

Хмельник С. И.

Непротиворечивое решение  
уравнений Максвелла

Редакция 1 – 06.03.2016

Редакция 2 – 16.03.2016

Израиль            2016

**Solomon I. Khmelnik**

# Not Contradictory Solution of Maxwell's Equations (in Russian)

**Copyright © 2016 by Solomon I. Khmelnik**

СОЛОМОН ИЦКОВИЧ ХМЕЛЬНИК

All right reserved. No portion of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, without written permission of the author.

**Published by "MiC" - Mathematics in Computer Comp.**

**BOX 15302, Bene-Ayish, Israel, 60860**

**Fax: ++972-3-9471301**

**Printed in United States of America, Lulu Inc.,**

**ID 1855552**

**ISBN 978-1-329-96074-9**



**Israel 2016**

## Аннотация

Предлагается новое решение уравнений Максвелла для вакуума и для провода с постоянным и переменным током. Предварительно отмечается, что доказательство единственности известного решения основано на законе сохранения энергии, который не соблюдается (для мгновенных значений) в известном решении.

Предлагаемое решение

- описывает волну в вакууме и волну в проводе,
- не противоречит закону сохранения энергии в каждый момент времени, т.е. устанавливает постоянство плотности потока электромагнитной энергии во времени,
- выявляет сдвиг фаз между электрическими и магнитными напряженностями,
- объясняет существование потока энергии вдоль провода, равного потребляемой мощности.

В книге приводится подробное доказательство всех вариантов решения.

## Оглавление

Предисловие \ 4

Глава 1. Второе решение уравнений Максвелла для вакуума \ 10

Глава 2. Решение уравнений Максвелла для низкоомного провода переменного тока \ 24

Глава 3. Решение уравнений Максвелла для провода постоянного тока \ 44

Глава 4. Решение уравнений Максвелла для провода с комплексным сопротивлением \ 58

Глава 5. Излучение и передача энергии по одному проводу \ 61

Литература \ 69

# Предисловие

---

## Оглавление

1. Вступление
  2. О потоке энергии в проводе
  3. Требования к непротиворечивому решению уравнений Максвелла
  4. Варианты уравнений Максвелла
  4. Потоки энергии
  5. Обсуждение
- Приложение 1

## 1. Вступление

В последнее время критика справедливости уравнений Максвелла слышится со всех сторон. Уверенность критиков создается, прежде всего, нарушением закона сохранения энергии. И, действительно, *"плотность потока электромагнитной энергии (модуль вектора Умова-Пойнтинга) «пульсирует» по гармоническому закону. Не нарушается ли здесь закон сохранения энергии?"* [1]. Безусловно, нарушается, если электромагнитная волна удовлетворяет известному решению уравнений Максвелла. Но ведь другого решения нет: *"Доказательство единственности решения в общих чертах сводится к следующему. Если имеется два различных решения, то их разность вследствие линейности системы тоже является решением, но при нулевых зарядах и токах и нулевых начальных и граничных условиях. Отсюда, пользуясь выражением для энергии электромагнитного поля и законом сохранения энергии заключаем, что разность решений тождественно равна нулю, т. е. решения одинаковы. Тем самым единственность решения уравнений Максвелла доказана"* [2]. Таким образом, единственность решения доказывается на основе применения того закона, который нарушается в этом решении.

Другим результатом, следующим из существующего решения, является синфазность электрической и магнитной компонент напряженностей в электромагнитной волне. Это противоречит представлению о непрерывном преобразовании электрической и магнитной компонент энергии в электромагнитной волне. В [1],

например, этот факт относится к "порокам современной классической электродинамики".

Такие результаты, следующие из известного решения уравнений Максвелла, позволяют некоторым авторам усомниться в достоверности уравнений Максвелла. Подчеркнем, однако, что эти сомнительные результаты следуют только из найденного решения. Но это решение, как указано выше, может быть иным.

Рассмотрим еще электромагнитную волну в проводе. Если полагать, что провод имеет пренебрежимо малое сопротивление, то уравнения Максвелла для этой волны буквально совпадают с уравнениями Максвелла для волны в вакууме. Однако в электротехнике не используется известное решение. Используется только решение, связывающее напряженность кругового магнитного поля с током в проводе (будем для краткости в дальнейшем называть его электротехническим решением). Это решение тоже удовлетворяет уравнениям Максвелла. Однако, во-первых, оно является другим решением тех же уравнений (что опровергает теорему о единственности известного решения). А, во-вторых, - и это главное, - электротехническое решение противоречит экспериментальным фактам.

Речь идет о скин-эффекте. Решение, объясняющее скин-эффект, должно содержать нелинейную зависимость плотности тока смещения (идущего вдоль провода) от радиуса. Такая зависимость в соответствии с уравнениями Максвелла должна сочетаться с существованием радиальных и круговых электрических и магнитных напряженностей, нелинейно зависящих от радиуса. Этого нет в электротехническом решении. Скин-эффект объясняется на основе уравнений Максвелла, но в из электротехнического решения он **не** следует. Это и позволяет утверждать, что электротехническое решение противоречит экспериментальным фактам.

## 2. О потоке энергии в проводе

Рассмотрим еще поток энергии в проводе. Существующее представление о передаче энергии по проводу состоит в том, что энергия каким-то образом распространяется вне провода [13]: "... наша «сумасшедшая» теория говорит, что электроны получают свою энергию, растрачиваемую ими на создание теплоты извне, от потока энергии внешнего поля внутрь провода. Интуиция нам подсказывает, что электрон пополняет свою энергию за счет «давления», которое толкает его вдоль провода, так что энергия как будто должна течь вниз (или вверх) по проводу. А вот теория утверждает, что на самом

*деле на электрон действует электрическое поле, создаваемое очень далекими зарядами, и электроны теряют свою энергию, расходуемую на тепло именно из этих полей. Энергия отдаленных зарядов каким-то образом растекается по большой области пространства и затем втекает внутрь провода."*

Такая теория противоречит и закону сохранения энергии. Действительно, поток энергии, путешествуя в пространстве, должен терять часть энергии. Однако это никак не обнаруживается ни экспериментально, ни теоретически. Но, главное, эта теория противоречит следующему эксперименту. Пусть по центральному проводу коаксиального кабеля течет постоянный ток. Этот провод изолирован от внешнего потока энергии. Откуда же появляется поток энергии, компенсирующий тепловые потери в проводе? Но, кроме потерь в проводе, этот поток извне должен проникнуть в нагрузку, например, в обмотки электромоторов, закрытые стальными кожухами статора. Этот вопрос существующая теория не обсуждает.

Между тем, поток энергии электромагнитной волны присутствует в самой волне и для этого не используется пространство, внешнее по отношению к волне.

Решение уравнений Максвелла должно моделировать такую структуру электромагнитной волны, в которой присутствует поток электромагнитной энергии.

Интуиция, о которой говорит Фейнман, нас **не** обманывает. Автор доказывает это ниже, **не** выходя за рамки уравнений Максвелла.

### **3. Требования к непротиворечивому решению уравнений Максвелла**

Итак, решение уравнений Максвелла должно

- описывать волну в вакууме и волну в проводе,
- не противоречить закону сохранения энергии в каждый момент времени, т.е. устанавливать постоянство плотности потока электромагнитной энергии во времени,
- выявлять сдвиг фаз между электрическими и магнитными напряженностями,
- объяснять существование потока энергии вдоль провода, равного потребляемой мощности.

Ниже выводится такое решение уравнений Максвелла.

## 4. Варианты уравнений Максвелла

Далее выделяются различные частные случаи (варианты) системы уравнений Максвелла, которые мы пронумеруем для удобства изложения.

### Вариант 1.

Уравнения Максвелла в общем случае в системе СГС имеют вид [3]:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (4)$$

$$I = \sigma E, \quad (5)$$

где

$I$ ,  $H$ ,  $E$  - ток проводимости, магнитная и электрическая напряженности соответственно,

$\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  - диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, проводимость материала провода.

### Вариант 2.

Для вакуума надо принять  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$ . Тогда система уравнений (1-5) примет вид:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (9)$$

Решение этой системы рассмотрено в главе 1.

### Вариант 3.

Рассмотрим вариант 1 в комплексном представлении:

$$\operatorname{rot}(E) + i\omega \frac{\mu}{c} H = 0, \quad (10)$$

$$\operatorname{rot}(H) - i\omega \frac{\varepsilon}{c} E - \frac{4\pi}{c} (\operatorname{real}(I) + i \cdot \operatorname{imag}(I)) = 0, \quad (11)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (12)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (13)$$

$$\operatorname{real}(I) = \sigma \cdot \operatorname{abs}(E). \quad (14)$$

Здесь важно отметить, что в (14) указывается не весь ток, а только его реальная часть, т.е. ток проводимости. Мнимая часть тока является током смещения и не зависит от электрических зарядов.

Решение этой системы рассмотрено в **главе 4**.

#### **Вариант 4.**

Для провода, в котором протекает синусоидальный ток  $I$  от внешнего источника, иногда можно исключить  $\operatorname{real}(I)$  в уравнениях (11-14). Это возможно для низкоомного провода и для диэлектрического провода (подробнее см. в главе 2). При этом система (11-14) принимает вид:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (16)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (17)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (18)$$

Здесь важно отметить, что ток  $I$  **не** является током проводимости, даже если он течет по проводнику.

Решение этой системы рассмотрено в **главе 2**.

#### **Вариант 5.**

Для провода постоянного тока система по варианту 1 упрощается благодаря отсутствию производных по времени и принимает вид:

$$\operatorname{rot}(E) = 0, \quad (21)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (22)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (24)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (25)$$

$$I = \sigma E \quad (26)$$

или

#### **Вариант 6.**

$$\operatorname{rot}(I) = 0, \quad (27)$$



$$\operatorname{rot}(H) - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (28)$$

$$\operatorname{div}(I) = 0, \quad (29)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (30)$$

Решение этой системы рассмотрено в **главе 3**

Мы будем искать монохроматическое решение указанных систем. Переход к полихроматическому решению может быть выполнен с помощью преобразования Фурье.

Мы будем использовать систему цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  - см. приложение 1. Очевидно, если решение существует в цилиндрической системе координат, то оно существует и в любой иной системе координат.

### Приложение 1. Цилиндрические координаты.

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ , как известно [4], скаляр-дивергенция вектора  $H$ , вектор-градиент скалярной функции  $a(x, y, z)$ , вектор-ротор вектора  $H$  имеют соответственно вид

$$\operatorname{div}(H) = \left( \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right), \quad (a)$$

$$\operatorname{grad}_r(a) = \frac{\partial a}{\partial r}, \quad \operatorname{grad}_\varphi(a) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a}{\partial \varphi}, \quad \operatorname{grad}_z(a) = \frac{\partial a}{\partial z}, \quad (b)$$

$$\operatorname{rot}_r(H) = \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right), \quad (c)$$

$$\operatorname{rot}_\varphi(H) = \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (d)$$

$$\operatorname{rot}_z(H) = \left( \frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right). \quad (e)$$

# Глава 1. Второе решение уравнений Максвелла для вакуума

---

## Оглавление

1. Введение
  2. Решение уравнений Максвелла
  3. Напряженности
  4. Потоки энергии
  5. Обсуждение
- Приложение 1  
Приложение 2

## 1. Введение

В главе "Предисловие" показана противоречивость известного решения уравнений Максвелла. Ниже предлагается новое решение уравнений Максвелла для вакуума [5].

## 2. Решение уравнений Максвелла

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла для вакуума, которая приведена в главе "Предисловие", как вариант 1, и имеет вид

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{div}(E) = 0,$$

$$\operatorname{div}(H) = 0.$$

В системе цилиндрических координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = M_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = M_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = M_z, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (8)$$

$$J = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (9)$$

$$M = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (10)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\omega$  – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$J_r = j_r(r)co, \quad (13)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$J_z = j_z(r)si, \quad (15)$$

$$H_r = h_r(r)co, \quad (16)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (17)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (18)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (19)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (20)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (21)$$

$$M_r = m_r(r)co, \quad (21)$$

$$M_\varphi = m_\varphi(r)si, \quad (22)$$

$$M_z = m_z(r)si, \quad (23)$$

где  $j(r)$ ,  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $m(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-23) преобразуют систему уравнений (1-10) с тремя аргументами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $j(r)$ ,  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $m(r)$ .

В приложении 1 показано, что у такой системы **существует** решение, имеющее следующий вид (в приложении 1 см. (3.1, 39, 33, 34, 32) соответственно):

$$h_z(r) = 0, e_z(r) = 0. \quad (24)$$

$$e_r = e_\varphi = \frac{A}{2} r^{-(1-\alpha)}, \quad (25)$$

$$h_\varphi(r) = e_r(r). \quad (26)$$

$$h_r(r) = -e_\varphi(r), \quad (27)$$

$$\chi = \omega/c. \quad (28)$$

где  $A, c, \alpha, \chi, \omega$  - константы.

Тем самым мы получили монохроматическое решение системы уравнений (1-10). Переход к полихроматическому решению может быть выполнен с помощью преобразования Фурье. Очевидно, если решение существует в цилиндрической системе координат, то оно существует и в любой иной системе координат.

Таким образом, мы получили общее решение уравнений Максвелла в вакууме.

### 3. Напряженности

Рассмотрим решение (2.25):

$$e_r = e_\varphi = 0.5A \cdot r^{\alpha-1}, \quad (1)$$

где  $(A/2)$  - амплитуда напряженности. Из (1) следует:

$$(e_r^2 + e_\varphi^2) = A \cdot r^{2(\alpha-1)}. \quad (2)$$

На рис. 1 показаны, например, графики функций (1, 2) при  $A = -1$ ,  $\alpha = 0.8$ .

На рис. 2 показаны векторы напряженностей, исходящие из точки  $A(r, \varphi)$ . Напомним, что проекции  $h_\varphi(r) = e_r(r)$  и  $h_r(r) = -e_\varphi(r)$  - см. (2.28, 2.29). Направления векторов  $e_r(r)$  и  $e_\varphi(r)$  выбраны так:  $e_r(r) > 0$ ,  $e_\varphi(r) < 0$ . При этом векторы  $E$ ,  $H$  всегда ортогональны. Сумма модулей этих векторов определяется из (2.17, 2.18, 2.20, 2.21, 2.26, 2.27) и равна

$$W = E^2 + H^2 = (e_r(r)\delta i)^2 + (e_\varphi(r)\delta i)^2 + (h_r(r)c\omega)^2 + (h_\varphi(r)c\omega)^2$$

или

$$W = (e_r(r))^2 + (e_\varphi(r))^2 \quad (3)$$

- см. также (10) и рис. 1. Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны постоянна на всех точках окружности данного радиуса.

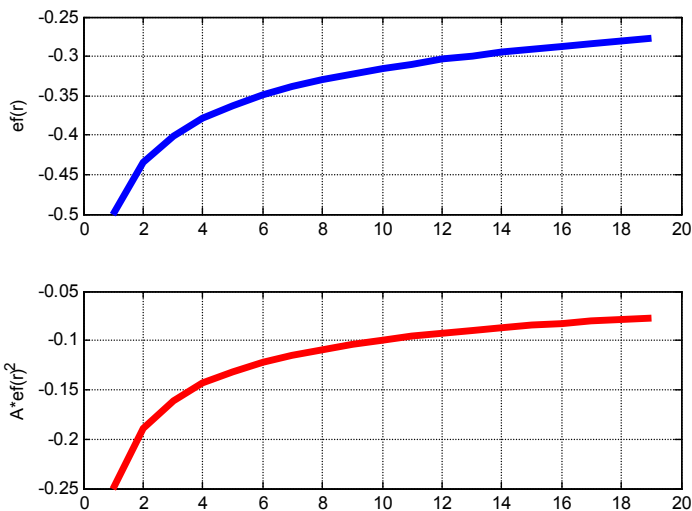


Fig.1. SecondSolMax.m

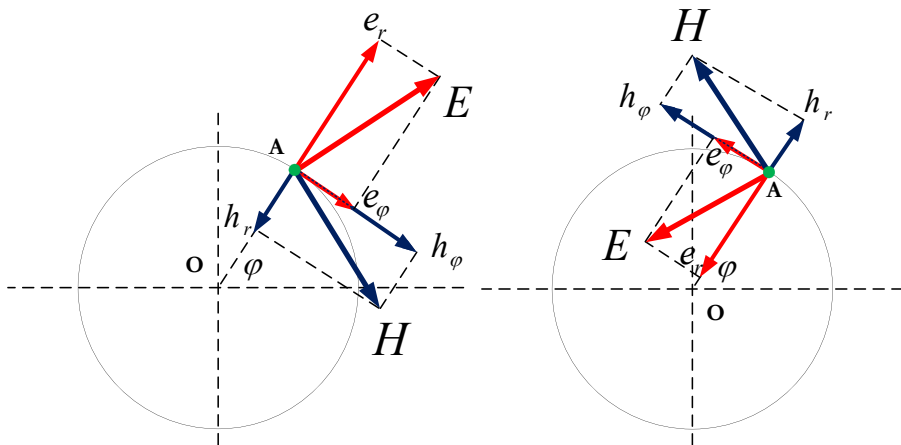


Рис. 2.

Рис. 3.

Решение существует и при измененных знаках функций (2.11, 2.21). Этому случаю соответствует рис. 3. Рис. 2 и рис. 3

иллюстрируют то, что возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны.

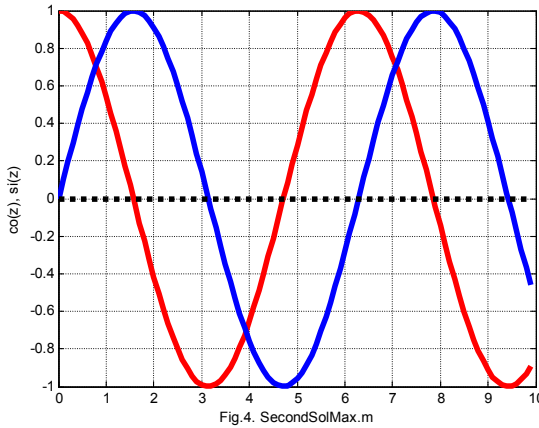
На рис. 4 для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны показаны функции

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t)$$

или эквивалентные им при  $z = ct$  функции

$$co = \cos\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c}z\right), \quad si = \sin\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c}z\right).$$

При  $\varphi = 0$ ,  $2\omega/c = 0.1$  эти функции принимают вид  $co = \cos(z)$ ,  $si = \sin(z)$  и показаны на рис. 4.



## 4. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_r$ ,  $S_\varphi$ ,  $S_z$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Из (2.12-2.17, 3.4) следует, что поток, проходящий через данное сечение волны в данный момент времени,

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \overline{S_r} \\ \overline{S_\varphi} \\ \overline{S_z} \end{bmatrix} = \eta \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z). \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \end{aligned} \quad (6)$$

В приложении 1 показано, что  $h_z(r) = 0$ ,  $e_z(r) = 0$ . Следовательно,  $s_r = 0$ ,  $s_\varphi = 0$ , т.е. поток энергии распространяется только вдоль оси OZ и равен

$$\bar{S} = \overline{S_z} = \eta \iint_{r,\varphi} [s_z \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (7)$$

Отсутствие потока энергии по радиусу означает, что область существования волны **НЕ** расширяется. Подтверждением этому является существование лазера.

Найдем  $s_z$ . Из (2.26, 2.27) получаем:

$$e_r h_\varphi = e_r^2, \quad (8)$$

$$e_\varphi h_r = -e_\varphi^2. \quad (9)$$

Из (7, 8, 9) получаем:

$$s_z = (e_r^2 + e_\varphi^2). \quad (10)$$

Таким образом,

$$\bar{S} = \eta \iint_{r,\varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (11)$$

Отсюда, как показано в приложении 2, следует, что

$$\bar{S} = \frac{c}{16\alpha\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r ((e_r^2 + e_\varphi^2) dr). \quad (12)$$

Из (10, 12) находим:

$$\bar{S} = \frac{cA}{16\alpha\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (r^{2(\alpha-1)}) dr. \quad (12a)$$

Пусть  $R$  – радиус кругового фронта волны. Тогда

$$S_{\text{int}} = \int_{r=0}^R (r^{2(\alpha-1)}) dr = \frac{R^{(2\alpha-1)}}{(2\alpha-1)}, \quad (13)$$

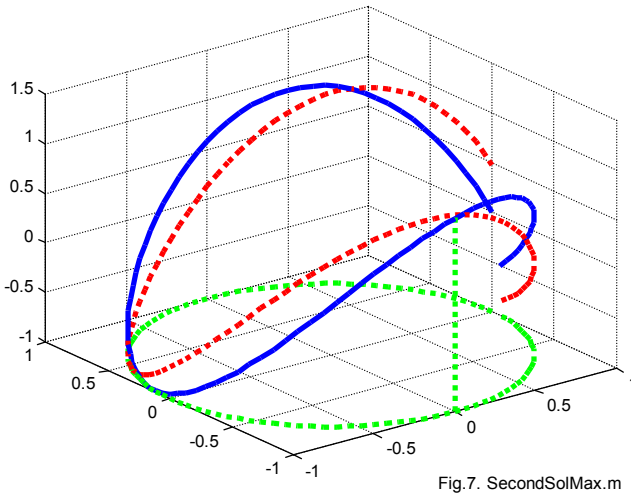
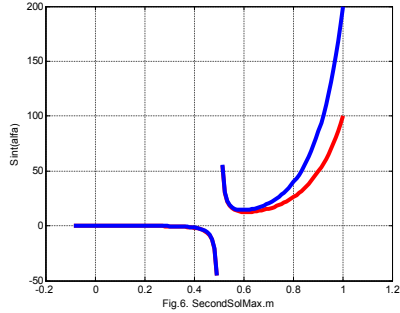
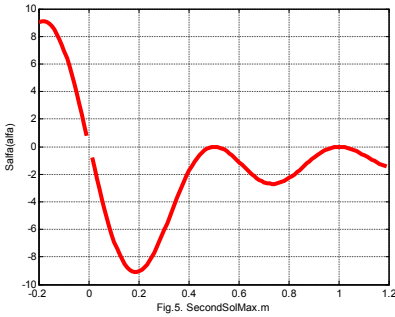
$$S_{alfa} = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)), \quad (14)$$

$$\bar{S} = \frac{cA}{16\pi} S_{alfa} S_{int}. \quad (15)$$

На рис. 5 показана функция  $S_{alfa}(\alpha)$  (13), а на рис. 6 показана функция  $S_{int}(\alpha)$ . На рис. 6 верхняя и нижняя кривые относятся соответственно к  $R = 200$  и  $R = 100$ . Из формулы (15), рис. 5 и рис. 6 видно, что поток энергии является положительным, например, при  $A = -1$ ,  $\alpha = 0.8$ .

Поскольку поток энергии и энергия связаны соотношением  $S = W \cdot c$ , то из (15) можно найти энергию единицы длины волны:

$$\bar{W} = \frac{A}{16\pi} S_{alfa} S_{int}. \quad (17)$$





В приложении 2 показано также, что плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = (e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2\alpha\varphi + 4\omega z/c). \quad (18)$$

Отсюда и из (3.10) следует:

$$\bar{S}_{rz} = A \cdot r^{2(\alpha-1)} \sin(2\alpha\varphi + 4\omega z/c). \quad (19)$$

На рис. 7 показана эта функция при  $A=1$ ,  $\alpha=0.8$ ,  $r=1$  и двух значениях второго слагаемого: 0 и 0.5 – см. сплошную и пунктирную линии соответственно.

Отсюда следует, что

- плотность потока неравномерно распределена по сечению потока – существует картина распределения плотности потока по сечению волны;
- эта картина вращается при перемещении по оси OZ;
- поток энергии (15), проходящий через площадь сечения, не зависит от  $t$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ; главное, что эта величина не изменяется во времени, и это соответствует закону сохранения энергии.

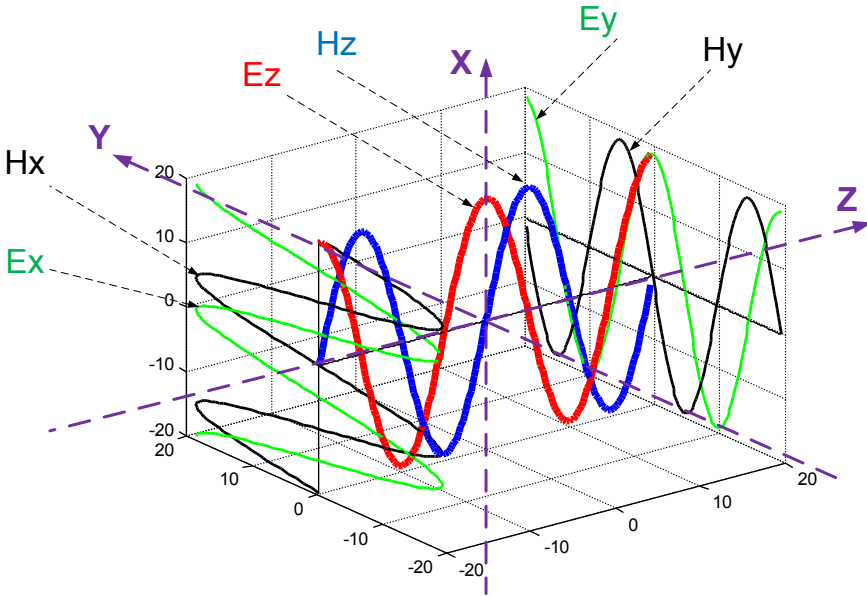
## 5. Обсуждение

Полученное решение описывает волну. Его основные отличия от известного решения состоят в следующем:

1. Мгновенный (а не средний по некоторому периоду) поток энергии **не** изменяется во времени, что соответствует закону сохранения энергии.
2. Поток энергии имеет положительное значение.
3. Поток энергии распространяется вдоль волны
4. Магнитная и электрическая напряженности на некоторой оси координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  сдвинуты по фазе на четверть периода.
5. Решение для магнитных и электрических напряженностей является вещественным.
6. Решение существует при постоянной скорости распространения волны.
7. Область существования волны **не** расширяется, что подтверждается существованием лазера.
8. Векторы электрической и магнитной напряженностей ортогональны.

9. Возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны
10. Волна и ее энергия определены, если заданы параметры  $A, \omega, R, \alpha$ . При данных  $R, \bar{S}$  может быть найден параметр  $\alpha$ .

На следующем рисунке показаны напряженности декартовых координатах.



### Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.10) в виде функций (2.13-2.23). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.10) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi = m_r(r), \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) = m_\varphi(r), \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = m_z(r), \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r)\alpha - h_\varphi(r)\chi = j_r(r) \quad (6)$$

$$-h_r(r)\chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - j_z(r) = 0, \quad (8)$$

$$j_r = \frac{\omega}{c} e_r, \quad j_\varphi = -\frac{\omega}{c} e_\varphi, \quad j_z = -\frac{\omega}{c} e_z, \quad (9)$$

$$m_r = \frac{\omega}{c} h_r, \quad m_\varphi = -\frac{\omega}{c} h_\varphi, \quad m_z = -\frac{\omega}{c} h_z, \quad (10)$$

Мы рассматриваем бегущую волну в вакууме. В этом случае  $e_z(r) = 0$ , поскольку нет внешнего источника энергии.

При этом в соответствии с (9) получим  $j_z(r) = 0$ . Тогда исходная система (1, 5-8) примет вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (17)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r)\alpha - h_\varphi(r)\chi = j_r(r) \quad (19)$$

$$-h_r(r)\chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (20)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (21)$$

Подставим (9) в (17). Тогда получим:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) + \frac{j_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (22)$$

Подставим (19, 20) в (22). Тогда получим:

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r)\alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r)\chi + \frac{1}{r} \cdot h'_z(r)\alpha - h'_\varphi(r)\chi + (-h_r(r)\chi - h'_z(r))\frac{\alpha}{r} = 0$$

или

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r)\alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r)\chi - h'_\varphi(r)\chi - h_r(r)\frac{\chi\alpha}{r} = 0 \quad (23)$$

При этом для вычисления трех напряженностей получим три уравнения (19, 21, 23). Исключим  $h'_\varphi(r)$  из (21, 23):

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r)\alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r)\chi + \left( \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) + h_r(r)\frac{\alpha}{r} \right) \chi - h_r(r)\frac{\chi\alpha}{r} = 0$$

или  $\frac{-1}{r^2} \cdot h_z(r)\alpha = 0$  или  $h_z(r) = 0$ . Таким образом, при  $e_z(r) = 0$  должно соблюдаться условие  $h_z(r) = 0$ . Отсюда следует

Лемма 1. При  $e_z(r) = 0$  система уравнений (1, 5-9) совместима только в том случае, когда  $h_z(r) = 0$ .

При  $e_z(r) = 0$  и  $h_z(r) = 0$  уравнения (1, 5-9) принимают следующий вид - уравнения (1, 5, 8) упрощаются, а уравнения (6, 7) с учетом (9) заменяются нижеприведенными уравнениями (1.3, 1.4):

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{c\chi}{\omega} h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (1.3)$$

$$-\frac{c\chi}{\omega} h_r(r) = e_\varphi(r), \quad (1.4)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (1.5)$$

Аналогично доказывается

Лемма 2. При  $e_z(r) = 0$  система уравнений (1-5, 10) совместима только в том случае, когда при  $h_z(r) = 0$ .

При этом аналогично формулам (24, 28) получаем формулы

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (2.1)$$

$$e_\varphi(r)\chi = -\frac{\omega}{c} h_r(r), \quad (2.2)$$

$$e_r(r)\chi = \frac{\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (2.3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0. \quad (2.5)$$

Из леммы 1 и леммы 2 следует

Лемма 3. Система уравнений (1-10) совместима только при  $h_z(r) = 0$ ,  $e_z(r) = 0$ . (3.1)

Следовательно, исходная система уравнений (1-10) принимает вид уравнений, перечисленных в леммах 1 и 2. Объединим их для удобства читателя:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (24)$$

$$e_\varphi(r) \chi = -\frac{\omega}{c} h_r(r), \quad (25)$$

$$e_r(r) \chi = \frac{\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (26)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (27)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (28)$$

$$h_\varphi(r) \chi = \frac{\omega}{c} e_r(r), \quad (29)$$

$$-h_r(r) \chi = \frac{\omega}{c} e_\varphi(r), \quad (30)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (31)$$

Умножим уравнения (26, 29). Тогда получим:

$$-e_r(r) h_\varphi(r) \chi^2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e_r(r) h_\varphi(r)$$

или

$$\chi = \omega/c. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (26, 29), получаем:

$$h_\varphi(r) = e_r(r). \quad (33)$$

Таким образом, при условии (32) уравнения (26, 29) эквивалентны одному уравнению (33). Аналогичное соотношение следует из (25, 30):

$$h_r(r) = -e_\varphi(r), \quad (34)$$

Итак, система уравнений (24-31) эквивалентна системе уравнений (24, 27, 28, 31-34).

Далее выполняется решение уравнений (24, 27).

Предварительно рассмотрим уравнение вида

$$\frac{ay}{x} + y' = 0, \quad (a)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$y = x^{-\alpha} \text{ или } y = 0. \quad (B)$$

Сложим уравнения (24) и (27):

$$(e_r + e_\varphi)' + \frac{(e_r + e_\varphi)}{r}(1 - \alpha) = 0, \quad (35)$$

Вычтем уравнение (27) из (24):

$$(e_r - e_\varphi)' + \frac{(e_r - e_\varphi)}{r}(1 + \alpha) = 0, \quad (36)$$

В соответствии с (а, в) из (35) находим:

$$(e_r + e_\varphi) = Ar^{-(1-\alpha)} \text{ или } (e_r + e_\varphi) = 0. \quad (37)$$

В соответствии с (а, в) из (36) находим:

$$(e_r - e_\varphi) = Cr^{-(1+\alpha)} \text{ или } (e_r - e_\varphi) = 0. \quad (38)$$

Складывая и вычитая уравнения (38) из (37), найдем 4 решения:

$$e_r = e_\varphi = \frac{A}{2} r^{-(1-\alpha)}, \quad (39)$$

$$e_r = -e_\varphi = \frac{C}{2} r^{-(1+\alpha)}, \quad (40)$$

$$\begin{cases} e_r(r) = \frac{1}{2} (Ar^{-(1-\alpha)} + Cr^{-(1+\alpha)}) \\ e_\varphi(r) = \frac{1}{2} (Ar^{-(1-\alpha)} - Cr^{-(1+\alpha)}) \end{cases} \quad (41)$$

$$e_r = e_\varphi = 0. \quad (42)$$

В дальнейшем мы рассмотрим решение (39). Таким образом, исходная система уравнений (1-10) имеет решение следующего вида:

$$h_z(r) = 0, \quad e_z(r) = 0. \quad (3.1)$$

$$\chi = \omega/c. \quad (32)$$

$$e_r = e_\varphi = \frac{A}{2} r^{-(1-\alpha)}, \quad (39)$$

$$h_\varphi(r) = e_r(r). \quad (33)$$

$$h_r(r) = -e_\varphi(r), \quad (34)$$

## Приложение 2.

В (3.11) показано, что поток энергии, проходящий через сечение волны,

$$\bar{S} = \eta \iint_{r,\varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \cdot \sin \theta \cdot r] dr \cdot d\varphi. \quad (1)$$

Пусть скорость распространения волны постоянна и равна с. Тогда

$$z = ct. \quad (2)$$

Тогда из (2, 2.11, 2.12, 2.30) получаем:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t) = \cos(\alpha\varphi + (2\omega/c)z) \quad (3)$$

и, аналогично,

$$si = \sin(\alpha\varphi + (2\omega/c)z). \quad (4)$$

Имея в виду (3, 4), перепишем (1) в виде:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \eta \iint_{r,\varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2(\alpha\varphi + (2\omega/c)z))] r dr d\varphi. \quad (5)$$

Таким образом, плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = (e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2\alpha\varphi + 4\omega z/c). \quad (5a)$$

При  $z=0$  на оси  $OZ$  имеем:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \eta \iint_{r,\varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2\alpha\varphi)] r dr d\varphi. \quad (6)$$

Далее из (6) находим:

$$\bar{S} = \frac{\eta}{2} \int_r \left( (e_r^2 + e_\varphi^2) \left( \int_\varphi \sin(2\alpha\varphi) d\varphi \right) dr \right). \quad (7)$$

Имеем:

$$\int_\varphi \sin(2\alpha\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin(2\alpha\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\alpha} (1 - \cos(4\pi\alpha)). \quad (8)$$

Из (7, 8) получаем:

$$\bar{S} = \frac{\eta}{4\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r ((e_r^2 + e_\varphi^2) r). \quad (9)$$

Подставляя сюда (3.2), окончательно получаем:

$$\bar{S} = \frac{c}{16\alpha\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r ((e_r^2 + e_\varphi^2) r). \quad (10)$$

Очевидно, при любом выборе точки  $z=0$  на оси  $OZ$  последнее соотношение сохраняется.

# Глава 2. Решение уравнений Максвелла для низкоомного провода переменного тока

---

## Оглавление

1. Введение
  2. Решение уравнений Максвелла
  3. Напряженности и токи
  4. Потoki энергии
  5. Ток и поток энергии в проводе
  6. Обсуждение
- Приложение 1

## 1. Введение

Уравнения Максвелла в общем случае в системе СГС имеют вид (см. вариант 1 в главе "Предисловие"):

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} J = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (4)$$

$$J = \frac{1}{\rho} E, \quad (5)$$

где

$J$ ,  $H$ ,  $E$  - ток, магнитная и электрическая напряженности соответственно,

$\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  - диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, удельное сопротивление материала провода.

Далее эти уравнения применяются для анализа структуры переменного тока в проводе. При синусоидальном токе в проводе с



удельной индуктивностью  $L$  и удельным сопротивлением  $\rho$  напряженность и ток связаны соотношением вида

$$J = \frac{1}{\rho + i\omega L} E = \frac{\rho - i\omega L}{\rho^2 + (\omega L)^2} E.$$

Отсюда при  $\rho \ll \omega L$  находим:

$$J \approx \frac{-i}{\omega L} E.$$

Следовательно, для анализа структуры синусоидального тока в проводе при достаточно высокой частоте условием (5) можно пренебрегать.

Известны также эксперименты по передаче тока по диэлектрическому проводу [28]. В этом случае ток проводимости (ток зарядов) отсутствует и условием (5) тоже можно пренебречь. Однако и в предыдущем случае ток не является током проводимости (иначе он должен был бы быть пропорционален напряженности)

В обоих этих случаях необходимо решать систему уравнений (1-4), где известен ток  $J_z$ , протекающий вдоль провода, т.е. проекция вектора  $J$  на ось  $oz$  (см. вариант 4 в главе "Предисловие").

## 2. Решение системы уравнений

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла (1.1-1.4) для провода. В системе цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = v \frac{dH_r}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = v \frac{dH_\varphi}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = v \frac{dH_z}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = q \frac{dE_r}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = q \frac{dE_\varphi}{dt}, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = q \frac{dE_z}{dt} + \frac{4\pi}{c} J_z. \quad (8)$$

где

$$v = -\frac{\mu}{c}, \quad (9)$$

$$q = \frac{\varepsilon}{c}, \quad (10)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\omega$  – некоторые константы.

Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r = h_r(r)co, \quad (13)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (15)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (16)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (17)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (18)$$

$$J_r = j_r(r)co, \quad (19)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r)si, \quad (20)$$

$$J_z = j_z(r)si, \quad (21)$$

где  $h(r)$ ,  $e(r)$  – некоторые функции координаты  $r$ .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-18) преобразуют систему уравнений (1-8) с тремя аргументами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $h(r)$ ,  $e(r)$ .

Далее предполагается, что существует только ток (21), направленный вдоль оси  $Z$ . Этот ток создается внешним источником. Показывается, что наличие этого тока является причиной существования электромагнитной волны в проводе.

В приложении 1 показано, что у такой системы **существует** решение, имеющее следующий вид:

$$e_\varphi(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (22)$$

$$e_r(r) = e_\varphi(r), \quad (23)$$

$$e_z(r) = \frac{2\chi r}{\alpha} e_\varphi(r), \quad (24)$$

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi(r), \quad (25)$$

$$h_\varphi(r) = -h_r(r), \quad (26)$$

$$h_z(r) = 0, \quad (27)$$

$$j_z(r) \approx \frac{c}{4\pi} \left( \left( \frac{r}{\alpha} - \frac{\alpha}{r} \right) \right) h_r(r), \quad (28)$$

где  $A, c, \alpha, \omega$  – константы.

Сравним это решение и решение, полученное в главе – см. табл. 1. Видно, что (несмотря на идентичность уравнений) эти решения существенно отличаются. Эти различия вызваны наличием внешней электродвижущей силы, в которой  $e_z(r) \neq 0$ . Она вызывает продольный ток смещения, который существенно изменяет структуру электромагнитной волны.

Таблица 1.

	глава 1	глава 2
$\chi$	$\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$	$\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$
$j_z$	<b>0</b>	$\frac{c}{4\pi} \left( \left( \frac{r}{\alpha} - \frac{\alpha}{r} \right) \right) h_r(r)$
$e_r$	$Ar^{\alpha-1}$	$Ar^{\alpha-1}$
$e_\varphi$		
$e_z$	<b>0</b>	$\frac{2\chi r}{\alpha} e_\varphi(r)$
$h_r$	$-e_\varphi(r)$	$-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi(r)$
$h_\varphi$	$-h_r(r)$	$-h_r(r)$
$h_z$	<b>0</b>	<b>0</b>

### 3. Напряженности и токи

Амплитуды токов в данной постановке задачи равны электрическим напряженностям, умноженным на  $\omega$ . Амплитуды магнитных напряженностей равны амплитудам электрических напряженностей – см. табл. 1. Поэтому далее мы будем рассматривать только функции  $j_z(r)$ ,  $e_r(r)$ ,  $e_\varphi(r)$ ,  $e_z(r)$ ,  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ .

На рис. 1 показаны, например, графики этих функций при  $A = 10^{10}$ ,  $\alpha = 12.8$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\omega = 300$ . Величина показана в единицах (А/мм<sup>2</sup>) – в отличие от всех остальных величин, показанных в системе СГС. Увеличение функции  $j_z(r)$  при увеличении радиуса объясняет скин-эффект.

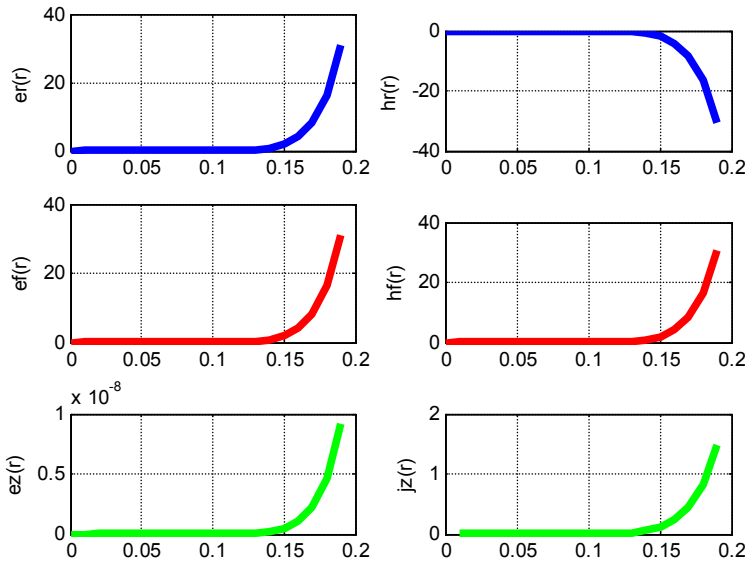


Fig.1. (SSMB)

Плотность энергии электромагнитной волны определяется как сумма модулей векторов  $E$ ,  $H$  определяется из (2.13, 2.14, 2.16, 2.17, 2.23, 2.24) и равна

$$W = E^2 + H^2 = (e_r(r)si)^2 + (e_\varphi(r)si)^2 + (h_r(r)co)^2 + (h_\varphi(r)co)^2$$

или

$$W = (e_r(r))^2 + (e_\varphi(r))^2 \tag{1}$$

- см. также рис. 1. Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны постоянна на всех точках окружности данного радиуса.

На рис. 2 для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны показаны функции

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t)$$

или эквивалентные им при условии (2.19) и  $z = ct$  функции

$$co = \cos\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c} z\right), \quad si = \sin\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c} z\right) \quad (4a)$$

или

$$co = \cos(\alpha\varphi + 2\chi z), \quad si = \sin(\alpha\varphi + 2\chi z) \quad (4b)$$

При  $\varphi = 0$ ,  $2\omega/c = 0.1$  эти функции принимают вид  $co = \cos(z)$ ,  $si = \sin(z)$  и показаны на рис. 2.

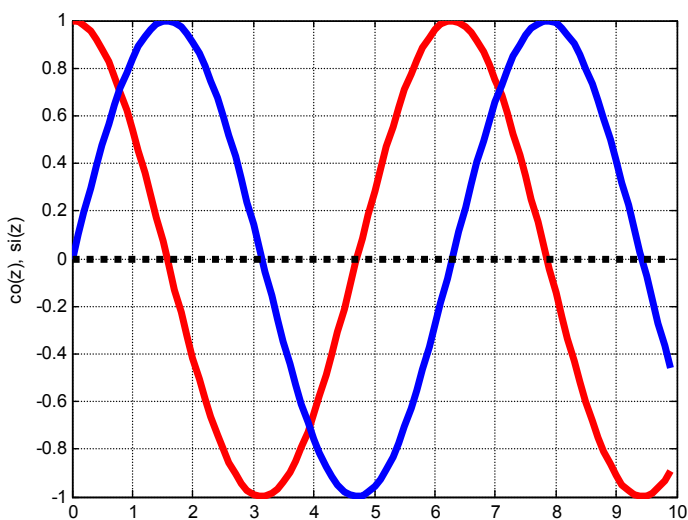


Fig.2. (SSMB)

Найдем среднее значение плотности амплитуды тока в проводе с радиусом R:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r,\varphi} [J_z] dr \cdot d\varphi. \quad (5)$$

С учетом (2.21) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r,\varphi} [j_z(r) si] dr \cdot d\varphi \quad (5a)$$

Далее найдем:

$$\bar{J}_z = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \int_0^{2\pi} (si \cdot d\varphi) \right) dr.$$

С учетом (2) найдем:

$$\bar{J}_z = \frac{1}{\alpha \pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \cos(2\alpha\pi + \frac{2\omega}{c}z) - \cos(\frac{2\omega}{c}z) \right) dr$$

или

$$\bar{J}_z = \frac{1}{\alpha \pi R^2} (\cos(2\alpha\pi) - 1) \cdot J_{zr}, \tag{6}$$

где

$$J_{zr} = \int_0^R j_z(r) dr. \tag{7}$$

С учетом (2.22, 2.25, 2.28) найдем:

$$j_z(r) = \frac{Ac}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( \alpha \cdot r^{\alpha-2} - \frac{r^\alpha}{\alpha} \right), \tag{8}$$

$$J_{zr} = \frac{Ac}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_0^R \left( \alpha \cdot r^{\alpha-2} - \frac{r^\alpha}{\alpha} \right) dr \tag{9}$$

или

$$J_{zr} = \frac{Ac}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} R^{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} R^{\alpha+1} \right). \tag{10}$$

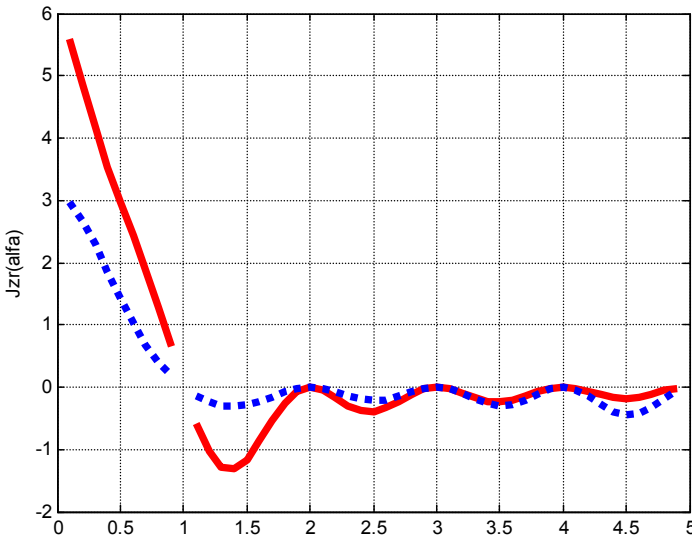


Fig.3. (SSMB)

На рис. 3 показана функция  $\overline{J_z}(\alpha)$  (6, 10) при  $A=1$ . На этом рисунке пунктирная и сплошная кривые относятся соответственно к  $R=2$  и  $R=1$ . Из (6, 8) и рис. 3 следует, что при определенном распределении величины  $j_z(r)$  среднее значение плотности амплитуды тока  $\overline{J_z}$  существенно зависит от  $\alpha$ .

Ток смещения определяется как

$$J = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (11)$$

или, с учетом (2.13-2.21):

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{\varepsilon \omega}{c} e_r(r) \cos \omega t, \\ J_\varphi &= \frac{\varepsilon \omega}{c} e_\varphi(r) \sin \omega t, \\ J_z &= \left( \frac{\varepsilon \omega}{c} e_z(r) + j_z \right) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (12)$$

Отвлекаясь от споров о природе тока смещения, можно говорить о линиях этого тока. Так, например, ток  $J_z$  течет по прямым, параллельным оси провода. Мы рассмотрим линию суммарного тока.

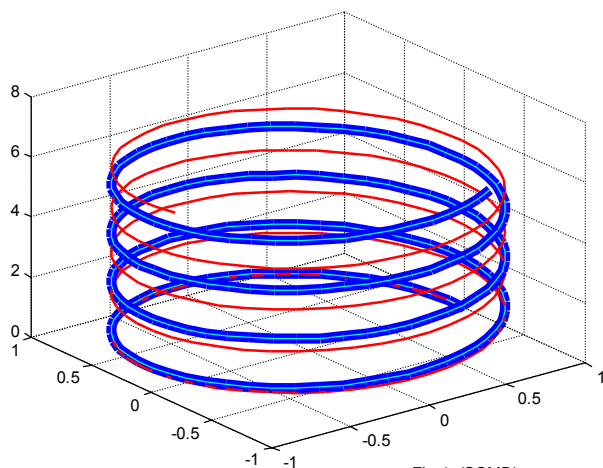


Fig.4. (SSMB)

Можно полагать, что скорость распространения тока смещения не зависит от направления тока. В частности, при фиксированном радиусе путь, пройденный током по окружности, и

путь, пройденный им по вертикали будут равны. Следовательно, при фиксированном радиусе можно полагать, что

$$z = \gamma \cdot \varphi \quad (13)$$

где  $\gamma$  – константа. На основе этого предположения можно преобразовать функции (4в) к виду

$$co = \cos(\alpha\varphi + 2\chi\gamma\varphi), \quad si = \sin(\alpha\varphi + 2\chi\gamma\varphi) \quad (14)$$

и построить соответствующую траекторию тока. На рис. 4 показаны две винтовые линии суммарного тока, описываемые функциями вида

$$co = \cos((\alpha + 2)\varphi), \quad si = \sin((\alpha + 2)\varphi).$$

На рис. 4 толстая линия построена при  $\alpha = 1.8$ , а тонкая линия – при  $\alpha = 2.5$ .

Из (2.19-2.21, 14) следует, что токи будут сохранять свою величину при данных  $r, \varphi$  (независимо от  $z$ ) в том случае, если постоянной является величина

$$\beta = (\alpha + 2\chi\gamma). \quad (15)$$

Далее на основе (14, 15) будем применять формулы

$$co = \cos(\beta\varphi), \quad si = \sin(\beta\varphi). \quad (16)$$

## 4. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга определяется в этом случае точно также, как и в главе 1, раздел 4. Но здесь мы для удобства читателя повторим первые 6 формул оттуда. Итак

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_r, S_\varphi, S_z$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Из (2.12-2.17, 3.4) следует, что поток, проходящий через данное сечение провода в данный момент времени,



$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \overline{S_r} \\ \overline{S_\varphi} \\ \overline{S_z} \end{bmatrix} = \eta \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \quad (5)$$

ГДЕ

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z). \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \end{aligned} \quad (6)$$

Этим величинам равна плотность того потока энергии, который при данном радиусе распространяется по радиусу, по окружности и вдоль оси OZ равен. На рис. 5 показаны графики этих функций в зависимости от радиуса при  $A = 10^{10}$ ,  $\alpha = 12.8$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\omega = 300$ .

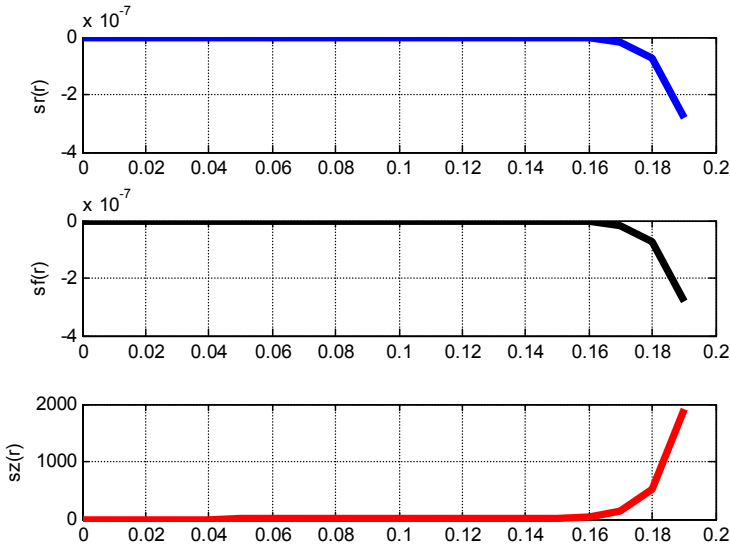


Fig.5. (SSMB)

Поток энергии вдоль оси OZ и равен

$$\bar{S}_z = \eta \iint_{r,\varphi} [s_z \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (7)$$

Найдем  $s_z$ . Из (6, 2.22, 2.23, 2.26) получаем:

$$s_z = -2e_\varphi h_r = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi^2 \quad (9)$$

ИЛИ

$$s_z = Qr^{2\alpha-2}, \quad (10)$$

где

$$Q = 2A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (11)$$

В приложении 2 главы 1 показано, что из (7) следует, что

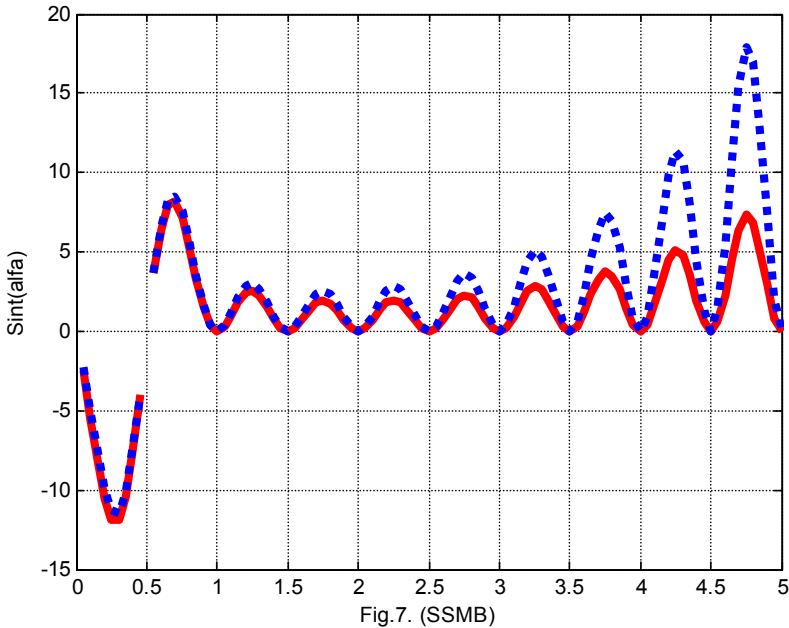
$$\bar{S} = \frac{c}{16\alpha\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (s_z(r) dr). \quad (12)$$

Пусть  $R$  – радиус цилиндрического провода. Тогда из (12) получаем, как в главе 1,

$$S_{\text{int}} = \int_{r=0}^R (s_z(r) dr) = \frac{Q}{2\alpha-1} R^{2\alpha-1}, \quad (13)$$

$$S_{\text{alfa}} = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)), \quad (14)$$

$$\bar{S} = \frac{c}{16\pi} S_{\text{alfa}} S_{\text{int}}. \quad (15)$$



Объединяя формулы (11, 12-14), получаем:

$$\bar{S}_z = \frac{c}{16\pi} \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)) 2A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{2\alpha-1} R^{2\alpha-1}$$

или

$$\bar{S}_z = \frac{A^2 c \sqrt{\varepsilon/\mu} (1 - \cos(4\alpha\pi))}{8\pi\alpha(2\alpha - 1)} R^{2\alpha-1}. \quad (16)$$

Этот поток энергии не зависит от координаты и потому сохраняет свое значение на протяжении всей волны.

На рис. 7 показана функция  $\bar{S}(\alpha)$  (15) при  $Q=1$ . На рис. 7 пунктирная и сплошная кривые относятся соответственно к  $R=2$  и  $R=1.8$ .

Поскольку поток энергии и энергия связаны соотношением  $S=W \cdot c$ , то из (15) можно найти энергию в единице длины провода:

$$\bar{W} = \frac{A}{16\pi} S_{\alpha} S_{\text{int}}. \quad (17)$$

Как следует из (7, 3.16), плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = s_z \sin(2\beta\varphi). \quad (18)$$

На рис. 8 показана функция (18) при  $A=1$ ,  $\chi=1$ ,  $\alpha=1.4$ ,  $\beta=1.6$  и двух значениях радиуса:  $r=1$  и  $r=2$ .

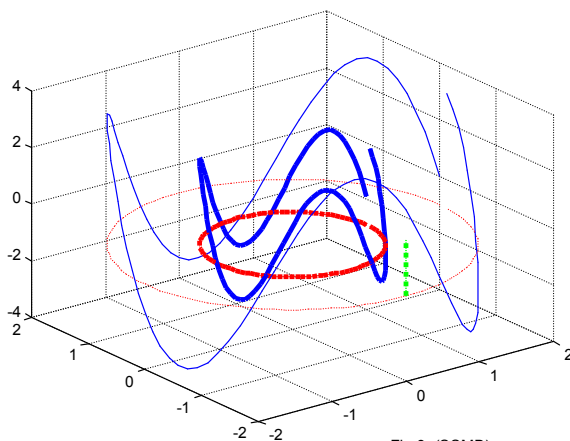


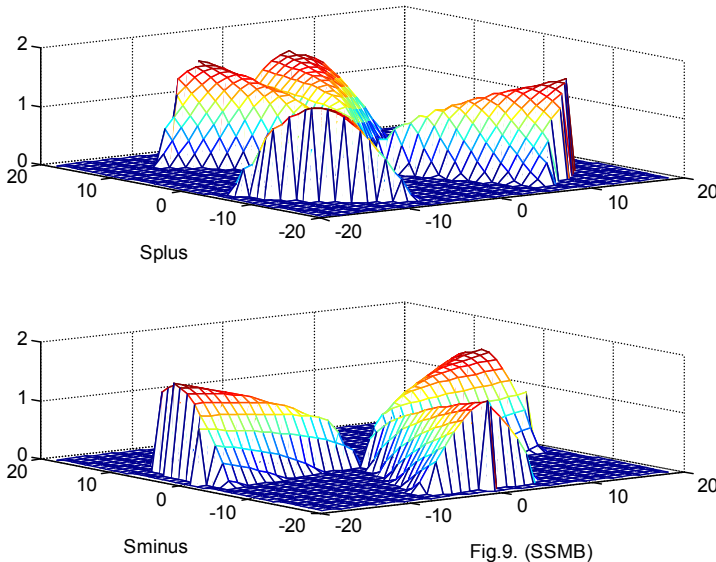
Fig.8. (SSMB)

На рис. 9 показана функция  $S$  (18) на всей плоскости сечения провода при  $A=1$ ,  $\chi=1$ ,  $\alpha=1.4$ ,  $\beta=1.6$ ,  $R=19$ . При этом в верхнем окне показана та часть графика функции  $S$ , где  $S > 0$  -  $S_{\text{plus}}$ , а в нижнем окне показана та часть графика функции  $S$ , где

$S < 0$  -  $S_{minus}$ , причем эта часть для наглядности показана с обратным знаком. На этом рисунке видно, что

$$S = S_{plus} + S_{minus} > 0,$$

т.е. суммарный вектор плотности потока направлен в сторону увеличения  $z$  - в сторону нагрузки. Однако существуют две составляющие этого вектора: составляющая  $S_{plus}$ , направленная в сторону нагрузки, и составляющая  $S_{minus}$ , направленная в сторону источника тока. Эти составляющие потока переносят активную и реактивную энергию соответственно.



Итак,

- плотность потока неравномерно распределена по сечению потока – существует картина распределения плотности потока по сечению провода;
- эта картина сохраняется при перемещении по оси  $OZ$ ;
- поток энергии (15), проходящий через площадь сечения, не зависит от  $t, z$  и это соответствует закону сохранения энергии,
- поток энергии имеет две противоположно направленные составляющие, которые переносят активную и реактивную энергии; таким образом, отсутствует необходимость в представлении мнимого вектора Пойнтинга.

## 5. Ток и поток энергии в проводе

Можно сказать, что поток массовых частиц (массовый ток) "несёт" поток кинетической энергии, которая выделяется при столкновении с преградой. Точно также электрический ток "несёт" поток электромагнитной энергии, которая выделяется в нагрузке. Это утверждение обсуждается и обосновывается в [4-9]. Отличие между этими двумя случаями состоит в том, что величина массового тока полностью определяет величину кинетической энергии. Однако во втором случае величина электрического тока НЕ определяет величину электромагнитной энергии, которая выделяется в нагрузке. Следовательно, переносимая величина электромагнитной энергии – поток энергии определяется структурой тока. Покажем это.

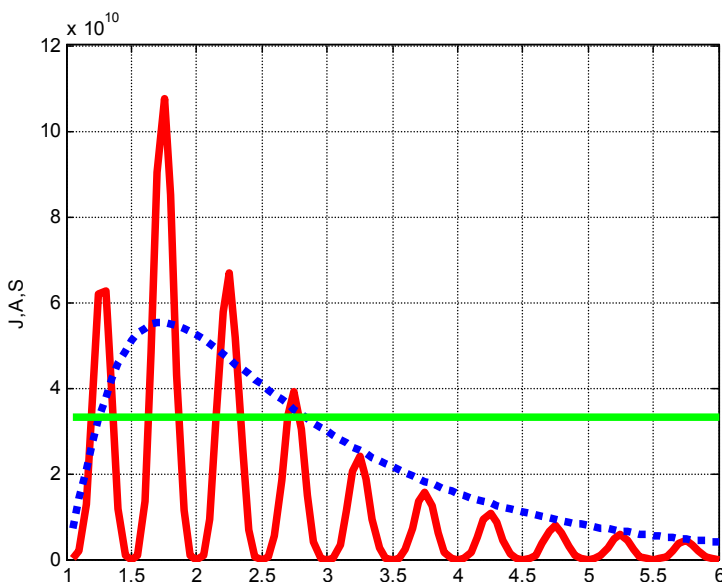


Fig.10. (SSMB)

Как следует из (3.10), среднее значение плотности амплитуды тока  $\overline{J_z}$  в проводе с данным радиусом  $R$  зависит от двух параметров:  $\alpha$  и  $A$ . При данной плотности можно найти зависимость между этими параметрами, которая следует из (3.10):

$$A = 4\pi J_{zr} / c \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} R^{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} R^{\alpha+1} \right). \quad (1)$$

Как следует из (4.15), плотность потока энергии вдоль провода также зависит от двух параметров:  $\alpha$  и  $A$ . На рис. 10 показаны

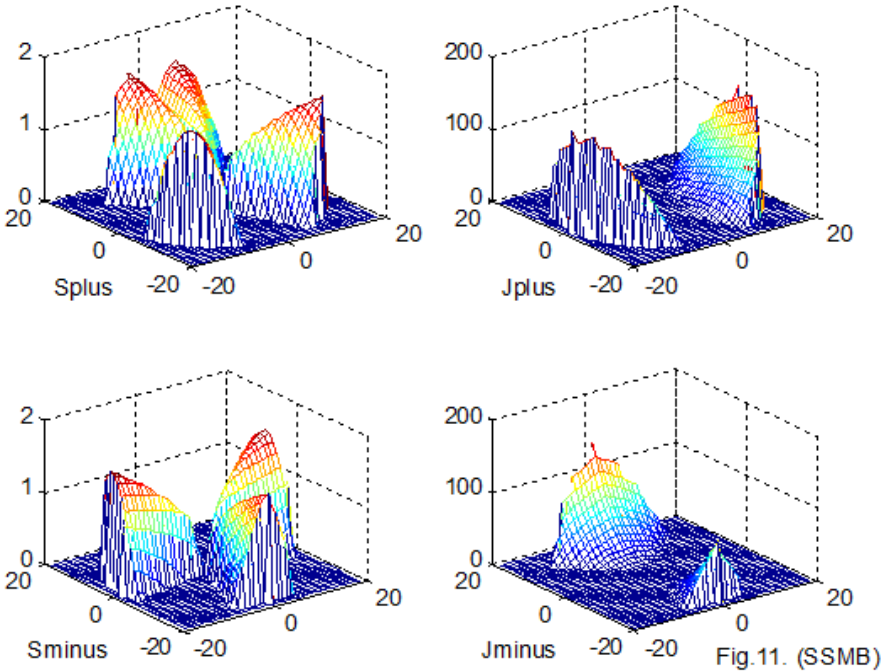
зависимости (1) и (4.15) при данных  $\overline{J_z} = 1A$ ,  $R = 2$ . При этом прямая линия изображает постоянную плотность тока, сплошная линия – плотность потока, пунктирная линия – параметр  $A$  в масштабе ( $A \cdot 10^{10}$ ). Видно, что при одной и той же плотности тока плотность потока может принимать совершенно различные значения.

Выше из формул (4.7, 3.16) была найдена плотность потока энергии на окружности данного радиуса в виде функции (см. (4.18)):

$$\overline{S}_{rz} = s_z \sin(2\beta\varphi). \tag{2}$$

Аналогично из формул (3.5а, 3.16) может быть найдена плотность тока на окружности данного радиуса в виде функции

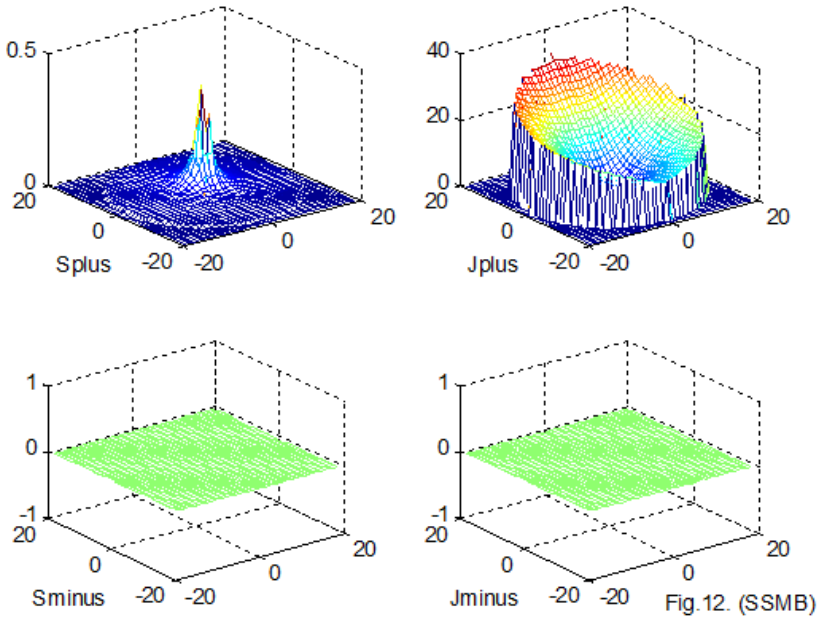
$$\overline{J}_{rz} = j_z \sin(\beta\varphi). \tag{3}$$



Функция (2) была показана на рис. 9. На рис. 11 в левых окнах повторены графики этой функции  $\overline{S}_{rz}$  (2), а в правых окнах для сопоставления показаны построенные аналогичным образом при  $A = 1$ ,  $\chi = 1$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 1.6$ ,  $R = 19$  графики функции  $\overline{J}_{rz}$  (3).

На рис. 11 видно, что в проводе могут существовать токи и потоки энергии, разделенные на противоположно направленные

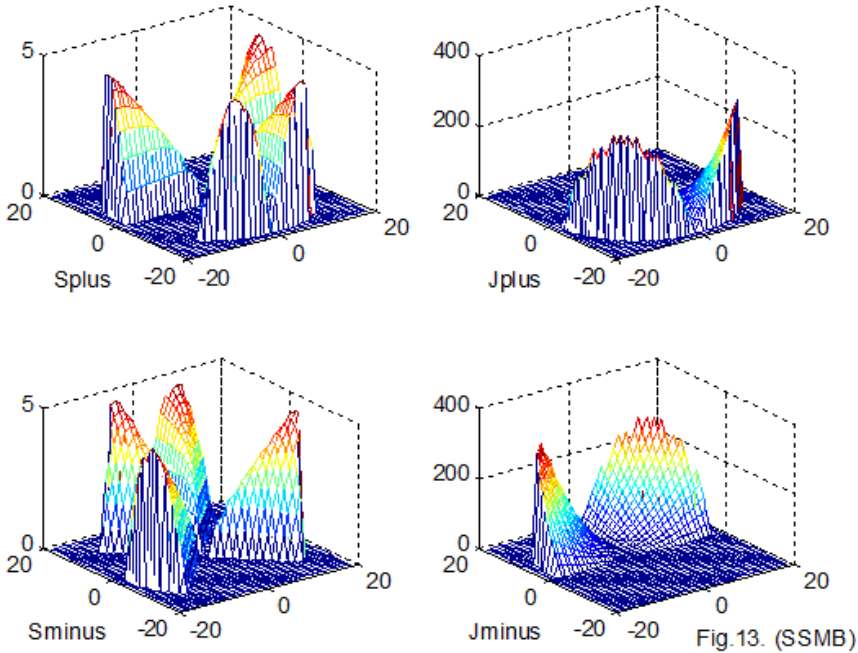
"струи". На рис. 12 показан другой случай: при  $A=1$ ,  $\chi=1$ ,  $\alpha=-0.1$ ,  $\beta=0.1$ ,  $R=19$  токи и потоки энергии не разделены на "струи" - направлены в одну сторону. Это означает, что в данном случае отсутствует реактивная мощность.



Тем не менее, как правило, в проводе существуют токи и потоки энергии, разделенные на противоположно направленные "струи". Это соответствует существованию потоков активной и реактивной энергий. Существуют такие сочетания параметров, при которых суммарные токи противоположно направленных "струй" равны по абсолютной величине и, одновременно с этим, суммарные потоки энергии противоположно направленных "струй" также равны по абсолютной величине. Это соответствует равенству потоков активной и реактивной энергий. На рис. 13 показан такой случай: при  $A=1$ ,  $\chi=1$ ,  $\alpha=1.8$ ,  $\beta=2$ ,  $R=19$  равны следующие интегралы по площади сечения  $Q$  провода:

$$\int_Q S_{\text{plus}} \cdot dQ = - \int_Q S_{\text{minus}} \cdot dQ,$$

$$\int_Q J_{\text{plus}} \cdot dQ = - \int_Q J_{\text{minus}} \cdot dQ.$$



## 6. Обсуждение

Показано, что в проводе переменного тока распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решение уравнений Максвелла.

Это решение во многом совпадает с тем, которое ранее найдено для электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме – см. главу 1.

Оказалось, что ток распространяется в проводе по спиральной траектории, а плотность спирали зависит от плотности потока электромагнитной энергии, передаваемой по проводу в нагрузку, т.е. от передаваемой мощности. При этом поток энергии распространяется вдоль и внутри провода.

## Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.8) в виде функций (2.13-2.18). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.8) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$



$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r)\alpha + e_\varphi(r)\chi + \frac{\mu\omega}{c} h_r = 0, \quad (2)$$

$$e_r(r)\chi - e'_z(r) - \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha - \frac{\mu\omega}{c} h_z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r)\alpha - h_\varphi(r)\chi - \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r = 0, \quad (6)$$

$$-h_r(r)\chi - h'_z(r) + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi = 0, \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z(r) = \frac{4\pi}{c} j_z(r), \quad (8)$$

Умножим (5) на  $\left(-\frac{\mu\omega}{c\chi}\right)$ . Тогда получим:

$$-\frac{\mu\omega}{c\chi} \frac{h_r(r)}{r} - \frac{\mu\omega}{c\chi} h'_r(r) - \frac{\mu\omega}{c\chi} \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha - \frac{\mu\omega}{c} h_z(r) = 0. \quad (9)$$

Сравнивая (4) и (9), замечаем, что они совпадают, если

$$\frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (10)$$

$$-\frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_r(r) = e_\varphi(r). \quad (11)$$

Перепишем (2, 3, 6, 7) в виде:

$$e_z(r) = \frac{\chi r}{\alpha} e_\varphi(r) + \frac{r}{\alpha} \frac{\mu\omega}{c} h_r(r), \quad (12)$$

$$e'_z(r) = e_r(r)\chi - \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (13)$$

$$h_z(r) = \frac{\chi r}{\alpha} h_\varphi(r) + \frac{r}{\alpha} \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} e_r(r), \quad (14)$$

$$h'_z(r) = -h_r(r)\chi + \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} e_\varphi(r), \quad (15)$$

Подставим (10, 11) в эти уравнения. Тогда получим:

$$e_z(r) = 2 \frac{r}{\alpha} \frac{\mu\omega}{c} h_r(r), \quad (16)$$

$$e'_z(r) = -2 \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (17)$$

$$h_z(r) = \left( \frac{\chi r}{\alpha} - \frac{r}{\alpha} \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} \right) h_\varphi(r) = \frac{r}{\alpha c^2 \chi} (c^2 \chi^2 - \varepsilon \mu \omega^2) h_\varphi(r), \quad (18)$$

$$h'_z(r) = \left( -\chi + \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} \right) h_r(r) = \frac{-1}{c^2 \chi} (c^2 \chi^2 - \varepsilon \mu \omega^2) h_r(r), \quad (19)$$

Из (16, 17) находим:

$$\frac{2\mu\omega}{\alpha c} (r h_r(r))' = -\frac{2\mu\omega}{c} h_\varphi(r)$$

или

$$h_\varphi(r) = \frac{-1}{\alpha} (h_r(r) + r \cdot h'_r(r)) \quad (20)$$

Из (20, 10, 11) находим:

$$e_r(r) = \frac{1}{\alpha} (e_\varphi(r) + r \cdot e'_{\varphi r}(r)) \quad (21)$$

Из (16, 11) находим:

$$e_z(r) = 2 \frac{r}{\alpha} \frac{\mu\omega}{c} h_r(r) = 2\chi \frac{r}{\alpha} e_\varphi(r) \quad (22)$$

Из (1, 22) находим:

$$e_\varphi(r) = (e_r(r) + r \cdot e'_r(r)) / \left( \alpha + 2\chi^2 \frac{r^2}{\alpha} \right). \quad (23)$$

Из (23, 21) находим:

$$e''_\varphi(r) = \left( 2\chi^2 + \frac{\alpha^2 - 1}{r^2} \right) e_\varphi(r) - \frac{3}{r} e'_{\varphi r}(r). \quad (24)$$

Из этого уравнения можно найти  $e_\varphi(r)$ , а при известном  $e_\varphi(r)$  определить все остальные функции. Из (21, 10, 11, 16, 18, 8) находим соответственно:

$$e_r(r) = \frac{1}{\alpha} (e_\varphi(r) + r \cdot e'_{\varphi r}(r)), \quad (25)$$

$$h_\varphi(r) = \frac{c\chi}{\mu \cdot \omega} e_r(r), \quad (26)$$

$$h_r(r) = -\frac{c\chi}{\mu \cdot \omega} e_\varphi(r). \quad (27)$$

$$e_z(r) = \frac{2\chi r}{\alpha} e_\varphi(r) \quad (28)$$

$$h_z(r) = \frac{r}{\alpha c^2 \chi} (c^2 \chi^2 - \varepsilon \mu \omega^2) h_\varphi(r), \quad (29)$$

$$j_z(r) \approx \frac{c}{4\pi} \left( \left( \frac{r}{\alpha} \left( 1 + \frac{2\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \right) - \frac{\alpha}{r} \right) \right) h_r(r). \quad (30)$$

Из физических соображений следует принять, что

$$h_z(r) = 0. \quad (31)$$

Тогда из (29) находим:

$$(c^2 \chi^2 - \varepsilon\mu\omega^2) = 0$$

или

$$\chi = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (32)$$

При  $\omega \ll c$  отсюда находим, что

$$|\chi| \ll 1. \quad (33)$$

Тогда в уравнении (24) величиной  $\chi$  можно пренебречь и получить уравнение вида

$$e_\varphi''(r) = \left( \frac{\alpha^2 - 1}{r^2} \right) e_\varphi(r) - \frac{3}{r} e_\varphi'(r). \quad (34)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$e_\varphi(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (35)$$

что можно проверить подстановкой (35) в (34). Кроме того, заметим, что при  $\omega \ll c$

$$\left( 1 + \frac{2\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \right) \approx 1. \quad (36)$$

Подставляя (32, 33, 35, 36) в (25-30) окончательно получаем:

$$h_z(r) = 0, \quad (37)$$

$$e_\varphi(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (38)$$

$$e_r(r) = e_\varphi(r), \quad (39)$$

$$e_z(r) = \frac{2\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c} r \cdot e_\varphi(r), \quad (40)$$

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi(r), \quad (41)$$

$$h_\varphi(r) = -h_r(r), \quad (42)$$

$$j_z(r) \approx \frac{c}{4\pi} \left( \left( \frac{r}{\alpha} - \frac{\alpha}{r} \right) \right) h_r(r). \quad (43)$$

# Глава 3. Решение уравнений Максвелла для провода ПОСТОЯННОГО ТОКА

---

## Оглавление

1. Введение
  2. Математическая модель
  3. Потoki энергии
  4. Ток и поток энергии в проводе
  5. Обсуждение
- Приложение 1  
Приложение 2

## 1. Введение

В [9-11] было показано, что постоянный ток в проводе имеет сложную структуру, а поток электромагнитной энергии распространяется **внутри** провода. При этом поток электромагнитной энергии

- направлен вдоль оси провода,
- распространяется вдоль оси провода,
- распространяется внутри провода,
- компенсирует тепловые потери осевой составляющей тока.

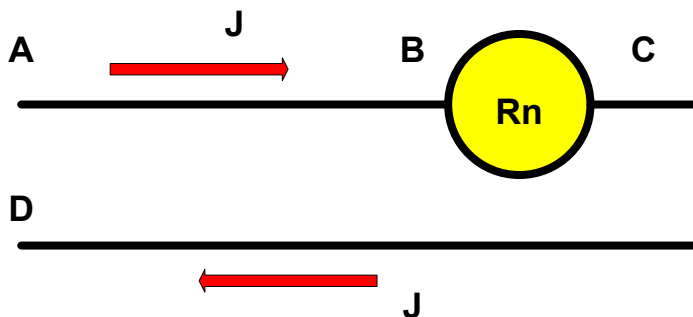


Рис. 1.

В [9-11] была предложена и рассматривалась математическая модель тока и потока, построенная исключительно на уравнениях Максвелла. Остался невыясненным следующий вопрос – см. рис. 1. Электрический **J** ток и поток электромагнитной энергии **S** распространяется внутри провода **ABCD** и проходит через нагрузку **Rn**. В этой нагрузке расходуется некоторая мощность **P**. Следовательно, поток энергии на участке **AB** должен быть больше потока энергии на участке **CD**. Точнее, **S<sub>ab</sub>=S<sub>cd</sub>+P**. Однако сила тока после прохождения нагрузки не изменилась. Как должна измениться структура тока, чтобы уменьшилась соответствующая ему электромагнитная энергия?

Ниже рассматривается более общая (по сравнению с [9-11]) математическая модель, позволяющая ответить и на этот вопрос. Эта математическая модель также построена исключительно на уравнениях Максвелла. В [12] описывается эксперимент, который был выполнен группой авторов в 2008 г. В [17] показано, что этот эксперимент может быть объяснен на основании нелинейной структуры постоянного тока в проводе и может служить экспериментальным доказательством существования такой структуры.

## **2. Математическая модель**

Уравнения Максвелла для провода постоянного тока даны в главе "Приложения" – см. вариант 6. В системе СИ они имеют вид:

$$\operatorname{rot}(I) = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(I) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (4)$$

При моделировании будем использовать цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  и рассматривать

- токи  $J_r$ ,  $J_\varphi$ ,  $J_z$ , причем среднее значение плотности тока должно быть задано  $J_z$ ,
- магнитные напряженности  $H_r$ ,  $H_\varphi$ ,  $H_z$ ,
- электросопротивление  $\rho$ .

В решении необходимо найти плотности распределения всех напряженностей и токов (включая плотность тока  $J_z$ ).

Уравнения (1-4) для цилиндрических координат имеют вид:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (8)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial J_\varphi}{\partial z} = 0, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial J_r}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial r} = 0, \quad (9.2)$$

$$\frac{J_\varphi}{r} + \frac{\partial J_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_r}{\partial \varphi} = 0. \quad (9.3)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = -\cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (10)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z), \quad (11)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$  – некоторые константы. В приложении 1 показано, что существует решение, имеющее следующий вид:

$$J_r = j_r(r)co, \quad (12)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r)si, \quad (13)$$

$$J_z = j_z(r)si, \quad (14)$$

$$H_r = h_r(r)co, \quad (15)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (16)$$

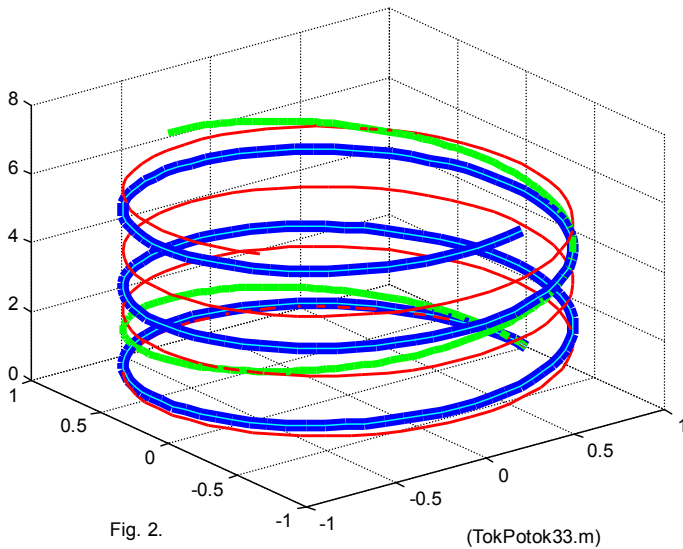
$$H_z = h_z(r)si, \quad (17)$$

где  $j(r)$ ,  $h(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Можно полагать, что средняя скорость электрических зарядов не зависит от направления тока. В частности, при фиксированном радиусе путь, пройденный зарядом по окружности, и путь, пройденный им по вертикали будут равны. Следовательно, при фиксированном радиусе можно полагать, что  $\Delta\varphi \equiv \Delta z$ . На основе

этого предположения можно построить траекторию движения заряда в соответствии с функциями (10, 11).

На рис. 2 показаны три винтовые линии при  $\Delta\varphi = \Delta z$ , описываемые функциями (10, 11) тока: толстая линия при  $\alpha = 2$ ,  $\chi = 0.8$ , средняя линия при  $\alpha = 0.5$ ,  $\chi = 2$  и тонкая линия при  $\alpha = 2$ ,  $\chi = 1.6$ .



В приложении 1 показано, что у такой системы существует решение при данной постоянной функции  $j_z(r)$ . Это решение анализируется далее. Оно имеет вид:

$$j_z(r) = A_z \quad (25)$$

$$h_r(r) = A_z \frac{\alpha}{\alpha^2 - 2} r. \quad (26)$$

$$h_\varphi(r) = -A_z \frac{2}{\alpha^2 - 2} r. \quad (27)$$

$$h_z(r) \equiv 0, \quad (28)$$

$$j_r(r) = -h_\varphi(r)\chi \quad (29)$$

$$j_\varphi(r) = -h_r(r)\chi \quad (30)$$

**Пример 1.** На рис. 3 показаны графики функций  $j_r(r)$ ,  $j_\varphi(r)$ ,  $j_z(r)$ ,  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ . Эти функции вычисляются

при данных  $A=100$ ,  $\alpha=1.2$ ,  $\chi=-10^3$  и радиусе провода  $R=0.002$ . В первой колонке показаны функции  $j_r(r)$ ,  $j_\varphi(r)$ ,  $j_z(r)$ , во второй колонке показаны функции  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ , а функции, показанные в третьей колонке, будут рассмотрены далее. Здесь и далее в этой главе все числовые результаты представлены в системе СИ. На оси абсцисс показаны величины  $(1000r)$ .

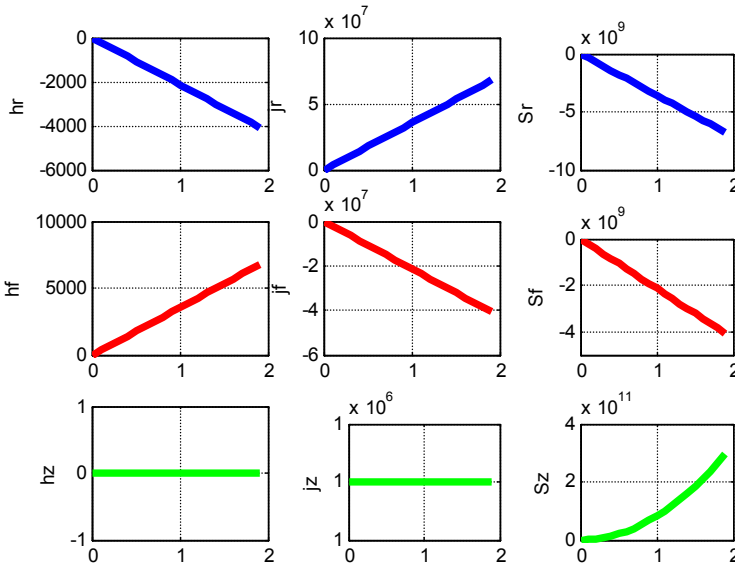


Fig.3. (TokPotok33.m)

Найдем значение плотности тока в проводе с радиусом R:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r,\varphi} [J_z] dr \cdot d\varphi. \quad (31)$$

С учетом (14) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r,\varphi} [j_z(r) si] dr \cdot d\varphi = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \int_0^{2\pi} (si \cdot d\varphi) \right) dr.$$

С учетом (11) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha \pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \cos(2\alpha\pi + \frac{2\omega}{c} z) - \cos(\frac{2\omega}{c} z) \right) dr$$

ИЛИ

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha \pi R^2} (\cos(2\alpha\pi) - 1) \cdot J_{zr}, \quad (32)$$



где, с учетом (25),

$$J_{zr} = \int_0^R j_z(r) dr = A_z R. \quad (33)$$

Совмещая (32, 33), найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{A_z}{\pi R} (1 - \cos(2\alpha\pi)), \quad (34)$$

Эта величина не зависит от координаты  $z$ , т.е. суммарный ток, протекающий через сечение провода, остается постоянным.

### 3. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = E \times H. \quad (1)$$

Постоянным токам соответствуют электрические напряженности, т.е.

$$E = \rho \cdot J, \quad (2)$$

где  $\rho$  - электросопротивление. Совмещая (1, 2), получаем:

$$S = \rho J \times H. \quad (3)$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_r, S_\varphi, S_z$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho(J \times H) = \rho \begin{bmatrix} J_\varphi H_z - J_z H_\varphi \\ J_z H_r - J_r H_z \\ J_r H_\varphi - J_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Из (2.12-2.17, 4) следует, что

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho \iiint_{r, \varphi, z} \begin{bmatrix} (j_\varphi h_z - j_z h_\varphi) \cdot si^2 \\ (j_z h_r - j_r h_z) \cdot si \cdot co \\ (j_r h_\varphi - j_\varphi h_r) \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi \cdot dz. \quad (5)$$

На рис. 3 показаны функции

$$\overline{S}(r) = \begin{bmatrix} \overline{S_r}(r) \\ \overline{S_\varphi}(r) \\ \overline{S_z}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (j_\varphi h_z - j_z h_\varphi) \\ (j_z h_r - j_r h_z) \\ (j_r h_\varphi - j_\varphi h_r) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Из (4), как показано в приложении 2, следует

$$S_z = \frac{\rho}{4\alpha} \cdot (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r \left( \overline{S}_z(r) \cdot dr \right). \quad (7)$$

$$S_\varphi = \frac{\rho}{4\alpha} \cdot (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r \left( \overline{S}_\varphi(r) \cdot dr \right), \quad (8)$$

$$S_r = \pi\rho \int_r \left( \overline{S}_r(r) \cdot dr \right). \quad (9)$$

Эти величины не зависят от  $\varphi$ ,  $z$  и это соответствует закону сохранения энергии.

Рассмотрим подробнее величину (7). Из (6, 2.26-2.30) находим:

$$\begin{aligned} \overline{S}_z(r) &= (j_r h_\varphi - j_\varphi h_r) = -\chi h_\varphi^2 + \chi h_r^2 = \\ &= \chi A_z^2 r^2 \left( \left( \frac{2}{\alpha^2 - 2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{\alpha^2 - 2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

или

$$\overline{S}_z(r) = \chi A_z^2 r^2 \frac{4 + \alpha^2}{(\alpha^2 - 2)^2}. \quad (10)$$

Тогда

$$S_{z\text{int}} = \int_r \left( \overline{S}_z(r) \cdot dr \right) = \chi A_z^2 \frac{4 + \alpha^2}{(\alpha^2 - 2)^2} \int_0^R r^2 dr.$$

или

$$S_{z\text{int}} = \chi A_z^2 \frac{4 + \alpha^2}{(\alpha^2 - 2)^2} \frac{R^3}{3}. \quad (11)$$

Из (7, 11) находим:

$$S_z = \frac{\chi A_z^2 \rho R^3}{12\alpha} \cdot \frac{4 + \alpha^2}{(\alpha^2 - 2)^2} \cdot (1 - \cos(4\alpha\pi)). \quad (12)$$

## 4. Ток и поток энергии в проводе

Как и в главе 2, покажем, что переносимая величина электромагнитной энергии – поток энергии определяется структурой тока.

Поток энергии, передаваемый по проводу, определяется по (3.12). Мощность, потребляемая сопротивлением нагрузки  $R_H$ ,

$$P = R_H \left( \overline{J}_z \right). \quad (1)$$

Полный поток энергии равен мощности  $P$ , передаваемой по проводу, т.е.

$$S_z = P = . \quad (2)$$

или

$$\frac{S_z}{(J_z)^2} = R_H. \quad (3)$$

Из (3, 3.12, 2.34), находим:

$$R_H = \left( \chi A_z^2 \frac{4 + \alpha^2}{\alpha(\alpha^2 - 2)^2} \frac{\rho R^3}{12} \cdot (1 - \cos(4\alpha\pi)) \right) / \left( \left( \frac{A_z}{\pi R} (1 - \cos(2\alpha\pi)) \right) \right)^2$$

или

$$R_H = \frac{\chi \rho \pi^2 R}{12} \cdot \frac{4 + \alpha^2}{\alpha(\alpha^2 - 2)^2} \cdot \frac{(1 - \cos(4\alpha\pi))}{((1 - \cos(2\alpha\pi)))^2} \quad (4)$$

Видно, что это отношение может принимать практически любое значение в зависимости от значений величин  $\chi$ ,  $\alpha$ , т.е. от плотности спиральной траектории тока. Следовательно, потребляемая мощность не зависит от величины тока, а определяется плотностью спиральной траектории тока.

## 5. Обсуждение

Итак, поток энергии вдоль оси провода  $S_z$  создается токами и напряженностями, направленными по радиусу и окружности. Этот поток энергии равен мощности, выделяемой в нагрузке  $R_H$  и в сопротивлении провода. Токи, текущие вдоль радиуса и окружности, также создают тепловые потери. Их мощность равна потокам энергии  $S_r$ ,  $S_\phi$ , направленным по радиусу и окружности.

Вопрос о том, каким образом поток электромагнитной энергии создает электрический ток, рассматривается в [19]. Там показано, что существует четвертая электромагнитная индукция, создаваемая изменением потока электромагнитной энергии. Затем определяется зависимость э.д.с. этой индукции от плотности потока электромагнитной энергии и параметров провода. Известен эксперимент, который может служить экспериментальным доказательством существования этой индукции [17].

Показано, что постоянный ток в проводе имеет сложную структуру и распространяется **внутри** провода по спирали. При постоянной величине тока плотность спиральной траектории уменьшается по мере уменьшения оставшегося сопротивления нагрузки. Имеется две составляющие тока. Плотность первой

составляющей  $J_o$  постоянна на всем сечении провода. Плотность второй составляющей изменяется по сечению провода таким образом, что ток распространяется по спирали. В цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  эта вторая плотность имеет три компоненты  $J_r$ ,  $J_\varphi$ ,  $J_z$ . Они были найдены как решение уравнений Максвелла.

Известен эксперимент, который может служить экспериментальным доказательством существования указанной структуры постоянного тока [14].

При неизменной плотности основного тока в проводе передаваемая по нему мощность зависит от параметров структуры ( $\alpha$ ,  $\chi$ ), которые влияют на плотность витков спиральной траектории тока. Таким образом, один и тот же ток в данном проводе может передавать различную мощность (зависящую от нагрузки).

Снова рассмотрим рис. 1. На участке **AB** по проводу передается энергия нагрузки **P**. Ей соответствует определенное значение параметров структуры ( $\alpha$ ,  $\chi$ ) и, как следствие, плотность витков спиральной траектории тока. На участке **CD** по проводу передается незначительная энергия. Ей соответствует малая плотность витков спиральной траектории тока.

Естественно, нагрузкой является и сопротивление самого провода. Следовательно, по мере прохождения тока по проводу спираль траектории тока выпрямляется.

Зависимость плотностей токов и напряженностей от переменной  $\varphi$  подробно рассмотрена в [10]. Вообще, предложенную в [10] математическую модель можно рассматривать как следствие данной модели при  $\chi \rightarrow 0$ .

Таким образом, показано, что существует такое решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током, которому соответствует представление о

- законе сохранения энергии,
- спиральной траектории постоянного тока в проводе,
- передаче энергии вдоль и внутри провода,
- зависимости плотности спиральной траектории от передаваемой мощности.

## Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.5-2.9) в виде функций (2.10-2.17). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.5-2.9) в виде

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) + \frac{j_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot j_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (3)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (4)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - j_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot j_z(r) \alpha - j_\varphi(r) \chi = 0, \quad (6)$$

$$-j_r(r) \chi - j'_z(r) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{j_\varphi(r)}{r} + j'_\varphi(r) + \frac{j_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (8)$$

Умножим (5) на  $(-\chi)$ . Тогда получим:

$$-\frac{\chi \cdot h_\varphi(r)}{r} - \chi \cdot h'_\varphi(r) - \frac{\chi \cdot h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \chi \cdot j_z(r) = 0, \quad (9)$$

Сравнивая (1) и (9), замечаем, что они совпадают, если

$$-h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (10)$$

$$-h_r(r) \chi = j_\varphi(r). \quad (11)$$

Важно отметить, что такое сравнение справедливо только при  $j_z(r) \neq 0$ . Уравнения (10, 11) совпадают с (3, 4) при  $h_z(r) = 0$ . Следовательно, при  $j_z(r) \neq 0$  и  $h_z(r) = 0$  уравнение (1) может быть исключено и система уравнений (1-5) упрощается и принимает вид

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (12)$$

$$-h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (13)$$

$$-h_r(r) \chi = j_\varphi(r), \quad (14)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{1}{r} \cdot h_r(r) \alpha = j_z(r). \quad (15)$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $j_z(r) = 0$ . При этом исходная система примет вид:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j_r'(r) + \frac{j_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (16)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h_r'(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (18)$$

$$-h_r(r) \chi - h_z'(r) = j_\varphi(r), \quad (19)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h_\varphi'(r) + \frac{1}{r} \cdot h_r(r) \alpha = 0. \quad (20)$$

Подставим (18, 19) в (16). Тогда получим:

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi + \frac{1}{r} \cdot h_z'(r) \alpha - h_\varphi'(r) \chi - (h_r(r) \chi + h_z'(r)) \frac{\alpha}{r} = 0$$

или

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi - h_\varphi'(r) \chi - h_r(r) \frac{\chi \alpha}{r} = 0 \quad (21)$$

При этом для вычисления трех напряженностей получим три уравнения (17, 20, 21). Исключим  $h_\varphi'(r)$  из (20, 21):

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi + \left( \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) + h_r(r) \frac{\alpha}{r} \right) \chi - h_r(r) \frac{\chi \alpha}{r} = 0$$

или

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha = 0.$$

Таким образом, и при  $j_z(r) = 0$  должно соблюдаться условие  $h_z(r) = 0$ . Итак, система уравнений (9-12) выполняется при любом  $j_z(r)$ .

Итак, уравнения (1-8) могут быть заменены на уравнения вида

$$h_z(r) \equiv 0, \quad (22)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h_r'(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (23)$$

$$-h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (24)$$

$$-h_r(r) \chi = j_\varphi(r), \quad (25)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h_\varphi'(r) + \frac{1}{r} \cdot h_r(r) \alpha = j_z(r). \quad (26)$$

$$\frac{1}{r} \cdot j_z(r)\alpha - j_\varphi(r)\chi = 0 \quad (27)$$

$$-j_r(r)\chi - j'_z(r) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{j_\varphi(r)}{r} + j'_\varphi(r) + \frac{j_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0 \quad (29)$$

Подставляя (24, 25) в (29) замечаем, что полученное уравнение совпадает с (23) и поэтому может быть исключено из данной системы уравнений.

Подставим теперь (24, 25) в (27, 28). Тогда получим:

$$\frac{1}{r} \cdot j_z(r)\alpha + \chi h_r(r)\chi = 0, \quad (30)$$

$$\chi h_\varphi(r)\chi - j'_z(r) = 0, \quad (31)$$

откуда находим

$$j_z(r) = -h_r(r) \frac{\chi^2}{\alpha} r, \quad (32)$$

$$j'_z(r) = \chi^2 h_\varphi(r). \quad (33)$$

Совмещая (32, 33), находим:

$$-\frac{\chi^2}{\alpha} (h_r(r)r)' = \chi^2 h_\varphi(r)$$

или

$$h_\varphi(r) = \frac{-1}{\alpha} (h_r(r) + h'_r(r)r). \quad (34)$$

Из (23, 34) находим:

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) - \frac{1}{\alpha} (h_r(r) + h'_r(r)r) \frac{\alpha}{r} = 0,$$

т.е. уравнение (23) выполняется. Подставляя (32) в (26), получаем:

$$-\frac{1}{r\alpha} (h_r(r) + h'_r(r)r) - \frac{1}{\alpha} (h_r(r) + h'_r(r)r)' + \frac{1}{r} \cdot h_r(r)\alpha = j_z(r)$$

или

$$-\frac{1}{r\alpha} (h_r(r) + h'_r(r)r) - \frac{1}{\alpha} (2h'_r(r) + h''_r(r)r) + \frac{1}{r} \cdot h_r(r)\alpha = j_z(r) \quad (35)$$

При данной функции  $j_z(r)$  по (35) может быть найдена функция  $h_r(r)$ . Будем искать решение уравнения (35) в виде

$$h_r(r) = Ar^b. \quad (36)$$

Тогда из (35) найдем:

$$j_z(r) = -\frac{1}{r\alpha} (Ar^b + bAr^b) - \frac{1}{\alpha} (2bAr^{b-1} + b(b-1)Ar^{b-1}) + \frac{\alpha}{r} \cdot Ar^b$$

$$j_z(r) = -\frac{Ar^b}{r\alpha}(1+b) - \frac{Ar^{b-1}}{\alpha}(2b+b(b-1)) + \frac{\alpha}{r} \cdot Ar^b$$

$$j_z(r) = Ar^{b-1} \left( -\frac{1}{\alpha}(1+b) - \frac{1}{\alpha}(2b+b(b-1)) + \alpha \right)$$

$$j_z(r) = Ar^{b-1} \left( -\frac{1}{\alpha}(1+b+2b+b(b-1)) + \alpha \right)$$

$$j_z(r) = Ar^{b-1} \left( -\frac{1}{\alpha}(1+2b+b^2) + \alpha \right)$$

или

$$j_z(r) = Ar^{b-1} \left( \alpha - \frac{1}{\alpha}(1+b)^2 \right) \quad (37)$$

Таким образом, при данной функции  $j_z(r)$  (37) определяется функция  $h_r(r)$  (36). Обозначим

$$j_z(r) = A_z r^{b-1} \quad (38)$$

где

$$A_z = A \left( \alpha - \frac{1}{\alpha}(1+b)^2 \right). \quad (39)$$

Тогда из (39, 36) найдем

$$h_r(r) = A_z \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1 - b^2} r^b. \quad (40)$$

Далее из (34, 40) находим:

$$h_\varphi(r) = \frac{-A_z}{\alpha} \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1 - b^2} r^b (1+b)$$

или

$$h_\varphi(r) = -A_z \frac{1+b}{\alpha^2 - 1 - b^2} r^b. \quad (41)$$

Итак, для определения всех функций при данной функции  $j_z(r)$  имеем уравнения (40, 41, 22, 24, 25).

Далее предположим, что

$$b = 1. \quad (42)$$

Тогда (38, 40, 41, 22, 25, 24) найдем:

$$j_z(r) = A_z$$

$$h_r(r) = A_z \frac{\alpha}{\alpha^2 - 2} r. \quad (43)$$

$$h_\varphi(r) = -A_z \frac{2}{\alpha^2 - 2} r. \quad (44)$$



$$h_z(r) \equiv 0, \quad (45)$$

$$j_r(r) = A_z \frac{2\chi}{\alpha^2 - 2} r \quad (46)$$

$$j_\varphi(r) = -A_z \frac{\alpha\chi}{\alpha^2 - 2} r \quad (47)$$

Таким образом, существует решение при постоянной функции  $j_z(r)$ .

## Приложение 2.

В разделе 3 показано, что потоки энергии в сечении провода,

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho \iiint_{r,\varphi,z} \begin{bmatrix} \overline{S}_r(r) \cdot si^2 \\ \overline{S}_\varphi(r) \cdot si \cdot co \\ \overline{S}_z(r) \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi \cdot dz. \quad (1)$$

В точке  $z=0$  оси  $OZ$ , учитывая (2.10, 2.11), имеем:

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} \overline{S}_r(r) \cdot \sin^2(\alpha\varphi) \\ \overline{S}_\varphi(r) \cdot (-\sin(\alpha\varphi) \cdot \cos(\alpha\varphi)) \\ \overline{S}_z(r) \cdot (-\sin(\alpha\varphi) \cdot \cos(\alpha\varphi)) \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \quad (2)$$

Рассмотрим вначале поток

$$S_z = \rho \iint_{r,\varphi} (\overline{S}_z(r) \cdot (-\sin(\alpha\varphi) \cdot \cos(\alpha\varphi))) dr \cdot d\varphi \quad (3)$$

или

$$S_z = -\frac{\rho}{2} \int_r \left( \overline{S}_z(r) \cdot \left( \int_\varphi \sin(2\alpha\varphi) \cdot d\varphi \right) dr \right) \quad (4)$$

или

$$S_z = \frac{\rho}{4\alpha} \cdot (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (\overline{S}_z(r) \cdot dr). \quad (5)$$

Аналогично,

$$S_\varphi = \frac{\rho}{4\alpha} \cdot (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (\overline{S}_\varphi(r) \cdot dr), \quad (6)$$

$$S_r = \pi\rho \int_r (\overline{S}_r(r) \cdot dr). \quad (7)$$

Очевидно, при любом выборе точки  $z=0$  на оси  $OZ$  последнее соотношение сохраняется.

## Глава 4. Решение уравнений Максвелла для провода с КОМПЛЕКСНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Уравнения Максвелла в системе СГС и в комплексном представлении имеют следующий вид (см. вариант 3 в главе "Предисловие"):

$$\operatorname{rot}(\overline{E} + i \cdot \underline{E}) + i\omega \frac{\mu}{c} (\overline{H} + i \cdot \underline{H}) = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(\overline{H} + i \cdot \underline{H}) - i \cdot \omega \frac{\varepsilon}{c} (\overline{E} + i \cdot \underline{E}) - \frac{4\pi}{c} (\overline{J} + i \cdot \underline{J}) = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\overline{E} + i \cdot \underline{E}) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(\overline{H} + i \cdot \underline{H}) = 0, \quad (4)$$

$$\overline{J} = \sigma \cdot \operatorname{abs}(E). \quad (5)$$

Здесь важно отметить, что в (5) указывается не весь ток, а только его реальная часть, т.е. ток проводимости. Мнимая часть тока является током смещения и не зависит от электрических зарядов.

Далее будем обозначать мнимые (без множителя "i") и действительные части подчеркиванием снизу и сверху соответственно. При этом

$$H = \overline{H} + i \cdot \underline{H}, \quad (6)$$

$$E = \overline{E} + i \cdot \underline{E}, \quad (7)$$

$$J = \overline{J} + i \cdot \underline{J}. \quad (8)$$

Систему (1-5) можно заменить двумя системами вида:

Система А

$$\operatorname{rot}(i \cdot \underline{E}) + i\omega \frac{\mu}{c} (\overline{H}) = 0, \quad (9)$$

$$\operatorname{rot}(\overline{H}) - i \cdot \omega \frac{\varepsilon}{c} (i \cdot \underline{E}) - \frac{4\pi}{c} (\overline{J}) = 0, \quad (10)$$

$$\operatorname{div}(i \cdot \underline{E}) = 0, \quad (11)$$

$$\operatorname{div}(\overline{H}) = 0, \quad (12)$$

Система В

$$\operatorname{rot}(\underline{\bar{E}}) + i\omega \frac{\mu}{c} (i \cdot \underline{\bar{H}}) = 0, \quad (13)$$

$$\operatorname{rot}(i \cdot \underline{\bar{H}}) - i \cdot \omega \frac{\varepsilon}{c} (\underline{\bar{E}}) - \frac{4\pi}{c} (i \cdot \underline{\bar{J}}) = 0, \quad (14)$$

$$\operatorname{div}(\underline{\bar{E}}) = 0, \quad (15)$$

$$\operatorname{div}(i \cdot \underline{\bar{H}}) = 0, \quad (16)$$

Перепишем эти системы без мнимых единиц:

Система А2

$$\operatorname{rot}(\underline{E}) + \omega \frac{\mu}{c} (\underline{H}) = 0, \quad (17)$$

$$\operatorname{rot}(\underline{H}) + \omega \frac{\varepsilon}{c} (\underline{E}) - \frac{4\pi}{c} (\underline{J}) = 0, \quad (18)$$

$$\operatorname{div}(\underline{E}) = 0, \quad (19)$$

$$\operatorname{div}(\underline{H}) = 0. \quad (20)$$

Система В2

$$\operatorname{rot}(\underline{\bar{E}}) - \omega \frac{\mu}{c} (\underline{H}) = 0, \quad (21)$$

$$\operatorname{rot}(\underline{H}) - \omega \frac{\varepsilon}{c} (\underline{\bar{E}}) - \frac{4\pi}{c} (\underline{J}) = 0, \quad (22)$$

$$\operatorname{div}(\underline{\bar{E}}) = 0, \quad (23)$$

$$\operatorname{div}(\underline{H}) = 0, \quad (24)$$

Каждая из систем А2 и В2 формально идентичны системе, которая решена в главе 2 (см. вариант 4 в главе "Предисловие"). В обоих случаях предполагается, что известен ток  $J_z$ , протекающий вдоль провода, т.е. проекция вектора  $J$  на ось  $oz$ . Эти токи должны удовлетворять условию (5) или

$$\bar{J} = \sigma \cdot \operatorname{abs}(E), \quad (25)$$

где

$$\operatorname{abs}(E) = \sqrt{\underline{E}^2 + \underline{E}^2}. \quad (26)$$

После решения систем А2 и В2 определяются  $\underline{\bar{H}}$ ,  $\underline{\bar{E}}$ ,  $\underline{\bar{J}}$ ,  $\underline{H}$ ,  $\underline{E}$ ,  $\underline{J}$ . Далее можно найти (25) и (26) и проверить совпадение полученного значения тока (25) с принятым в начале решения. При несовпадении этих значений можно уточнить начальные значения, повторить расчет и т.д. Таким образом может быть получено решение системы уравнений (1-5).

Итак, в случае комплексного сопротивления провода существует решение уравнений Максвелла в виде двух спиральных линий тока.

Все остальные выводы идентичны тем, которые сделаны в главе 2.

# Глава 5. Излучение и передача энергии по одному проводу

## Оглавление

1. Излучение провода
2. Однопроводная передача энергии
3. Обсуждение экспериментов

### 1. Излучение провода

Рассмотрим снова (как в главе 2) низкоомный провод переменного тока. Несмотря на отсутствие тепловых потерь, в нем есть потери на излучение. Излучает боковая поверхность провода. Вектор плотности потока энергии излучения направлен по радиусу провода и имеет величину  $S_r$  - см. (2.4.4-2.4.6) в главе 2. Итак,

$$\overline{S_r} = \eta \iint_{r,\varphi} [s_r \cdot si^2] dr \cdot d\varphi, \quad (1)$$

где

$$s_r = (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \quad (2)$$

или, с учетом формул, приведенных в табл. 1 главы 2,

$$s_r = -e_z(R)h_\varphi(R) = -\frac{2\chi R}{\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi^2(R) = -\frac{2A^2\chi R}{\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} R^{2\alpha-2}, \quad (3)$$

где  $R$  – радиус провода. Будем учитывать еще формулу (см. (32) в приложении 1 главы 2)

$$\chi = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \quad \text{или} \quad \chi = \text{sign}(\chi) \cdot \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \text{где} \quad \text{sign}(\chi) = \pm 1. \quad (4)$$

Отсюда получаем:

$$s_r = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{2A^2\omega\varepsilon}{\alpha c} R^{2\alpha-1}, \quad (5)$$

Из (1, 5) получаем:

$$\overline{S_r} = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{2A^2\omega\varepsilon}{\alpha c} R^{2\alpha-1} \eta \int_\varphi si^2 d\varphi = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{2A^2\omega\varepsilon}{\alpha c} R^{2\alpha-1} \eta \pi.$$

Учитывая еще (1.4.2), окончательно получаем:

$$\overline{S}_r = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{A^2 \omega \varepsilon}{2\alpha} R^{2\alpha-1}. \quad (6)$$

Очевидно, эта величина должна быть положительной, поскольку излучение существует. Кстати говоря, этот факт служит опровержением известной теории о том, что поток энергии распространяется вне провода и входит в провод из-вне.

Поскольку величина (6) положительна, то должно выполняться условие

$$-\text{sign}(\chi) \cdot \text{sign}(\alpha) = 1, \quad (7)$$

т.е. знаки величин  $\chi$ ,  $\alpha$  должны быть противоположны. В связи с этим в дальнейшем будем пользоваться формулой вида

$$\overline{S}_r = \frac{A^2 \omega \varepsilon}{2|\alpha|} R^{2\alpha-1}. \quad (8)$$

Эта формула определяет величину потока энергии, излучаемой проводом единичной длины. Сопоставим эту формулу с формулой (2.4.15) плотности потока энергии вдоль провода:

$$\overline{S}_z = \frac{A^2 c \sqrt{\varepsilon/\mu} (1 - \cos(4\alpha\pi))}{8\pi\alpha(2\alpha-1)} R^{2\alpha-1}. \quad (9)$$

Следовательно,

$$\zeta = \frac{\overline{S}_r}{\overline{S}_z} = \frac{4\pi(2\alpha-1)\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c \cdot (1 - \cos(4\alpha\pi))}. \quad (10)$$

Таким образом, провод излучает часть продольного потока энергии, равную

$$\overline{S}_r = \zeta \cdot \overline{S}_z. \quad (11)$$

Пусть в начале провода поток энергии равен  $\overline{S}_{z0}$ . Поток энергии, который излучает провод на длине  $L$ , может быть найден по следующей формуле:

$$\overline{S}_{rL} = \overline{S}_{z0} (1 - \zeta)^L. \quad (12)$$

При этом оставшийся в проводе поток энергии

$$\overline{S}_{zL} = \overline{S}_{z0} - \overline{S}_{rL} = \overline{S}_{z0} (1 - (1 - \zeta)^L). \quad (13)$$

Отсюда можно найти длину провода, на которой сохранился поток

$$\overline{S}_{zL} = \beta \cdot \overline{S}_{z0}. \quad (14)$$

Эта длина определяется из выражения

$$\beta = (1 - (1 - \zeta)^L),$$

т.е.

$$L = \ln(1 - \beta) / \ln(1 - \zeta). \quad (15)$$

**Пример 1.** При  $\alpha = 1.2$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$  имеем:  $\zeta \approx 10\omega/c$ . Если  $\omega = 3 \cdot 10^3$ . Тогда  $\zeta \approx 3 \cdot 10 \cdot 10^3 / 3 \cdot 10^{10} = 10^{-6}$ . Длина провода, в конце которого сохранился 1% первоначального потока,

$$L = \ln(1 - 0.01) / \ln(1 - \zeta) \approx 9950 \text{ см.}$$

## 2. Однопроводная передача энергии

Существует ряд экспериментов, которые, без сомнения, демонстрируют передачу энергии по одному проводу.

1. В [29] анализируется передающая антенна «длинный провод», которая используется в радиолюбительской коротковолновой связи. Автор отмечает, эта антенна имеет *"удовлетворительную круговую диаграмму направленности, дающую возможность устанавливать связь почти во всех направлениях"*, а в направлении оси провода *"достигается значительное усиление, которое увеличивается по мере увеличения длины антенны... С увеличением длины антенны направление основного лепестка диаграммы направленности все больше и больше приближается к оси антенны. Одновременно увеличивается и интенсивность излучения в направлении основного лепестка."* Из того факта, что длинный провод излучает во всех направлениях, и из предыдущего раздела следует, что вдоль провода распространяется поток энергии. Этот поток достигает конца провода, где он переходит в излучение, направленное вдоль оси провода. Важно отметить, что поток энергии существует без внешнего электрического напряжения на концах провода.

2. Известен давний эксперимент С.В. Авраменко по однопроводной передаче электроэнергии – так называемая вилка Авраменко. Она впервые описана в [30], а затем в [31] – см. рис. 1. Сообщалось [30], что в экспериментальную установку входил машинный генератор 2 мощностью до 100 кВт, генерирующий напряжение с частотой 8 кГц, подаваемое на трансформатор Тесла. Один конец вторичной обмотки был свободен. Ко второму концу была подсоединена собственно «вилка Авраменко». Вилка Авраменко представляла собой замкнутый контур, содержащий два последовательно соединенных диода 3 и 4, у которых общая точка подсоединялась к проводу 1, и нагрузку, параллельно которой был включен конденсатор 5. Нагрузкой (в первом варианте) служили несколько лампочек накаливания – сопротивление 6 или (во втором варианте) разрядник 7. По этой разомкнутой цепи Авраменко смог

передать от генератора к нагрузке электрическую мощность порядка 1300 Вт. Электрические лампочки ярко светились. Ток в проводе имел очень малую величину, а тонкий вольфрамовый провод в линии 1 даже не грелся. Именно это обстоятельство послужило главной причиной трудности объяснения результатов эксперимента Авраменко.

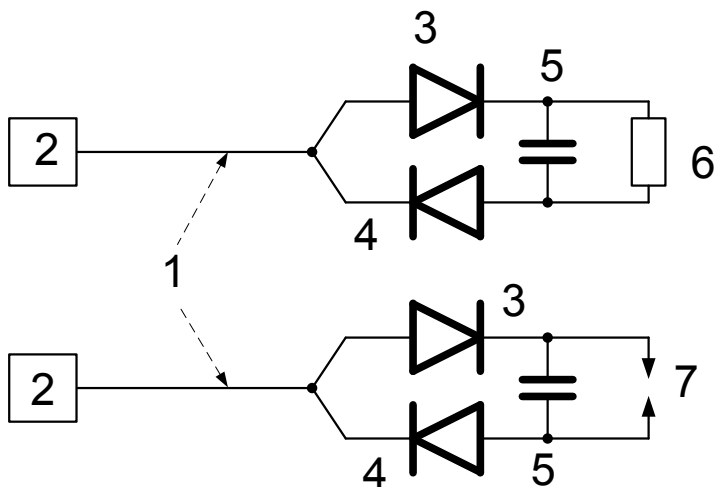


Рис. 1.

Эта конструкция демонстрирует, с одной стороны, весьма привлекательный способ передачи электроэнергии, но, с другой стороны, - кажущееся нарушение законов электротехники. С тех пор многие авторы экспериментировали с этой конструкцией и предлагали теории, объясняющие наблюдаемые феномены – см., например, [32-34]. Однако пока не найдена общепринятая теория. Здесь также поток энергии существует без внешнего электрического напряжения на концах провода.

3. В этот же перечень следует включить лазерный луч. Очевидно, что лазер передает поток энергии в лазерный луч. Эта энергия может быть весьма значительной, передается по лазерному лучу практически без потерь и преобразуется в тепловую энергию на выходе из луча.

4. Известны эксперименты Косинова [35], в которых демонстрировалось свечение перегоревших ламп накаливания. Отмечалось, что "чаще всего лампы накаливания перегорали в двух и более местах, причем перегорала не только спираль, но и токоподводящие проводники внутри лампы. При этом после первого разрыва цепи лампы продолжали некоторое время светить даже более ярко, чем до перегорания.



*Лампа светилась до тех пор, пока не перегорел другой участок цепи. Внутренняя цепь одной лампы в нашем эксперименте перегорела в четырех местах! При этом спираль перегорела в двух местах и, кроме спирали, перегорели оба подводящих электрода внутри лампы. Лампа погасла только после перегорания четвертого участка цепи – электрода, на котором закреплена спираль.*" Здесь также поток энергии существует без внешнего электрического напряжения на концах провода. Важно отметить еще, что энергия после перегорания лампы потребляет еще больше энергии, достаточной для перегорания следующего участка спирали.

Рассматривая уравнения электромагнитной волны в проводе, невозможно выявить физическую причину существования волны: любая компонента напряженности, тока и плотности потока энергии могут рассматриваться, как внешние воздействия, от которых зависят все остальные. Принято считать, что внешним воздействием является продольная электрическая напряженность. Указанные выше факты свидетельствуют о том, что могут быть исключения – внешним воздействием является поток энергии на входе провода. В [19, 17] показано, что поток энергии может рассматриваться как четвертая электромагнитная индукция.

Итак, входной поток энергии распространяется по проводу и может (практически, без потерь - см. выше п.п. 2, 3, 4) достигать другого конца провода. Вместе с потоком энергии может распространяться ток. Но такая взаимосвязь может и отсутствовать (см. выше п. 2, 3). Важно отметить, что выходной поток энергии может быть значительным и использоваться в нагрузке. Отсутствие взаимосвязи между потоком энергии и током уже обсуждалось и обосновывалось в разделе 2.5.

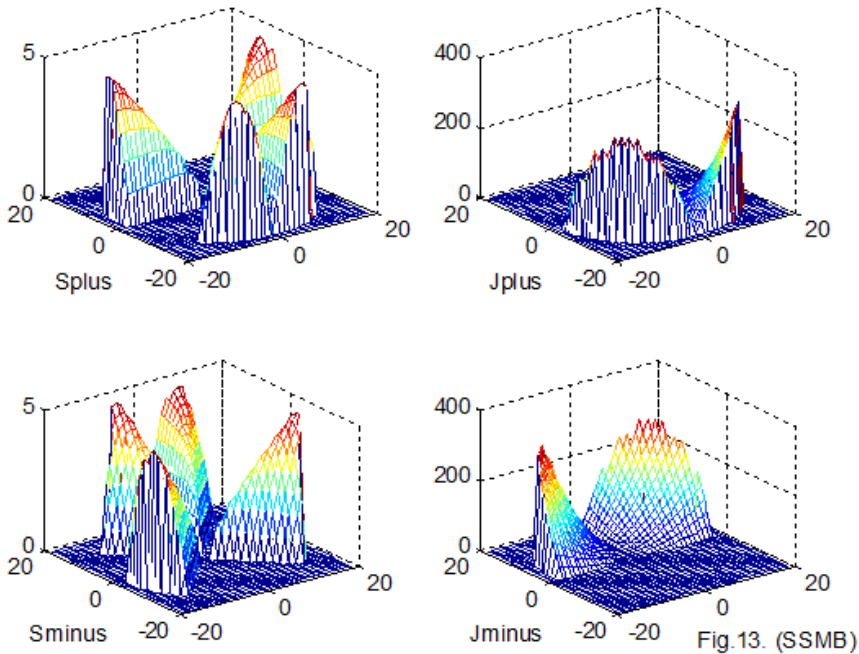
### 3. Обсуждение экспериментов

Вернемся снова к антенне «длинный провод». Она излучает во все стороны. Как следует из раздела 1, излучаемый поток энергии  $\overline{S}_r$  является частью продольного потока энергии  $\overline{S}_z$  – см. (1.11). Коэффициент пропорциональности  $\zeta$  между ними, в свою очередь, зависит от частоты  $\omega$  - см. пример 1. Следовательно, при уменьшении частоты  $\omega$  излучаемый поток энергии  $\overline{S}_r$  уменьшается.

В разделе 2.5 рассматривались и сопоставлялись токи и потоки энергии в проводе. Показывалось, что, как правило, в

проводе существуют токи и потоки энергии, разделенные на противоположно направленные "струи". Это соответствует существованию потоков активной и реактивной энергий.

Можно предположить, что в "длинном проводе" образуются такие "струи". Если "длинный провод" излучает всю поступающую в него энергию, то превалирует один из этих потоков (поток активной мощности) и генератор расходует энергию на его поддержание. Если "длинный провод" НЕ излучает, то поток энергии проходит в одном направлении и возвращается в другом – генератор НЕ расходует энергию (циркулирует поток реактивной мощности), а ток в проводе отсутствует. Существуют, естественно, и промежуточные случаи, когда "длинный провод" излучает не всю поступающую в него энергию.



Существуют и такие сочетания параметров, при которых суммарные токи противоположно направленных "струй" равны по абсолютной величине и, одновременно с этим, суммарные потоки энергии противоположно направленных "струй" также равны по абсолютной величине. Это соответствует равенству потоков активной и реактивной энергий. Выше (для удобства читателя) повторен рис. 13 из главы 2. На нем изображены функции противоположно направленных струй:

$S_{plus}$  - струя потока энергии, направленная от источника энергии,

$S_{minus}$  - струя потока энергии, направленная к источнику энергии,

$J_{plus}$  - струя тока, направленная от источника энергии,

$J_{minus}$  - струя тока, направленная к источнику энергии.

Графики функций для наглядности показаны с обратным знаком. Здесь соблюдаются следующие соотношения между интегралами по площади сечения  $Q$  провода:

$$\int_Q S_{plus} \cdot dQ = - \int_Q S_{minus} \cdot dQ,$$

$$\int_Q J_{plus} \cdot dQ = - \int_Q J_{minus} \cdot dQ.$$

Возможен, как следует из экспериментов (рассмотренных подробнее далее) случай, когда токи и потоки замыкаются на обрыве провода – см. рис. 3, где 1 – провод, 2 – прямая "струя", 3 – обратная "струя", 4 – ток замыкания. В этом случае прежде всего возникает вопрос о природе э.д.с., заставляющей ток преодолевать искровой промежуток. В [19, 17] показано, что поток энергии может рассматриваться как четвертая электромагнитная индукция.

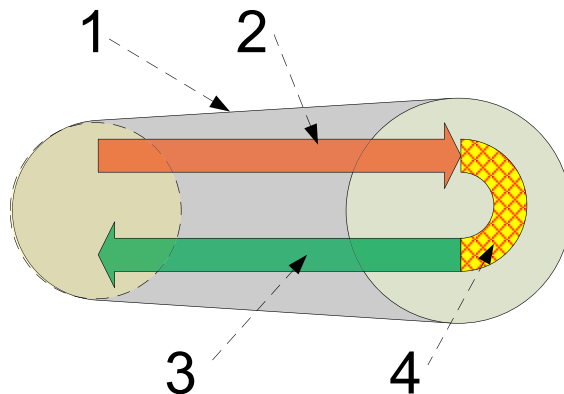


Рис. 3.

Рассмотрим эти эксперименты. Яркие эксперименты Косинова [35] явным образом подтверждают предложенную гипотезу: дуга, возникающая на обрыве спирали, должна иметь начало и конец. Между ними должна быть приложена э.д.с. Когда дуга, расширяясь, достигает следующего участка спирали, этот участок вместе с

соединяющей дугой включается в длинную линию и т.д. Косинов наблюдал 8 таких участков

Вилка Авраменко представляет собой контур, содержащий два последовательно соединенных диода и нагрузку – см. рис. 1. Этот контур создает ту дугу, которая изображена на рис. 3. Нагрузкой может быть воздушный промежуток разрядника 7, что эквивалентно дуге в экспериментах Косинова. Нагрузкой может быть резистор 6 - приемник энергии в системе однопроводной передачи энергии. Провод 1 в этой конструкции можно отождествить с "длинным проводом". В данном случае (при низкой частоте 8 кГц) провод 1 не излучает. Следовательно, в нем существуют два противоположно направленных потока энергии и отсутствует ток.

Таким образом, передача энергии по одному проводу не противоречит уравнениям Максвелла, а, напротив, следует из них.

# Литература

*Примечание:* **Vixra** - viXra Funding, <http://vixra.org/funding>,  
**DNA** – Доклады независимых авторов,  
ISSN 2225-6717, <http://dna.izdatelstwo.com/>

1. Канн К.Б. Электродинамика. Электромагнитные волны, <http://electrodynamics.narod.ru/em-waves.html>
2. Ток смещения и система уравнений Максвелла, <http://www.webpoliteh.ru/subj/dinamo/767-25-tok-smeshheniya-i-sistema-uravnenij-maksvela.html>
3. Розанов Н.Н. Специальные разделы математической физики. Часть 3. Электромагнитные волны в вакууме. ИТМО. Санкт-Петербург, 2005.
4. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
5. Хмельник С.И. Второе решение уравнений Максвелла, ViXra, 2016-01-26, <http://vixra.org/abs/1601.0292>; DNA, № 35, 2016, см. [здесь](#).
6. Хмельник С.И. Математическая модель электрического торнадо, ViXra, 2015-04-11, <http://vixra.org/abs/1504.0088>; DNA, № 33, 2015, см. [здесь](#).
7. Хмельник С.И. Вторая структура постоянного тока, ViXra, 2015-11-21, <http://vixra.org/abs/1511.0206>; DNA, № 35, 2016, см. [здесь](#).
8. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с переменным током, ViXra, <http://vixra.org/abs/1503.0068>;
9. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с постоянным током, DNA-32, ID16319679, 2015; ViXra, <http://vixra.org/abs/1503.0048>
10. Хмельник С.И. Структура постоянного тока, DNA-33, ID16537771, 2015; ViXra, <http://vixra.org/abs/1503.0241>
11. Хмельник С.И. Структура потока электромагнитной энергии в проводе с постоянным током, DNA-33, ID16537771, 2015; ViXra, <http://vixra.org/abs/1504.0061>
12. Торшин В.В., Бусыгин Б.П., Пащенко Ф.Ф., Круковский Л.Е. Эффект генерации постоянного электрического тока в неподвижном проводнике в постоянном магнитном поле. Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова. Альманах современной науки и образования, вып 12, 2008,

- <http://cyberleninka.ru/article/n/effekt-generatsii-postoyannogo-elektricheskogo-toka-v-nepodvizhnom-provodnike-v-postoyannom-magnitnom-pole>
13. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика. Москва, изд. "Мир", 1966.
  14. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводе и двигатель Мильроя, Vixra, 1510.0396, 2015-10-26, <http://vixra.org/abs/1510.0396>
  15. Хмельник С.И. Электромагнитная волна в проводе переменного тока, Vixra, 1603.0020, 2016-03-02, <http://vixra.org/abs/1603.0020>
  17. Хмельник С.И. Эксперимент, подтверждающий существование четвертой электромагнитной индукции, ViXra, <http://vixra.org/abs/1601.0215>
  18. Хмельник С.И. Сила Хмельника, DNA-30, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1407.0075>
  19. Хмельник С.И. Четвертая электромагнитная индукция, «Доклады независимых авторов», DNA-31, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1412.0214>
  20. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Рельсотрон>
  21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля.
  22. Тамм И.Е. Основы теории электричества, Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2003, стр. 547.
  23. Хмельник С.И. Униполярный двигатель Фарадея и закон сохранения импульса, DNA-23, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1404.0428>
  24. Хмельник С.И. К вопросу о внутриядерных силах DNA-27, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1405.0296>
  25. Хмельник С.И. Силы Лоренца, Ампера и закон сохранения импульса. Количественный анализ и следствия, DNA-30, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1407.0065>
  26. Хмельник С.И. Принцип обратимости в униполярных машинах Фарадея, DNA-30, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1407.0145>
  27. Хмельник С.И. Эксперимент для доказательства нарушения третьего закона Ньютона в униполярном двигателе, Vixra - <http://vixra.org/abs/1501.0061>
  28. Стребков Д.С. Передача электрической энергии без металлических проводов, <http://www.electrolibrary.info/tesla/peredachaenergii.htm>

- 
29. Ротхаммель К. Антенны, изд. "Энергия", 1967, <http://www.radiouniverse.ru/book/antenny/2-1-antenna-v-vidе-dlinnogo-provoda>
  30. Заев Н.Е. Сверхпроводники инженера Авраменко. "Техника - молодежи", №1, М., 1991.
  31. Изобретатель и рационализатор, 1992, №5, 6, 1-32
  32. Кулигин В.А., Корнева М.В., Кулигина Г.А., Большаков Г.П. Безинерциальные заряды и токи, <http://www.n-t.ru/ac/iga/>
  33. M. Lobo, G. Shipov, Tawatchai Laosirihongthong, Supakit Chotigo. Экспериментальное обнаружение скалярного электромагнитного поля. King Mongkut's University of Technology, Thonburi, Bangkok, 10140, Thailand, <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/004a/1032-Monopole.pdf>
  34. Заев Н.Е., Авраменко С.В., Лисин В.Н. Измерение тока проводимости, возбуждаемого поляризационным током. <http://rusphysics.ru/dissertation/269/>
  35. Косинов Н.В. Эксперименты по беспроводной передаче энергии: подтверждение революционных идей Н. Тесла, <http://kosinov.314159.ru/kosinov31.htm>

