

Breakdown of Navier-Stokes Solutions – Unbounded Energy for $t > 0$

Valdir Monteiro dos Santos Godoi

valdir.msgodoi@gmail.com

Abstract – A solution to the 6th millenium problem, respect to breakdown of Navier-Stokes solutions and the bounded energy. We have proved that there are initial velocities $u^0(x)$ and forces $f(x, t)$ such that there is no physically reasonable solution to the Navier-Stokes equations for $t > 0$, which corresponds to the case (C) of the problem relating to Navier-Stokes equations available on the website of the Clay Institute.

Keywords – Navier-Stokes equations, continuity equation, breakdown, existence, smoothness, physically reasonable solutions, gradient field, conservative field, velocity, pressure, external force, bounded energy, millennium problem.

§ 1

The simplest way I see to prove the breakdown solutions of Navier-Stokes equations, following the described in [1], refers to the condition of bounded energy, the finiteness of the integral of the squared velocity of the fluid in the whole space.

We can certainly construct solutions for

$$(1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

that obey the condition of divergence-free to the velocity (continuity equation to the constant mass density),

$$(2) \quad \operatorname{div} u \equiv \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{incompressible fluids})$$

and the initial condition

$$(3) \quad u(x, 0) = u^0(x),$$

where u_i , p , f_i are functions of the position $x \in \mathbb{R}^3$ and the time $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. The constant $\nu \geq 0$ is the viscosity coefficient, p represents the pressure and $u = (u_1, u_2, u_3)$ is the fluid velocity, measured in the position x and time t , with $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. The function $f = (f_1, f_2, f_3)$ has the dimension as acceleration or force per mass unit, but we will keep on naming this vector and its components by its generic name of force, such as used in [1]. It's the externally applied force to the fluid, for example, gravity.

The functions $u^0(x)$ and $f(x, t)$ must obey, respectively,

$$(4) \quad |\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha K} (1 + |x|)^{-K} \text{ on } \mathbb{R}^3, \text{ for any } \alpha \in \mathbb{N}_0^3 \text{ and } K \in \mathbb{R},$$

and

$$(5) \quad |\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x, t)| \leq C_{\alpha m K} (1 + |x| + t)^{-K} \text{ on } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \text{ for any } \alpha \in \mathbb{N}_0^3, m \in \mathbb{N}_0 \text{ and } K \in \mathbb{R},$$

with $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (derivatives of order zero does not change the value of function), and a solution (p, u) from (1) to be considered physically reasonable must be continuous and have all the derivatives, of infinite orders, also continuous (smooth), i.e.,

$$(6) \quad p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)).$$

Given an initial velocity u^0 of C^∞ class, divergence-free ($\nabla \cdot u^0 = 0$) on \mathbb{R}^3 and an external forces field f also C^∞ class on $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, we want, for that a solution to be physically reasonable, beyond the validity of (6), that $u(x, t)$ does not diverge to $|x| \rightarrow \infty$ and satisfy the bounded energy condition, i.e.,

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx < C, \text{ for all } t \geq 0.$$

We see that every condition above, from (1) to (7), need to be obeyed to get a solution (p, u) considered physically reasonable, however, to get the breakdown solutions, (1), (2), (3), (6) or (7) could not be satisfied to some $t \geq 0$, in some position $x \in \mathbb{R}^3$, still maintaining (4) and (5) validity.

A way to make this situation (breakdown) happens is when (1) have no possible solution to the pressure $p(x, t)$, when the vector field $\phi: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ in

$$(8) \quad \nabla p = \nu \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + f = \phi$$

is not gradient, not conservative, in at least one $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$. In this case, to $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ not to be gradient, it must be

$$(9) \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}, i \neq j,$$

to some pair $(i, j), 1 \leq i, j \leq 3, x \in \mathbb{R}^3$ and time t not negative (for details check, for example, Apostol^[2], chapter 10).

If we admit, however, that (1) has a possible (p, u) solution and this also obey (2), (3) and (6), the initial condition $u^0(x)$ verifies (2) and (4), the external force $f(x, t)$ verifies (5) and both $u^0(x)$ and $f(x, t)$ are C^∞ class, we can try get a

breakdown solutions in $t \geq 0$ violating the condition (7) (bounded energy), i.e., choosing $u^0(x)$ or $u(x, t)$ that also obey to

$$(10) \quad \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx \rightarrow \infty, \text{ for some } t \geq 0.$$

The official description of the problem to this (C) case of breakdown solutions is given below:

(C) Breakdown solutions of Navier-Stokes on \mathbb{R}^3 . Take $\nu > 0$ and $n = 3$. Then there exist a smooth and divergence-free vector field $u^0(x)$ on \mathbb{R}^3 and a smooth external force $f(x, t)$ on $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ satisfying

$$(4) \quad |\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha K} (1 + |x|)^{-K} \text{ on } \mathbb{R}^3, \forall \alpha, K,$$

and

$$(5) \quad |\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x, t)| \leq C_{\alpha m K} (1 + |x| + t)^{-K} \text{ on } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \forall \alpha, m, K,$$

for which there exist no solutions (p, u) of (1), (2), (3), (6), (7) on $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$.

It's clear to see that we can solve this problem searching valid velocities which the integral of its square in all space \mathbb{R}^3 is infinite, or also, as shown in (8), searching functions ϕ non gradients, where the pressure p won't be considered a potential function to some instant $t \geq 0$. We understand that the α, m shown in (4) and (5) just make sense to $|\alpha|, m \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ and the negatives K podem ser desprezados, pois não limitam o valor das funções u^0, f e suas derivadas when $|x| \rightarrow \infty$ or $t \rightarrow \infty$, with $C_{\alpha K}, C_{\alpha m K} > 0$.

§ 2

A inequação (4) traz implicitamente que $u^0(x)$ deve pertencer ao espaço vetorial das funções de rápido decrescimento, que tendem a zero em $|x| \rightarrow \infty$, conhecido como espaço de Schwartz, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, em homenagem ao matemático francês Laurent Schwartz (1915-2002) que o estudou [3]. Estas funções e suas infinitas derivadas são contínuas (C^∞) e decaem mais rápido que o inverso de qualquer polinômio, tais que

$$(11) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k D^\alpha \varphi(x) = 0$$

para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i inteiro não negativo, e todo inteiro $k \geq 0$. α é um multi-índice, com a convenção

$$(12) \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

D^0 é o operador identidade, D^α um operador diferencial. Um exemplo de função deste espaço é $u(x) = P(x)e^{-|x|^2}$, onde $P(x)$ é uma função polinomial.

Valem as seguintes propriedades [4]:

- 1) $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial; ele é fechado sobre combinações lineares.
- 2) $S(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra; o produto de funções em $S(\mathbb{R}^n)$ também pertence a $S(\mathbb{R}^n)$.
- 3) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre multiplicação por polinômios.
- 4) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre diferenciação.
- 5) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre translações e multiplicação por exponenciais complexos ($e^{ix \cdot \xi}$).
- 6) funções de $S(\mathbb{R}^n)$ são integráveis: $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$ para $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Isto segue do fato de que $|f(x)| \leq M(1 + |x|)^{-(n+1)}$ e, usando coordenadas polares, $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-(n+1)} dx = C \int_0^\infty (1 + r)^{-n-1} r^{n-1} dr < \infty$, i.e., o integrando decresce como r^{-2} (e $(1 + r)^{-2}$) no infinito e produz uma integral finita.

Da definição de $S(\mathbb{R}^3)$ e propriedades anteriores vemos que, como $u^0(x) \in S(\mathbb{R}^3)$, então $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} M(1 + |x|)^{-4} dx \leq C \int_0^\infty (1 + r)^{-2} dr < \infty$ e quadrando $|u^0(x)|$ e $M(1 + |x|)^{-4}$ chegamos à desigualdade $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)|^2 dx < \infty$, que contradiz (10).

Outra forma de verificar isso é que o conjunto $S(\mathbb{R}^n)$ está contido em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo p , $1 \leq p < \infty$ ([5]-[9]), e em particular para $p = 2$ e $n = 3$ segue a finitude de $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)|^2 dx$.

Portanto, se a condição (7) for desobedecida, conforme propomos neste artigo, será para $t > 0$, por exemplo, encontrando alguma função $u(x, t)$ da forma $u^0(x)v(x, t)$, $v(x, 0) = 1$, ou $u^0(x) + v(x, t)$, $v(x, 0) = 0$, com $\int_{\mathbb{R}^3} |v(x, t)|^2 dx \rightarrow \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx \rightarrow \infty$.

§ 3

De fato, escolhendo $u^0(x) \in S(\mathbb{R}^3)$ e $f(x, t) \in S(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, obedecendo-se assim (4) e (5), lembrando-se que não precisamos ter $u, p \in S(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ como solução, apenas $u, p \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, então é possível construir uma solução para a velocidade da forma $u(x, t) = u^0(x)e^{-t} + v(t)$, com $v(0) = 0$, tal que $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx \rightarrow \infty$, pois, quando $\int_{\mathbb{R}^3} [|u^0(x)|^2 e^{-t} + 2u^0(x) \cdot v(t)] dx \geq 0$, por exemplo, quando cada componente de $u^0(x)$ tem o mesmo sinal da respectiva

componente de $v(t)$ ou o produto entre elas é zero ou $\int_{\mathbb{R}^3} u^0(x) \cdot v(t) dx \geq 0$, teremos $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} |v(t)|^2 dx = |v(t)|^2 \int_{\mathbb{R}^3} dx \rightarrow \infty$, com $v(t) \neq 0, t > 0$. Também devemos escolher u, u^0 tais que $\nabla \cdot u = \nabla \cdot u^0 = 0$.

Em especial, escolhamos, para $1 \leq i \leq 3$,

$$(13.1) \quad u^0(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}(x_2x_3, x_1x_3, -2x_1x_2),$$

$$(13.2) \quad v_i(t) = w(t) = e^{-t}(1 - e^{-t}),$$

$$(13.3) \quad u_i(x, t) = u_i^0(x)e^{-t} + v_i(t),$$

$$(13.4) \quad f_i(x, t) = \left(-u_i^0 + e^{-t} \sum_{j=1}^3 u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - v \nabla^2 u_i^0 \right) e^{-t},$$

o que resulta para $p(x, t)$, como a única incógnita ainda a determinar,

$$(14) \quad \nabla p + \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

e então

$$(15) \quad p(x, t) = -\frac{dw}{dt}(x_1 + x_2 + x_3) + \theta(t).$$

A pressão obtida tem uma dependência temporal genérica $\theta(t)$, que deve ser de classe $C^\infty([0, \infty))$ e podemos supor limitada, e diverge no infinito ($|x| \rightarrow \infty$), mas tenderá a zero em todo o espaço com o aumento do tempo (a menos eventualmente de $\theta(t)$), devido ao fator e^{-t} que aparece na derivada de $w(t)$,

$$(16) \quad \frac{dw}{dt} = e^{-t}(2e^{-t} - 1).$$

Neste exemplo $\int_{\mathbb{R}^3} u^0(x) \cdot v(t) dx = 0$, e assim $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx \rightarrow \infty$ para $t > 0$, como queríamos. Mais simples ainda seria escolher $u^0(x) = 0$.

Interessante observarmos que não ocorre nenhuma descontinuidade na velocidade, nem singularidade (divergência: $|u| \rightarrow \infty$), entretanto a energia cinética total em todo o espaço diverge, $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \rightarrow \infty$. Tivemos como dados de entrada $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^3), f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, mas por solução $u \notin L^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, assim como $p \notin L^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$.

§ 4

Our example obey the necessary conditions of divergence-free ($\nabla \cdot u^0 = 0$), smoothness (C^∞) and partial derivatives of u^0 e f da ordem de $C_{\alpha K}(1 + |x|)^{-K}$ e $C_{\alpha m K}(1 + |x| + t)^{-K}$, respectivamente. Concluímos que deve ser $u^0 \in S(\mathbb{R}^3)$ e $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$. To each possible $u(x, t)$ so that (3) is true, the external force

$f(x, t)$ and the pressure $p(x, t)$ can be fittingly constructed, in C^∞ class, verifying (8), and in a way to satisfy all the necessary conditions, finding, this way, a possible solution to (1), (2), (3), (4), (5) and (6), and only (7) wouldn't be satisfied, for $t > 0$, according to (10). We then show one example of breakdown solutions to case (C) of this millennium problem. This example, however, won't take to case (A) from [1], of existing and smoothness of solutions, because it violates (7) (case (A) also impose a null external force, $f = 0$).

An overview of the problem's conditions is listed below.

$\nu > 0, n = 3$	
$\exists u^0(x): \mathbb{R}^3$	smooth (C^∞), divergence-free ($\nabla \cdot u^0 = 0$)
$\exists f(x, t): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$	smooth (C^∞)
(4)	$ \partial_x^\alpha u^0(x) \leq C_{\alpha K} (1 + x)^{-K}: \mathbb{R}^3, \forall \alpha, K$
(5)	$ \partial_x^\alpha \partial_t^m f(x, t) \leq C_{\alpha m K} (1 + x + t)^{-K}: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \forall \alpha, m, K$
$\exists (p, u): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) /$	
(1)	$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x, t), 1 \leq i \leq 3 \quad (x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$
(2)	$\nabla \cdot u = 0$
(3)	$u(x, 0) = u^0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^3)$
(6)	$p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$
(7)	$\int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) ^2 dx < C, \forall t \geq 0 \quad (\text{bounded energy})$

It's important that we also analyse the solution's uniqueness question. As $u^0(x)$ and $f(x, t)$ are given of C^∞ class, chosen by us, and satisfying (4) and (5), i.e., pertencentes ao espaço de Schwartz, with $\nabla \cdot u^0 = 0$, claim that there is no solution (p, u) to the system (1), (2), (3), (6) and (7) might assume that we explored, or proved to, the infinite possible combinations of p and u , i.e., of (p, u) . Sendo assim, precisamos que haja unicidade de solução para a velocidade que construímos, o que elimina outras velocidades possíveis para os mesmos dados utilizados, $u^0(x)$ and $f(x, t)$, e que implicassem em energia cinética total finita.

A unicidade da solução (a menos da pressão $p(x, t)$ com o termo adicional constante ou dependente do tempo) vem dos resultados clássicos já conhecidos, descritos por exemplo no mencionado artigo de Fefferman [1]: o sistema das equações de Navier-Stokes (1), (2), (3) tem solução única para todo $t \geq 0$ ou apenas para um intervalo de tempo $[0, T)$ finito dependente dos dados iniciais,

onde T é chamado de “*blowup time*”. Quando há uma solução com T finito então a velocidade u torna-se ilimitada próxima do “*blowup time*”.

Vemos que a existência de nossa solução, no exemplo dado, está garantida por construção e substituição direta. Nossa velocidade não apresenta nenhum comportamento irregular, em instante t algum, em posição alguma, que a torne ilimitada, infinita, nem mesmo para $t \rightarrow \infty$ ou $|x| \rightarrow \infty$, sendo assim, não pode haver o “*blowup time*” no exemplo que demos, portanto a solução encontrada no caso anterior é única em todo tempo (a menos da pressão). Mas ainda que houvesse um T finito (em [10], [11] vemos que $T > 0$), a unicidade existiria em pelo menos um pequeno intervalo de tempo, o que já é suficiente para mostrar que neste intervalo ocorre a quebra das soluções de Navier-Stokes por ser desobedecida a condição de energia cinética limitada (7), tornando o caso (C) verdadeiro.

Embora só tenhamos exposto um caso possível de ocorrer energia infinita em $t > 0$, quando a velocidade u toma a forma $u(x, t) = u^0(x) + v(t)$, casos mais gerais de velocidades $v(x, t)$ dependentes explicitamente das coordenadas espaciais x_1, x_2, x_3 provavelmente ocorram também, $v(x, t)$ um vetor com $v(x, 0) = 0$, assim como para as velocidades da forma $u(x, t) = u^0(x)v(x, t)$, sendo $v(x, t)$ uma função escalar com $v(x, 0) = 1$. Uma vasta e importante pesquisa em Análise, Física-Matemática e Matemática Aplicada (por exemplo, [1], [10]-[15]).

Grato ao professor Ricardo Rosa da UFRJ, matemático especialista nas equações de Navier-Stokes, que me explicou sobre o caso $\alpha = 0$ e sua natureza de multi-índice.

□

References

- [1] Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in <http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf> (2000).
- [2] Apostol, Tom M., *Calculus*, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1969).
- [3] Schwartz, Laurent, *Théorie des Distributions*. Paris: Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts (1966).
- [4] Strichartz, Robert, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. Florida: CRC Press Inc. (1994).
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz_space (accessed in 01-28-2016).
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/SchwartzSpace.html> (accessed in 01-28-2016).
- [7] <http://www.math.washington.edu/~hart/m526/Lecture3.pdf> (01-28-2016).

- [8] Gjestland, Frederik Joachim, *Distributions, Schwartz Space and Fractional Sobolev Spaces*, Master's Thesis of Science in Physics and Mathematics, Norwegian University of Science and Technology, Department of Mathematical Sciences, in <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:664088/FULLTEXT01.pdf> (2013).
- [9] Kinani, Abdellah El, and Oudadess, Mohamed, *Distribution Theory and Applications*. Singapore: World Scientific (2010).
- [10] Kreiss, Heinz-Otto, and Lorenz, Jens, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*. San Diego: Academic Press Inc. (1989).
- [11] Leray, Jean, *Aspects de la mécanique théorique des fluides*, La Vie des Sciences **11**, 287-290 (1994). See <https://www.tmna.ncu.pl/static/files/v12n2-01.pdf>
- [12] Leray, Jean, *Sur Le Mouvement d'un Liquide Visqueux Emplissant L'Espace*, Acta Mathematica, **63**, 193-248 (1934).
- [13] Ladyzhenskaya, Olga A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. New York: Gordon and Breach Science Publishers (1969).
- [14] Smale, Steve, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (2): 7-15 (1998).
- [15] Constantin, Peter, *Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics*, Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, 353-360. Berlin: Springer-Verlag (2001).

Breakdown of Navier-Stokes Solutions – Unbounded Energy for $t > 0$

Valdir Monteiro dos Santos Godoi

valdir.msgodoi@gmail.com

Abstract – A solution to the 6th millenium problem, respect to breakdown of Navier-Stokes solutions and the bounded energy. We have proved that there are initial velocities $u^0(x)$ and forces $f(x, t)$ such that there is no physically reasonable solution to the Navier-Stokes equations for $t > 0$, which corresponds to the case (C) of the problem relating to Navier-Stokes equations available on the website of the Clay Institute.

Keywords – Navier-Stokes equations, continuity equation, breakdown, existence, smoothness, physically reasonable solutions, gradient field, conservative field, velocity, pressure, external force, bounded energy, millenium problem.

§ 1

A maneira mais simples que vejo para se provar a quebra de soluções (*breakdown solutions*) das equações de Navier-Stokes, seguindo o descrito em [1], refere-se à condição de energia limitada (*bounded energy*), a finitude da integral do quadrado da velocidade do fluido em todo o espaço.

Podemos certamente construir soluções de

$$(1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

que obedecem à condição de divergente nulo para a velocidade (equação da continuidade para densidade de massa constante),

$$(2) \quad \operatorname{div} u \equiv \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{fluidos incompressíveis})$$

e à condição inicial

$$(3) \quad u(x, 0) = u^0(x),$$

onde u_i , p , f_i são funções da posição $x \in \mathbb{R}^3$ e do tempo $t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. A constante $\nu \geq 0$ é o coeficiente de viscosidade, p representa a pressão e $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade do fluido, medidas na posição x e tempo t , com $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. A função $f = (f_1, f_2, f_3)$ tem dimensão de aceleração ou força por unidade de massa, mas seguiremos denominando este vetor e suas componentes pelo nome genérico de força, tal como adotado em [1]. É a força externa aplicada ao fluido, por exemplo, gravidade.

As funções $u^0(x)$ e $f(x, t)$ devem obedecer, respectivamente,

$$(4) \quad |\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha K} (1 + |x|)^{-K} \text{ sobre } \mathbb{R}^3, \text{ para quaisquer } \alpha \in \mathbb{N}_0^3 \text{ e } K \in \mathbb{R},$$

e

$$(5) \quad |\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x, t)| \leq C_{\alpha m K} (1 + |x| + t)^{-K} \text{ sobre } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \text{ para quaisquer } \alpha \in \mathbb{N}_0^3, m \in \mathbb{N}_0 \text{ e } K \in \mathbb{R},$$

com $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (derivadas de ordem zero não alteram o valor da função), e uma solução (p, u) de (1) para que seja considerada fisicamente razoável deve ser contínua e ter todas as derivadas, de infinitas ordens, também contínuas (*smooth*), i.e.,

$$(6) \quad p, u \in C^\infty \quad (\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)).$$

Dada uma velocidade inicial u^0 de classe C^∞ com divergente nulo (*divergence-free*, $\nabla \cdot u^0 = 0$) sobre \mathbb{R}^3 e um campo de forças externo f também de classe C^∞ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, quer-se, para que uma solução seja fisicamente razoável, além da validade de (6), que $u(x, t)$ não divirja para $|x| \rightarrow \infty$ e seja satisfeita a condição de energia limitada (*bounded energy*), i.e.,

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx < C, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Vemos que todas as condições acima, de (1) a (7), precisam ser obedecidas para se obter uma solução (p, u) considerada fisicamente razoável, contudo, para se obter uma quebra de soluções, (1), (2), (3), (6) ou (7) poderiam não ser satisfeitas para algum $t \geq 0$, em alguma posição $x \in \mathbb{R}^3$, mantendo-se ainda a validade de (4) e (5).

Uma maneira de fazer com que esta situação (*breakdown*) ocorra é quando (1) não tem solução possível para a pressão $p(x, t)$, quando o campo vetorial $\phi: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ em

$$(8) \quad \nabla p = \nu \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + f = \phi$$

é não gradiente, não conservativo, em ao menos um $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$. Nesse caso, para $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ser não gradiente deve valer

$$(9) \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}, i \neq j,$$

para algum par $(i, j), 1 \leq i, j \leq 3, x \in \mathbb{R}^3$ e tempo t não negativo (para mais detalhes veja, por exemplo, Apostol^[2], cap. 10).

Se admitirmos, entretanto, que (1) tem solução (p, u) possível e esta também obedece (2), (3) e (6), a condição inicial $u^0(x)$ verifica (2) e (4), a força externa $f(x, t)$ verifica (5) e $u^0(x)$ e $f(x, t)$ são de classe C^∞ , podemos tentar obter

a condição de quebra de soluções em $t \geq 0$ violando-se a condição (7) de energia limitada (*bounded energy*), i.e., escolhendo-se $u^0(x)$ ou $u(x, t)$ que também obedecem a

$$(10) \quad \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx \rightarrow \infty, \text{ para algum } t \geq 0.$$

A descrição oficial do problema para este caso (C) de quebra de soluções é dada a seguir:

(C) Quebra das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre \mathbb{R}^3 . Para $\nu > 0$ e dimensão espacial $n = 3$ existem um campo vetorial suave e com divergência nula $u^0(x)$ sobre \mathbb{R}^3 e uma força externa suave $f(x, t)$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ satisfazendo

$$(4) \quad |\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha K} (1 + |x|)^{-K} \text{ sobre } \mathbb{R}^3, \forall \alpha, K,$$

e

$$(5) \quad |\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x, t)| \leq C_{\alpha m K} (1 + |x| + t)^{-K} \text{ sobre } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \forall \alpha, m, K,$$

tais que não existe solução (p, u) sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ satisfazendo (1), (2), (3), (6) e (7).

Vê-se claramente que podemos resolver este problema buscando velocidades válidas cuja integral do seu quadrado em todo o espaço \mathbb{R}^3 é infinito, ou também, conforme indicamos em (8), buscando funções ϕ não gradientes, onde a pressão p não poderá ser considerada uma função potencial, para algum instante $t \geq 0$. Entendemos que os α, m indicados em (4) e (5) só fazem sentido para $|\alpha|, m \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ e os K negativos podem ser desprezados, pois não limitam o valor das funções u^0, f e suas derivadas quando $|x| \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow \infty$, com $C_{\alpha K}, C_{\alpha m K} > 0$.

§ 2

A inequação (4) traz implicitamente que $u^0(x)$ deve pertencer ao espaço vetorial das funções de rápido decrescimento, que tendem a zero em $|x| \rightarrow \infty$, conhecido como espaço de Schwartz, $S(\mathbb{R}^3)$, em homenagem ao matemático francês Laurent Schwartz (1915-2002) que o estudou [3]. Estas funções e suas infinitas derivadas são contínuas (C^∞) e decaem mais rápido que o inverso de qualquer polinômio, tais que

$$(11) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k D^\alpha \varphi(x) = 0$$

para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i inteiro não negativo, e todo inteiro $k \geq 0$. α é um multi-índice, com a convenção

$$(12) \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

D^0 é o operador identidade, D^α um operador diferencial. Um exemplo de função deste espaço é $u(x) = P(x)e^{-|x|^2}$, onde $P(x)$ é uma função polinomial.

Valem as seguintes propriedades [4]:

- 1) $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial; ele é fechado sobre combinações lineares.
- 2) $S(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra; o produto de funções em $S(\mathbb{R}^n)$ também pertence a $S(\mathbb{R}^n)$.
- 3) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre multiplicação por polinômios.
- 4) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre diferenciação.
- 5) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre translações e multiplicação por exponenciais complexos ($e^{ix \cdot \xi}$).
- 6) funções de $S(\mathbb{R}^n)$ são integráveis: $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$ para $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Isto segue do fato de que $|f(x)| \leq M(1 + |x|)^{-(n+1)}$ e, usando coordenadas polares, $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-(n+1)} dx = C \int_0^\infty (1 + r)^{-n-1} r^{n-1} dr < \infty$, i.e., o integrando decresce como r^{-2} (e $(1 + r)^{-2}$) no infinito e produz uma integral finita.

Da definição de $S(\mathbb{R}^3)$ e propriedades anteriores vemos que, como $u^0(x) \in S(\mathbb{R}^3)$, então $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} M(1 + |x|)^{-4} dx \leq C \int_0^\infty (1 + r)^{-2} dr < \infty$ e quadrando $|u^0(x)|$ e $M(1 + |x|)^{-4}$ chegamos à desigualdade $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)|^2 dx < \infty$, que contradiz (10).

Outra forma de verificar isso é que o conjunto $S(\mathbb{R}^n)$ está contido em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo p , $1 \leq p < \infty$ ([5]-[9]), e em particular para $p = 2$ e $n = 3$ segue a finitude de $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)|^2 dx$.

Portanto, se a condição (7) for desobedecida, conforme propomos neste artigo, será para $t > 0$, por exemplo, encontrando alguma função $u(x, t)$ da forma $u^0(x)v(x, t)$, $v(x, 0) = 1$, ou $u^0(x) + v(x, t)$, $v(x, 0) = 0$, com $\int_{\mathbb{R}^3} |v(x, t)|^2 dx \rightarrow \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx \rightarrow \infty$.

§ 3

De fato, escolhendo $u^0(x) \in S(\mathbb{R}^3)$ e $f(x, t) \in S(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, obedecendo-se assim (4) e (5), lembrando-se que não precisamos ter $u, p \in S(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ como solução, apenas $u, p \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, então é possível construir uma solução para a velocidade da forma $u(x, t) = u^0(x)e^{-t} + v(t)$, com $v(0) = 0$, tal

que $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx \rightarrow \infty$, pois, quando $\int_{\mathbb{R}^3} [|u^0(x)|^2 e^{-t} + 2u^0(x) \cdot v(t)] dx \geq 0$, por exemplo, quando cada componente de $u^0(x)$ tem o mesmo sinal da respectiva componente de $v(t)$ ou o produto entre elas é zero ou $\int_{\mathbb{R}^3} u^0(x) \cdot v(t) dx \geq 0$, teremos $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} |v(t)|^2 dx = |v(t)|^2 \int_{\mathbb{R}^3} dx \rightarrow \infty$, com $v(t) \neq 0, t > 0$. Também devemos escolher u, u^0 tais que $\nabla \cdot u = \nabla \cdot u^0 = 0$.

Em especial, escolhamos, para $1 \leq i \leq 3$,

$$(13.1) \quad u^0(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}(x_2x_3, x_1x_3, -2x_1x_2),$$

$$(13.2) \quad v_i(t) = w(t) = e^{-t}(1 - e^{-t}),$$

$$(13.3) \quad u_i(x, t) = u_i^0(x)e^{-t} + v_i(t),$$

$$(13.4) \quad f_i(x, t) = \left(-u_i^0 + e^{-t} \sum_{j=1}^3 u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - \nu \nabla^2 u_i^0 \right) e^{-t},$$

o que resulta para $p(x, t)$, como a única incógnita ainda a determinar,

$$(14) \quad \nabla p + \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

e então

$$(15) \quad p(x, t) = -\frac{dw}{dt}(x_1 + x_2 + x_3) + \theta(t).$$

A pressão obtida tem uma dependência temporal genérica $\theta(t)$, que deve ser de classe $C^\infty([0, \infty))$ e podemos supor limitada, e diverge no infinito ($|x| \rightarrow \infty$), mas tenderá a zero em todo o espaço com o aumento do tempo (a menos eventualmente de $\theta(t)$), devido ao fator e^{-t} que aparece na derivada de $w(t)$,

$$(16) \quad \frac{dw}{dt} = e^{-t}(2e^{-t} - 1).$$

Neste exemplo $\int_{\mathbb{R}^3} u^0(x) \cdot v(t) dx = 0$, e assim $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx \rightarrow \infty$ para $t > 0$, como queríamos. Mais simples ainda seria escolher $u^0(x) = 0$.

Interessante observarmos que não ocorre nenhuma descontinuidade na velocidade, nem singularidade (divergência: $|u| \rightarrow \infty$), entretanto a energia cinética total em todo o espaço diverge, $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \rightarrow \infty$. Tivemos como dados de entrada $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^3), f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, mas por solução $u \notin L^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, assim como $p \notin L^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$.

§ 4

Nosso exemplo obedece às condições de divergência nula (*divergence-free*, $\nabla \cdot u^0 = 0$), suavidade (*smoothness*, C^∞) e derivadas parciais de u^0 e f da ordem de $C_{\alpha K}(1 + |x|)^{-K}$ e $C_{\alpha m K}(1 + |x| + t)^{-K}$, respectivamente. Concluimos que deve

ser $u^0 \in S(\mathbb{R}^3)$ e $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$. Para cada $u(x, t)$ possível tal que (3) seja verdadeira, a força externa $f(x, t)$ e a pressão $p(x, t)$ podem ser convenientemente construídas, na classe C^∞ , verificando (8), e de modo a satisfazerem todas as condições necessárias, encontrando-se assim uma solução possível para (1), (2), (3), (4), (5) e (6), e apenas (7) não seria satisfeita, para $t > 0$, conforme (10). Mostramos então um exemplo de quebra de soluções para o caso (C) deste problema do milênio. Este exemplo, entretanto, não leva ao caso (A) de [1], de existência e suavidade das soluções, justamente por violar (7) (O caso (A) também impõe que seja nula a força externa, $f = 0$).

Um resumo das condições do problema está listado abaixo.

$\nu > 0, n = 3$
$\exists u^0(x): \mathbb{R}^3$ smooth (C^∞), divergence-free ($\nabla \cdot u^0 = 0$)
$\exists f(x, t): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ smooth (C^∞)
(4) $ \partial_x^\alpha u^0(x) \leq C_{\alpha K} (1 + x)^{-K}: \mathbb{R}^3, \forall \alpha, K$
(5) $ \partial_x^\alpha \partial_t^m f(x, t) \leq C_{\alpha m K} (1 + x + t)^{-K}: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \forall \alpha, m, K$
$\exists (p, u): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) /$
(1) $\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x, t), 1 \leq i \leq 3 \quad (x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$
(2) $\nabla \cdot u = 0$
(3) $u(x, 0) = u^0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^3)$
(6) $p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$
(7) $\int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) ^2 dx < C, \forall t \geq 0$ (bounded energy)

É importante analisarmos também a questão da unicidade das soluções. Como $u^0(x)$ e $f(x, t)$ são dados, escolhidos por nós, de classe C^∞ e satisfazendo (4) e (5), i.e., pertencentes ao espaço de Schwartz, com $\nabla \cdot u^0 = 0$, afirmar que não existe solução (p, u) para o sistema (1), (2), (3), (6) e (7) pode pressupor que exploramos, ou provamos para, as infinitas combinações possíveis de p e de u , i.e., de (p, u) . Sendo assim, precisamos que haja unicidade de solução para cada velocidade que construímos, o que elimina outras velocidades possíveis para os mesmos dados utilizados, $u^0(x)$ e $f(x, t)$, e que implicassem em energia cinética total finita.

A unicidade da solução (a menos da pressão $p(x, t)$ com o termo adicional constante ou dependente do tempo) vem dos resultados clássicos já conhecidos, descritos por exemplo no mencionado artigo de Fefferman [1]: o sistema das

equações de Navier-Stokes (1), (2), (3) tem solução única para todo $t \geq 0$ ou apenas para um intervalo de tempo $[0, T)$ finito dependente dos dados iniciais, onde T é chamado de “*blowup time*”. Quando há uma solução com T finito então a velocidade u torna-se ilimitada próxima do “*blowup time*”.

Vemos que a existência de nossa solução, no exemplo dado, está garantida por construção e substituição direta. Nossa velocidade não apresenta nenhum comportamento irregular, em instante t algum, em posição alguma, que a torne ilimitada, infinita, nem mesmo para $t \rightarrow \infty$ ou $|x| \rightarrow \infty$, sendo assim, não pode haver o “*blowup time*” no exemplo que demos, portanto a solução encontrada no caso anterior é única em todo tempo (a menos da pressão). Mas ainda que houvesse um T finito (em [10], [11] vemos que $T > 0$), a unicidade existiria em pelo menos um pequeno intervalo de tempo, o que já é suficiente para mostrar que neste intervalo ocorre a quebra das soluções de Navier-Stokes por ser desobedecida a condição de energia cinética limitada (7), tornando o caso (C) verdadeiro.

Embora só tenhamos exposto um caso possível de ocorrer energia infinita em $t > 0$, quando a velocidade u toma a forma $u(x, t) = u^0(x) + v(t)$, casos mais gerais de velocidades $v(x, t)$ dependentes explicitamente das coordenadas espaciais x_1, x_2, x_3 provavelmente ocorram também, $v(x, t)$ um vetor com $v(x, 0) = 0$, assim como para as velocidades da forma $u(x, t) = u^0(x)v(x, t)$, sendo $v(x, t)$ uma função escalar com $v(x, 0) = 1$. Uma vasta e importante pesquisa em Análise, Física-Matemática e Matemática Aplicada (por exemplo, [1], [10]-[15]).

Grato ao professor Ricardo Rosa da UFRJ, matemático especialista nas equações de Navier-Stokes, que me explicou sobre o caso $\alpha = 0$ e sua natureza de multi-índice.

□

Referências

- [1] Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in <http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf> (2000).
- [2] Apostol, Tom M., *Calculus*, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1969).
- [3] Schwartz, Laurent, *Théorie des Distributions*. Paris: Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts (1966).
- [4] Strichartz, Robert, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. Florida: CRC Press Inc. (1994).
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz_space (accessed in 01-28-2016).
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/SchwartzSpace.html> (accessed in 01-28-2016).

- [7] <http://www.math.washington.edu/~hart/m526/Lecture3.pdf> (01-28-2016).
- [8] Gjestland, Frederik Joachim, *Distributions, Schwartz Space and Fractional Sobolev Spaces*, Master's Thesis of Science in Physics and Mathematics, Norwegian University of Science and Technology, Department of Mathematical Sciences, in <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:664088/FULLTEXT01.pdf> (2013).
- [9] Kinani, Abdellah El, and Oudadess, Mohamed, *Distribution Theory and Applications*. Singapore: World Scientific (2010).
- [10] Kreiss, Heinz-Otto, and Lorenz, Jens, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*. San Diego: Academic Press Inc. (1989).
- [11] Leray, Jean, *Aspects de la mécanique théorique des fluides*, La Vie des Sciences **11**, 287-290 (1994). See <https://www.tmna.ncu.pl/static/files/v12n2-01.pdf>
- [12] Leray, Jean, *Sur Le Mouvement d'un Liquide Visqueux Emplissant L'Espace*, Acta Mathematica **63**, 193-248 (1934).
- [13] Ladyzhenskaya, Olga A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. New York: Gordon and Breach Science Publishers (1969).
- [14] Smale, Steve, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (2): 7-15 (1998).
- [15] Constantin, Peter, *Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics*, Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, 353-360. Berlin: Springer-Verlag (2001).