

Note sur Les Représentations Planes UTM et Gauss-Krüger

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

*Ingénieur Général Géographe, Expert Cadastre,
ST2I, Avenue du Dollar, Résidence Sidi Mansour III, Bloc A
1053 Les Berges du Lac, TUNISIE*

E-mail: abenhadjsalem@gmail.com

ABSTRACT: Dans ce papier, on présente les définitions des représentations planes de l'UTM et de Gauss-Krüger.

version2. (Janvier 2016)

Table des matières

1	INTRODUCTION	1
2	RAPPELS SUR LES REPRÉSENTATIONS PLANES	1
2.1	Eléments correspondants	1
2.2	Canevas	2
2.3	Les Représentations Cylindriques	3
2.4	Les Représentations Coniques et Azimutales	4
2.5	L'Altération Angulaire	4
2.6	Le Module Linéaire dans une direction δ	5
2.7	L'Altération Linéaire	5
2.8	Le Module aréolaire	5
	5subsection.2.9	
2.10	Altération Angulaire	7
3	LA REPRÉSENTATION PLANE UTM	8
3.1	DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS	8
3.2	Calcul Direct des coordonnées UTM	8
3.3	Le Calcul inverse des coordonnées	12
3.4	Le Module linéaire	14
3.5	Convergence des méridiens	15
4	ANNEXE : CALCUL DE LA LONGUEUR D'UN ARC DE LA MÉRIDIENNE D'UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION	15
5	LA REPRÉSENTATION GAUSS-KRÜGER	17

1 INTRODUCTION

Lors de notre mission au Cameroun, nous avons constaté que la représentation plane Gauss-Krüger¹ a été utilisée en différents travaux topographiques.

Cette note est faite pour apporter des éclaircissements sur la représentation Gauss-Krüger et ce qui la différencie de la représentation UTM.

2 RAPPELS SUR LES REPRÉSENTATIONS PLANES

On sait qu'un point géodésique est représenté par ses coordonnées géodésiques (φ, λ, h_e) dans un système géodésique donné relatif à un ellipsoïde donné.

1. - **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) : Mathématicien et géomètre Prussien, fondateur de la théorie des surfaces.
- **Johann Heinrich Louis Krüger** (1857-1923) : Mathématicien et géodésien Allemand.

Les calculs géodésiques sur l'ellipsoïde étant compliqués, le géodésien, par le moyen des représentations planes appelées incorrectement projections, donne une représentation du modèle terrestre (sphère ou ellipsoïde) sur le plan où il est plus facile d'effectuer les calculs d'angles, de distances et de gisements.

Cependant, ces représentations subissent des déformations dues aux propriétés géométriques des surfaces modèles et images.

On va dans la suite donner quelques définitions.

2.1 Éléments correspondants

Représenter la surface modèle (σ) sur (Σ) la surface image consiste à définir une bijection B de (σ) \implies (Σ) (**Figure 1**) :

à $m(u, v) \in (\sigma) \implies M(U, V) \in (\Sigma)$ avec :

$(u, v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $U = U(u, v)$, $V = V(u, v)$ et $OM = B(om)$

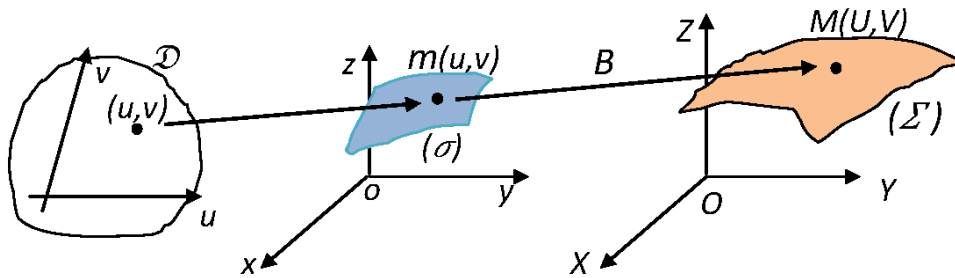


FIGURE 1. Représentation Plane

(u, v) les paramètres qui définissent la surface (σ) et U, V sont ceux de la surface (Σ).

Les points $m(u, v)$ et $M(U, V)$ sont appelés points correspondants. Si le point m décrit une courbe (γ) sur (σ), son image M décrit une courbe (Γ), on dit que les courbes (γ) et (Γ) sont dites courbes correspondantes.

De même, on appelle tangentes correspondantes, les tangentes à deux courbes correspondantes en deux points correspondants (**Figure 2**).

L'angle de deux tangentes à deux courbes sur (σ) et l'angle des tangentes correspondantes sont dites angles correspondants (**Figure 3**).

2.2 Canevas

Les représentations sont différenciées par deux aspects qui sont :

- la nature des courbes coordonnées du modèle et celles de l'image qui définissent le caractère du canevas,
- le type de l'altération : longueurs et/ou angles et/ou surfaces.

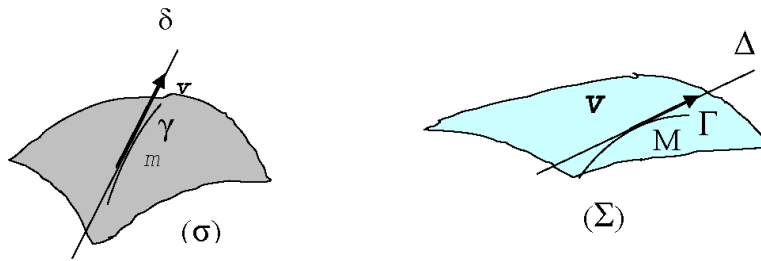


FIGURE 2. Tangentes correspondantes

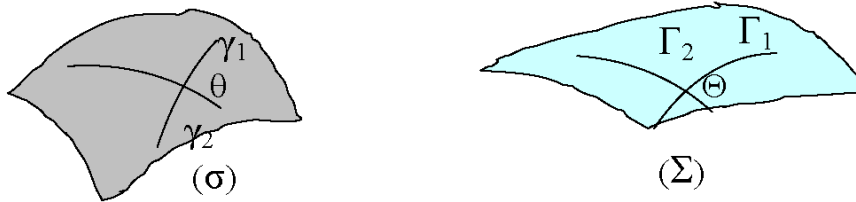


FIGURE 3. Angles Correspondants

Définition 2.1. On appelle *canevas* les images des courbes coordonnées du modèle.

Les représentations peuvent être classées selon la nature des courbes coordonnées (u, v) et (U, V) . Pour le modèle sphérique, les courbes coordonnées (u, v) déterminent toujours deux familles de courbes orthogonales, méridiens et parallèles ou pseudo-méridiens et pseudo-parallèles.

Soit DD' le diamètre de référence du modèle, le point D est le pivot de la représentation (**Figure 4**).

La représentation est dite :

- directe, si le diamètre de référence est choisi sur la ligne des pôles PP' ,
- transverse si le diamètre de référence est perpendiculaire à PP' ,
- oblique : les autres cas, le pivot n'est ni pôles, ni sur l'équateur. Quant aux courbes coordonnées de l'image plane, elles sont :
 - soit deux familles de droites perpendiculaires ; U, V sont alors les coordonnées cartésiennes X et Y du plan,
 - soit une famille de droites concourantes (Ω) et la famille de cercles orthogonaux (R) définissant des coordonnées polaires.

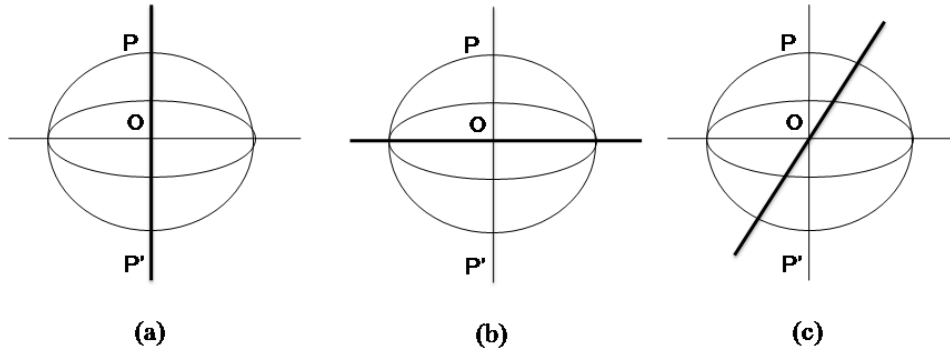


FIGURE 4. Types de représentation

2.3 Les Représentations Cylindriques

Les représentations cylindriques sont définies par les représentations ayant comme courbes coordonnées images les coordonnées cartésiennes X, Y correspondantes aux courbes coordonnées du modèle.

Leurs équations sont pour les représentations cylindriques quelconques :

$$\begin{aligned} X = X(u) &\iff u = u(X) \\ Y = Y(v) &\iff v = v(Y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Cas des représentations cylindriques directes : les paramètres du modèle sont φ, λ respectivement la latitude et la longitude et les équations de la représentations sont de la forme :

$$\begin{aligned} X = X(\varphi) &\iff \varphi = \varphi(X) & \text{ou} & & X = X(\lambda) &\iff \lambda = \lambda(X) \\ Y = Y(\lambda) &\iff \lambda = \lambda(Y) & & & Y = Y(\varphi) &\iff \varphi = \varphi(Y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Cas des représentations cylindriques transverses : les paramètres du modèle sont les coordonnées de Cassini-Soldner (L, H) et les équations sont de la forme :

$$\begin{aligned} X = X(L) &\iff L = L(X) & \text{ou} & & Y = Y(L) &\iff L = L(Y) \\ Y = Y(H) &\iff H = H(Y) & & & X = X(H) &\iff H = H(X) \end{aligned} \quad (2.3)$$

En remplaçant L et H en fonction de φ et de λ , on obtient :

$$\begin{aligned} X = X(\varphi, \lambda) &\iff \varphi = \varphi(X, Y) \\ Y = Y(\varphi, \lambda) &\iff \lambda = \lambda(X, Y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.4 Les Représentations Coniques et Azimutales

Ce sont les représentations planes telles que les courbes coordonnées images sont définies par les coordonnées polaires R, Ω . Les courbes $R = \text{Constante}$ et $\Omega = \text{constante}$ sont les courbes correspondantes des courbes coordonnées u et v du modèle.

Les équations générales de ces représentations sont de la forme :

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega(u) \\ R = R(v) \end{aligned} \iff \begin{aligned} u = u(\Omega) \\ v = v(R) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$u = \text{cte} \implies \Omega = \text{cte} \implies$ les images de $u = \text{cte}$ sont des droites concourantes.

$v = \text{cte} \implies R = \text{cte} \implies$ les images de $v = \text{cte}$ sont des arcs de cercles concentriques.

Parmi les représentations coniques, on trouve un groupe particulier de représentations où l'angle Ω est égal à l'angle du cercle méridien correspondant soit l'azimut de la tangente au méridien au pôle D de la représentation, ces représentations sont dites **représentations azimutales** :

$$\begin{aligned} \Omega = Az \\ R = R(v) \end{aligned} \iff \begin{aligned} Az = \Omega \\ v = v(R) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les représentations **coniques directes** ont leurs équations comme suit :

$$\begin{aligned} R = R(\varphi) \\ \Omega = \Omega(\lambda) \end{aligned} \iff \begin{aligned} \varphi = \varphi(R) \\ \lambda = \lambda(\Omega) \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.5 L'Altération Angulaire

Définition 2.2. On appelle altération angulaire la différence des deux angles correspondants soit :

$$\boxed{\Theta - \theta} \quad (2.8)$$

2.6 Le Module Linéaire dans une direction δ

Soit δ la direction de la tangente en un point donné m du modèle (σ), s et S les abscisses curvilignes sur les 2 courbes correspondantes (γ) et (Γ).

Définition 2.3. On appelle module linéaire dans la direction δ le rapport :

$$\boxed{m_\delta(u, v) = \frac{dS}{ds} = \frac{\|d\mathbf{M}(U, V)\|}{\|d\mathbf{m}(u, v)\|} = \frac{\|\mathbf{V}\|}{\|\mathbf{v}\|}} \quad (2.9)$$

où \mathbf{V} est l'image du vecteur \mathbf{v} unitaire dans la direction δ .

En utilisant les éléments de la 1ère forme fondamentale des surfaces (σ) et (Ω), on a alors :

$$m_\delta^2 = \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{EdU^2 + 2FdUdV + GdV^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}$$

soit :

$$m_\delta = \sqrt{\frac{EdU^2 + 2FdUdV + GdV^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}} \quad (2.10)$$

2.7 L'Altération Linéaire

Définition 2.4. On appelle altération linéaire dans la direction δ la quantité sans unité :

$$\boxed{\epsilon = m_\delta - 1} \quad (2.11)$$

2.8 Le Module aréolaire

Soient $da(\sigma)$ et $dA(\Sigma)$ des aires de domaines limités par des contours correspondants, alors :

Définition 2.5. Le module aréolaire ou rapport des aires est donné par :

$$\boxed{m_a = \frac{dA(\Sigma)}{da(\sigma)} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{eg - f^2}}} \quad (2.12)$$

2.9 Indicatrice de Tissot²

Lemme 2.1. (de Tissot) : En 2 points correspondants, il existe au moins deux 2 vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 orthogonaux sur (σ) admettant deux vecteurs \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 correspondants orthogonaux sur (Σ) (**Figure 5**).

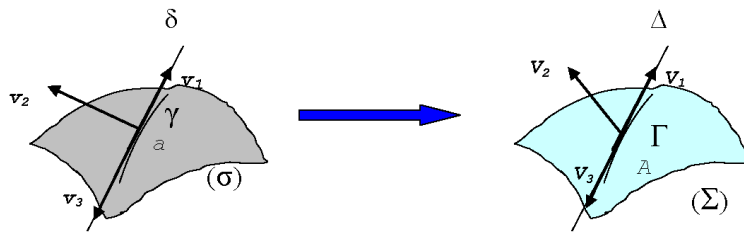


FIGURE 5. Les Directions Principales

Le couple de directions correspondantes orthogonales à la fois sur la surface image (Σ) et sur la surface modèle (σ) sont appelées directions principales (au sens de Tissot).

Soient δ_1 et δ_2 les directions principales sur (σ) . Les modules linéaires dans les directions δ_1 et δ_2 sont dits modules principaux :

$$m_{\delta_1} = m_1$$

$$m_{\delta_2} = m_2$$

Indicatrice de Tissot : Soient a un point de (σ) , dans le plan tangent à (σ) au point a et le repère orthonormé (a, du, dv) de vecteurs unitaires \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . Soit b un point voisin de a tel que $\|\mathbf{ab}\| = 1$. Au repère (a, du, dv) correspond le repère orthonormé (A, dU, dV) sur la surface Σ , et au point b correspond le point B (**Figure 6**).

2. **Nicolas Auguste Tissot** (1824 - 1897) : Cartographe Français.

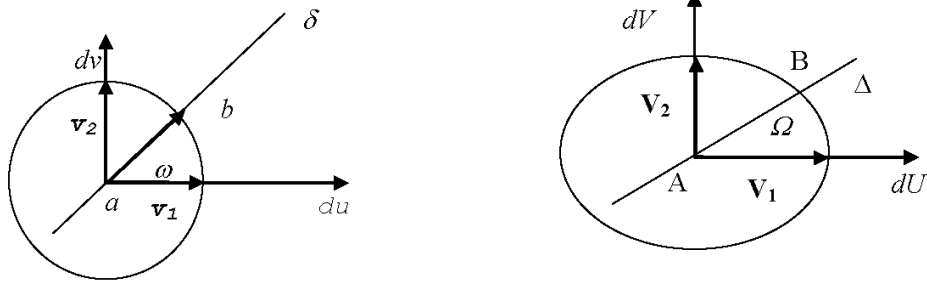


FIGURE 6. Indicatrice de Tissot

Par définition, on a :

$$m_\delta = \frac{\|AB\|}{\|ab\|} = \|AB\|$$

et :

$$m_1 = \frac{\|V_1\|}{\|v_1\|} = \|V_1\|$$

$$m_2 = \frac{\|V_2\|}{\|v_2\|} = \|V_2\|$$

Par les définitions des modules linéaires m_1 et m_2 , on peut écrire :

$$m_1 = \frac{\|AB\|\cos\Omega}{\|ab\|\cos\omega} = \frac{m_\delta\cos\Omega}{1.\cos\omega} \Rightarrow m_1\cos\omega = m_\delta\cos\Omega \quad (2.13)$$

$$m_2 = \frac{\|AB\|\sin\Omega}{\|ab\|\sin\omega} = \frac{m_\delta\sin\Omega}{1.\sin\omega} \Rightarrow m_2\sin\omega = m_\delta\sin\Omega$$

Les coordonnées du point B dans (A, dU, dV) sont donc :

$$\begin{aligned} dU &= AB\cos\Omega = m_\delta.\cos\Omega = m_1.\cos\omega \\ dV &= AB\sin\Omega = m_\delta.\sin\Omega = m_2.\sin\omega \end{aligned} \quad (2.14)$$

Théorème 2.1. (Indicatrice de Tissot) Quand le point b varie c'est-à-dire ω varie, le point B image de b décrit une ellipse d'équation :

$$\boxed{\frac{dU^2}{m_1^2} + \frac{dV^2}{m_2^2} = 1} \quad (2.15)$$

Cette ellipse est appelée **indicatrice de Tissot**.

Elle est l'image du cercle de rayon unité dans le plan tangent au point a de (σ) . Les longueurs des demis grands et petits axes sont les modules principaux m_1 et m_2 . La longueur d'un demi-diamètre est le module linéaire dans la direction δ soit m_δ .

Dans le cas général, il existe un seul couple de vecteurs orthogonaux correspondants.

Corollaire *S'il y'a une infinité de couples de vecteurs orthogonaux correspondants, l'indicatrice de Tissot est un cercle quelque soit la direction δ et le module linéaire est indépendant de la direction :*

$$\boxed{m_\delta = m_1 = m_2 = m} \quad (2.16)$$

2.10 Altération Angulaire

L'altération angulaire est donnée par $\Omega - \omega$. Or d'après les coordonnées de B données par les équations (2.13), on a :

$$tg\Omega = \frac{m_2}{m_1} tg\omega$$

On calcule :

$$\frac{tg\Omega - tg\omega}{tg\Omega + tg\omega} = \frac{\left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right)tg\omega}{\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)tg\omega} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

Or :

$$\frac{tg\Omega - tg\omega}{tg\Omega + tg\omega} = \frac{\sin(\Omega - \omega)}{\sin(\Omega + \omega)} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

Si l'altération angulaire est nulle $\implies \Omega - \omega = 0 \implies \Omega = \omega$. D'où $m_2 = m_1$ et l'indicatrice de Tissot est un cercle. Par suite, on a l'équivalence :

$$\boxed{\text{Altération angulaire nulle} \Leftrightarrow m_2 = m_1 \text{ et pour toute } \delta \ m_\delta = m = \text{cte}} \quad (2.17)$$

La représentation est dite dans ce cas **conforme**.

3 LA REPRÉSENTATION PLANE UTM

3.1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

La représentation plane UTM (Universal Transverse Mercator) est l'une des représentations la plus utilisée dans le monde.

C'est une représentation :

- conforme d'un modèle ellipsoïdique,
- transverse : c'est-à-dire l'image de l'équateur (en partie) est l'axe Ox (vers l'Est) et l'image d'un méridien appelé méridien central, de longitude λ_0 qu'on suppose égale à 0, est l'axe Oy (vers le Nord) du plan.

Les coordonnées rectangulaires d'un point sont des fonctions de la forme :

$$\boxed{\begin{matrix} X = X(\varphi, \lambda) \\ Y = Y(\varphi, \lambda) \end{matrix}} \quad (3.1)$$

où (φ, λ) sont les coordonnées du point sur le modèle ellipsoïdique.

Soit un point $M(\varphi, 0)$ sur le méridien origine, alors les coordonnées de m son image sur le plan sont :

$$\begin{aligned} X(\varphi, 0) &= 0 \\ Y(\varphi, 0) &= Y(\varphi) \end{aligned}$$

$Y(\varphi)$ sera déterminée en imposant que le long du méridien central ou origine, les longueurs sont conservées. Sur le méridien, la longueur est donnée par :

$$\beta(\varphi) = \int_0^\varphi \rho ds \quad (3.2)$$

d'où :

$$\beta(\varphi) = Y(\varphi) = Y(\varphi, 0)$$

3.2 Calcul Direct des coordonnées UTM

Sur l'ellipsoïde, on a :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

le carré de l'élément de longueur infinitésimale, avec :

$$N(\varphi) = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$$

$$\rho(\varphi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}$$

respectivement les rayons de courbure de la grande normale et de la méridienne, a le demi-grand axe et e la première excentricité de l'ellipsoïde de référence. On peut écrire que :

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\rho^2 d\varphi^2}{N^2 \cos^2 \varphi} + d\lambda^2 \right)$$

En posant :

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi} \\ \text{ou } L &= \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec L la latitude isométrique, on a alors les coordonnées (L, λ) symétriques et orthogonales. L'expression de ds^2 est égale à :

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (dL^2 + d\lambda^2) \quad (3.4)$$

Sur le plan, on a :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2$$

On pose :

$$\begin{aligned} z &= L + i\lambda \\ Z &= Y + iX \end{aligned} \quad (3.5)$$

où i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Entre z et Z , on a la relation :

$$Z = Y + iX = f(z) = f(L + i\lambda) \quad (3.6)$$

où f est une fonction à déterminer. La représentation étant conforme, la fonction f est par suite une fonction analytique dans \mathbb{C} (l'ensemble des nombres complexes). La fonction f est dérivable à tout ordre et développable en séries en tout point complexe. Considérons le point z_0 tel que $z_0 = L + i0 = L$ et $z = L + i\lambda$, ce qui donne $z - z_0 = i\lambda$.

Dans la représentation UTM, on restreint λ à varier dans l'intervalle $[-3^\circ, +3^\circ]$. Cet intervalle définit un fuseau de méridien central $\lambda_0 = 0^\circ$ et d'amplitude 6° . Ainsi, la Terre est divisé en $360^\circ/6^\circ = 60$ fuseaux qu'on numérote de 1 à 60 ce qui explique l'utilisation mondiale de la représentation UTM. Une interprétation géométrique de la représentation UTM est comme suit :

- on considère un cylindre ayant une base elliptique, tangent à l'ellipsoïde modèle le long de la méridienne de longitude $\lambda = \lambda_0 = 0^\circ$. A un point $M(\varphi, \lambda)$ appartenant au fuseau $[-3^\circ, +3^\circ]$ on lui fait correspondre un point m du cylindre (**Figure 7**).

- après développement du cylindre sur le plan, on obtient l'image $m(X, Y)$.

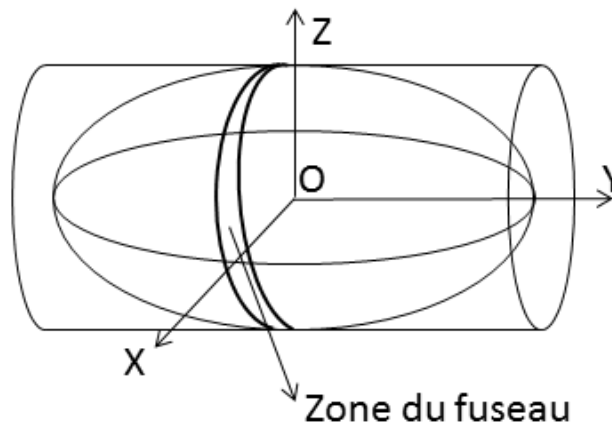


FIGURE 7. Interprétation géométrique de l'UTM

On revient maintenant au développement de la fonction f au voisinage de z_0 , on a l'expression :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \dots \quad (3.7)$$

On se limite à $n = 8$. D'où :

$$\begin{aligned} Y + iX &= f(L) + i\lambda f'(L) - \frac{1}{2!}\lambda^2 f''(L) - i\frac{1}{3!}\lambda^3 f^{(3)}(L) + \frac{1}{4!}\lambda^4 f^{(4)}(L) \\ &+ i\frac{1}{5!}\lambda^5 f^{(5)}(L) - \frac{1}{6!}\lambda^6 f^{(6)}(L) - i\frac{1}{7!}\lambda^7 f^{(7)}(L) + \frac{1}{8!}\lambda^8 f^{(8)}(L) + \dots \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$, on a $Y + iX = f(L)$ soit :

$$Y = f(L) = Y(\varphi, 0) = \beta(\varphi)$$

On pose :

$$\begin{aligned} a_0 &= f(L) = \beta(\varphi) \\ a_n &= \frac{1}{n!} f^n(L) = \frac{1}{n!} \frac{d^n \beta(\varphi)}{dL^n} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ce qui donne :

$$Y + iX = a_0 + ia_1\lambda - a_2\lambda^2 - ia_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 + ia_5\lambda^5 - a_6\lambda^6 - ia_7\lambda^7 + a_8\lambda^8 + \dots$$

D'où :

$$\begin{aligned} X &= a_1\lambda - a_3\lambda^3 + a_5\lambda^5 - a_7\lambda^7 + \dots \\ Y &= \beta(\varphi) - a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4 - a_6\lambda^6 + a_8\lambda^8 + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec :

$$a_0 = f(L) = \beta(\varphi), \quad a_1 = f'(L) = \frac{d\beta}{dL} = \frac{d\beta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dL}$$

En posant :

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi, \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}, \quad t = tg \varphi$$

avec e' la deuxième excentricité, on obtient les coefficients :

$$\begin{aligned} a_1 &= N \cos \varphi \\ a_2 &= -\frac{1}{2} N \cos \varphi \sin \varphi \\ a_3 &= -\frac{1}{6} N \cos^3 \varphi (1 + \eta^2 - t^2) \\ a_4 &= \frac{1}{24} N \cos^3 \varphi \sin \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \\ a_5 &= \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2 + 13\eta^4) \\ a_6 &= -\frac{1}{720} N \cos^5 \varphi \sin \varphi (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2 \eta^2 + 200\eta^4 - 232t^2 \eta^4) \\ a_7 &= -\frac{1}{5040} N \cos^7 \varphi (61 + 131t^2 + 179t^4 + 331\eta^2 - 3298t^2 \eta^2) \\ a_8 &= \frac{1}{40320} N \cos^7 \varphi \sin \varphi (165 - 61t^2 + 537t^4 + 9679\eta^2 - 23278t^2 \eta^2 + 9244\eta^4 + \\ &\quad 358t^4 \eta^2 - 19788t^2 \eta^4) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le calcul de $\beta(\varphi) = f(L) = \beta$ se calcule à partir du développement de $\beta(\varphi)$ en fonction de $u = e^2 \sin^2(\varphi)$ car $u < 1$. On exprime $\sin^m \varphi$ en fonction de \sin de multiples de φ soit $\sin p\varphi$. En intégrant, on arrive à (voir en Annexe du présent chapitre) :

$$\beta(\varphi) = a(1 - e^2) \cdot (C_0\varphi + C_2\sin 2\varphi + C_4\sin 4\varphi + C_6\sin 6\varphi + C_8\sin 8\varphi + C_{10}\sin 10\varphi + C_{12}\sin 12\varphi) \quad (3.11)$$

avec :

$$C_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \frac{693693}{1048576}e^{12}$$

$$C_2 = -\frac{3}{8}e^2 - \frac{15}{32}e^4 - \frac{525}{1024}e^6 - \frac{2205}{4096}e^8 - \frac{72765}{131072}e^{10} - \frac{297297}{524288}e^{12} \quad (3.12)$$

$$C_4 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{16384}e^8 + \frac{10395}{65536}e^{10} + \frac{1486485}{8388608}e^{12}$$

$$C_6 = -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{315}{12288}e^8 - \frac{31185}{786432}e^{10} - \frac{165165}{3145728}e^{12}$$

$$C_8 = \frac{315}{131072}e^8 + \frac{3465}{524288}e^{10} + \frac{99099}{8388608}e^{12} \quad (3.13)$$

$$C_{10} = -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{9009}{5242880}e^{12}$$

$$C_{12} = \frac{1001}{8388608}e^{12}$$

On pose :

$$\Lambda = \lambda - \lambda_0 \quad (3.14)$$

alors les formules définitives du calcul direct sont en s'arrêtant à l'ordre 8 :

$$\begin{cases} X = a_1\Lambda - a_3\Lambda^3 + a_5\Lambda^5 - a_7\Lambda^7 \\ Y = \beta(\varphi) - a_2\Lambda^2 + a_4\Lambda^4 - a_6\Lambda^6 + a_8\Lambda^8 \end{cases} \quad (3.15)$$

En général, on applique à X, Y un facteur de réduction $k = 0.9996$ et une constante de translation en X de 500 000 m, les coordonnées obtenues sont :

$$\begin{cases} X' = k.X + 500\,000.00 \text{ m} \\ Y' = k.Y \end{cases} \quad (3.16)$$

3.3 Le Calcul inverse des coordonnées

Ayant les coordonnées (X', Y') en UTM et la longitude λ_0 du méridien central, comment on calcule (φ, λ) . On commence en revenant à :

$$\begin{cases} X = (X' - 500000)/k \\ Y = Y'/k \end{cases} \quad (3.17)$$

Par suite, en utilisant les variables : $z = L + i(\lambda - \lambda_0)$ et $Z = Y + iX$, on cherche à déterminer une fonction analytique g telle que :

$$\begin{aligned} z &= g(Z) \\ \text{ou } L + i(\lambda - \lambda_0) &= g(Y + iX) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pour cela, on considère sur l'axe OY le point $P(0, Y)$ (**Figure 8**), il lui correspond l'affixe $Z_0 = Y$, sur l'ellipsoïde il est l'image de $L' = L'(\varphi') = g(Z_0)$. D'où le développement de g au point Z_0 :

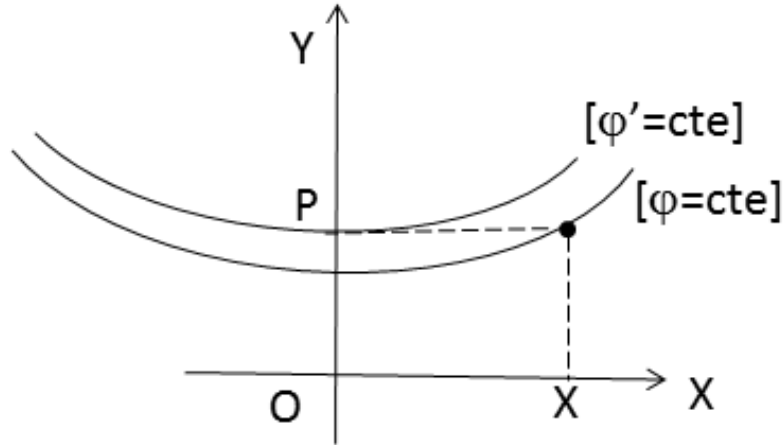


FIGURE 8. Passage de (X, Y) à (φ, λ)

$$g(Z) = g(Z_0) + (Z - Z_0)g'(Z_0) + \frac{(Z - Z_0)^2}{2!}g''(Z_0) + \dots + \frac{(Z - Z_0)^n}{n!}g^{(n)}(Z_0) + \dots$$

Or : $Z - Z_0 = Y + iX - Y = iX$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} L + i(\lambda - \lambda_0) &= g(Z_0) + iXg'(Y) - \frac{1}{2}X^2 \cdot g''(Y) - \frac{1}{3!}iX^3 g^{(3)}(Y) \\ &\quad + \frac{1}{4!}X^4 g^{(4)}(Y) + \frac{1}{5!}iX^5 g^{(5)}(Y) - \frac{1}{6!}X^6 g^{(6)}(Y) + \dots \end{aligned}$$

On pose :

$$b_0 = g(Z_0) = g(Y) = L', \quad b_n = \frac{g^{(n)}(Y)}{n!} = \frac{1}{n!} \frac{d^n L'}{dY^n} = \frac{1}{n!} \frac{d^n L'}{d\beta^n}$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + b_1 X - b_3 X^3 + b_5 X^5 - b_7 X^7 + \dots \\ L(\varphi) &= L = L'(\varphi') - b_2 X^2 + b_4 X^4 - b_6 X^6 + b_8 X^8 + \dots \end{aligned}} \quad (3.19)$$

avec :

$$b_0 = g(Z_0) = L', \quad b_1 = g'(Y) = \frac{dL'}{dY} = \frac{dL'}{d\beta} = \frac{dL'}{d\varphi'} \cdot \frac{d\varphi'}{d\beta}$$

En posant $\eta'^2 = e'^2 \cos^2 \varphi'$ avec e' la deuxième excentricité $e'^2 = e^2 / (1 - e^2)$, $t' = tg \varphi'$ et $N' = N(\varphi')$, on obtient les coefficients :

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{N' \cos \varphi'} \\
 b_2 &= \frac{tg \varphi'}{2N'^2 \cos \varphi'} \\
 b_3 &= \frac{(1 + 2t'^2 + \eta'^2)}{6N'^3 \cos \varphi'} \\
 b_4 &= \frac{tg \varphi' (5 + 6t'^2 + \eta'^2 - 4\eta'^4)}{24N'^4 \cos \varphi'} \\
 b_5 &= \frac{(5 + 28t'^2 + 6\eta'^2 + 24t'^4 + 8\eta'^2 t'^2)}{120N'^5 \cos \varphi'} \\
 b_6 &= \frac{tg \varphi' (61 + 180t'^2 + 46\eta'^2 + 120t'^4 + 48\eta'^2 t'^2)}{720N'^6 \cos \varphi'} \\
 b_7 &= \frac{(61 + 622t'^2 + 107\eta'^2 + 1320t'^4 + 1538\eta'^2 t'^2 + 46\eta'^4)}{5040N'^7 \cos \varphi'}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ayant $L(\varphi)$, on calcule φ en utilisant la formule :

$$L = \text{Log} tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)$$

Le calcul se fait par itérations.

3.4 Le Module linéaire

Le module linéaire m est tel que :

$$m^2 = \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{dX^2 + dY^2}{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} \tag{3.21}$$

La représentation étant conforme, alors le module linéaire est indépendant de la direction, mais ne dépend que du point, on choisit de calculer m le long des parallèles, soit $d\varphi = 0$, ce qui donne :

$$m^2 = \frac{dX^2 + dY^2}{N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}$$

Comme on a :

$$\begin{aligned}
 X &= a_1 \lambda - a_3 \lambda^3 + a_5 \lambda^5 + \dots \\
 Y &= \beta(\varphi) - a_2 \lambda^2 + a_4 \lambda^4 + \dots
 \end{aligned}$$

et que les coefficients a_i sont des fonctions seulement de la latitude (φ), d'où :

$$dX = a_1 d\lambda - 3a_3 \lambda^2 d\lambda + 5a_5 \lambda^4 d\lambda = (a_1 - 3a_3 \lambda^2 + 5a_5 \lambda^4) d\lambda + \dots$$

et :

$$dY = -2a_2 \lambda d\lambda + 4a_4 \lambda^3 d\lambda + \dots$$

En gardant les termes en λ et λ^2 , on obtient :

$$dX = N \cos \varphi [1 + (\lambda^2/2) \cos^2 \varphi (1 - t g^2 \varphi + \eta^2)] d\lambda$$

et :

$$dY = \lambda N \cos^2 \varphi t g \varphi d\lambda$$

Par suite :

$$dX^2 + dY^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left((1 + (\lambda^2/2) \cos^2 \varphi (1 - t g^2 \varphi + \eta^2))^2 + \lambda^2 \sin^2 \varphi \right) d\lambda^2$$

En simplifiant et en négligeant les termes en λ^4 , on trouve :

$$m = \sqrt{1 + \lambda^2 (1 + \eta^2) \cos^2 \varphi} \quad (3.22)$$

Au lieu de prendre m comme module linéaire, on le multiplie par un facteur k appelé facteur de réduction de l'échelle généralement égal à 0.9996. Le module linéaire devient :

$$m' = k \sqrt{1 + \lambda^2 (1 + \eta^2) \cos^2 \varphi} \quad (3.23)$$

On remplace λ par $\lambda - \lambda_0$, on trouve la formule du module linéaire :

$$m' = k \sqrt{1 + (\lambda - \lambda_0)^2 (1 + e'^2 \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi} \quad (3.24)$$

3.5 Convergence des méridiens

Le gisement de l'image du méridien appelé 'convergence des méridiens' et noté par γ en un point (φ, λ) est donné en première approximation par la formule :

$$t g \gamma = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi \quad (3.25)$$

γ est comptée dans le sens des gisements.

4 ANNEXE : CALCUL DE LA LONGUEUR D'UN ARC DE LA MÉRIDIENNE D'UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION

Soit (E) un ellipsoïde de révolution défini par ses paramètres :

a : le demi-grand axe,

e : la première excentricité.

L'expression de la longueur de la méridienne entre l'équateur et un point M de latitude géodésique φ est donnée par :

$$\beta = \beta(\varphi) = \int_0^\varphi \rho(u) du \quad (4.1)$$

avec :

$$\rho = \rho(u) = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}}$$

ρ est le rayon de courbure de la méridienne.

L'intégrale (4.1) est une intégrale, dite elliptique, n'est pas exprimée par une formule finie. Pour la calculer, on fait l'usage d'un développement limité de l'expression $(1 - e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}}$.

On utilise la formule :

$$(1 + x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-1+p)}{p!}x^p + o(x^{p+1})$$

avec $|x| < 1$, q est un rationnel et $p!$ désigne factoriel p soit $p(p-1)\dots 3.2.1$. Comme $|e^2 \sin^2 u| < 1$, on a donc à l'ordre 12 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}} &= (1 - e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 u + \frac{15}{8}e^4 \sin^4 u + \\ &\frac{35}{16}e^6 \sin^6 u + \frac{315}{128}e^8 \sin^8 u + \frac{693}{256}e^{10} \sin^{10} u + \frac{3003}{1024}e^{12} \sin^{12} u \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pour pouvoir calculer les intégrales du type :

$$\int_0^\varphi \sin^p u du$$

on va exprimer les termes $\sin^p u$ en fonction des lignes trigonométriques multiples de l'argument u . Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sin^2 u &= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2u}{2} \\ \sin^4 u &= \frac{3}{8} - \frac{\cos 2u}{2} + \frac{\cos 4u}{8} \\ \sin^6 u &= \frac{5}{16} - \frac{15 \cos 2u}{32} + \frac{13 \cos 4u}{16} - \frac{\cos 6u}{32} \\ \sin^8 u &= \frac{35}{128} - \frac{17 \cos 2u}{16} + \frac{7 \cos 4u}{32} - \frac{\cos 6u}{16} + \frac{\cos 8u}{128} \\ \sin^{10} u &= \frac{63}{256} - \frac{105 \cos 2u}{256} + \frac{15 \cos 4u}{64} - \frac{45 \cos 6u}{512} + \frac{5 \cos 8u}{256} - \frac{\cos 10u}{512} \\ \sin^{12} u &= \frac{231}{1024} - \frac{99 \cos 2u}{256} + \frac{495 \cos 4u}{2048} - \frac{55 \cos 6u}{512} + \frac{33 \cos 8u}{1024} - \frac{3 \cos 10u}{512} + \frac{\cos 12u}{2048} \end{aligned} \quad (4.3)$$

L'équation (4.2) s'écrit en utilisant les expressions de droite de (4.3) :

$$(1 - e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}} = A_0 + A_2 \cos 2u + A_4 \cos 4u + A_8 \cos 8u + A_{10} \cos 10u + A_{12} \cos 12u \quad (4.4)$$

En intégrant (4.4) entre 0 et φ et après multiplication par le coefficient $a(1 - e^2)$, on trouve l'expression ci-dessous de la longueur de la méridienne :

$$\beta(\varphi) = a(1 - e^2) \cdot (C_0 \varphi + C_2 \sin 2\varphi + C_4 \sin 4\varphi + C_6 \sin 6\varphi + C_8 \sin 8\varphi + C_{10} \sin 10\varphi + C_{12} \sin 12\varphi) \quad (4.5)$$

où les coefficient A_k vérifient :

$$\begin{aligned} C_0 &= A_0 & C_2 &= \frac{A_2}{2} & C_4 &= \frac{A_4}{4} & C_6 &= \frac{A_6}{6} \\ C_8 &= \frac{A_8}{8} & C_{10} &= \frac{A_{10}}{10} & C_{12} &= \frac{A_{12}}{12} \end{aligned} \quad (4.6)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \frac{693693}{1048576}e^{12} \\ C_2 &= -\frac{3}{8}e^2 - \frac{15}{32}e^4 - \frac{525}{1024}e^6 - \frac{2205}{4096}e^8 - \frac{72765}{131072}e^{10} - \frac{297297}{524288}e^{12} \\ C_4 &= \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{16384}e^8 + \frac{10395}{65536}e^{10} + \frac{1486485}{8388608}e^{12} \\ C_6 &= -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{315}{12288}e^8 - \frac{31185}{786432}e^{10} - \frac{165165}{3145728}e^{12} \\ C_8 &= \frac{315}{131072}e^8 + \frac{3465}{524288}e^{10} + \frac{99099}{8388608}e^{12} \\ C_{10} &= -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{9009}{5242880}e^{12} \\ C_{12} &= \frac{1001}{8388608}e^{12} \end{aligned} \quad (4.7)$$

5 LA REPRÉSENTATION GAUSS-KRÜGER

La représentation plane Gauss-Krüger et la représentation plane UTM ont les mêmes formules disons "brutes" telles que sont données par (3.15) :

$$\begin{aligned} X &= a_1 \Lambda - a_3 \Lambda^3 + a_5 \Lambda^5 - a_7 \Lambda^7 \\ Y &= \beta(\varphi) - a_2 \Lambda^2 + a_4 \Lambda^4 - a_6 \Lambda^6 + a_8 \Lambda^8 \end{aligned}$$

où $\Lambda = \lambda - \lambda_0$ en *rd*.

Une première différence avec les coordonnées UTM est l'utilisation d'un coefficient $k=1$, par suite, les formules donnant les coordonnées Gauss-Krüger sont :

$$\begin{array}{l} X_{GK} = X + 500\,000.00\,m \\ Y_{GK} = Y \end{array} \quad (5.1)$$

Une deuxième différence avec la représentation UTM est que la représentation Gauss-Krüger utilise une étendue de $1^{\circ}30'$ de part et d'autre du méridien central λ_0 alors qu'en UTM on utilise 3° ou plus.

Références

- [1] **A. Ben Hadj Salem.** 2016. *Elément de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés*, livre en cours de préparation. 390 p.
- [2] **F. Krumm.** 2014. *Lectures Notes : Map Projections and Geodetic Coordinates Systems*. Institute of Geodesy. Stuttgart University. 187 p.