

Второе решение уравнений Максвелла

Аннотация

Предлагается новое решение уравнений Максвелла для вакуума. Предварительно отмечается, что доказательство единственности известного решения основано на законе сохранения энергии, который не соблюдается (для мгновенных значений) в известном решении. Предлагаемое решение не нарушает закон сохранения энергии. Кроме того, в этом решении электрическая и магнитная компоненты напряженностей в электромагнитной волне сдвинуты по фазе.

Приводится подробное доказательство для заинтересованного читателя.

Оглавление

1. Введение
2. Решение уравнений Максвелла
3. Потoki энергии
4. Напряженности
5. Обсуждение
- Приложение 1
- Приложение 2
- Литература

1. Введение

В последнее время критика справедливости уравнений Максвелла слышится со всех сторон. Уверенность критиков создается, прежде всего, нарушением закона сохранения энергии. И, действительно, *"плотность потока электромагнитной энергии (модуль вектора Умова-Пойнтинга) «пульсирует» по гармоническому закону. Не нарушается ли здесь закон сохранения энергии?"* [1]. Безусловно, нарушается, если электромагнитная волна удовлетворяет известному решению уравнений Максвелла. Но ведь другого решения нет: *"Доказательство единственности решения в общих чертах сводится к следующему. Если имеется два различных решения, то их разность вследствие линейности системы тоже является решением, но при нулевых зарядах и токах и нулевых начальных и граничных условиях. Отсюда, пользуясь*

выражением для энергии электромагнитного поля и законом сохранения энергии заключаем, что разность решений тождественно равна нулю, т. е. решения одинаковы. Тем самым единственность решения уравнений Максвелла доказана" [2]. Таким образом, единственность решения уравнений Максвелла на основе применения того закона, который нарушается в этом решении.

Другим результатом, следующим из существующего решения, является синфазность электрической и магнитной компонент напряженностей в электромагнитной волне. Это противоречит представлению о непрерывном преобразовании электрической и магнитной компонент энергии в электромагнитной волне. В [1], например, этот факт относится к "порокам современной классической электродинамики".

Такие результаты, следующие из известного решения уравнений Максвелла, позволяют усомниться в достоверности уравнений Максвелла. Подчеркнем, однако, что эти результаты следуют только из найденного решения. Но это решение, как указано выше, может быть иным.

Ниже выводится другое решение уравнений Максвелла, в котором плотность потока электромагнитной энергии остается постоянной во времени, а электрическая и магнитная компоненты напряженностей в электромагнитной волне сдвинуты по фазе.

2. Решение уравнений Максвелла

Вначале рассмотрим решение уравнений Максвелла для вакуума. Эти уравнения в системе СГС имеют вид [3]:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{div}(E) = 0,$$

$$\operatorname{div}(H) = 0.$$

В системе цилиндрических координат r , φ , z эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = M_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = M_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = M_z, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (8)$$

$$J = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (9)$$

$$M = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (10)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где α , χ , ω – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$J_r = j_r(r)co, \quad (13)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$J_z = j_z(r)si, \quad (15)$$

$$H_r = h_r(r)co, \quad (16)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (17)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (18)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (19)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (20)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (21)$$

$$M_r = m_r(r)co, \quad (21)$$

$$M_\varphi = m_\varphi(r)si, \quad (22)$$

$$M_z = m_z(r)si, \quad (23)$$

где $j(r)$, $h(r)$, $e(r)$, $m(r)$ - некоторые функции координаты r .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-23) преобразуют систему уравнений (1-10) с тремя аргументами r , φ , z в систему уравнений с одним аргументом r и неизвестными функциями $j(r)$, $h(r)$, $e(r)$, $m(r)$.

В приложении 1 показано, что у такой системы **существует** решение, имеющее следующий вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (24)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) + \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (25)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) - \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (26)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (27)$$

$$h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (28)$$

$$h_r(r) = -e_\varphi(r), \quad (29)$$

$$\chi = \frac{\omega}{c} \quad (30)$$

Тем самым мы получили монохроматическое решение системы уравнений (1-10). Переход к полихроматическому решению может быть выполнен с помощью преобразования Фурье. Очевидно, если решение существует в цилиндрической системе координат, то оно существует и в любой иной системе координат.

Таким образом, мы получили общее решение уравнений Максвелла в вакууме.

3. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В цилиндрических координатах r , φ , z плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты S_r , S_φ , S_z ,

направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Из (2.12-2.17, 3.4) следует, что поток, проходящий через сечение данное сечение волны в данный момент времени,

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_r \\ \bar{S}_\varphi \\ \bar{S}_z \end{bmatrix} = \eta \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z). \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \end{aligned} \quad (6)$$

В приложении 1 показано, что $h_z(r) = 0$, $e_z(r) = 0$. Следовательно, $s_r = 0$, $s_\varphi = 0$, т.е. поток энергии распространяется только вдоль оси OZ и равен

$$\bar{S} = \bar{S}_z = \eta \iint_{r,\varphi} [s_z \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (7)$$

Найдем s_z . Из (2.28, 2.29) получаем:

$$e_r h_\varphi = e_r^2, \quad (8)$$

$$e_\varphi h_r = -e_\varphi^2. \quad (9)$$

Из (7, 8, 9) получаем:

$$s_z = (e_r^2 + e_\varphi^2). \quad (10)$$

Таким образом,

$$\bar{S} = \eta \iint_{r,\varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (11)$$

В приложении 2 показано, что из (11) следует

$$\bar{S} = \frac{\alpha c}{4\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r ((e_r^2 + e_\varphi^2) dr). \quad (12)$$

Поток (12) не зависит от t , φ , z . Главное, что эта величина не изменяется во времени, и это соответствует закону сохранения энергии.

4. Напряженности

Система уравнений (2.24-2.29) определена – имеется 6 уравнений для 4-х функций e_r , e_φ , h_r , h_φ и двух скаляров α , ω . Рассматривая эту систему, можно заметить, что она эквивалентна двум уравнениям (2.24, 2.25) для функций e_r , e_φ . Две другие функции h_r , h_φ определяются по (28, 29) и удовлетворяют уравнениям (26, 27).

Два дифференциальных уравнения (2.24, 2.25) могут быть решены при данных начальных условиях и данном α . Предварительно рассмотрим уравнения вида

$$\frac{Ay}{x} - y' = 0, \quad (1)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$y = x^A, \quad (2)$$

Уравнения (2.24, 2.25) могут быть заменены уравнениями вида

$$(e_r + e_\varphi)' + \frac{(e_r + e_\varphi)}{r}(1 - \alpha) = 0, \quad (3)$$

$$(e_r - e_\varphi)' - \frac{(e_r - e_\varphi)}{r}(1 + \alpha) = 0, \quad (4)$$

В соответствии с (2) находим:

$$(e_r + e_\varphi) = r^{\alpha-1}, \quad (5)$$

$$(e_r - e_\varphi) = r^{\alpha+1}, \quad (6)$$

Отсюда следует:

$$e_r = \frac{1}{2}(r^{\alpha-1} + r^{\alpha+1}), \quad (7)$$

$$e_\varphi = \frac{1}{2}(r^{\alpha-1} - r^{\alpha+1}). \quad (8)$$

При этом

$$(e_r^2 + e_\varphi^2) = \left(\left(\frac{1}{2}(r^{\alpha-1} + r^{\alpha+1}) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(r^{\alpha-1} - r^{\alpha+1}) \right)^2 \right) \quad (9)$$

или

$$(e_r^2 + e_\varphi^2) = (r^{2(\alpha-1)} + r^{2(\alpha+1)}) \quad (10)$$

Из (10, 3.12) находим:

$$\bar{S} = \frac{\alpha c}{4\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (r^{2(\alpha-1)} + r^{2(\alpha+1)}) dr. \quad (11)$$

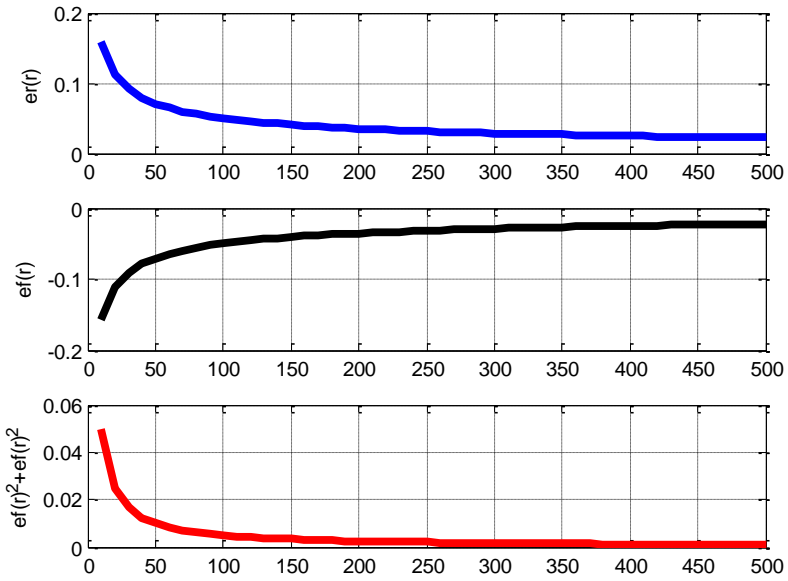


Fig.1. SecondSolMax.m

При $\alpha < -1$ функции (7, 8) являются убывающими по модулю. На рис. 1 показаны, например, графики функций (7, 8, 10) при $\alpha = -1.5$. При этом интеграл

$$S_{\text{int}} = \int_r (r^{2(\alpha-1)} + r^{2(\alpha+1)}) dr \rightarrow 0.0022$$

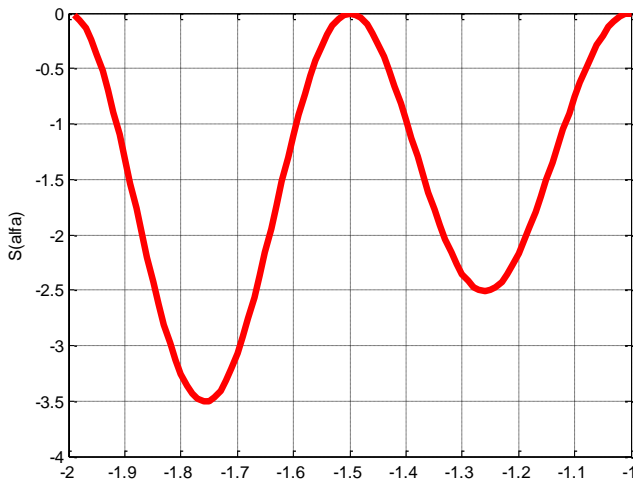


Fig.2. SecondSolMax.m

Величина ω должна быть задана, а величина α определяется при заданном потоке мощности. На рис. 2 показан график функции $S(\alpha) = \alpha(1 - \cos(4\alpha\pi))$.

5. Обсуждение

Полученное решение описывает волну. Его основные отличия от известного решения состоят в следующем:

1. Мгновенный (а не средний по некоторому периоду) поток энергии **не** изменяется во времени, что соответствует закону сохранения энергии.
2. Магнитная и электрическая напряженности на некоторой оси координат r , φ , z находятся в противофазе.
3. Решение для магнитных и электрических напряженностей является вещественным.

Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.10) в виде функций (2.13-2.23). Далее производные по r будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.10) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi = m_r(r), \quad (2)$$

$$-e_r(r) \chi - e'_z(r) = m_\varphi(r), \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) + \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = m_z(r), \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) - \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha + h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (6)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - j_z(r) = 0, \quad (8)$$

$$j = \frac{\omega}{c} e \quad (9)$$

$$m = -\frac{\omega}{c} h \quad (10)$$

Умножим (8) на $(-\chi)$ и учтем (9). Тогда получим:

$$-\frac{\chi \cdot h_\varphi(r)}{r} - \chi \cdot h'_\varphi(r) - \frac{\chi \cdot h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\chi \omega}{c} \cdot e_z(r) = 0, \quad (11)$$

или

$$-\frac{c\chi}{\omega} \frac{h_\varphi(r)}{r} - \frac{c\chi}{\omega} h'_\varphi(r) - \frac{c\chi}{\omega} \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (12)$$

Сравнивая (1) и (12), замечаем, что они совпадают, если

$$\frac{c\chi}{\omega} h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (13)$$

$$-\frac{c\chi}{\omega} h_r(r) = e_\varphi(r). \quad (14)$$

Важно отметить, что такое сравнение справедливо только при $e_z(r) \neq 0$. В уравнениях (13, 14) сделаем замену в соответствии с (9):

$$\chi h_\varphi(r) = j_r(r), \quad (15)$$

$$-\chi h_r(r) = j_\varphi(r). \quad (16)$$

Уравнения (15, 16) совпадают с (6, 7) при $h_z(r) = 0$. Отсюда следует

Лемма 1. Система уравнений (1, 5-9) при $e_z(r) \neq 0$ совместима только при $h_z(r) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $e_z(r) = 0$. При этом в соответствии с (9) $j_z(r) = 0$ и исходная система (1, 5-8) примет вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (17)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) - \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (18)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha + h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (19)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (20)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (21)$$

Подставим (9) в (17). Тогда получим:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) - \frac{j_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (22)$$

Подставим (19, 20) в (22). Тогда получим:

$$-\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha + \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi - \frac{1}{r} \cdot h'_z(r) \alpha + h'_\varphi(r) \chi - (-h_r(r) \chi - h'_z(r)) \frac{\alpha}{r} = 0$$

или

$$-\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r)\alpha + \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r)\chi + h'_\varphi(r)\chi + h_r(r)\frac{\chi\alpha}{r} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (21)$$

При этом для вычисления трех напряженностей получим три уравнения (19, 21, 23). Исключим $h'_\varphi(r)$ из (21, 23):

$$-\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r)\alpha + \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r)\chi - \left(\frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) + h_r(r)\frac{\alpha}{r} \right) \chi + h_r(r)\frac{\chi\alpha}{r} = 0$$

или $-\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r)\alpha = 0$ или $h_z(r) = 0$. Таким образом, и при $j_z(r) = 0$

должно соблюдаться условие $h_z(r) = 0$. Отсюда следует

Лемма 2. Система уравнений (1, 5-9) при $e_z(r) = 0$ совместима только при $h_z(r) = 0$.

Из леммы 1 и леммы 2 следует

Лемма 3. Система уравнений (1, 5-9) совместима только при $h_z(r) = 0$ и, в соответствии с (10), $m_z(r) = 0$.

Аналогично, доказывается

Лемма 4. Система уравнений (1-5, 10) совместима только при $e_z(r) = 0$ и, в соответствии с (9), $j_z(r) = 0$.

Из леммы 3 и леммы 4 следует

Лемма 5. Система уравнений (1-10) совместима только при $h_z(r) = 0$, $e_z(r) = 0$, $m_z(r) = 0$, $j_z(r) = 0$.

Следовательно, исходная система уравнений (1-10) принимает вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (24)$$

$$e_\varphi(r)\chi = -\frac{\omega}{c} h_r(r), \quad (25)$$

$$-e_r(r)\chi = -\frac{\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (26)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) + \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (27)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) - \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (28)$$

$$h_\varphi(r)\chi = \frac{\omega}{c} e_r(r), \quad (29)$$

$$-h_r(r)\chi = \frac{\omega}{c} e_\varphi(r), \quad (30)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (31)$$

Умножим уравнения (26, 29). Тогда получим:

$$-e_r(r)h_\varphi(r)\chi^2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e_r(r)h_\varphi(r)$$

или

$$\chi = \frac{\omega}{c} \quad (32)$$

Подставляя (32) в (26, 29), получаем:

$$h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (33)$$

Таким образом, при условии (32) уравнения (26, 29) эквивалентны одному уравнению (36). Аналогичное соотношение следует из (25, 30):

$$h_r(r) = -e_\varphi(r), \quad (34)$$

Итак, система уравнений (24-31) эквивалентна системе уравнений (24, 27, 28, 31-34).

Приложение 2.

В (3.11) показано, что поток энергии, проходящий через сечение волны,

$$\bar{S} = \eta \iint_{r,\varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (1)$$

Пусть

$$z = ct. \quad (2)$$

Тогда из (2, 2.11, 2.12, 2.30) получаем:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t) = \cos\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c} z\right) \quad (3)$$

и, аналогично,

$$si = \sin\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c} z\right). \quad (4)$$

Имея в виду (3, 4), перепишем (1) в виде:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \eta \iint_{r,\varphi} \left[(e_r^2 + e_\varphi^2) \sin\left(2\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c} z\right)\right) \right] dr d\varphi. \quad (5)$$

При $z=0$ на оси OZ имеем:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \eta \iint_{r, \varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2\alpha\varphi)] dr d\varphi. \quad (6)$$

Далее из (6) находим:

$$\bar{S} = \frac{\eta}{2} \int_r \left(e_r^2 - e_\varphi^2 \right) \left(\int_\varphi \sin(2\alpha\varphi) d\varphi \right) dr. \quad (7)$$

Имеем:

$$\int_\varphi \sin(2\alpha\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin(2\alpha\varphi) d\varphi = \left[-\frac{1}{2\alpha} \cos(2\alpha\varphi) \right]_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} (\cos(4\pi\alpha) - 1) = \frac{1}{2\alpha} (1 - \cos(4\pi\alpha)). \quad (8)$$

Из (7, 8) получаем:

$$\bar{S} = \alpha \eta (1 - \cos(4\pi\alpha)) \int_r ((e_r^2 + e_\varphi^2) dr). \quad (9)$$

Подставляя сюда (2.2), окончательно получаем:

$$\bar{S} = \alpha \frac{\omega^2}{4\pi c} (1 - \cos(4\pi\alpha)) \int_r ((e_r^2 + e_\varphi^2) dr). \quad (10)$$

Очевидно, при любом выборе точки $z=0$ на оси OZ последнее соотношение сохраняется.

Литература

1. Канн К.Б. Электродинамика. Электромагнитные волны, <http://electrodynamics.narod.ru/em-waves.html>
2. Ток смещения и система уравнений Максвелла, <http://www.webpoliteh.ru/subj/dinamo/767-25-tok-smesheniya-i-sistema-uravnenij-maksvella.html>
3. Розанов Н.Н. Специальные разделы математической физики. Часть 3. Электромагнитные волны в вакууме. ИТМО. Санкт-Петербург, 2005.