sin^2(\theta)d\theta$$

или

$$\bar{S}_\rho = -4\pi\eta A^2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}}\int_0^\pi \sin^2(\theta)d\theta$$

или

$$\bar{S}_\rho = -4\pi^2\eta A^2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad (6)$$

Таким образом, плотность потока энергии, проходящего сквозь сферу, не зависит от радиуса и не зависит от времени, т.е. этот поток имеет одну и ту же величину на сферической поверхности любого радиуса в любой момент времени. Иначе говоря, поток энергии, направленный вдоль радиуса, сохраняет свою величину с увеличением радиуса и не зависит от времени, что соответствует закону сохранения энергии.

Найдем теперь поток энергии

$$S_\varphi = \eta(E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta), \quad (7)$$

Подставляя сюда формулы из таблицы **T2** и (2.13, 2.14, 2.16, 2.17), находим:

$$\begin{aligned} S_\varphi &= \eta \left( \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \cos(q) \cos(\theta) (h_\rho \sin(q) + \bar{h}_\rho \cos(q)) \right. \\ &\quad \left. - \cos(\theta) (e_\rho \cos(q) + \bar{e}_\rho \sin(q)) \frac{B}{\rho} \sin(\theta) \sin(q) \right) = \\ &= \frac{\eta \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \left( \begin{array}{l} A \cos(q) (h_\rho \sin(q) + \bar{h}_\rho \cos(q)) \\ - B \sin(q) (e_\rho \cos(q) + \bar{e}_\rho \sin(q)) \end{array} \right) = \\ &= \frac{\eta \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \left( \begin{array}{l} (h_\rho A \cos(q) \sin(q) + \bar{h}_\rho A \cos^2(q)) \\ - (e_\rho B \sin(q) \cos(q) + \bar{e}_\rho B \sin^2(q)) \end{array} \right) \end{aligned}$$

или, учитывая (2.16, 2.17),

$$S_\varphi = \frac{\eta \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \left( \begin{array}{l} (e_\rho A \cos(q) \sin(q) + \bar{e}_\rho A \cos^2(q)) \\ - (e_\rho B \sin(q) \cos(q) + \bar{e}_\rho B \sin^2(q)) \end{array} \right)$$

или

$$S_\varphi = \frac{\eta \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \left( \begin{array}{l} e_\rho (A - B) \cos(q) \sin(q) + \\ \bar{e}_\rho (A \cos^2(q) + B \sin^2(q)) \end{array} \right) \quad (8)$$

Найдем теперь поток энергии

$$S_\theta = \eta(E_\rho H_\varphi - E_\varphi H_\rho). \quad (9)$$

Аналогично предыдущему найдем:

$$S_\theta = \frac{\eta \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \left( \begin{array}{l} - (e_\rho B \cos(q) \sin(q) + \bar{e}_\rho B \cos^2(q)) \\ - (e_\rho A \sin(q) \cos(q) + \bar{e}_\rho A \sin^2(q)) \end{array} \right)$$



или

$$S_{\theta} = -\frac{\eta \cdot \sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho} \left( \begin{matrix} e_{\rho}(A+B)\cos(q)\sin(q) + \\ \bar{e}_{\rho}(A\cos^2(q) + B\sin^2(q)) \end{matrix} \right). \quad (10)$$

В частности, при  $\varepsilon = \mu$ , например, для вакуума, из (2.15) находим, что  $A=B$ , и из (7, 10) получаем:

$$S_{\varphi} = \frac{\eta \cdot \sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho} A \bar{e}_{\rho}, \quad (11)$$

$$S_{\theta} = -\frac{\eta \cdot \sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho} (2Ae_{\rho}\cos(q)\sin(q) + A\bar{e}_{\rho}). \quad (12)$$

или

$$S_{\varphi} = \frac{\eta \cdot \sin(2\theta)}{2\rho} A \bar{e}_{\rho}, \quad (13)$$

$$S_{\theta} = -\frac{A\eta \cdot \sin(2\theta)}{2\rho} (e_{\rho}\sin(2q) + \bar{e}_{\rho}). \quad (14)$$

Из (12, 13) найдем плотность суммарного потока энергии, направленного по касательной к сфере данного радиуса,

$$S_{\varphi\theta} = S_{\varphi} + S_{\theta} = -\frac{A\eta \cdot}{2\rho} e_{\rho}\sin(2\theta)\sin(2q)$$

или

$$S_{\varphi\theta} = -\frac{A\eta \cdot}{4\rho} e_{\rho} (\cos(2\theta - 2q) - \cos(2\theta + 2q))$$

или

$$S_{\varphi\theta} = -\frac{A\eta \cdot}{4\rho} e_{\rho} \left( \begin{matrix} \cos(2(\chi\rho + \omega t - \theta)) \\ -\cos(2(\chi\rho + \omega t + \theta)) \end{matrix} \right). \quad (15)$$

Это означает, что на окружностях сферы существуют стоячие волны.

## 4. Заключение

1. Решение уравнений Максвелла, свободное от указанных выше недостатков, представлено в таблице **T2**.

2. Решение является монохроматическим.

3. Существуют электрические и магнитные напряженности вдоль всех осей координат.

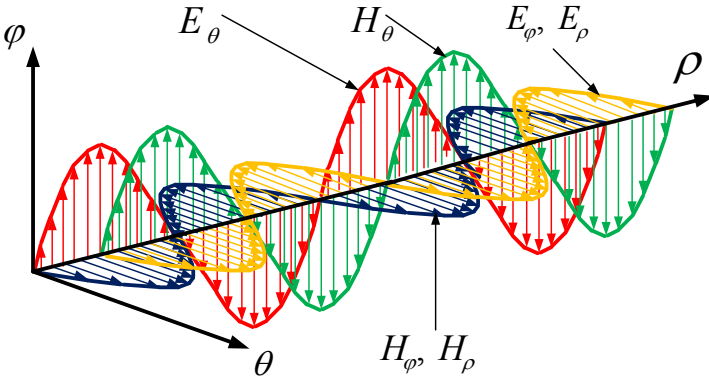
4. Амплитуды напряженностей поперечной волны пропорциональны  $\rho^{-1}$

5. Одноименные (по координатам  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.

6. Существует продольная электромагнитная волна, имеющая электрическую и магнитную компоненты, т.е. существуют радиальные электрическая и магнитная напряженности.

7. Поток энергии, направленный вдоль радиуса, сохраняет свою величину с увеличением радиуса и не зависит от времени, что соответствует закону сохранения энергии.

8. Существуют радиальные электрические и магнитные токи смещения.



### Приложение 1.

Из **T5-4.1** и (2.13) находим:

$$\bar{e}_\rho = -\frac{1}{\chi} \bar{e}_\theta - \frac{1}{\chi \rho} e_\rho - \frac{2A}{\chi \rho^2}. \quad (1)$$

Дифференцируя (1), получаем:

$$\bar{e}'_\rho = -\frac{1}{\chi} \bar{e}'_\theta - \frac{1}{\chi \rho} \bar{e}_\theta + \frac{1}{\chi \rho^2} e_\rho + \frac{4A}{\chi \rho^3}. \quad (2)$$

Подставим (2) в **T5-4.2** и найдем:

$$\left( -\frac{1}{\chi \rho} \bar{e}_\theta - \frac{1}{\chi \rho^2} e_\rho - \frac{2A}{\chi \rho^3} - \chi e_\rho - \frac{1}{\chi} \bar{e}'_\rho - \frac{1}{\chi \rho} \bar{e}_\theta + \frac{1}{\chi \rho^2} e_\rho + \frac{4A}{\chi \rho^3} \right) = 0$$

или

$$\bar{e}_\theta + \frac{2}{\rho} \bar{e}_\theta + \chi^2 e_\rho - \frac{2A}{\rho^3} = 0. \quad (3)$$

По этому дифференциальному уравнению можно найти функцию  $e_\rho(\rho)$ , а при этой известной функции и дифференциальному уравнению **T5-4.2** найти функцию  $\bar{e}_\rho(\rho)$ .

Из **T5-8.1** и (2.14) находим:

$$\bar{h}_\rho = \frac{1}{\chi} \bar{h}_\theta + \frac{1}{\chi \rho} h_\rho + \frac{2B}{\chi \rho^2}. \quad (4)$$

Дифференцируя (4), получаем:

$$\bar{h}_\rho = \frac{1}{\chi} \bar{h}_\rho + \frac{1}{\chi \rho} \bar{h}_\rho - \frac{1}{\chi \rho^2} h_\rho - \frac{4B}{\chi \rho^3}. \quad (5)$$

Подставим (5) в **T5-8.2** и найдем:

$$\left( \frac{1}{\chi \rho} \bar{h}_\rho + \frac{1}{\chi \rho^2} h_\rho + \frac{2B}{\chi \rho^3} + \chi h_\rho + \frac{1}{\chi} \bar{h}_\rho + \frac{1}{\chi \rho} \bar{h}_\rho - \frac{1}{\chi \rho^2} h_\rho - \frac{4B}{\chi \rho^3} \right) = 0$$

или

$$\bar{h}_\rho + \frac{2}{\rho} \bar{h}_\rho + \chi^2 h_\rho - \frac{2B}{\rho^3} = 0 \quad (6)$$

По этому дифференциальному уравнению можно найти функцию  $h_\rho(\rho)$ , а при этой известной функции и дифференциальному уравнению **T5-8.2** найти функцию  $\bar{h}_\rho(\rho)$ .

В частности, при  $\varepsilon = \mu$ , например, для вакуума, из (2.15) находим, что  $A=B$ , и, сравнивая (3) и (6), находим, что

$$h_\rho = e_\rho. \quad (7)$$

При  $A=B$  и малой величине  $\chi$  уравнения **T5-4.1** и **T5-8.1** совпадают и принимают вид

$$\dot{y} + \frac{2}{\rho} y - \frac{2A}{\rho^3} = 0, \quad (8)$$

где

$$y = \bar{h}_\rho = \bar{e}_\rho. \quad (9)$$

Метод решения такого уравнения приведен в [111, стр. 50]. Следуя этому методу, находим

$$y = \frac{C + 2A \ln(\rho)}{\rho^2} \quad (10)$$

где  $C$  – константа, которая может принимать различные для функций  $\bar{e}_\rho$  и  $\bar{h}_\rho$ . Из (9, 10) находим:

$$h_\rho = e_\rho = -\frac{C}{\rho} - 2A \left( \frac{1 + \ln(\rho)}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} (G + 2A \cdot \ln(\rho)) \quad (11)$$

где  $G$  – константа, которая может принимать различные для функций  $e_\rho$  и  $h_\rho$ .

При малой величине  $\chi$  уравнения **T5-4.1** и **T5-8.1** совпадают и принимают вид

$$\dot{z} + \frac{1}{\rho} z = 0, \quad (12)$$

где

$$z = \bar{h}_\rho = \bar{e}_\rho. \quad (13)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\bar{h}_\rho = \bar{e}_\rho = \frac{D}{\rho}, \quad (14)$$

где  $D$  – константа, которая может принимать различные значения для функций  $\bar{e}_\rho$  и  $\bar{h}_\rho$ .

Из **T5-2.1** и (2.13, 14, 11) находим:

$$j_\rho = \frac{2}{\rho} e_\varphi - \frac{\mu}{c} \omega \bar{h}_\rho = \frac{2A}{\rho^2} - \frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}, \quad (15)$$

$$\bar{j}_\rho = \frac{\mu}{c} \omega h_\rho = -\frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho} (G + 2A \cdot \ln(\rho)). \quad (16)$$

Из **T5-2.2** и (2.14, 14, 11) находим:

$$m_\rho = \frac{2}{\rho} h_\varphi + \frac{\varepsilon}{c} \omega \bar{e}_\rho = -\frac{2B}{\rho^2} + \frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}, \quad (17)$$

$$\bar{m}_\rho = \frac{\varepsilon}{c} \omega e_\rho = -\frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho} (G + 2A \cdot \ln(\rho)). \quad (18)$$

### Таблицы

Таблица 1.

1	2	3	4
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\frac{T(E_\varphi)}{\rho} - \frac{i\alpha E_\theta}{\rho \sin(\theta)}$
5	$\text{rot}_\rho(H)$	$\frac{H_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\frac{T(H_\varphi)}{\rho} - \frac{i\alpha H_\theta}{\rho \sin(\theta)}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$\frac{\partial E_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$	$\frac{i\alpha E_\rho}{\rho \sin(\theta)} - \psi(E_\varphi)$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\rho \partial \varphi}$	$\psi(E_\theta) - \frac{i\alpha E_\rho}{\rho}$
6	$\text{rot}_\theta(H)$	$\frac{\partial H_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{H_\varphi}{\rho} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho}$	$\frac{i\alpha H_\rho}{\rho \sin(\theta)} - \psi(H_\varphi)$
7	$\text{rot}_\varphi H$	$\frac{H_\theta}{\rho} + \frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\rho \partial \varphi}$	$\psi(H_\theta) - \frac{i\alpha H_\rho}{\rho}$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\psi(E_\rho) + \frac{T(E_\theta)}{\rho} + \frac{i\alpha E_\varphi}{\rho \sin(\theta)}$

8	$\text{div}(H)$	$\frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{H_\theta}{\rho \sin(\theta)} +$ $+ \frac{\partial H_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\psi(H_\rho) + \frac{T(H_\theta)}{\rho} + \frac{i\alpha H_\varphi}{\rho \sin(\theta)}$
---	-----------------	---	---

Таблица 1А.

1	2	3
1.	$\text{rot}_\rho(E) + \frac{\mu \partial H_\rho}{c \partial t} - M_\rho = 0$	$\frac{T(E_\varphi)}{\rho} + \frac{i\omega \mu H_\rho}{c} - M_\rho = 0$
5.	$\text{rot}_\rho(H) - \frac{\varepsilon \partial E_\rho}{c \partial t} - J_\rho = 0$	$\frac{T(H_\varphi)}{\rho} - \frac{i\omega \varepsilon E_\rho}{c} - J_\rho = 0$
2.	$\text{rot}_\theta(E) + \frac{\mu \partial H_\theta}{c \partial t} = 0$	$-\Psi(E_\varphi) + \frac{i\omega \mu H_\theta}{c} = 0$
3.	$\text{rot}_\varphi(E) + \frac{\mu \partial H_\varphi}{c \partial t} = 0$	$\Psi(E_\theta) + \frac{i\omega \mu H_\varphi}{c} = 0$
6.	$\text{rot}_\theta(H) - \frac{\varepsilon \partial E_\theta}{c \partial t} = 0$	$-\Psi(H_\varphi) - \frac{i\omega \varepsilon E_\theta}{c} = 0$
7.	$\text{rot}_\varphi(H) - \frac{\varepsilon \partial E_\varphi}{c \partial t} = 0$	$\Psi(H_\theta) - \frac{i\omega \varepsilon E_\varphi}{c} = 0$
4.	$\text{div}(E) = 0$	$\Psi(E_\rho) + \frac{T(E_\theta)}{\rho} = 0$
8.	$\text{div}(H) = 0$	$\Psi(H_\rho) + \frac{T(H_\theta)}{\rho} = 0$

Таблица 2.

1	2
	$E_\theta = e_\theta \sin(\theta) \cos(\chi\rho + \omega t)$
	$E_\varphi = e_\varphi \sin(\theta) \sin(\chi\rho + \omega t)$
	$E_\rho = \cos(\theta)(\bar{e}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) + \underline{\bar{e}}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$J_\rho = \cos(\theta)(\bar{j}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) + \underline{\bar{j}}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$H_\theta = h_\theta \sin(\theta) \sin(\chi\rho + \omega t)$
	$H_\varphi = h_\varphi \sin(\theta) \cos(\chi\rho + \omega t)$
	$H_\rho = \cos(\theta)(\bar{h}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) + \underline{\bar{h}}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$M_\rho = \cos(\theta)(\bar{m}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) + \underline{\bar{m}}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t))$

Таблица 2i.

1	2
	$i\omega E_\theta = \omega \sin(\theta)(-e_\theta \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega E_\varphi = \omega \sin(\theta)(e_\varphi \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega E_\rho = \omega \cos(\theta)(-e_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) + \underline{\bar{e}}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega H_\theta = \omega \sin(\theta)(h_\theta \cos(\chi\rho + \omega t))$

Глава 8. Уравнения Максвелла в сферических координатах

	$i\omega H_\varphi = \omega \sin(\theta)(-h_\varphi \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega H_\rho = \omega \cos(\theta)(h_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) - \bar{h}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t))$

Таблица 2Р.

1	2
	$\frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta)(-e_\theta \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta)(e_\varphi \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} = \chi \cos(\theta)(-e_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{e}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta)(-h_\varphi \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta)(-h_\varphi \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} = \chi \cos(\theta)(h_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) - \bar{h}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t))$

Таблица 2Ψ.

	2
	$\Psi(E_\theta) = \frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left( \frac{1}{\rho}(e_\theta \cos) + \chi(-e_\theta \sin) + (\bar{e}_\theta \cos) \right)$
	$\Psi(E_\varphi) = \frac{E_\varphi}{\rho} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left( \frac{1}{\rho}(e_\varphi \sin) + \chi(e_\varphi \cos) + (\bar{e}_\varphi \sin) \right)$
	$\Psi(E_\rho) = \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} = \cos(\theta) \cdot$ $\cdot \left( \frac{1}{\rho}(e_\rho \cos) + \frac{1}{\rho}(\bar{e}_\rho \sin) + \chi(e_\rho \cos) - \chi(e_\rho \sin) + (\bar{e}_\rho \cos) + (\bar{e}_\rho \sin) \right)$
	$\Psi(H_\theta) = \frac{H_\theta}{\rho} + \frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left( \frac{1}{\rho}(h_\theta \sin) + \chi(h_\theta \cos) + (\bar{h}_\theta \sin) \right)$
	$\Psi(H_\varphi) = \frac{H_\varphi}{\rho} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left( \frac{1}{\rho}(h_\varphi \cos) + \chi(-h_\varphi \sin) + (\bar{h}_\varphi \cos) \right)$
	$\Psi(H_\rho) = \frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} = \cos(\theta) \cdot$ $\cdot \left( \frac{1}{\rho}(h_\rho \sin) + \frac{1}{\rho}(\bar{h}_\rho \cos) - \chi(\bar{h}_\rho \sin) + \chi(h_\rho \cos) + (\bar{h}_\rho \sin) + (\bar{h}_\rho \cos) \right)$

Таблица 4.

1	2
1.	$\frac{2}{\rho}(e_\varphi \sin) - \frac{\mu}{c}\omega(\bar{h}_\rho \sin) = j_\rho \sin$ $\frac{\mu}{c}\omega(h_\rho \cos) = \bar{j}_\rho \cos$
5.	$\frac{2}{\rho}(h_\varphi \cos) + \frac{\varepsilon}{c}\omega(\bar{e}_\rho \cos) = m_\rho \cos$ $\frac{\varepsilon}{c}\omega(e_\rho \sin) = \bar{m}_\rho \sin$

2.	$-\left(\frac{1}{\rho}(e_{\varphi}si) + \chi(e_{\varphi}co) + (\overline{e_{\varphi}}si)\right) + \frac{\mu}{c}\omega(h_{\theta}co) = 0$
3.	$\left(\frac{1}{\rho}(e_{\theta}co) + \chi(-e_{\theta}si) + (\overline{e_{\theta}}co)\right) + \frac{\mu}{c}\omega(-h_{\varphi}si) = 0$
6.	$-\left(\frac{1}{\rho}(h_{\varphi}co) + \chi(-h_{\varphi}si) + (\overline{h_{\varphi}}co)\right) - \frac{\varepsilon}{c}\omega(-e_{\theta}si) = 0$
7.	$\left(\frac{1}{\rho}(h_{\theta}si) + \chi(h_{\theta}co) + (\overline{h_{\theta}}si)\right) - \frac{\varepsilon}{c}\omega(e_{\varphi}co) = 0$
4.	$\left(\frac{1}{\rho}(e_{\rho}co) + \chi(\overline{e_{\rho}}co) + (\overline{e_{\rho}}co)\right) + \frac{2}{\rho}(e_{\theta}co) = 0$ $\left(\frac{1}{\rho}(\overline{e_{\rho}}si) - \chi(e_{\rho}si) + (\overline{e_{\rho}}si)\right) = 0$
8.	$\left(\frac{1}{\rho}(h_{\rho}si) - \chi(\overline{h_{\rho}}si) + (\overline{h_{\rho}}si)\right) + \frac{2}{\rho}(h_{\theta}si) = 0$ $\left(\frac{1}{\rho}(\overline{h_{\rho}}co) + \chi(h_{\rho}co) + (\overline{h_{\rho}}co)\right) = 0$

Таблица 5

1	2
1.	$\frac{2}{\rho}e_{\varphi} - \frac{\mu}{c}\omega\overline{h_{\rho}} = j_{\rho}; \frac{\mu}{c}\omega h_{\rho} = \overline{j_{\rho}}$
5.	$\frac{2}{\rho}h_{\varphi} + \frac{\varepsilon}{c}\omega\overline{e_{\rho}} = m_{\rho}; \frac{\varepsilon}{c}\omega e_{\rho} = \overline{m_{\rho}}$
2.	$\overline{e_{\varphi}} = -\frac{1}{\rho}e_{\varphi}; -\chi e_{\varphi} + \frac{\mu\omega}{c}h_{\theta} = 0$
6.	$\overline{h_{\varphi}} = -\frac{1}{\rho}h_{\varphi}; \chi h_{\varphi} + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_{\theta} = 0$
3.	$\overline{e_{\theta}} = -\frac{1}{\rho}e_{\theta}; -\chi e_{\theta} - \frac{\mu\omega}{c}h_{\varphi} = 0$
7.	$\overline{h_{\theta}} = -\frac{1}{\rho}h_{\theta}; \chi h_{\theta} - \frac{\varepsilon\omega}{c}e_{\varphi} = 0$
2.	$\overline{e_{\varphi}} = -\chi e_{\varphi} - \frac{1}{\rho}e_{\varphi} + \frac{\mu\omega}{c}h_{\varphi}$
6.	$\overline{h_{\varphi}} = \chi h_{\varphi} - \frac{1}{\rho}h_{\varphi} - \frac{\varepsilon\omega}{c}e_{\theta}$
3.	$\overline{e_{\theta}} = \chi e_{\theta} - \frac{1}{\rho}e_{\theta} - \frac{\mu\omega}{c}h_{\varphi}$
7.	$\overline{h_{\theta}} = -\chi h_{\theta} - \frac{1}{\rho}h_{\theta} + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_{\varphi}$
4.	1 $\left(\frac{1}{\rho}e_{\rho} + \chi\overline{e_{\rho}} + \overline{e_{\rho}}\right) + \frac{2}{\rho}e_{\theta} = 0$ 2 $\left(\frac{1}{\rho}\overline{e_{\rho}} - \chi e_{\rho} + \overline{e_{\rho}}\right) = 0$
8.	1 $\left(\frac{1}{\rho}h_{\rho} - \chi\overline{h_{\rho}} + \overline{h_{\rho}}\right) + \frac{2}{\rho}h_{\theta} = 0$ 2 $\left(\frac{1}{\rho}\overline{h_{\rho}} + \chi h_{\rho} + \overline{h_{\rho}}\right) = 0$

## Третье решение. Уравнения Максвелла в сферических координатах для электропроводной среды.

### 1. Приближенное решение

Выше во «Втором решении» было рассмотрено решение уравнений Максвелла для сферы в среде, у которой есть отличные от единицы величины  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Далее предположим еще, что среда имеет некоторую электропроводность  $\sigma$ . В этом случае уравнение вида

$$\operatorname{rot} H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

заменяется на уравнение вида

$$\operatorname{rot} H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \sigma E = 0 \quad (2)$$

Мы будем искать решение в виде функций  $E$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $M$ , представленных в таблице **T2-2** (см. «Второе решение») и перепишем ее в комплексном виде как таблицы **T1-2**. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{i\omega\varepsilon}{c} E - \sigma E = 0 \quad (3)$$

или

$$\operatorname{rot}(H) - wE = 0, \quad (4)$$

где комплексное число

$$w = \frac{i\omega\varepsilon}{c} + \sigma. \quad (5)$$

Перепишем теперь таблицу **T1A** (см. «Второе решение») в комплексном виде в таблицу **T2** с учетом формулы (4). Будем полагать, что токи проводимости существенно больше токов смещения на окружностях сферы, т.е. на окружностях можно учитывать только токи проводимости. При этом в таблице **T2-3** мы получим систему из 8-ми алгебраических уравнений с 8-ю комплексными неизвестными  $E, H, J_\rho, M_\rho$ .

Решение может быть выполнено в следующем порядке.

1. Решается системы двух уравнений T2-2 и T2-7 относительно неизвестных  $E_\varphi$  и  $H_\theta$ .



2. Решается системы двух уравнений Т2-3 и Т2-6 относительно неизвестных  $E_\theta$  и  $H_\phi$ .
3. При данных  $E_\theta$  и  $H_\phi$ , решаются уравнения Т2-4 и Т2-8 и определяются неизвестные  $E_\rho$  и  $H_\rho$  соответственно.
4. При данных  $E_\phi$  и  $H_\rho$  решается уравнение Т2-1 и определяется неизвестное  $M_\rho$ .
5. При данных  $H_\phi$  и  $E_\rho$  решается уравнение Т2-1 и определяется неизвестное  $J_\rho$ .

## 2. Точное решение

Рассмотрим теперь таблицу **Т2**, в которой указаны все 6 токов смещения. Эта таблица содержит 8 алгебраических уравнений с 12-ю комплексными неизвестными  $E$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $M$  и является переопределенной.

Рассмотрим уравнения потоков энергии (3.4) из раздела «Второе решение»:

$$S_\phi = \eta(E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta), \quad (1)$$

$$S_\theta = \eta(E_\rho H_\phi - E_\phi H_\rho), \quad (2)$$

$$S_\rho = \eta(E_\phi H_\theta - E_\theta H_\phi). \quad (3)$$

Из закона сохранения энергии следует, что поток энергии не может изменяться во времени. Это означает, что величины (1-3) должны быть реальными. Следовательно,

$$\text{Im}(E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta) = 0, \quad (4)$$

$$\text{Im}(E_\rho H_\phi - E_\phi H_\rho) = 0, \quad (5)$$

$$\text{Im}(E_\phi H_\theta - E_\theta H_\phi) = 0. \quad (6)$$

Будем полагать еще, что известна одна из напряженностей, например,

$$e_\phi = A/\rho, \quad (7)$$

где  $A$  – константа. При этом мы имеем систему 12 нелинейных уравнений **Т3-3** и (4-7) с 12-ю комплексными неизвестными  $E$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $M$ . Методы решения таких систем известны.

## Таблицы

Таблица 1.

1	2
	$E_\theta = e_\theta \sin(\theta)$
	$E_\varphi = ie_\varphi \sin(\theta)$
	$E_\rho = \cos(\theta)(e_\rho + i\bar{e}_\rho)$
	$J_\rho = \cos(\theta)(ij_\rho + \bar{j}_\rho)$
	$H_\theta = ih_\theta \sin(\theta)$
	$H_\varphi = h_\varphi \sin(\theta)$
	$H_\rho = \cos(\theta)(ih_\rho + \bar{h}_\rho)$
	$M_\rho = \cos(\theta)(m_\rho + i\bar{m}_\rho)$

Таблица 2.

1	2	3
1.	$rot_\rho(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_\rho - M_\rho = 0$	$\frac{T(E_\varphi)}{\rho} + \frac{i\omega\mu H_\rho}{c} - M_\rho = 0$
5.	$rot_\rho(H) - wE_\rho - J_\rho = 0$	$\frac{T(H_\varphi)}{\rho} - wE_\rho - J_\rho = 0$
2.	$rot_\theta(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_\theta = 0$	$-\Psi(E_\varphi) + \frac{i\omega\mu H_\theta}{c} = 0$
7.	$rot_\varphi(H) - wE_\varphi = 0$	$\Psi(H_\theta) - wE_\varphi = 0$
3.	$rot_\varphi(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_\varphi = 0$	$\Psi(E_\theta) + \frac{i\omega\mu H_\varphi}{c} = 0$
6.	$rot_\theta(H) - wE_\theta = 0$	$-\Psi(H_\varphi) - wE_\theta = 0$
4.	$div(E) = 0$	$\Psi(E_\rho) + \frac{T(E_\theta)}{\rho} = 0$
8.	$div(H) = 0$	$\Psi(H_\rho) + \frac{T(H_\theta)}{\rho} = 0$

Таблица 3.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1.	$rot_{\rho}(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_{\rho} - M_{\rho} = 0$	$\frac{T(E_{\varphi})}{\rho} + \frac{i\omega\mu H_{\rho}}{c} - M_{\rho} = 0$
5.	$rot_{\rho}(H) - wE_{\rho} - J_{\rho} = 0$	$\frac{T(H_{\varphi})}{\rho} - wE_{\rho} - J_{\rho} = 0$
2.	$rot_{\theta}(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_{\theta} - M_{\theta} = 0$	$-\Psi(E_{\varphi}) + \frac{i\omega\mu H_{\theta}}{c} - M_{\theta} = 0$
7.	$rot_{\varphi}(H) - wE_{\varphi} - J_{\varphi} = 0$	$\Psi(H_{\theta}) - wE_{\varphi} = 0$
3.	$rot_{\varphi}(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_{\varphi} - M_{\varphi} = 0$	$\Psi(E_{\theta}) + \frac{i\omega\mu H_{\varphi}}{c} - M_{\varphi} = 0$
6.	$rot_{\theta}(H) - wE_{\theta} - J_{\theta} = 0$	$-\Psi(H_{\varphi}) - wE_{\theta} - J_{\theta} = 0$
4.	$div(E) = 0$	$\Psi(E_{\rho}) + \frac{T(E_{\theta})}{\rho} = 0$
8.	$div(H) = 0$	$\Psi(H_{\rho}) + \frac{T(H_{\theta})}{\rho} = 0$

# Глава 8а. Решение уравнений Максвелла для сферического конденсатора

---

## Оглавление

1. Введение \ 1
2. Уравнения Максвелла в сферических координатах \ 1
3. Электрические и магнитные напряженности \ 4
4. Электромагнитная волна в заряженном сферическом \ 6

### 1. Введение

В главах 2 и 7 рассмотрена электромагнитная волна в конденсаторе, который включен в цепь переменного или постоянного тока. Ниже рассматривается сферический конденсатор в цепи синусоидального тока или постоянного тока. Обкладками такого конденсатора являются две сферы с общим центром и радиусами  $R_2 > R_1$ .

### 2. Уравнения Максвелла в сферических координатах

Решение уравнений Максвелла в сферических координатах получено в главе 8.

Радиальная координата изменяется в пределах

$$R_1 < \rho < R_2. \quad (1)$$

При ограниченном  $\rho$  и малой величине  $\chi$  таблица 2 в главе 8 (второе решение) примет вид таблицы 1.

Далее перепишем эту таблицу в комплексном виде – см. таблицы T2-2 и T2-3, где  $|E_\rho|$  – модуль напряженности  $E_\rho$  (включающий зависимость от  $\theta$ ),  $\psi$  – аргумент напряженности  $E_\rho$  и т.п.

Таблица 1.

1	2
	$E_\theta = e_\theta \sin(\theta) \cos(\omega t)$
	$E_\varphi = e_\varphi \sin(\theta) \sin(\omega t)$
	$E_\rho = \cos(\theta)(e_\rho \cos(\omega t) + \bar{e}_\rho \sin(\omega t))$
	$J_\rho = \cos(\theta)(j_\rho \sin(\omega t) + \bar{j}_\rho \cos(\omega t))$
	$H_\theta = h_\theta \sin(\theta) \sin(\omega t)$
	$H_\varphi = h_\varphi \sin(\theta) \cos(\omega t)$
	$H_\rho = \cos(\theta)(h_\rho \sin(\omega t) + \bar{h}_\rho \cos(\omega t))$
	$M_\rho = \cos(\theta)(m_\rho \cos(\omega t) + \bar{m}_\rho \sin(\omega t))$

Таблица 2.

1	2	
	$E_\theta = e_\theta \sin(\theta)$	$E_\theta =  E_\theta $
	$E_\varphi = ie_\varphi \sin(\theta)$	$E_\varphi = i E_\varphi $
	$E_\rho = \cos(\theta)(e_\rho + i\bar{e}_\rho)$	$E_\rho =  E_\rho  \cos(\psi)$
	$J_\rho = \cos(\theta)(ij_\rho + \bar{j}_\rho)$	$J_\rho =  J_\rho  \cos(\psi)$
	$H_\theta = ih_\theta \sin(\theta)$	$H_\theta = i H_\theta $
	$H_\varphi = h_\varphi \sin(\theta)$	$H_\varphi =  H_\varphi $
	$H_\rho = \cos(\theta)(ih_\rho + \bar{h}_\rho)$	$H_\rho =  H_\rho  \cos(\psi)$
	$M_\rho = \cos(\theta)(m_\rho + i\bar{m}_\rho)$	$M_\rho =  M_\rho  \cos(\psi)$

Важно отметить, что в данный момент потенциал на сфере данного радиуса меняется как функция  $\sin(\theta)$ . Внешняя и внутренняя металлические поверхности находятся на постоянном радиусе. Следовательно, потенциал на металлической обкладке сферического радиуса различен в разных точках сферы. Следовательно, далее, по обкладкам сферического конденсатора протекают токи.

Дополнительным аргументом в пользу существования таких токов является существование теллурических токов [53]. Отсутствует общепринятое объяснение их причины.

Далее мы будем ссылаться на формулы из главы 8 (второе решение) в виде: (8."номер\_радела"."номер\_формулы").

Из (8.2.16, 8.2.17) находим:

$$|E_\rho| = \sqrt{(e_\rho)^2 + (\bar{e}_\rho)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho))\right)^2 + \left(\frac{D}{\rho}\right)^2} = \frac{1}{\rho} \sqrt{(G + 2A \cdot \ln(\rho))^2 + D^2}, \quad (2)$$

$$tg(\Psi_{e\rho}) = \frac{\bar{e}_\rho}{e_\rho} = D/(G + 2A \cdot \ln(\rho)) \quad (3)$$

Полностью аналогичные формулы существуют для  $H_\rho$ , но для  $\Psi_{h\rho}$  формула имеет вид

$$tg(\Psi_{h\rho}) = \frac{h_\rho}{h_\rho} = (G + 2A \cdot \ln(\rho))/D, \quad (6)$$

что следует из таблицы **T2-2**. Следовательно,

$$tg(\Psi_{h\rho}) = 1/tg(\Psi_{e\rho}). \quad (7)$$

Далее из (8.2.18, 8.2.19) находим:

$$|J_\rho| = \sqrt{(j_\rho)^2 + (\bar{j}_\rho)^2} = \sqrt{\left(\frac{2A}{\rho^2} - \frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho))\right)^2}, \quad (8)$$

$$tg(\Psi_{j\rho}) = \frac{j_\rho}{\bar{j}_\rho} = \left(\frac{2A}{\rho^2} - \frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}\right) / \left(-\frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho))\right). \quad (9)$$

Наконец, из (8.2.20, 8.2.21) находим:

$$|M_\rho| = \sqrt{(m_\rho)^2 + (\bar{m}_\rho)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2B}{\rho^2} + \frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho))\right)^2}, \quad (10)$$

$$tg(\Psi_{m\rho}) = \frac{\bar{m}_\rho}{m_\rho} = \left(-\frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho))\right) / \left(-\frac{2B}{\rho^2} + \frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}\right). \quad (11)$$

Из полученных формул следует, что сферический конденсатор должен обладать магнитными свойствами, аналогичными его электрическим свойствам.

При известном напряжении со среднеквадратичным значением  $U$  на конденсаторе из (2) находим:

$$U = |E_\rho(R_2)| - |E_\rho(R_1)| = \frac{1}{R_2} \sqrt{(G + 2A \cdot \ln(R_2))^2 + D^2} - \frac{1}{R_1} \sqrt{(G + 2A \cdot \ln(R_1))^2 + D^2} \quad (12)$$

В частности, при  $\ln(R_2) \approx \ln(R_1)$  получаем:

$$U = K \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (13)$$

где  $K$  – некоторая константа. Следовательно, амплитуда потенциала на внешней сфере конденсатора меньше амплитуды потенциала на внутренней сфере конденсатора.

### 3. Электрические и магнитные напряженности

Рассмотрим на сфере радиуса  $\rho$  точку  $T$  с координатами  $\varphi, \theta$ . Векторы  $H_\varphi$  и  $H_\theta$ , исходящие из этой точки, лежат в плоскости  $P$ , касательной к этой сфере в этой точке  $T(\varphi, \theta)$  - см. рис. 2. Эти векторы перпендикулярны друг другу. Следовательно, в каждой точке  $(\varphi, \theta)$  суммарный вектор

$$H_{\varphi\theta} = H_\varphi + H_\theta \quad (1)$$

лежит в плоскости  $P$  и направлен под углом  $\psi$  к линии параллели (вдоль координаты  $\theta$ ). Как следует из табл. 2 и (8.2.14), модуль этого вектора  $|H_{\varphi\theta}|$  и угол  $\psi$  определяются следующими формулами:

$$H_{\varphi\theta} = |H_{\varphi\theta}| \cos(\psi) \quad (2)$$

$$|H_{\varphi\theta}| = \frac{B}{\rho} \sin(\theta) \quad (3)$$

$$\psi = \text{arcctg}(\chi\rho + \omega t) \quad (4)$$

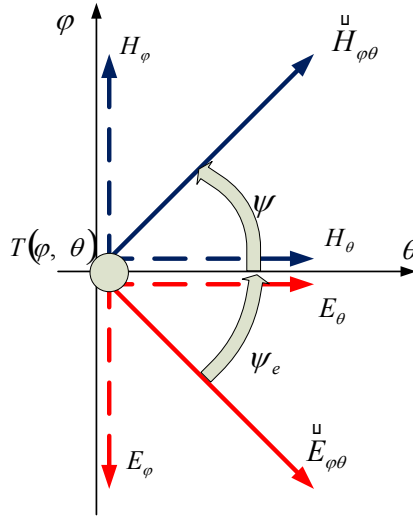


Рис. 2 (Sfera110.vsd).

Найдем напряженности  $H_{\varphi\theta}$  на полюсах сферы, где

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \sin(\theta) = \pm 1, \quad \rho = R. \quad (5)$$

Из (2-4) следует, что на полюсах

$$|H_{\varphi\theta}| = \pm \frac{B}{R} \quad (6)$$

и между полюсами существует магнитная напряженность

$$H_{pp} = \frac{2B}{R} \cos(\chi R + \omega t) \quad (7)$$

Подобные соотношения существуют и для векторов  $E_\varphi$  и  $E_\theta$ .  
 В каждой точке  $(\varphi, \theta)$  суммарный вектор

$$E_{\varphi\theta} = E_\varphi + E_\theta \quad (8)$$

лежит в плоскости  $P$  и направлен под углом  $\psi_e$  к линии параллели (вдоль координаты  $\theta$ ). Как следует из табл. 2 и (8.2.13), модуль этого вектора и угол  $\psi_e$  определяются следующими формулами:

$$E_{\varphi\theta} = |E_{\varphi\theta}| \cos(\psi_e) \quad (9)$$

$$|E_{\varphi\theta}| = \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \quad (10)$$

$$\psi_e = \arctg(\chi\rho + \omega t) \quad (11)$$

Угол между векторами  $H_{\varphi\theta}$  и  $E_{\varphi\theta}$  в плоскости  $P$  является прямым.

Следовательно, в сферическом конденсаторе можно рассматривать только один вектор электрической напряженности  $E_{\varphi\theta}$  и только один вектор магнитной напряженности  $H_{\varphi\theta}$ . Поскольку эти векторы лежат на сфере, будем называть их сферическими.

Угол  $\psi$  одинаков для всех векторов  $H_{\varphi\theta}$  при данном радиусе  $\rho$ . Это означает, что на сфере с радиусом  $\rho$  направления всех векторов  $H_{\varphi\theta}$  составляют со всеми параллелями один и тот же угол  $\psi$ . Это означает, в свою очередь, что существует магнитная экваториальная плоскость, наклоненная к математической экваториальной плоскости на угол  $\psi$ , магнитная ось, магнитные полюса и магнитные меридианы, по которым направлены векторы  $H_{\varphi\theta}$  - см. рис. 4, где тонкими линиями обозначена математическая меридиональная сетка, толстыми линиями — магнитная меридиональная сетка, показаны математическая  $mm$ , магнитная  $aa$  и электрическая  $bb$  оси. Важно отметить, что магнитная  $aa$  и электрическая  $bb$  оси и, вообще, векторы  $E_{\varphi\theta}$  и  $H_{\varphi\theta}$  перпендикулярны.



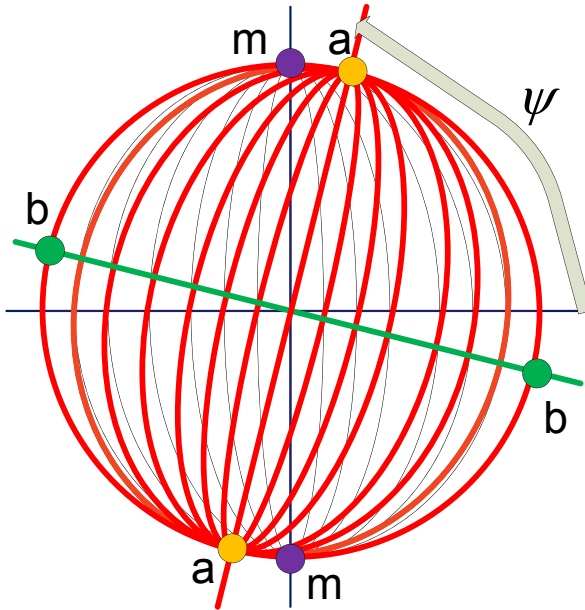


Рис. 4 (Sfera133.vsd).

При  $\frac{\omega}{c} \approx 0$  магнитная ось совпадает с математической.

Сферические векторы зависят от  $\sin(\theta)$ . Радиальные векторы зависят от  $\cos(\theta)$  - см. табл. 2. Поэтому в точках, где сферические напряженности равны нулю, существуют только радиальные напряженности.

#### 4. Электромагнитная волна в заряженном сферическом конденсаторе

Решение уравнений Максвелла для заряжаемого плоского конденсатора (см. главу 7) является следствием решения этих уравнений для плоского конденсатора в цепи синусоидального тока (см. главу 3). Здесь мы воспользуемся методом, изложенным в главе 7, при решении уравнений Максвелла для заряжаемого сферического конденсатора.

Для заряжаемого сферического конденсатора система уравнений Максвелла, представленная в таблице 1А-2 главы 8, (второе решение), должна быть изменена, а именно, вместо уравнения (4)  $\text{div}(E)=0$  должно быть использовано уравнение вида

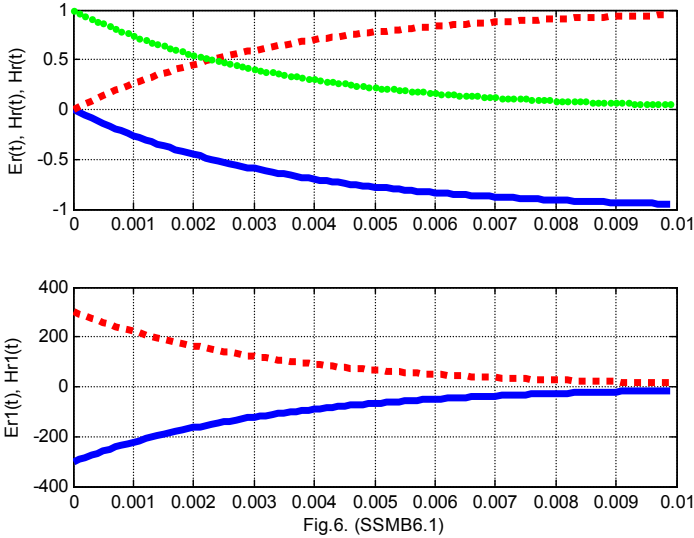
$$\text{div}(E)=Q(t), \quad (1)$$

где  $Q(t)$  - заряд на обкладке конденсатора, который появляется и возрастает в процессе заряда. Полученная таким образом система уравнений в частных производных имеет решение, которое является суммой частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы уравнений. Однородная система представлена в указанной таблице, т.е. отличается от вновь полученной системы только отсутствием члена  $Q(t)$ . Частное решение при данном  $t$  является решением, связывающем электрическую напряженность  $E_\rho(t)$  в зазоре конденсатора и заряд  $Q(t)$ . Если  $E_\rho(t)$  меняется во времени, то должно существовать решение системы уравнений из указанной таблицы при данном  $E_\rho(t)$ . Именно это решение мы будем искать далее.

Таблица 6.

1	2
	$E_\theta = e_\theta \sin(\theta)(1 - \exp(\omega t))$
	$E_\varphi = e_\varphi \sin(\theta)(\exp(\omega t) - 1)$
	$E_\rho = \cos(\theta)(\underline{e}_\rho(1 - \exp(\omega t)) + \bar{e}_\rho(\exp(\omega t) - 1))$
	$J_\rho = \cos(\theta)(\underline{j}_\rho(\exp(\omega t) - 1) + \bar{j}_\rho(1 - \exp(\omega t)))$
	$H_\theta = h_\theta \sin(\theta)(\exp(\omega t) - 1)$
	$H_\varphi = h_\varphi \sin(\theta)(1 - \exp(\omega t))$
	$H_\rho = \cos(\theta)(\underline{h}_\rho(\exp(\omega t) - 1) + \bar{h}_\rho(1 - \exp(\omega t)))$
	$M_\rho = \cos(\theta)(\underline{m}_\rho(1 - \exp(\omega t)) + \bar{m}_\rho(\exp(\omega t) - 1))$

Рассмотрим напряженности в виде функций, представленных в табл. 6. Эти функции отличаются от приведенных в табл. 1 только видом зависимости от времени: в табл. 3 эти зависимости у функций  $E$ ,  $H$  имеет вид функций  $\sin(\omega t)$ ,  $\cos(\omega t)$  соответственно, а в табл. 6 эти зависимости у функций  $E$ ,  $H$  имеет вид функций  $(\exp(\omega t) - 1)$ ,  $(1 - \exp(\omega t))$  соответственно. Несмотря на указанную замену, при этом решение уравнений Максвелла остается неизменным. Здесь константа  $\omega = -1/\tau$ , где  $\tau$  - постоянная времени в цепи заряда конденсатора.



На рис. 6 показаны напряженности и их производные по времени, а также ток смещения, как функции времени, при  $\omega = -300$ :  $H_\rho$  - сплошные линии,  $E_\rho$  - пунктирные линии,  $J_\rho$  - точечная линия. Можно убедиться, что амплитуды всех напряженностей при  $t \Rightarrow \infty$  одновременно стремятся к постоянному значению, а амплитуда тока стремится к нулю. Это соответствует заряду конденсатора через постоянное сопротивление.

Таким образом, можно говорить, что сферический конденсатор представляет собой устройство, в котором присутствует и электрическое и магнитное поле. Таким образом, конденсатор – устройство, эквивалентное магниту и, одновременно, электрету, оси которых перпендикулярны.

По аналогии с разделом 3 в главе 8 (второе решение) рассмотрим поток радиальной энергии в заряжаемом сферическом конденсаторе. Для этого в формуле (8.3.4а) необходимо произвести следующую замену функций:

$$\sin(q) \Rightarrow (\exp(\omega t) - 1), \tag{2}$$

$$\cos(q) \Rightarrow (1 - \exp(\omega t)). \tag{3}$$

Тогда получим:

$$S_\rho = \frac{A}{\rho} \sin(\theta) (\exp(\omega t) - 1) \frac{B}{\rho} \sin(\theta) (\exp(\omega t) - 1) - \frac{A}{\rho} \sin(\theta) (1 - \exp(\omega t)) \frac{-B}{\rho} \sin(\theta) (1 - \exp(\omega t))$$

$$S_p = \frac{2AB}{\rho^2} \sin^2(\theta) (1 - \exp(\omega t))^2 \Rightarrow 0 \quad (4)$$

Таким образом, решение уравнений Максвелла для заряжаемого конденсатора и для конденсатора в цепи синусоидального тока отличаются только тем, что в первом случае присутствуют экспоненциальные функции времени, а во втором - синусоидальные.

Итак, показано, что в заряжаемом сферическом конденсаторе распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решением уравнений Максвелла. Показано, что в заряженном конденсаторе существует стационарный поток электромагнитной энергии, а та энергия, которая содержится в конденсаторе и которую принято считать электрической потенциальной энергией, является электромагнитной энергией, хранящейся в конденсаторе в виде стационарного потока.

# Глава 8b. Новый подход к проектированию антенн

---

## Оглавление

1. О недостатках существующих методов \ 1
2. Новый подход \ 2
- Приложение 1 \ 3

### **1. О недостатках существующих методов**

Решение уравнений Максвелла для сферической волны необходимо для проектирования антенн. Такая задача возникает при решении уравнений электродинамики для элементарного электрического диполя – вибратора. Решение этой задачи известно и именно на основе этого решения строятся антенны. Вместе с тем это решение обладает рядом недостатков, в частности [107-110],

1. закон сохранения энергии выполняется только в среднем,
2. решение неоднородно и практически необходимо разбивать его на отдельные зоны (как правило, ближнюю, среднюю и дальнюю), в которых решения оказываются полностью различными,
3. в ближней зоне отсутствует поток энергии с реальным значением
4. магнитная и электрическая составляющие синфазны,
5. в ближней зоне решение не является волновым (т.е. расстояние не является аргументом тригонометрической функции),
6. известное решение НЕ удовлетворяет системе уравнений Максвелла (решение, удовлетворяющее одному уравнению системы, нельзя считать решением системы уравнений).

На рис. 1 [110] показана картина силовых линий электрического поля, построенная на основе известного решения. Очевидно, что такая картина не может существовать в сферической волне.

Вдали от вибратора – в т.н. дальней зоне, где продольными (направленными вдоль радиуса) электрической и магнитной напряженностями можно пренебречь, решение задачи упрощается. Но и там известное решение обладает рядом недостатков [107-110]. Основные недостатки этого решения (см. приложение 1) состоят в том, что

1. закон сохранения энергии выполняется только в среднем (по времени),
2. магнитная и электрическая составляющие синфазны,
3. в системе уравнений Максвелла в известном решении выполняется только одно уравнение из восьми.

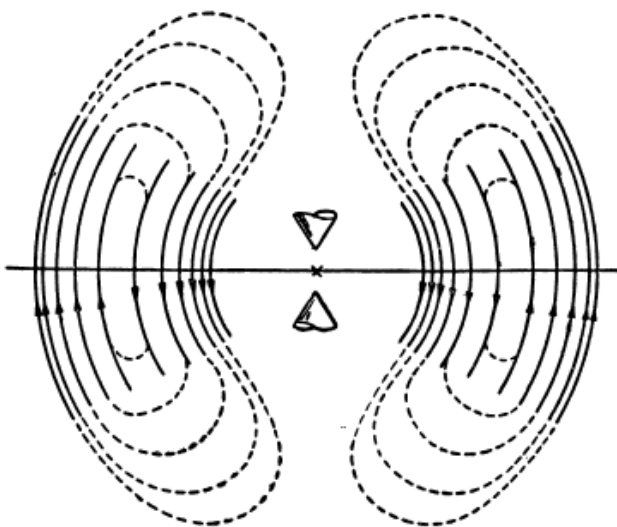


Рис. 1.

## 2. Новый подход

Указанные недостатки являются следствием того, что до настоящего времени не удавалось решить уравнения Максвелла для сферических координат. Известное решение получено после разбиения всей области на т.н. ближние, средние и дальние зоны и после применения множества предположений и допущений, различных для каждой из этих зон.

Практически эти недостатки известного решения означают, что они (математические решения) нестрого описывают реальные характеристики технических устройств. Строгое решение, полученное в главе 8, будучи примененным в системах проектирования таких устройств, безусловно, должно повысить их качество.

## Приложение 1

Известное решение имеет вид [107, 108]:

$$E_{\theta} = e_{\theta} \frac{1}{\rho} \sin(\theta) \sin(\omega t - \chi \rho), \quad (1)$$

$$H_{\varphi} = h_{\varphi} \frac{1}{\rho} \sin(\theta) \sin(\omega t - \chi \rho), \quad (2)$$

где  $k_{e\theta} = \frac{\chi^2 l}{4\pi\omega\varepsilon\varepsilon_0}$ ,  $k_{h\varphi} = \frac{\chi l}{4\pi}$ , где  $l$ ,  $I$  - длина и ток вибратора.

Заметим, что

$$\frac{e_{\theta}}{h_{\varphi}} = \frac{\chi}{\omega\varepsilon} \quad (3)$$

Таблица 2.

1	2
1.	$\text{rot}_{\rho} H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_{\rho}}{\partial t} = 0$
2.	$\text{rot}_{\theta} H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_{\theta}}{\partial t} = 0$
3.	$\text{rot}_{\varphi} H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial t} = 0$
4.	$\text{rot}_{\rho} E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial t} = 0$
5.	$\text{rot}_{\theta} E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{\theta}}{\partial t} = 0$
6.	$\text{rot}_{\varphi} E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial t} = 0$
7.	$\text{div}(E) = 0$
8.	$\text{div}(H) = 0$

Надо отметить, что эти напряженности синфазны, что противоречит практической электротехнике.

Рассмотрим, как соотносятся уравнения (1, 2) с системой уравнений Максвелла – см. табл. 2 (переписанную из главы 8, первое решение). Напряженности (1, 2) входят только в уравнение (6) из табл. 2, имеющее вид

$$\operatorname{rot}_{\varphi} E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

или

$$\frac{E_{\theta}}{\rho} + \frac{\partial E_{\theta}}{\partial \rho} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Подставим (1, 2) в (5) и получим:

$$\begin{aligned} & -e_{\theta} \frac{\chi}{\rho} \sin(\theta) \cos(\omega t - \chi \rho) - \\ & -h_{\varphi} \frac{\chi}{\rho} \frac{\mu}{c} \sin(\theta) \cos(\omega t - \chi \rho) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

или

$$\frac{e_{\theta}}{h_{\varphi}} + \frac{\mu}{c} = 0. \quad (7)$$

Из сравнения (3) и (7) следует, что напряженности (1, 2) удовлетворяют уравнению (4). Остальные 7 уравнений Максвелла нарушаются. В уравнениях (2, 3, 5) из табл. 2 одно из слагаемых отличается от нуля, а другое равно нулю. Нарушение уравнений (1, 4, 7, 8) из табл. 2 показано в главе 8, первое решение, формула (2.20). Итак,

**известное решение НЕ удовлетворяет системе уравнений Максвелла.**



# Глава 9. Природа земного магнетизма

Известно, что электрическое поле Земли можно рассматривать, как поле "между обкладками сферического конденсатора" [51]. Этими обкладками являются поверхность Земли заряженная отрицательно, и ионосфера, заряженная положительно. Заряд этих оболочек поддерживается постоянным грозовой деятельностью атмосферы

Известно также о существовании магнитного поля Земли. Однако в этом случае отсутствует общепринятое объяснение источника этого поля. "Проблема происхождения и сохранения поля не решена по сей день" [52].

Далее мы рассмотрим гипотезу о том, что **магнитное поле Земли является следствие существования электрического поля Земли.**

В главе 8а рассматривается сферический конденсатор в цепи постоянного тока и показывается, что после заряда конденсатора, когда ток практически прекращается, в конденсаторе сохраняется стационарный поток электромагнитной энергии, а вместе с ним сохраняется электромагнитная волна. При этом в конденсаторе присутствует магнитное поле.

В главе 8а было показано, что в сферическом конденсаторе существует магнитная экваториальная плоскость, магнитная ось, магнитные полюса и магнитные меридианы, по которым направлены векторы  $H_{\varphi\theta}$  - см. рис. 4 в главе 8. Угол между магнитной осью и математической осью модели не может быть определен из математической модели. Тем более, не определен угол между магнитной осью и физической осью вращения Земли.

Сферические векторы зависят от  $\sin(\theta)$ . Радиальные векторы зависят от  $\cos(\theta)$  - см. табл. 6 в главе 8. Поэтому в точках, где сферические напряженности равны нулю, существуют только радиальные напряженности.

Из вышесказанного следует, что **магнитное поле Земли является следствие существования электрического поля Земли.**

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

На рис. 8 показано векторное поле  $H_{\varphi\theta}$  в диаметральной плоскости, проходящей через магнитную ось. При этом  $|H_{\varphi\theta}| = 0.7$ ;  $\rho = 1$ . На рис. 9 показано векторное поле  $H_\rho$  в диаметральной плоскости, проходящей через магнитную ось. При этом  $|H_\rho| = 0.4$ ;  $\rho = 1$ . Наконец, на рис. 10 показано векторное поле  $H = H_{\varphi\theta} + H_\rho$  в диаметральной плоскости, проходящей через магнитную ось. При этом  $|H_{\varphi\theta}| = 0.3$ ;  $|H_\rho| = 0.2$ ;  $\rho = 1$ .

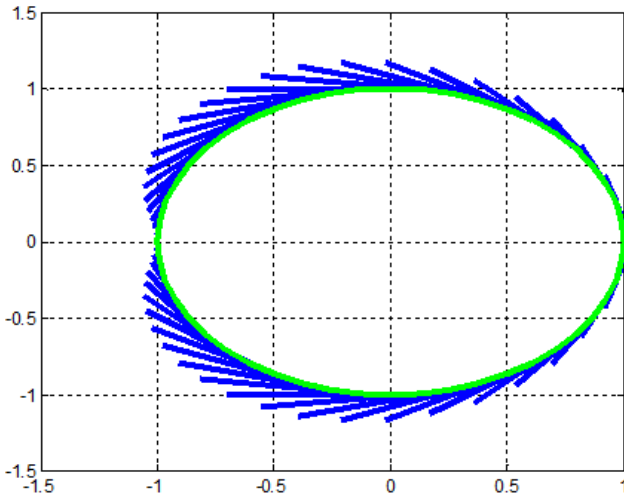


FIG. 8. (Sfera.88)

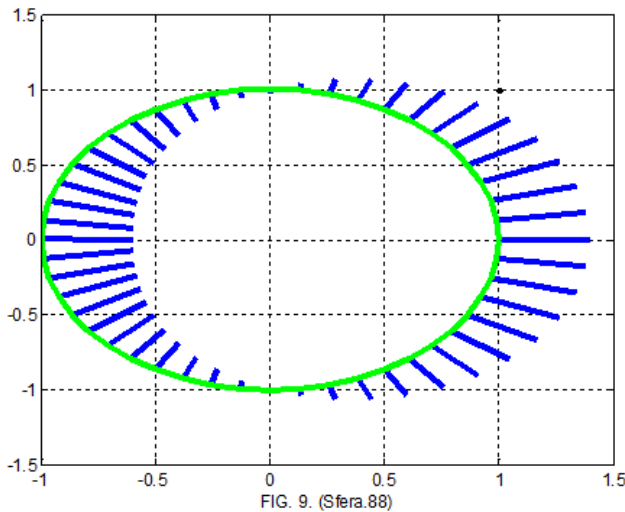
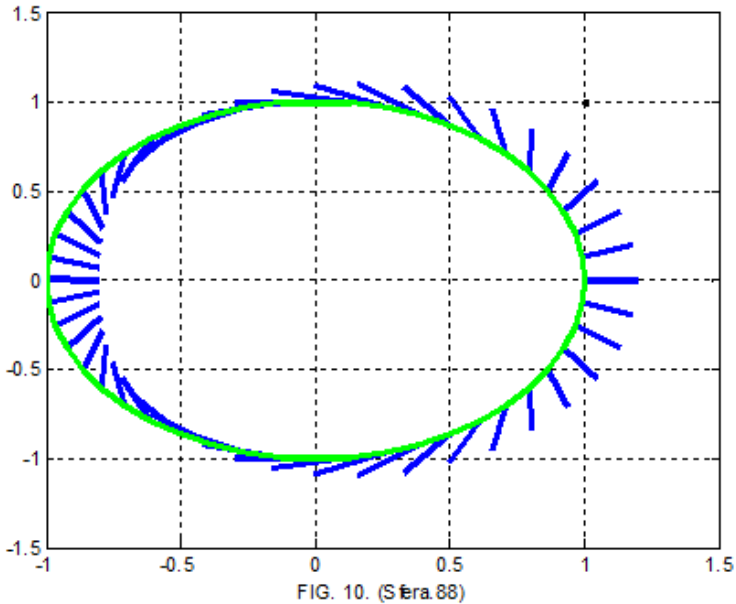


FIG. 9. (Sfera.88)



Аналогично можно описать электрическое поле Земли. Важно отметить, что электрическое поле перпендикулярно магнитному полю.

Еще раз подчеркнем, что само существование электрического поля не вызывает сомнения, а заряд "сферического конденсатора Земли" поддерживается грозовой деятельностью [51].

Рассмотрим еще сравнительные количественные оценки магнитной и электрической напряженностей поля Земли.

В вакууме, где  $\varepsilon = \mu = 1$ , и в системе СГС между магнитной и электрической напряженностью в любом направлении существует соотношение вида

$$E = H. \quad (9)$$

Это соотношения справедливо, если эти напряженности измеряются в системе СГС в данной точке в одном и том же направлении. Для перехода в систему СИ надо учесть, что

$$\begin{aligned} \text{для } H: 1 \text{ СГС} &= 80 \text{ А/м} \\ \text{для } E: 1 \text{ СГС} &= 30000 \text{ В/м} \end{aligned}$$

Таким образом, системе СИ выражение (9) принимает вид:

$$3000E = 80H \quad (10)$$

или

$$E \approx 0.03H. \quad (11)$$

или

$$H \approx 30E \cdot \operatorname{tg}(\beta). \quad (12)$$

Дополнительным аргументом в пользу существования электрического поля указанной структуры является существование теллурических токов [53]. Отсутствует общепринятое объяснение их причины. Исходя из вышеизложенного, следует полагать, что эти токи должны иметь максимум в направлении параллелей.

Возможно, электрическое поле Земли может быть обнаружено с помощью свободно подвешенного электрического диполя, выполненного в виде длинного изолированного стержня с металлическими шарами на концах. Возможно также, что при низкой частоте изменения зарядов диполя будут зафиксированы колебания стержня.

Исходя из предложенной гипотезы, можно предположить, что магнитное поле должно наблюдаться у планет, имеющих атмосферу. Действительно, магнитное поле отсутствует у Луны и Марса, лишенных атмосферы. Однако магнитное поле отсутствует и у Венеры. Возможно, это объясняется высокой плотностью и проводимостью атмосферы – атмосферу Венеры нельзя рассматривать как изолирующий слой сферического конденсатора.

# Глава 10. Решение уравнений Максвелла для шаровой молнии

---

## Оглавление

1. Введение \ 1
2. Решение уравнений Максвелла в сферических координатах \ 2
3. Энергия \ 3
4. Об устойчивости шаровой молнии \ 3
5. О свечении шаровой молнии \ 4
6. О времени существования шаровой молнии \ 4
7. О возможном механизме образования шаровой молнии \ 4

## 1. Введение

*Высказанные гипотезы о природе шаровой молнии неприемлемы, так как они противоречат закону сохранения энергии. Это происходит потому, что свечение шаровой молнии обычно относят за счет энергии, выделяемой при каком-либо молекулярном или химическом превращении, и таким образом предполагают, что источник энергии, за счет которого светится шаровая молния, находится в ней самой.*

Капица П.Л. 1955 [41]

Это утверждение (насколько известно автору) справедливо и сегодня. Оно усиливается еще и тем, что по современным оценкам, типичная шаровая молния содержит десятки килоджоулей [42], высвобождающихся при ее взрыве.

Общепризнано, что шаровая молния как-то связана с электромагнитными явлениями, однако нет строгого описания этих процессов.

В [56] на основе уравнений Максвелла была предложена математическая модель шаровой молнии, которая позволила объяснить многие свойства шаровой молнии. Эта модель оказалась сложной в математическом описании. Далее была предложена другая математическая модель шаровой молнии, более обоснованная и позволяющая получить менее сложное

математическое описание [56]. Кроме того, эта модель согласуется с моделью сферического конденсатора – см. главу 8.

При построении математической модели мы будем полагать, что шаровая молния представляет собой плазму - газ заряженных частиц - электронов и положительно заряженных ионов, а доля нейтральных атомов в ней пренебрежимо мала, то есть плазма шаровой молнии полностью ионизована. Кроме того, предполагаем, что в этой плазме число положительных зарядов равно числу отрицательных и в целом электрический заряд шаровой молнии равен нулю. В плазме принято рассматривать средние по некоторому элементарному объему плотности заряда и тока. Электрические и магнитные поля, создаваемые «средней» плотностью заряда и «средним» током в плазме, подчиняются уравнениям Максвелла [62]. Эффект столкновений частиц плазмы обычно описывают при помощи функции распределения частиц в плазме. Ниже мы эти эффекты будем учитывать в уравнениях Максвелла, полагая, что плазма обладает некоторым электрическим сопротивлением или проводимостью.

Итак, далее на основе уравнений Максвелла и представления об электропроводности тела шаровой молнии строится математическая модель шаровой молнии, показывается структура электромагнитного поля и электротоков в ней. Далее показывается (как следствие этой модели), что в шаровой молнии может циркулировать поток электромагнитной энергии и таким образом может сохраняться энергия, полученная шаровой молнией при ее возникновении. Кратко рассматриваются также устойчивость, свечение, заряд, время существования, механизм образования.

## 2. Решение уравнений Максвелла в сферических координатах

В главе 8, «Третье решение» получено решение уравнений Максвелла для сферы, материал которой имеет диэлектрическую и магнитную проницаемость, а также обладает проводимостью. Это решение получено в предположении, что сфера нейтральна (не имеет нескомпенсированных зарядов). Существование решения означает, что в электропроводной и нейтральной сфере может существовать электромагнитная волна и циркулировать токи смещения и токи проводимости.

### 3. Энергия

Из полученного решения следует, что в такой сфере имеются

- активная энергия потерь  $W_a$ ,
- реактивная электрическая энергия  $W_e$ ,
- реактивная магнитная энергия  $W_h$ .

Вместе с тем в каждой точке шара этот закон не выполняется. Следовательно, существуют перетоки энергии между точками шара.

### 4. Об устойчивости шаровой молнии

Вопрос об устойчивости тел, в которых циркулирует поток электромагнитной энергии, рассмотрен в [43].

Здесь мы рассмотрим только силу, которая действует по диаметру и разрывает шаровую молнию по диаметральной плоскости, перпендикулярной этому диаметру. В первый момент она должна совершить работу

$$A = F \frac{dR}{dt}. \quad (1)$$

Эта работа изменяет внутреннюю энергию шаровой молнии, т.е.

$$A = \frac{dW}{dt}. \quad (2)$$

Рассматривая (1, 2) совместно находим:

$$F = \frac{dW}{dt} \bigg/ \frac{dR}{dt}. \quad (3)$$

Если энергия шаровой молнии пропорциональна объему, т.е.

$$W = aR^3. \quad (4)$$

где  $a$  – коэффициент пропорциональности, то

$$\frac{dW}{dt} = 3aR^2 \frac{dR}{dt}. \quad (5)$$

Тогда

$$F = \frac{dW}{dt} \bigg/ \frac{dR}{dt} = 3aR^2 = \frac{3W}{R}. \quad (6)$$

Таким образом, внутренняя энергия шаровой молнии эквивалентна силе, создающей устойчивость шаровой молнии.

## 5. О свечении шаровой молнии

Выше задача была решена с учетом электрического сопротивления шаровой молнии. Естественно, оно не равно нулю и при протекании токов по этому сопротивлению в нем выделяется тепловая энергия. Эта тепловая энергия выделяется радиальным потоком энергии через внешнюю сферу шаровой молнии, т.е. излучается, что и является причиной свечения шаровой молнии.

## 6. О времени существования шаровой молнии

Энергия шаровой молнии  $W$  и мощность тепловых потерь  $P$  могут быть найдены при полученном выше решении.

Время существования шаровой молнии равно времени преобразования электрической энергии молнии в тепловые потери, т.е.

$$\tau = W/P \quad (1)$$

## 7. О возможном механизме образования шаровой молнии

Лидер линейной молнии, встречая какое-либо препятствие, может изменить траекторию движения с прямолинейной на круговую. Это может служить причиной возникновения тех электромагнитных полей и электротоков, которые описаны выше.

Вот как описывается этот процесс в [44]

*Очередной сильнейший разряд молнии, одновременный с грохотом, осветил всё пространство. Я вижу, как длинный ослепительный луч цвета солнца приближается ко мне прямо в солнечное сплетение. Конец его острый, чем дальше, тем толще, примерно 0,5 метра в длину. Дальше я не вижу, потому что смотрю под углом вниз.*

*Мгновенная мысль, это конец. Я смотрю, как острие луча приближается. Вдруг оно остановилось и между острием и телом начал вступать шар, размером с большой грейпфрут. Раздался хлопок, как при вылете пробки из бутылки шампанского. Луч влетел в шар. Я вижу ослепительно яркий шар, цвета солнца, который вращается с бешеной скоростью, перемалывая луч внутри. Но я не чувствую ни прикосновения, ни тепла.*

*Шар перемалывал луч и увеличивался в размерах. ... Шар не издавал никаких звуков. Сначала он был ярким и непрозрачным, а затем начал тускнеть и я увидел, что он пуст. Его оболочка изменилась и он стал похож на мыльный пузырь. Оболочка вращалась, но ее диаметр оставался стабильным, а поверхность отливала металлом.*



# Глава 11. Математическая МОДЕЛЬ ПЛАЗМЕННОГО КРИСТАЛЛА

---

## Оглавление

1. Постановка задачи \ 1
2. Система уравнений \ 4
3. Первая математическая модель \ 5
4. Вторая математическая модель \ 7
5. Энергия плазменного кристалла \ 10

### 1. Постановка задачи

Пылевая плазма (см. [87]) представляет собой множество заряженных частиц. Эти "частицы могут выстраиваться в пространстве определённым образом и образовывать так называемый плазменный кристалл" [88]. Механизм образования, поведение и формы таких кристаллов трудно предсказуемы. В условиях слабой гравитации наблюдения этих процессов и форм вызывает удивление – см. иллюстрации (рис. 1) экспериментов в космосе из [89].

Поэтому в 2007 г. было выполнено их компьютерное моделирование. Результаты вызвали еще большее удивление, что отразилось даже в названии соответствующей статьи [90]: "От плазменных кристаллов и спиральных структур к неорганической живой материи". В [91] приведено краткое изложение и обсуждение результатов моделирования.

Мне тоже нравятся такие сопоставления. Но, тем не менее, надо отметить, что используемый авторами метод моделирования молекулярной динамики не полностью учитывает все особенности пылевой плазмы. В этом методе для описания движения частиц применяется классическая механика и рассматриваются только электростатические силы взаимодействия между заряженными частицами. В действительности же при движении заряженных частиц возникают токи зарядов – электрические токи и, как следствие, электромагнитные поля. Их необходимо учитывать при моделировании.

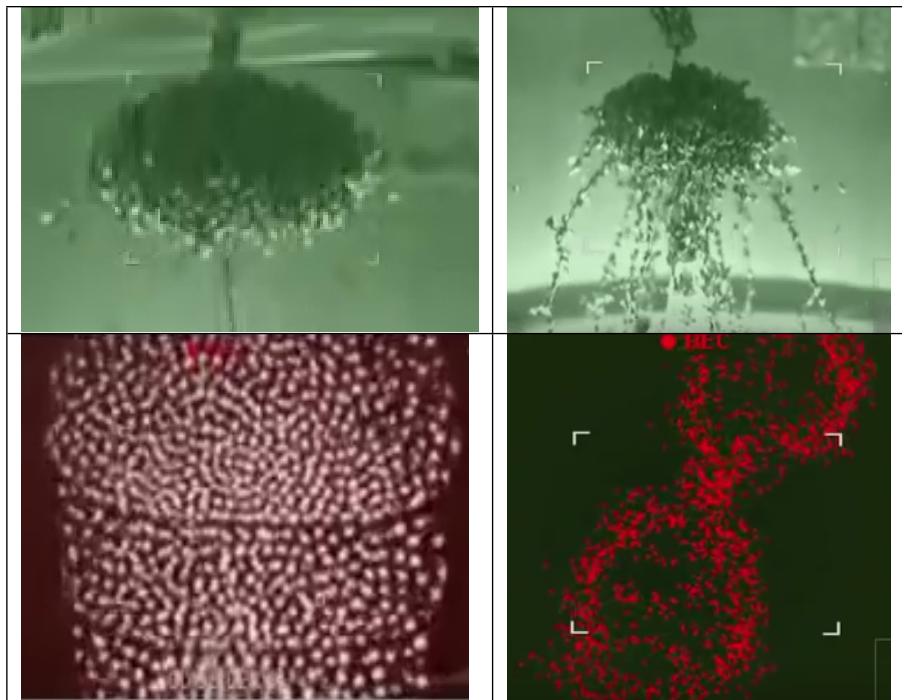


Рис. 1.

В невесомости на частицы плазмы не воздействуют гравитационные силы. Если исключить из рассмотрения энергию излучения, то можно утверждать, что пылевая плазма представляет собой электрические заряды, электрические токи и электромагнитные поля. Кроме того, плазма в момент образования (заполнения некоторого сосуда множеством заряженных частиц) получает некоторую энергию. Эта энергия может быть только электромагнитной энергией и кинетической энергией частиц, поскольку механическое взаимодействие частиц отсутствует: они заряжены одноименными зарядами. Итак, пылевая плазма должна удовлетворять следующим условиям:

- удовлетворять уравнениям Максвелла,
- сохранять суммарную энергию, как сумму электромагнитной энергии и кинетической энергии частиц,
- приобрести через некоторое время стабильную структуру расположения и движения частиц; это следует, например, из упомянутых экспериментов в космосе – см. рис. 1.

Очевидно, заряженные частицы отталкиваются силами Кулона. Однако эксперименты показывают, что эти силы не действуют на периферии облака частиц. Следовательно, они компенсируются другими силами. Ниже будет показано, что этими силами являются силы Лоренца, возникающие при движении заряженных частиц (хотя на первый взгляд кажется странным, что эти силы направлены внутрь облака, противодействуя силам Кулона). Частицы не могут быть неподвижными, поскольку тогда будут превалировать силы Кулона. Но тогда эти силы приведут частицы в движение, благодаря которому возникнут силы Лоренца и т.д.

Ниже в математической модели мы не будем учитывать силы Кулона, полагая, что их роль сводится только к тому, чтобы изолировать частицы друг от друга (подобно тому, как эти силы не учитываются в задачах электротехники).

Итак, мы будем рассматривать пылевую плазму как область, где текут электротоки и анализировать ее с помощью уравнений Максвелла. Поскольку частицы находятся в вакууме и всегда изолированы друг от друга, то отсутствует омическое сопротивление и отсутствует электрическая напряженность, пропорциональная току – ее не надо учитывать в уравнениях Максвелла. Кроме того, на первом этапе мы будем полагать, что токи изменяются медленно – являются постоянными токами. С учетом этих замечаний уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{rot}(H) - J = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(J) = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (3)$$

где  $J$ ,  $H$  - ток и магнитная напряженность соответственно. Кроме того, к этим уравнениям необходимо добавить уравнение, связывающее энергию  $W$  плазмы с  $J$ ,  $H$

$$W = f(J, H). \quad (4)$$

В этом уравнении энергия  $W$  является известной, поскольку плазма в момент образования получает эту энергию.

В скалярном виде система уравнений (1-4) является системой 6-ти уравнений с 6-ю неизвестными и должна иметь единственное решение. Однако регулярный алгоритм решения такой системы отсутствует. Поэтому ниже предлагается другой подход:

1. Поиск аналитических решений недоопределенной системы уравнений (1-3) при данной форме облака плазмы. Таких решений может быть множество.

2. Вычисление энергии  $W$  по (4). Если решение системы (1-4) является единственным, то тем самым решена система (1-4) при данных  $W$  и форме облака.

## 2. Система уравнений

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ , как известно [4],

дивергенция и ротор вектора  $H$  имеют соответственно вид

$$\operatorname{div}(H) = \left( \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right), \quad (a)$$

$$\operatorname{rot}_r(H) = \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right), \quad (b)$$

$$\operatorname{rot}_\varphi(H) = \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (c)$$

$$\operatorname{rot}_z(H) = \left( \frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right). \quad (d)$$

С учетом уравнений (a-d) перепишем уравнения (1.1-1.3) в следующем виде:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (4)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Система 5-ти уравнений (1-5) относительно 6-ти неизвестных  $(H_r, H_\varphi, H_z, J_r, J_\varphi, J_z)$  является переопределенной и может иметь множество решений. Ниже показывается, что такие решения существуют и для различных случаев определяются некоторые из возможных решений.

Будем вначале искать решение этой системы уравнений (1-5) в виде функций, сепарабельных относительно координат. Эти функции имеют следующий вид:

$$H_{r.} = h_r(r) \cdot \cos(\chi z), \quad (6)$$

$$H_{\varphi.} = h_{\varphi}(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (7)$$

$$H_{z.} = h_z(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (8)$$

$$J_{r.} = j_r(r) \cdot \cos(\chi z), \quad (9)$$

$$J_{\varphi.} = j_{\varphi}(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (10)$$

$$J_z = j_z(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (11)$$

где  $\chi$  – некоторая константа, а  $h_r(r)$ ,  $h_{\varphi}(r)$ ,  $h_z(r)$ ,  $j_r(r)$ ,  $j_{\varphi}(r)$ ,  $j_z(r)$  – функции от координаты  $r$ ; производные этих функций будем обозначать штрихами.

Подставляя (6-11) в (1-5), получаем:

$$\frac{h_r}{r} + h'_r + \chi h_z = 0, \quad (12)$$

$$-\chi h_{\varphi} = j_r, \quad (13)$$

$$-\chi h_r - h'_z = j_{\varphi} \quad (14)$$

$$\frac{h_{\varphi}}{r} + h'_{\varphi} = j_z, \quad (15)$$

$$\frac{j_r}{r} + j'_r + \chi j_z = 0. \quad (16)$$

Подставим (13) и (15) в (16). Тогда получим:

$$\frac{-\chi h_{\varphi}}{r} - \chi h'_{\varphi} + \chi \left( \frac{h_{\varphi}}{r} + h'_{\varphi} \right) = 0. \quad (17)$$

Выражение (17) является тождеством  $0=0$ . Поэтому (16) следует из (13, 15) и может быть исключено из системы уравнений (12-16). Оставшиеся уравнения перепишем в виде:

$$h_z = -\frac{1}{\chi} \left( \frac{h_r}{r} + h'_r \right), \quad (18)$$

$$j_z = \frac{h_{\varphi}}{r} + h'_{\varphi}, \quad (19)$$

$$j_r = -\chi h_{\varphi}, \quad (20)$$

$$j_{\varphi} = -\chi h_r - h'_z \quad (21)$$

### 3. Первая математическая модель

В этой системе 4-х дифференциальных уравнений (18-21) с 6-ю неизвестными функциями можно произвольным образом

определить две функции. Для дальнейшего мы определим следующие две функции:

$$h_\phi = q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi), \quad (22)$$

$$h_r = h \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi), \quad (23)$$

где  $q, h$  - некоторые константы. Тогда из (18-23) найдем:

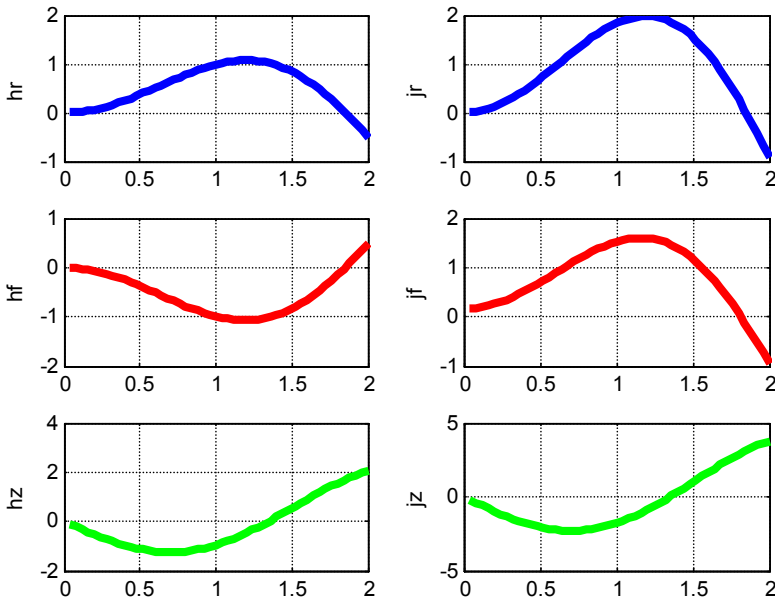
$$h_z = -\frac{h}{\chi} \left( 2 \sin(\pi \cdot r / \chi) + \frac{\pi \cdot r}{\chi} \cos(\pi \cdot r / \chi) \right), \quad (24)$$

$$j_z = q \left( 2 \sin(\pi \cdot r / \chi) + \frac{\pi \cdot r}{\chi} \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi) \right), \quad (25)$$

$$j_r = -\chi \cdot q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi) \quad (26)$$

$$j_\phi = h \cdot \left( \frac{\pi^2}{\chi R^2} - \chi \right) \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi) + \frac{h}{\chi} \left( 2 - \frac{\pi}{\chi} \right) \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi). \quad (27)$$

Таким образом, функции  $j_r(r), j_\phi(r), j_z(r), h_r(r), h_\phi(r), h_z(r)$  определяются по (26, 27, 25, 23, 22, 24) соответственно.



**Пример 1.**

На рис. 2 показаны графики функций  $j_r(r), j_\phi(r), j_z(r), h_r(r), h_\phi(r), h_z(r)$ . Эти функции вычисляются

при данных  $\chi = 1.85$ ,  $h = 1$ ,  $q = -1$ . В первой колонке показаны функции  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ , во второй колонке показаны функции  $j_r(r)$ ,  $j_\varphi(r)$ ,  $j_z(r)$ .

Здесь важно отметить, что на графике функций  $j_r(r)$ ,  $j_\varphi(r)$  существует точка, где  $j_r(r) = 0$  и  $j_\varphi(r) = 0$ . Физически это означает, что в области  $r < \chi$  существуют радиальные токи  $J_r(r)$ , направленные от центра (при  $\chi q < 0$ ). В точке  $r = \chi$  токи  $J_r(r)$ ,  $J_\varphi(r)$  отсутствуют. Поэтому величина  $R = \chi$  является радиусом кристалла. Пылинки, попавшие за пределы этого радиуса, испытывают радиальные токи  $J_r(r)$ , направленные к центру. Тем самым создается устойчивая граница кристалла.

Построенная модель описывает цилиндрический кристалл бесконечной длины, что, конечно же, не соответствует реальности. Рассмотрим теперь более сложную модель.

#### 4. Вторая математическая модель

Корень уравнения  $j_r(r) = 0$  определял величину  $R = \chi$  радиуса цилиндрического кристалла. Будем теперь изменять величину  $\chi$ . Если величина  $\chi$  будет зависеть от  $z$ , то и радиус  $R$  будет зависеть от  $z$ . Но именно такая зависимость наблюдается в экспериментах – см., например, первый фрагмент на рис. 1.

Имея это в виду рассмотрим математическую модель, отличающуюся от использованной выше, тем, что вместо константы  $\chi$  используется функция  $\chi(z)$ . Перепишем (6-11) с учетом этого:

$$H_{r.} = h_r(r) \cdot \cos(\chi(z)), \quad (28)$$

$$H_{\varphi.} = h_\varphi(r) \cdot \sin(\chi(z)), \quad (29)$$

$$H_{z.} = h_z(r) \cdot \sin(\chi(z)), \quad (30)$$

$$J_{r.} = j_r(r) \cdot \cos(\chi(z)), \quad (31)$$

$$J_{\varphi.} = j_\varphi(r) \cdot \sin(\chi(z)), \quad (32)$$

$$J_z = j_z(r) \cdot \sin(\chi(z)). \quad (33)$$

Система уравнений (1-6) отличается от системы (2.9-2.14) только тем, что вместо константы  $\chi$  используется производная  $\chi'(z)$  по  $z$  от функции  $\chi(z)$ . Следовательно, и решение системы (28-33) будет отличаться от решения системы от предыдущего

только тем, что вместо константы  $\chi$  используется производная  $\chi'(z)$ . Таким образом, решение в этом случае примет следующий вид:

$$j_r = -\chi'(z) \cdot q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)), \quad (34)$$

$$j_\phi = \left[ \begin{aligned} &h \cdot \left( \frac{\pi^2}{\chi'(z) R^2} - \chi'(z) \right) \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)) + \\ &+ \frac{h}{\chi'(z)} \left( 2 - \frac{\pi}{\chi'(z)} \right) \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi'(z)) \end{aligned} \right], \quad (35)$$

$$j_z = q \left( 2 \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)) + \frac{\pi \cdot r}{R} \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi'(z)) \right), \quad (36)$$

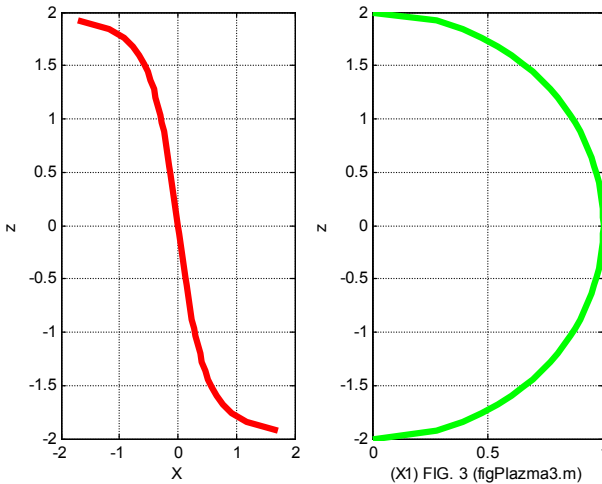
$$h_r = h \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)), \quad (37)$$

$$h_\phi = q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)), \quad (38)$$

$$h_z = -\frac{h}{\chi'(z)} \left( 2 \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)) + \frac{\pi \cdot r}{R} \cos(\pi \cdot r / \chi'(z)) \right). \quad (39)$$

Указанные функции будут зависеть от  $\chi'(z)$ . При  $\chi(z) = \eta z$  уравнения (34-39) превращаются в уравнения (22-27).

Например, на рис. 3 показаны функции  $\chi(z)$  и  $\chi'(z)$ , где  $\chi'(z)$  - уравнение эллипса.



(X1) FIG. 3 (figPlazma3.m)

Можно полагать, что ток пылинок таков, что их средняя скорость не зависит от направления тока. В частности, при фиксированном радиусе путь, пройденный пылинкой в единицу



времени по окружности, и путь, пройденный ею по вертикали, будут равны. Следовательно, в этом случае при фиксированном радиусе можно полагать, что

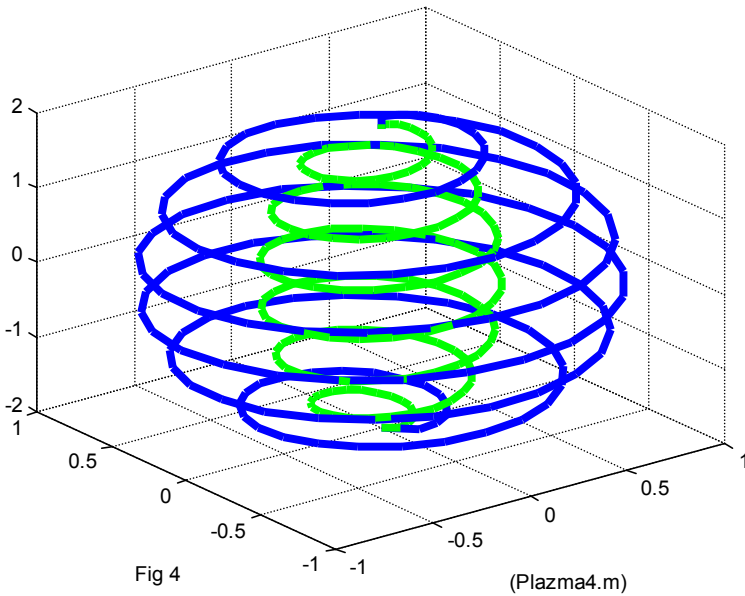
$$\Delta\varphi \equiv \Delta z. \quad (40)$$

В рассмотренной выше системе траектория пылинок описывается формулами

$$co = \cos(\chi(z)), \quad (41)$$

$$si = \sin(\chi(z)). \quad (42)$$

Таким образом, в такой системе на фигуре вращения радиусом  $r = \chi'(z)$  существует траектория точки, описываемая формулами (40-42). Такая траектория является винтовой линией. На этой траектории все напряженности и плотности токов не зависят от  $\varphi$ .



На основе этого предположения можно построить траекторию движения пылинок в соответствии с функциями (1-3). На рис. 4 показаны две винтовые, описываемые функциями  $j_r(r)$  и  $j_z(r)$  тока: при  $r_1 = \chi'(z)$  при  $r_2 = 0.5\chi'(z)$ , где  $\chi'(z)$  определена на рис. 3.

## 5. Энергия плазменного кристалла

При известных магнитных напряженностях и плотностях тока можно найти энергию плазменного кристалла. Плотность энергии магнитного поля

$$W_H = \frac{\mu}{2} (H_r^2 + H_\varphi^2 + H_z^2). \quad (43)$$

Плотность кинетической энергии пылинок  $W_J$  найдем в предположении, что все пылинки имеют одинаковую массу  $m$ . Тогда

$$W_J = \frac{1}{m} (J_\varphi^2 + J_\varphi^2 + J_\varphi^2). \quad (44)$$

Для определения полной энергии кристалла необходимо проинтегрировать (43, 44) по объему кристалла, форма которого определена. Таким образом, при определенной форме кристалла и принятой математической модели могут быть найдены все характеристики кристалла.

---

## Глава 12. Работа силы Лоренца

Ниже доказывается, что сила Лоренца совершает работу, и выводятся соотношения, определяющие величину этой работы.

Магнитная сила Лоренца определяется формулой вида

$$F = qQ(V \times B), \quad (1)$$

где

$q$  - плотность электрического заряда,

$Q$  - объем заряженного тела,

$V$  - скорость заряженного тела (вектор),

$B$  - магнитная индукция (вектор).

Работа силы Лоренца, определяемая как векторное произведение силы на скорость, равна нулю, поскольку векторы силы и скорости всегда ортогональны.

Сила Ампера определяется формулой вида

$$A = Q(j \times B), \quad (2)$$

где  $j$  - плотность электрического тока (вектор). Поскольку

$$j = qV, \quad (3)$$

то формулу (2) можно записать в виде

$$A = qQ(V \times B). \quad (4)$$

Можно заметить, что формулы (1, 4) совпадают. Между тем работа силы Ампера НЕ равна нулю, что подтверждается существованием электромоторов. Следовательно, **работа силы Лоренца НЕ равна нулю**. Таким образом, определение механической силы через работу нельзя распространять на силу Лоренца.

Рассмотрим, **каким образом сила Лоренца выполняет работу**.

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга определяется по формуле:

$$S = E \times H, \quad (5)$$

где

$E$  - напряженность электрического поля (вектор),

$H$  - напряженность магнитного поля (вектор).

Токам соответствуют электрические напряженности, т.е.

$$E = \rho j, \quad (6)$$

где  $\rho$  - удельное электросопротивление. Совмещая (5, 6), как в главе 5, получаем:

$$S = \rho j \times H = \frac{\rho}{\mu} j \times B. \quad (7)$$

где  $\mu$  - абсолютная магнитная проницаемость. Магнитная сила Лоренца, действующая на все заряды проводника в единичном объеме, - объемная плотность силы Лоренца равна (как следует из (1))

$$f = qV \times B. \quad (8)$$

Из (3, 8) находим:

$$f = qV \times B = j \times B. \quad (9)$$

Из (7, 9) находим:

$$f = \mu S / \rho. \quad (10)$$

Следовательно, плотность магнитной силы Лоренца пропорциональна плотности электромагнитной энергии - вектору Пойнтинга.

Поток энергии с плотностью  $S$  эквивалентен плотности мощности  $p$ , т.е.

$$p = S. \quad (11)$$

Следовательно, плотность магнитной силы Лоренца пропорциональна плотности мощности.

**Пример 1.** Для проверки рассмотрим размерности величин в вышеприведенных формулах в системе СИ – см. табл. 1.

Параметр		Размерность
Энергия		кг·м <sup>2</sup> ·с <sup>-2</sup>
Плотность энергии		кг·м <sup>-1</sup> ·с <sup>-2</sup>
Мощность	<b>P</b>	кг·м <sup>2</sup> ·с <sup>-3</sup>
Плотность потока энергии, плотность мощности	<i>S</i>	кг·с <sup>-3</sup>
Плотность тока	<i>j</i>	А·м <sup>-2</sup>
Индукция	<i>B</i>	кг·с <sup>-2</sup> ·А
Объемная плотность силы Лоренца	<i>f</i>	Н·м <sup>-3</sup> =кг·с <sup>-3</sup> ·м <sup>-2</sup>
Магнитная проницаемость	$\mu$	кг·с <sup>-2</sup> ·м·А <sup>-2</sup>
Удельное сопротивление	$\rho$	кг·с <sup>-3</sup> ·м <sup>3</sup> ·А <sup>-2</sup>
$\mu/\rho$	$\mu/\rho$	с·м <sup>-2</sup>

Итак, ток с плотностью  $j$  и магнитное поле с индукцией  $B$  создают поток энергии с плотностью  $S$  (или мощность с плотностью  $p$ ), который тождественен магнитной силе Лоренца с плотностью  $f$  - см. (11) или

$$f = \mu p / \rho. \quad (12)$$

Таким образом, сила Лоренца с плотностью  $f$  и тождественный ей поток энергии с плотностью  $S$  (или мощность с плотностью  $p$ ), действует на заряды, движущиеся в токе  $J$ , в направлении, перпендикулярном этому току. Следовательно, можно утверждать, что вектор Пойнтинга (или мощность с плотностью  $p$ ) создает э.д.с. в проводнике. Этот вопрос с другой стороны рассмотрен в [19, 17], где такая э.д.с. названа четвертым видом электромагнитной индукции.

Рассмотрим э.д.с., создаваемую силой Лоренца. Напряженность, эквивалентная силе Лоренца, действующей на единичный заряд, равна

$$e_f = \frac{f}{q} = \frac{p\mu}{q\rho}, \quad (13)$$

а ток, создаваемый силой Лоренца в направлении этой силы, имеет плотность

$$i = e_f \rho = \frac{p\mu}{q}. \quad (14)$$

Если известен ток  $I$ , создаваемый силой Лоренца в сопротивлении  $R$ , то

$$U = e_f \rho = I \left( R + \rho \frac{l}{s} \right), \quad (15)$$

где  $l$ ,  $s$  - длина и сечение проводника, в котором действует сила Лоренца. Из (15) находим:

$$I = e_f \rho / \left( R + \rho \frac{l}{s} \right) = e_f / \left( \frac{R}{\rho} + \frac{l}{s} \right). \quad (16)$$

Полная мощность

$$P = pls. \quad (17)$$

Наконец, из (13, 16, 17) получаем:

$$I = \frac{P\mu}{qls} \bigg/ \left( R + \rho \frac{l}{s} \right) = \frac{P\mu}{ql} \bigg/ (sR + \rho l), \quad (18)$$

$$U = \frac{P}{I} = \frac{ql}{\mu} (sR + \rho l). \quad (19)$$

Из этих формул по результатам измерения  $U$  и  $I$  может быть найдена плотность зарядов, находящихся под действием силы Лоренца.

# Глава 13. Электромагнитный импульс и безопорное движение

---

## Оглавление

1. Предисловие.
  2. Основные соотношения.
- Приложение 1. Эксперимент Грехема и Лахоза.  
Приложение 2. Эксперимент с ЭДВ.

## 1. Предисловие

Умов в 1874 г. ввел в физику представление о движении энергии, потоке энергии и скорости движения энергии. При этом плотность потока энергии  $S$ , плотность энергии  $W$  и скорость движения энергии  $V$  связаны формулой  $S = W \cdot v$ .

Это утверждение носит универсальный характер. В электродинамике вектор плотности потока электромагнитной энергии называется вектором Умова–Пойнтинга. Скорость движения электромагнитной энергии в электродинамике предполагается равной скорости света:  $v = c$ . Это утверждение вытеснило из научного обихода случаи, когда скорость движения электромагнитной энергии меньше скорости света. А такие случаи известны. Например, скорость движения энергии в волновом пакете меньше скорости света. В **стационарном** электромагнитном поле нет электромагнитной волны, но есть поток электромагнитной энергии. Нет никакой причины связывать скорость движения электромагнитной энергии в статических полях со скоростью света.

Известно, что плотность электромагнитного импульса  $p$  связана с плотностью потока электромагнитной энергии формулой  $p = S/c^2$ . Известно также, что плотность электромагнитного импульса, распространяющегося в теле, равна (численно) плотности электромагнитного импульса  $m$  в этом теле:  $m = p$ . И этот факт тоже как-то выпал из научного обихода. Действительно, стоит ли обращать внимание на мизерную величину, получающуюся в результате деления на квадрат скорости света.

А, между тем, механический импульс электромагнитного поля в теле взывал к вниманию. Известны эксперименты (ниже они будут

рассмотрены подробнее), которые доказывают существование импульса, величина которого в 100 раз превышает теоретическую величину. Исследователи искали объяснение в существовании субстанции, отличной от вещества и поля.

Достаточно предположить, что скорость движения электромагнитной энергии не равна скорости света (в общем случае), и тогда все вышеописанные ситуации становятся объяснимыми. Эту скорость можно вычислить. В предыдущих главах этой книги рассмотрены различные процессы распространения электромагнитной энергии (разряд аккумулятора, разряд конденсатора, размагничивание магнита, движение энергии в проводе постоянного тока) и показано, что в этих случаях скорость движения энергии значительно меньше скорости света.

Таким образом, электромагнитный импульс и механический импульс входят количественно равноправным образом в закон сохранения импульса.

## 2. Основные соотношения.

Известны взаимозависимости между плотностями энергии  $W$ , потока энергии  $S$ , импульса  $p$ , плотности импульса  $f$ , имеющими следующий вид (в системе СИ):

$$S = W \cdot c, \quad (1)$$

$$p = W/c, \quad (2)$$

$$p = S/c^2, \quad (3)$$

$$f = p \cdot c. \quad (3a)$$

**2.1.** В главе 1 показано, что для монохроматической волны существует решение, для которого выполняется условие (1), т.е. для монохроматической волны скорость движения энергии равна скорости распространения монохроматической волны, т.е. скорости света. Найденное в главе 1 решение таково, что устанавливает постоянство потока энергии и энергии электромагнитной волны во времени (в противоположность известному решению, где устанавливается постоянство этих величин в среднем, что, конечно же, не является действительным постоянством, - тем, которое требует закон сохранения энергии).

**2.2.** Итак, уравнение (1) справедливо для монохроматической волны. Скорость движения энергии в волновом пакете принято



считать равной групповой скорости. В [94] строго показано, что эта скорость зависит от фазовой скорости и скорости света. В любом случае скорость движения энергии в волновом пакете меньше скорости света.

**2.3.** В стационарном электромагнитном поле нет электромагнитной волны, но есть поток электромагнитной энергии. Вместе с этим потоком есть и электромагнитный импульс – см. (2, 3). Это утверждение не является общепризнанным. Однако Г.П. Иванов в [97] доказывает наличие импульса, анализируя известные эксперименты прямыми вычислениями. В этих экспериментах присутствуют квазистационарные электромагнитные поля, где отсутствует излучение электромагнитных волн. Среди этих экспериментов есть умозрительные (их авторами являются Тамм и Фейнман), но есть и реально выполненный эксперимент Г.М. Грехема и Д.Г. Лахоза [95] – см. приложение 1.

Итак, электромагнитный импульс в стационарных полях существует. Однако тем же анализом Г.П. Иванов доказывает, что величина этого импульса крайне мала (в сущности, это следует из (1, 2), где присутствует деление на скорость света). Тем не менее, эксперимент Г.М. Грехема и Д.Г. Лахоза обнаруживает большую величину импульса. Г.П. Иванов доказывает, что экспериментальная величина импульса в 100 раз превышает теоретическую величину (да иначе этот эксперимент не мог бы состояться, т.к. экспериментаторы измеряли электромагнитный импульс величиной механического импульса – на основе закона сохранения импульса).

Итак, электромагнитный импульс в стационарных полях существует, но не удовлетворяет уравнениям (1-3), т.к. имеет значительную величину.

Г.М. Грехем и Д.Г. Лахоз видят объяснение этому в том, что электромагнитная энергия циркулирует в вакууме как маховик (flywheel).

Г.П. Иванов видит объяснение этому в "признании существования вида материи (электровакуума), отличного от вещества и поля, заполняющего собой всё физическое пространство и способного вступать в импульсное (силовое) и энергетическое взаимодействие с веществом".

**2.4.** Умов [81] ввел в физику представление о движении энергии, потоке энергии и скорости движения энергии. При этом

плотность потока энергии  $S$ , плотность энергии  $W$  и скорость движения энергии  $v$  связаны формулой

$$S = W \cdot v. \quad (4)$$

Это утверждение носит универсальный характер. Достаточно предположить, что скорость движения электромагнитной энергии не равна скорости света (в общем случае), и тогда все вышеописанные ситуации становятся объяснимыми.

Действительно, нет никакой причины связывать, например, скорость движения электромагнитной энергии в статических полях со скоростью света.

**2.5.** Выше рассмотрены различные процессы распространения электромагнитной энергии (разряд аккумулятора (глава 5), разряд конденсатора (глава 7), размагничивание магнита (глава 7а), движение энергии в проводе постоянного тока (глава 5)) и показано, что в этих случаях выполняется условие (4) и скорость движения энергии значительно меньше скорости света.

**2.6.** Итак, в общем случае надо пользоваться формулами (1-3), где вместо скорости света ставить скорость движения энергии:

$$S = W \cdot v, \quad (4)$$

$$p = W/v, \quad (5)$$

$$p = S/v^2, \quad (6)$$

$$p = W^2/S. \quad (7)$$

Таким образом,

электромагнитный импульс и механический импульс входят равноправным образом в закон сохранения импульса. Это утверждение открывает широкий простор для конструирования безопорных двигателей.	(8)
--	-----

**2.7.** Электромагнитная масса

$$m = \frac{p}{v} = \frac{W}{v^2} = \frac{S}{v^3} = \frac{W^3}{S^2} \quad (9)$$

**2.8.** Если на некотором участке границы тела возникает поток энергии  $\bar{S}$  с плотностью  $S$ , направленный вне, то возникает и электромагнитный импульс  $\bar{p}$  с плотностью  $p$ , направленный

вне. По закону сохранения импульса возникает равный ему механический импульс, направленный в сторону тела,

$$\bar{M} = -(\bar{p}). \quad (10)$$

Пусть поверхность этого участка равна  $q$ , а его объем равен  $g$ . Тогда

$$\bar{S} = qS, \quad (11)$$

$$\bar{p} = gp, \quad (12)$$

Из (7, 10, 12) находим:

$$\bar{M} = -gp. \quad (13)$$

Итак, если в теле присутствует электромагнитная энергия и из тела выходит поток электромагнитной энергии, то по (13) может быть найден механический импульс, действующий на тело.

**2.9.** Естественно, конструкторы безопорных двигателей не ждали моего утверждения (8) и давно уже занялись этим неблагодарным делом.

В [99] предлагается способ "для обеспечения поступательного перемещения, транспортных, в том числе, космических средств". Однако сам автор указывает на то, что в соответствии с его теорией тяговая сила в предлагаемых конструкциях будет очень мала.

Известен Biefeld–Brown effect [101]. О реализации патента нет достоверных сведений. Этот эффект до настоящего времени не получил общепринятого объяснения. Можно предположить, что этот эффект также объясняется появлением электромагнитного импульса.

В [102] описывается устройство, предназначенное для полетов в безвоздушной среде. В нем также реализуется Biefeld–Brown effect и дается объяснение этому эффекту с привлечением электродинамического импульса.

В [106] описывается гипотетический эксперимент с зарядами и токами, который демонстрирует нарушение третьего закона Ньютона, но выполнение закона сохранения импульса, т.е. возможность безопорного движения.

Недавно появился патент [103], основанный на этом патенте NASA's эксперимент [104] и аналогичный китайский эксперимент [105]. Они вызывает такие же сомнения и споры в научном мире поскольку они **якобы** нарушают закон сохранения импульса. Эти эксперименты явным образом демонстрирует создание силы тяги за

счет электродинамических эффектов. Видимо, это первая подобная система, которая не отвергалась официальными научными инстанциями. И, видимо, потому, что тяга у нее была очень мала. Но это - **эксперименты** и с ними не поспоришь! На мой взгляд, они подтверждают вышеизложенную теорию.

Но наиболее бесспорным является «Электрический двигатель высокого напряжения ЭДВ» Лавриненко [131], представляющий собой высоковольтный воздушный конденсатор. В нем одна обкладка выполнена в виде провода, а вторая в виде полосы фольги – см. рис. 1. При высоком напряжении между обкладками возникает ионный ток и ионный ветер. Устройство взлетает. Этот эффект вначале объясняли действием ионного тока и ионного ветра. Более тщательные измерения показывают, что ионный ветер создает примерно 60% подъемной силы. Источник 40% подъемной силы не выявлен.

На основании вышеизложенного автор разработал теорию, которая, в частности, объясняет функционирование ЭДВ и предсказывает результаты экспериментов. По известным параметрам ЭДВ (размеры, масса, ток, напряжение, электрическая емкость) рассчитывается скорость подъема. Если она равна измеренной, то теория правомерна – см. приложение 2.



Рис. 1.

*Автор готов сопоставить эту теорию с различными вариантами конструкций ЭДВ, имеющимися у читателя.*

*Автор также разработал другую конструкцию безопорного двигателя и приглашает заинтересованных к совместному патентованию.*

## Приложение 1. Эксперимент Грехема и Лахоза.

Схема эксперимента приведена на рис. 1, где

- 1 - цилиндрический конденсатор,
- 2 - торсионно-осцилляционная подвеска,
- 3 - зеркальце,
- 4 - радиально расположенные провода для подачи переменного напряжения на пластины,
- 5 - сверхпроводящий соленоид.

Эта схема полностью совпадает со схемой умозрительного эксперимента Тамма [22]

Авторы пишут: "Наша программа измерения сил, связанных с электромагнитным импульсом на низких частотах в веществе, достигла кульминации в первом прямом наблюдении свободного электромагнитного момента импульса, создаваемого квазистатическими (неволновыми) независимыми полями  $E$  и  $B$  в вакуумной щели между пластинами цилиндрического конденсатора. Чтобы зарегистрировать его (конденсатора) движение использовалась резонансная подвеска"

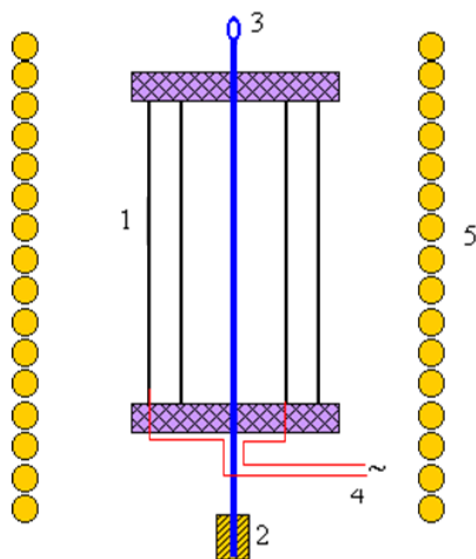


Рис. 1.

Таким образом, в этом эксперименте электромагнитный импульс обнаружен путем измерения механического импульса при

крутильных колебаниях конденсатора. Это означает, что электромагнитный импульс существует в стационарных электромагнитных полях и имеет значительную величину.

## Приложение 2. Эксперимент с ЭДВ.

В табл. 1 приводятся технические параметры одной из конструкций ЭДВ, полученные от автора этой конструкции М. Лавриненко – см. строки 1-7. В этой же таблице приведены значения параметров, которые вычисляются на основании предлагаемой теории. Видно, что механический момент и теоретический электромагнитный моменты совпадают (см. строки 13 и 14), измеренная и вычисленная скорости подъема совпадают (см. строки 3 и 16), скорость потока энергии равна 4444 м/сек (см. строку 21).

Таблица 1

№	Параметр	Значение
1	напряжение	45000 В
2	сила тока	0.0015 А
3	средняя скорость подъема	2 м/сек
4	вес	0.5 Н
5	емкость конденсатора, 15 пф	$15 \cdot 10^{-12}$ Ф
6	подъемная сила от ионного тока, 1.5 % от веса.	0.0075 Н
7	расстояние между электродами	0.03
8	площадь обкладки конденсатора=1м*1мм	0.001
9	объем диэлектрика в конденсаторе	$3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$
10	масса	0.05 кг
11	сопротивление утечки	$3 \cdot 10^7$ Ом
12	мощность	68 Вт
13	механический импульс	0.1 кг*м/сек
14	электромагнитный импульс	0.114 кг*м/сек
15	удельное сопротивление ионизированного воздуха	$10^6$ Ом*м
16	вычисленная скорость подъема	2.28 м/сек
17	механическая мощность	1.14
18	мощность источника напряжения	67.5
20	энергия конденсатора	0.015 Ватт*сек
21	скорость потока электромагнитной энергии в конденсаторе	4444 м/сек

---

22	коэффициент полезного действия	0.02
----	--------------------------------	------

# Глава 15. Четвертая электромагнитная индукция

## Оглавление

1. Вступление \ 1
2. Силы и потоки электромагнитной энергии в электропроводном теле \ 1
3. Виды электромагнитной индукции \ 3

## 1. Вступление

Ниже рассматриваются варианты электромагнитной индукции. Выделяется индукция, вызванная изменением потока электромагнитной энергии – т.н. четвертая электромагнитная индукция [19]. Находится зависимость э.д.с. этой индукции от плотности потока электромагнитной энергии и параметров провода. Рассматривается механизм возникновения потока энергии, поступающего в провод и компенсирующего тепловые потери.

## 2. Силы и потоки электромагнитной энергии в электропроводном теле

Закон сохранения импульса для тела, взаимодействующего с электромагнитным полем, можно записать в следующем виде [13]:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(J) = \frac{\partial}{\partial t}(pV) + gV, \quad (1)$$

где

$J$  – механический импульс устройства,

$p$  - плотность электромагнитного импульса,

$g$  - плотность потока электромагнитного импульса,

$V$  - объем тела, в котором импульс электромагнитного поля взаимодействует с телом, т.е. с зарядами в этом объеме.

Важно подчеркнуть, что эта формула применима только к телу, в котором есть свободные заряды. Такое тело является электропроводным.

Уравнение (1) означает, что суммарный поток импульса во всем объеме поля равен нулю.



Известно, что сила, действующая на тело,

$$F = -\frac{\partial}{\partial t}(J). \quad (2)$$

Следовательно,

$$\frac{F}{V} = \frac{\partial p}{\partial t} + g. \quad (3)$$

Известно [13], что

$$p = \frac{S}{c^2}, \quad (4)$$

$$g = \frac{S}{c}, \quad (5)$$

где  $S$  – плотность потока электромагнитной энергии. Объединяя (3-5), находим:

$$\frac{F}{V} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S}{c^2}\right) + \frac{S}{c}. \quad (6)$$

Таким образом, если электропроводное тело находится в потоке электромагнитной энергии  $S$ , то на него действует сила (6), зависящая только от потока электромагнитной энергии  $S$ . Эта сила существует и при постоянном потоке  $S$ , и тогда

$$\frac{F}{V} = \frac{S}{c}. \quad (7)$$

В том случае, если поток электромагнитной энергии распространяется в теле с относительными диэлектрической  $\varepsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями, в предыдущие формулы вместо скорости света  $c$  в вакууме необходимо подставить скорости света в веществе

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (8)$$

где  $\varepsilon$  - относительная диэлектрическая проницаемость тела,  $\mu$  - относительная магнитная проницаемость тела,

Рассмотрим случай, когда векторы электрической  $E$  и магнитной  $H$  напряженностей перпендикулярны. Тогда вместо формулы (6) получаем:

$$\frac{F}{V} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S\varepsilon\mu}{c^2}\right) + \frac{S\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}. \quad (9)$$

Если, кроме того, поле является постоянным, то

$$\frac{F}{V} = \frac{S\sqrt{\epsilon\mu}}{c}. \quad (10)$$

### 3. Виды электромагнитной индукции

Известен закон электромагнитной индукции

$$e = \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $\Phi$  - магнитный поток,  $e$  - э.д.с. Известно также [13], что эта электромагнитная индукция - появление э.д.с. в проводнике может возникать как следствие выполнения двух законов

$$F = q(v \times B), \quad (2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (3)$$

В соответствии с этим различают два вида электромагнитной индукции –

первый вид - случай (3), когда в проводнике э.д.с. появляется вследствие изменения магнитного потока, - *электромагнитная индукция, вызванная изменением магнитного потока;*

второй вид - случай (2), когда э.д.с. в проводнике появляется под действием магнитной силы Лоренца вследствие взаимного перемещения провода и магнитного поля без изменения магнитного потока, - *электромагнитная индукция, вызванная силой Лоренца.*

Известен и третий вид электромагнитной индукции, возникающей в униполярном генераторе Фарадея – *униполярная электромагнитная индукция.* В этом генераторе двигатель вращает постоянный магнит, а на радиусе магнита создается э.д.с., которая определяется по формуле вида

$$e = \omega BL^2/2, \quad (4)$$

где

$B$  - индукция постоянного магнита,

$L$  - длина радиуса магнита,

$\omega$  - угловая скорость вращения.

Эта формула получена разными методами: в [2] с применением теории относительности и в [3] на основе закона сохранения импульса.

Широко известен и тот факт, что ток индуцируется в проводнике, находящемся в потоке энергии электромагнитной волны. Назовем *электромагнитную индукцию, вызванную потоком электромагнитной энергии* четвертым видом электромагнитной

индукции. Э.д.с. этой индукции равна плотности сил, действующих на заряды и возникающих с появлением потока энергии электромагнитной. Выше эти силы определены по (2.9, 2.10). Следовательно, четвертая э.д.с. индукции равна

$$\varepsilon_4 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S\varepsilon\mu}{c^2} \right) + \frac{S\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \quad (5)$$

или при неизменной величине потока

$$\varepsilon_4 = \frac{S\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \quad (6)$$

Следовательно, электромагнитный поток позволяет зарядам (току зарядов) преодолевать сопротивление движению и совершает работу (которая частично превращается в тепло). Эта сила действует на все заряды (электроны) в проводе, направлена в сторону тока (т.е. она не действует на провод в целом). Таким образом, поток создает э.д.с., которая "движет ток".

С другой стороны, в главе 5 показано, что плотность электромагнитной энергии является функцией плотности тока  $J$  и магнитной напряженности  $H$ , что выражается формулой вида – см. (5.3.3):

$$S = \rho JH, \quad (7)$$

где  $\rho$  - электросопротивление. Таким образом, каждый элемент провода с током излучает поток электромагнитной энергии. Этот поток пронизывает следующий элемент провода и создает в этом элементе создает силу, действующую на заряды, т.е. определенную выше э.д.с. четвертой электромагнитной индукции. Эта сила создает ток. Таким образом,

ток в следующем элементе возникает как результат потока электромагнитной энергии, созданного током предыдущего элемента.

Заметим, что поток энергии, созданный некоторым элементом тока, НЕ может воздействовать на этот элемент тока, точно также как поле заряда не может воздействовать на этот заряд.

Такое представление хорошо согласуется с тем известным фактом, что у молнии существует лидер, движущийся со скоростью в несколько сот километров в секунду – см. главу 10, раздел 7.

Известен эксперимент, который может служить экспериментальным доказательством существования этой индукции [17].

# Литература

*Примечание:* **Vixra**, <http://vixra.org>,  
**DNA** – Доклады независимых авторов,  
ISSN 2225-6717, <http://dna.izdatelstwo.com/>

1. Канн К.Б. Электродинамика. Электромагнитные волны, <http://electrodynamics.narod.ru/em-waves.html>
2. Ток смещения и система уравнений Максвелла, <http://www.webpoliteh.ru/subj/dinamo/767-25-tok-smeshheniya-i-sistema-uravnenij-maksvella.html>
3. Розанов Н.Н. Специальные разделы математической физики. Часть 3. Электромагнитные волны в вакууме. ИТМО. Санкт-Петербург, 2005.
4. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
5. Хмельник С.И. Второе решение уравнений Максвелла, ViXra, 2016-01-26, <http://vixra.org/abs/1601.0292>; DNA, № 35, 2016, см. [здесь](#).
6. Хмельник С.И. Математическая модель электрического торнадо, ViXra, 2015-04-11, <http://vixra.org/abs/1504.0088>; DNA, № 33, 2015, см. [здесь](#).
7. Хмельник С.И. Вторая структура постоянного тока, ViXra, 2015-11-21, <http://vixra.org/abs/1511.0206>; DNA, № 35, 2016, см. [здесь](#). (916)
8. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с переменным током, ViXra, <http://vixra.org/abs/1503.0068> (744)
9. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с постоянным током, DNA-32, ID16319679, 2015; ViXra, <http://vixra.org/abs/1503.0048> (747)
10. Хмельник С.И. Структура постоянного тока, DNA-33, ID16537771, 2015; ViXra, <http://vixra.org/abs/1503.0241> (748)
11. Хмельник С.И. Структура потока электромагнитной энергии в проводе с постоянным током, DNA-33, ID16537771, 2015; ViXra, <http://vixra.org/abs/1504.0061> (749)
12. Торшин В.В., Бусыгин Б.П., Пащенко Ф.Ф., Круковский Л.Е. Эффект генерации постоянного электрического тока

- в неподвижном проводнике в постоянном магнитном поле. Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова. Альманах современной науки и образования, вып 12, 2008, <http://cyberleninka.ru/article/n/effekt-generatsii-postoyannogo-elektricheskogo-toka-v-nepodvizhnom-provodnike-v-postoyannom-magnitnom-pole>
13. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика. Москва, изд. "Мир", 1966.
  14. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводе и двигатель Мильроя, Vixra, 1510.0396, 2015-10-26, <http://vixra.org/abs/1510.0396>
  15. Хмельник С.И. Электромагнитная волна в проводе переменного тока, Vixra, 1603.0020, 2016-03-02, <http://vixra.org/abs/1603.0020>
  17. Хмельник С.И. Эксперимент, подтверждающий существование четвертой электромагнитной индукции, ViXra, <http://vixra.org/abs/1601.0215>
  18. Хмельник С.И. Сила Хмельника, DNA-30, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1407.0075>
  19. Хмельник С.И. Четвертая электромагнитная индукция, «Доклады независимых авторов», DNA-31, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1412.0214>
  20. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Рельсотрон>
  21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля.
  22. Тамм И.Е. Основы теории электричества, Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2003, стр. 547.
  23. Хмельник С.И. Униполярный двигатель Фарадея и закон сохранения импульса, DNA-23, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1404.0428>
  24. Хмельник С.И. К вопросу о внутриядерных силах DNA-27, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1405.0296>
  25. Хмельник С.И. Силы Лоренца, Ампера и закон сохранения импульса. Количественный анализ и следствия, DNA-30, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1407.0065>
  26. Хмельник С.И. Принцип обратимости в униполярных машинах Фарадея, DNA-30, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1407.0145>
  27. Хмельник С.И. Эксперимент для доказательства

- нарушения третьего закона Ньютона в униполярном двигателе, Vixra - <http://vixra.org/abs/1501.0061>
28. Стребков Д.С. Передача электрической энергии без металлических проводов, <http://www.electrolibrary.info/tesla/peredachaenergii.htm>
  29. Ротхаммель К. Антенны, изд. "Энергия", 1967, <http://www.radiouniverse.ru/book/antenny/2-1-antenna-v-vide-dlinnogo-provoda>
  30. Заев Н.Е. Сверхпроводники инженера Авраменко. "Техника - молодежи", №1, М., 1991.
  31. Изобретатель и рационализатор, 1992, №5, 6, 1-32
  32. Кулигин В.А., Корнева М.В., Кулигина Г.А., Большаков Г.П. Безинерциальные заряды и токи, <http://www.n-t.ru/ac/iga/>
  33. M. Lobo, G. Shipov, Tawatchai Laosirihongthong, Supakit Chotigo. Экспериментальное обнаружение скалярного электромагнитного поля. King Mongkut's University of Technology, Thonburi, Bangkok, 10140, Thailand, <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/004a/1032-MonopolE.pdf>
  34. Заев Н.Е., Авраменко С.В., Лисин В.Н. Измерение тока проводимости, возбуждаемого поляризационным током. <http://rusphysics.ru/dissertation/269/>
  35. Косинов Н.В. Эксперименты по беспроводной передаче энергии: подтверждение революционных идей Н. Тесла, <http://kosinov.314159.ru/kosinov31.htm>
  36. Википедия, Уравнения Максвелла, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения\\_Максвелла](https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения_Максвелла)
  37. Хмельник С.И. Электромагнитная волна в диэлектрической и магнитной цепи, Vixra - <http://vixra.org/abs/1604.0019>
  38. Leedskalnin "Perpetual Motion Holder" (ПМН) Bond Effect [http://peswiki.com/index.php/Directory:Leedskalnin\\_%22Perpetual Motion Holder%22 \(ПМН\) Bond Effect](http://peswiki.com/index.php/Directory:Leedskalnin_%22Perpetual_Motion_Holder%22_(ПМН)_Bond_Effect)
  39. Хмельник С.И. К теории хранителя вечного движения, DNA-23, ID 13514159, 2013; Vixra, <http://vixra.org/abs/1404.0086>
  40. Закон Кулона, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон\\_Кулона](https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Кулона)
  41. Капица П.Л. О природе шаровой молнии. ДАН СССР 1955. Том 1.
  42. <http://www.wikiznanie.ru/ru->

- [wz/index.php/Шаровая молния](http://wz/index.php/Шаровая_молния)
43. Хмельник С. И. К вопросу о внутриядерных силах. «Доклады независимых авторов», DNA-27, 2014, ID 14739921; *а также* <http://vixra.org/abs/1405.0296>
  44. Анатолий Мякеляйнен (Финляндия), Валерий Буераков (Украина). Полет на шаровой молнии, [https://drive.google.com/file/d/0B4rZDrYTBG\\_pMFZ1RFNOd2hSTDA/edit](https://drive.google.com/file/d/0B4rZDrYTBG_pMFZ1RFNOd2hSTDA/edit)
  45. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических и электродинамических системах, пятая редакция. Publisher by “MiC”, printed in USA, Lulu Inc., ID 1769875, ISBN 978-0-557-4837-3, 2014, 360 с.
  46. <https://www.youtube.com/watch?v=zQYFMJSKiu8>
  47. Реально работающий вечный двигатель на магнитах, часть 2, <http://x-faq.ru/index.php?topic=4144.msg119758;topicseen#msg119758>
  48. <http://x-faq.ru/index.php?topic=4144.new#new>, сообщение 1271, 25.10.2016.
  49. Магнитное поле внутри конденсатора, <https://www.youtube.com/watch?v=RNkYd1mueYk>
  50. Компас внутри конденсатора, <https://www.youtube.com/watch?v=A4vO2rLvtug>
  51. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Том 3. Электричество.
  52. Магнитное поле Земли, Википедия, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Магнитное поле Земли](https://ru.wikipedia.org/wiki/Магнитное_поле_Земли)
  53. Земные токи, Википедия, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Земные токи](https://ru.wikipedia.org/wiki/Земные_токи)
  54. Хмельник С.И. Электромагнитная волна в сферическом конденсаторе и природа Земного магнетизма, Vixra, <http://vixra.org/abs/1604.0355>, 2016-04-26.
  55. Хмельник С.И. Математическая модель шаровой молнии, DNA-33, 2015 - см. [здесь](#); *а также*: Vixra Funding, <http://vixra.org/abs/1503.0076>, 2015-03-11; *а также*: Vixra Funding, Mathematical Model of Ball Lightning, <http://vixra.org/abs/1503.0065>, 2015-03-09.
  56. Хмельник С. И. Вторая математическая модель шаровой молнии, <http://vixra.org/abs/1605.0280>, 2016-05-28.
  57. Wen Y. K. Dynamic tornado wind loads on tall buildings / Wen Y. K. // Journ. Of Struct. Div., Proc. ASCE, 1975, ST1, p.169.

58. Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа, Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1938, Т. 8 (3),  
[http://ufn.ru/ufn67/ufn67\\_11/Russian/r6711f.pdf](http://ufn.ru/ufn67/ufn67_11/Russian/r6711f.pdf),  
[https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнение\\_Власова](https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнение_Власова)
59. Руткевич П.Б., Руткевич П.П. Аксиально-симметричная модель неустойчивости типа торнадо,  
[http://d33.infospace.ru/d33\\_conf/2011v8n4/76-82.pdf](http://d33.infospace.ru/d33_conf/2011v8n4/76-82.pdf)
60. Смерчи и торнадо,  
[http://www.krugosvet.ru/enc/ nauka\\_i\\_tehnika/fizika/smerchi\\_i\\_tornado.html?page=0,3](http://www.krugosvet.ru/enc/ nauka_i_tehnika/fizika/smerchi_i_tornado.html?page=0,3)
61. Моделирование «глаз» циклонов, торнадо-смерчей, течений мирового океана,  
[http://old.msun.ru/vector/Konuhov\\_ATR/Glaz\\_ciklona.htm](http://old.msun.ru/vector/Konuhov_ATR/Glaz_ciklona.htm)
62. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979.
63. Иванов В.К. Курс общей физики.  
[http://lms.physics.spbstu.ru/pluginfile.php/2134/mod\\_resource/content/1/opt\\_1\\_03.pdf](http://lms.physics.spbstu.ru/pluginfile.php/2134/mod_resource/content/1/opt_1_03.pdf)
64. Игорь Иванов. Закрученный свет и закрученные электроны: обзор последних результатов,  
[http://elementy.ru/nauchno-populyarnaya\\_biblioteka/432009/Zakruchennyy\\_svet\\_i\\_zakruchennyye\\_elektrony\\_obzor\\_poslednikh\\_rezultatov](http://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/432009/Zakruchennyy_svet_i_zakruchennyye_elektrony_obzor_poslednikh_rezultatov)
65. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. Издание второе, переработанное и дополненное. Изд. "Советское радио", Москва, 1971. – 665 с.
66. Заряд конденсатора вилоккой Авраменко от нуля, форум  
<http://x-faq.ru/index.php?topic=4203.0>
67. R.A. MILROY, Hydrodynamic Gyroscope,  
<http://appliedmechanics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1398258>, а также  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/MilroyFromMilroy.pdf>, а также перевод на русский:  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/MilroyFromMilroyR.pdf>
68. Игорь Белецкий, Двигатель из подшипника,  
<https://www.youtube.com/watch?v=dQUkWFwCxrE&list=TLn9vNCag6KRUXMjA2MjAxNg>



69. A strange electric motor,  
<https://www.youtube.com/watch?v=i7LOF1GZpdo>
70. Timur Khodzhiev. Двигатель Мильроя, ver. 3.2,  
<https://www.youtube.com/watch?v=XuLqsdHqoPI>
71. Крутится и никто и ни где не объясняет почему ОНО крутится, <https://www.youtube.com/watch?v=zuGDnWEQE94>
72. Необычный двигатель (часть 2),  
<https://www.youtube.com/watch?v=k04Ifn2SVj4>
73. Самовращение или эффект Губера,  
<https://www.youtube.com/watch?v=lgaOsnOyMxY>
74. Сильвестров А.Н., Зименков Д.К. О природе момента в двигателе Косырева-Мильроя. Национальный технический университет Украины (НТУУ “КПИ”),  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Silvestrow.pdf>
75. Кузьмин В.В., д.т.н., проф., Шпатенко В.С. О ПРИРОДЕ ПОЯВЛЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГО МОМЕНТА В ДВИГАТЕЛЕ КОСЫРЕВА – МИЛЬРОЯ,  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Kuzmin.pdf>
76. Андрус В.Ф. Объяснение эффекта Губера с позиции нейтронных наук,  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Andrus.pdf>
77. Н.Н. Синельников. Об эффект Губера,  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Sinelnikow.pdf>
78. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводе и двигатель Мильроя, Vixra,  
<http://vixra.org/abs/1510.0396>, 2015-10-26, а также Khmelnik S.I. Electromagnetic Energy Flow in the Wire and Milroy Engine, Vixra, <http://vixra.org/abs/1511.0130>
79. <https://www.youtube.com/watch?v=BM9waVSfc4s>
80. Николаев Г.В. Современная электродинамика и причины ее парадоксальности. – Томск: Твердыня, 2003 – 149 с.
81. Умов Н.А. Уравнения движения энергии в телах. - Одесса: Типография Ульриха и Шульце, 1874. - 56 с.  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Umow.pdf>
82. В.В. Косырев, В.Д. Рабко, Н.И. Вельман. Электрический двигатель. Изобретение СССР, №155216, 1963.

- 
83. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Индуктивность>
  84. Хмельник С.И. Объяснение эффекта Губера, <http://vixra.org/abs/1407.0142>, 2014-07-19
  85. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводе и двигатель Мильроя, <http://vixra.org/abs/1510.0396>, 2015-10-26
  86. А. Эйхенвальд. Электричество, М.Л. 1933, п. 282.
  87. В.Е. Фортов, А.Г. Храпак, С.А. Храпак, В.И. Молотков, О.Ф. Петров. Пылевая плазма, УФН, 2004, май, <http://ufn.ru/ru/articles/2004/5/b/>
  88. Пылевая плазма, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Пылевая\\_плазма](https://ru.wikipedia.org/wiki/Пылевая_плазма)
  89. Эксперимент с плазмой в космосе, <https://www.youtube.com/watch?v=SI406HKLYkM>
  90. V.N. Tsytovich, G.E. Morfill, V.E. Fortov, N.G. Gusein-Zade, B.A. Klumov and S.V. Vladimirov. From plasma crystals and helical structures towards inorganic living matter. New Journal of Physics, Volume 9, August 2007, <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/9/8/263/meta>
  91. Пылевая плазма намекает на молекулу жизни, <http://www.membrana.ru/particle/693>.
  92. <http://akb-darom.ru/vse-o-akb/Вес-аккумулятора.html>
  93. <http://www.magntech.ru/aging.htm>
  94. Кулигин В.А., Кулигина Г.А., Корнева М.В. Фазовая скорость, групповая скорость и скорость переноса энергии, Воронежский университет, депонировано в ВИНТИ 24.07.90, <http://www.efir.com.ua/tmp/velrus.pdf>, <http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/velrus.pdf>
  95. G.M. Graham, D.G. Lahoz. Observation of static electromagnetic angular momentum in vacua, Nature, 285, 154, 1980.
  96. А. Стасенко. Зачем быть конденсатору в магнитном поле? КВАНТ, 1998, №5, <http://lib.izdatelstwo.com/Papers2/CondVrasch.pdf>
  97. Иванов Г.П. Электродинамическое эфиропорное (эфирореактивное) движение, <http://www.tts.lt/~nara/>
-

- <http://www.tts.lt/~nara/strogijrus.htm>,  
<http://www.tts.lt/~nara/chast1.htm>
98. Грабовский Р.И. Курс физики. Учеб. пособие для с/х ин-тов. Изд. 4-е, перераб. и доп. М., «Высш. школа», 1974. - 552 с., [http://books.alnam.ru/book\\_phis.php](http://books.alnam.ru/book_phis.php), §83. Конденсатор. Энергия электрического поля, [http://books.alnam.ru/book\\_phis.php?id=84](http://books.alnam.ru/book_phis.php?id=84)
99. Иванов Г.П., Иванов Ю.Г. Способ получения тяги, патент RU-2172865, 1999, <http://www.tts.lt/~nara/patent/patent.html>
100. Electromagnetic Thruster, USA Patent 2014013724, [https://en.wikipedia.org/wiki/RF\\_resonant\\_cavity\\_thruster](https://en.wikipedia.org/wiki/RF_resonant_cavity_thruster).
101. Electrostatic motor, USA Patent 1974483, [http://en.wikipedia.org/wiki/Biefeld%E2%80%93Brown\\_effect](http://en.wikipedia.org/wiki/Biefeld%E2%80%93Brown_effect)
102. S.I. Khmelnik. A capacitor engine for an aircraft, Israel Patent 200435, 2009.
103. R. Shawyer. Superconducting microwave radiation thruster, 2016, <https://www.ipo.gov.uk/p-find-publication-getPDF.pdf?PatentNo=GB2537119&DocType=A&JournalNumber=6647>
104. NASA Team Claims ‘Impossible’ Space Engine Works—Get the Facts, <http://news.nationalgeographic.com/2016/11/nasa-impossible-emdrive-physics-peer-review-space-science/>
105. China Claims Its Made the Impossible EmDrive Possible, <https://futurism.com/china-claims-its-made-the-impossible-emdrive-possible/>
106. Хмельник С.И. Безопорное движение без нарушения физических законов, DNA-21, 2014, <http://lib.izdatelstwo.com/Papers/21.45.pdf>
107. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Под редакцией Ю.В. Пименова, Москва, 2002 г., 536 стр.
108. Ближние и дальние зоны электромагнитные поля, <http://lib.izdatelstwo.com/Papers2/BIZ.pdf>
109. Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Д.П. Современная теория и практические применения антенн. Под ред. Неганова В.А. Изд. «Радиотехника», Москва, 2009, 720 стр.

110. Щелкунов С. А., Фриис Г.Т. Антенны. Теория и практика - Москва: Советское радио, 1955, 604 с.
111. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2001, 576 стр.
112. Джексон Дж. Классическая электродинамика. Перевод с английского Г. В. Воскресенского и Л. С. Соловьева. Под редакцией Э. Л. Бурштейна. Изд "Мир" Москва 1965. - 703 с.
113. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических и электродинамических системах, пятая редакция. Publisher by "MiC", printed in USA, Lulu Inc., ID 1769875, ISBN 978-0-557-4837-3, 2014, 360 с.
114. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Магнетосопротивление>,  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Magneto-resistance>
115. Хмельник С.И. Решение уравнений Максвелла для конденсатора с переменным напряжением <http://vixra.org/abs/1710.0203>, 2017-10-15
116. В.И. Балабай, Ю.В. Иванько, В.В. Шаповаленко. Магнитостатическая индукция. Сборник докладов, 2005, Украина, стр. 29-33.  
<https://web.archive.org/web/20171117160352/http://www.prs-rover.narod.ru/biblitek/sbornik2005/sbornik1-79.djvu>.
117. Журнал «Юный техник», 1992, № 08,  
<http://zhurnalko.net/=sam/junyj-tehnik/1992-08--num65>
118. А. ИЛЬИН, Ю. ПРОКОПЦЕВ. СДЕЛАЙ ДЛЯ ШКОЛЫ. О том, как Володя Миславский помог Джеймсу К. Максвеллу, журнал «Юный техник», 2004 № 02,  
<https://proflib.net/chtenie/32537/zhurnal-yunyy-tekhnik-yunyy-tekhnik-2004-02-lib-13.php>
119. Хмельник С.И., Хмельник М.И. К вопросу об источнике энергии в генераторе Серла. «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», Россия-Израиль, 2007, вып. 5, printed in USA, Lulu Inc., ID 859217, ISBN 978-1-4303-2444-7.
120. Зацаринин С.Б. О ХИТРОМ ТРАНСФОРМАТОРЕ,  
<http://lib.izdatelstwo.com/Papers2/Zazarinin.pdf>
121. Виталий Позынич, Коаксиальный трансформатор,  
[https://www.youtube.com/watch?time\\_continue=8&v=hgmU4g4psI](https://www.youtube.com/watch?time_continue=8&v=hgmU4g4psI)

122. Ревякин П.Ю. Передача энергии через диэлектрик, DNA-45, 2018
123. С.А. Семиков. О поверхностной электропроводности. “Природа”, № 12, 2004 г.
124. Хмельник С.И. Энергетические процессы в бестопливных электромагнитных генераторах. Publisher by “MiC”, printed in USA, Lulu Inc., ID 10060906, ISBN 978-1-257-08919-2, 2011, 84 с.
125. Ревякин П.Ю. (Россия) Магнитная батарея. Наблюдения и опыты. DNA-45, 2018
127. Торшин В.В. Спиральные образования в природе и электродинамике, – М.: ЦП ВАСИЗДАСТ, 2008, – с. 251, ISBN 5911900297,  
<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1092-tr.pdf>
128. Л.А. Памятных, В.Е. Иванов, Г.С. Кандаурова. Руководство к лабораторным и практическим занятиям «Магнитооптическая установка для изучения доменных и микромагнитных структур в постоянных и переменных магнитных полях». Уральский государственный университет им. А.М. Горького. Екатеринбург, 2007,  
[http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/1321/4/1324749\\_guid\\_e.pdf](http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/1321/4/1324749_guid_e.pdf)
129. Д.В. Моисеев, Гипотеза о форме поля окружающего постоянный магнит или торсмагнитное поле. «Диалоги о науке», ISSN 2074-7284, №1, 2014, стр. 44,  
<https://torsmagnit.jimdo.com/>
130. Хмельник С.И. Левитация вращающихся дисков, DNA, № 45, 2019.

