

République Tunisienne  
Ministère de l'Équipement, l'Habitat  
Et l'Aménagement du Territoire  
Office de la Topographie  
et de la Cartographie

## **COURS DE CARTOGRAPHIE MATHÉMATIQUE**

**A L'ATTENTION DES INGÉNIEURS**

**Par**

**J. COMMIOT & A. BEN HADJ SALEM**

**(Version 1)**

**Mars 2007**

## PREFACE

Ce cours de cartographie mathématique représente l'essentiel du cours manuscrit enseigné par l'Ingénieur Géographe Général Jean COMMIOT à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques de l'Institut Géographique National de France dans les années 80. Le deuxième auteur en plus de la saisie informatique du manuscrit, en a apporté des développements.

# SOMMAIRE

<b>Chapitre I : Généralités</b>	
I.1. Introduction.....	3
I.2. Courbes et Surfaces.....	4
I.3. La Première Forme Quadratique Fondamentale.....	8
<b>Chapitre II: Représentation d'une surface sur une autre</b>	
II.1. Définitions.....	10
II.2. Indicatrice de Tissot.....	11
II.3. L'Indicatrice de Tissot et les Déformations.....	13
<b>Chapitre III : Les Représentations Planes en Cartographie</b>	
III.1. Echelle Nominale.....	15
III.2. Classification d'après les caractères locaux.....	16
III.3. Classification d'après les caractères globaux.....	16
III.4. Etude d'une représentation plane.....	18
III.5. Cas particuliers des représentations conformes.....	19
<b>Chapitre IV : Les Représentations Coniques</b>	
IV.1. Les Représentations coniques équidistantes.....	21
IV.2. Les Représentations coniques conformes(Lambert).....	23
IV.3. Les Représentations coniques équivalentes.....	25
<b>Chapitre V : Les Représentations Cylindriques</b>	
V.1. Les Représentations cylindriques directes.....	28
V.2. Les Représentations cylindriques transverses.....	32
<b>Chapitre VI : Les Représentations Planes et les Fonctions Analytiques</b>	
VI.1. Fonction Analytique.....	33
VI.2. Représentation conforme d'une surface sur une autre.....	35
VI.3. Exemples.....	36
VI.3. Aspect transverse des représentations conformes.....	39
<b>Chapitre VII : Représentation d'un Ellipsoïde sur une Sphère</b>	
VII.1. Généralités.....	42
VII.2. La Représentation de Bessel.....	43
VII.3. Les représentations conformes.....	43
VII.4. Les représentations équivalentes.....	50
<b>Références :</b> .....	52

# COURS DE CARTOGRAPHIE MATHÉMATIQUE

A la mémoire de J. COMMIOT

## Chapitre I

### Généralités

#### I.1. Introduction

La cartographie mathématique est l'étude des représentations mathématiques d'un modèle de la terre (ellipsoïde ou sphère) sur une autre surface (plan le plus souvent).

Avant de passer en revue les représentations les plus courantes, l'étude portera sur les principes généraux de la représentation d'une surface sur une autre, l'analyse des déformations (ou altérations) et les caractéristiques des représentations planes.

Une représentation fidèle d'un modèle sphérique est donnée par un globe : eu égard des dimensions réalisables, l'aplatissement peut être négligé (l'aplatissement est de l'ordre de 1/300 soit une différence entre les deux demi-axes de l'ordre de 2 mm, pour un demi grand axe de 0.60 m). Mais les dimensions possibles pour une telle réalisation ( et les difficultés mêmes de celle-ci) en limitent l'intérêt : en dehors des préoccupations d'ordre décoratif, cette représentation est réservée à des fins pédagogiques élémentaires.

On peut imaginer une infinité de représentations planes de la terre, mais le modèle (sphère ou ellipsoïde) n'étant pas une surface applicable, toutes les représentations entraînent des déformations, qu'il convient de savoir définir et analyser.

Pour de nombreux besoins, notamment - bien que cela ne soit pas absolument nécessaire - pour les calculs géodésiques, le choix se porte sur les représentations conformes- D'autres utilisateurs ont besoin de conserver le rapport des surfaces et font appel aux représentations équivalentes - Pour étudier des phénomènes plus ou moins liés à la latitude, il peut être commode d'utiliser des représentations où les images des parallèles sont des droites (représentations cylindriques ou méricylindriques). D'autres impératifs conduisent éventuellement à adopter des solutions différentes.

Enfin de nombreux cartographes ont imaginé des représentations (auxquelles ils attachent leurs noms...) d'une grande diversité, soit pour définir une construction simple (pas toujours) du canevas, soit pour obtenir un résultat estimé esthétique.

Historiquement, les premières représentations planes d'une sphère ont été établies par les géomètres grecs : ceux-ci, en particulier, pour les cartes du ciel, ont étudié des perspectives ou encore projections. Plus tard, ces perspectives géométriques n'ont plus suffi pour les besoins de la cartographie; elles ont été remplacées par des représentations planes, définies comme des correspondances analytiques entre les points du modèle et ceux du plan, mais la tradition aidant

le terme " projection " a subsisté : mal adapté et souvent mal compris, ce mot est source de confusion et il n'y aucune raison de le conserver. Dans la suite de ce cours, il ne sera utilisé que lorsqu'il correspond exactement à son sens mathématique propre (représentations perspectives).

## I.2. Courbes et Surfaces

### I.2.1. Courbes Planes-Courbure

**I.2.1.1. Définition :** Une courbe plane ( $\mu$ ) est une application de  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  entièrement déterminée par la donnée d'une fonction vectorielle  $\mathbf{M}(t)$  d'un paramètre  $t$  :

$$t \in \mathbf{R} \rightarrow (x,y) \in \mathbf{R}^2 / \mathbf{OM}(x,y) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{OM}(t) = x(t).i + y(t).j$$

Où  $(i,j)$  la base orthonormée du plan XOY.

### I.2.1.2. Longueur d'un arc de la courbe

L'élément élémentaire de longueur d'un arc est la quantité  $ds$  tel que :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (x'^2 + y'^2).dt^2 \quad (2)$$

Avec  $x'$  et  $y'$  désignent les dérivées de  $x(t)$  et  $y(t)$  par rapport à la variable  $t$ , d'où :

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}.dt \quad (3)$$

Soit pour  $t = t_0$ ,  $M_0$  le point origine de l'arc, d'où en intégrant l'équation (3), on obtient :

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}.du = F(t, t_0) \quad (4)$$

De l'équation 4), on peut exprimer  $t$  en fonction de  $s$ . On peut alors adopter comme paramètre la longueur d'un arc de ( $\mu$ ) d'origine  $M_0$  c'est-à-dire  $s$  (l'abscisse curviligne) et de considérer la courbe définie par  $\mathbf{M}(s)$ .

### I.2.1.3. La Tangente

Au point  $M$ , la courbe admet une tangente définie par le vecteur unitaire :

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{M}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} \quad (5)$$

### I.2.1.4. Normale et Courbure

La dérivée de  $\mathbf{T}$  par rapport à  $s$  (lorsqu'elle existe et n'est pas nulle) définit une direction orthogonale à la tangente portant le vecteur unitaire  $\mathbf{N}$  dite la normale au point  $M$ . On a alors :

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{1}{R} = \text{la courbure} \quad (6)$$

$R$  est appelé rayon de courbure au point  $M$ .

### I.2.2. Courbes Gauches - Trièdre de Frénet - Courbure - Torsion

**I.2.2.1. Définition:** Une courbe gauche ( $\gamma$ ) est une application de  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  entièrement déterminée par la donnée d'une fonction vectorielle  $\mathbf{M}(t)$  d'un paramètre  $t$  :

$$t \in \mathbf{R} \rightarrow (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / \mathbf{OM}(x, y, z) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (7)$$

#### I.2.2.2. Longueur d'un arc de la courbe

L'élément élémentaire de longueur d'un arc est la quantité  $ds$  tel que :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2).dt^2 \quad (8)$$

Avec  $x'$ ,  $y'$  et  $z'$  désignent les dérivées de  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  par rapport à la variable  $t$ , d'où :

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.dt \quad (9)$$

Soit pour  $t = t_0$ ,  $M_0$  le point origine de l'arc, d'où en intégrant (9), on obtient :

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2}.du = F(t, t_0) \quad (10)$$

De l'équation (10), on peut exprimer  $t$  en fonction de  $s$ . On peut alors adopter comme paramètre la longueur d'un arc de ( $\gamma$ ) d'origine  $M_0$  c'est-à-dire  $s$  (l'abscisse curviligne) et de considérer la courbe gauche définie par  $\mathbf{M}(s)$ .

#### I.2.2.3. La Tangente

Au point  $M$ , la courbe admet une tangente définie par le vecteur unitaire

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{M}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} \end{pmatrix} \quad (11)$$

#### I.2.2.4. La Normale - Courbure

La dérivée de  $\mathbf{T}$  par rapport à  $s$ , lorsqu'elle existe et n'est pas nulle, définit une direction orthogonale à la tangente portant le vecteur unitaire  $\mathbf{N}$  dite la normale au point  $M$ .

On a alors :

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{1}{R} = \text{la courbure} \quad (12)$$

$R$  est appelé rayon de courbure.

En effet,

$$\|\mathbf{T}\| = 1 \Rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \Rightarrow 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0 \Rightarrow \text{le vecteur } \mathbf{T} \text{ est orthogonal à } \frac{d\mathbf{T}}{ds} \quad (13)$$

#### I.2.2.5. Binormale

La binormale est la droite passant par le point  $M$  est de direction le vecteur  $\mathbf{B}$  défini par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \quad (14)$$

On a évidemment :  $\|\mathbf{B}\| = 1$ . Le triplet  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$  est direct et forme un trièdre dénommé le trièdre de Frénet.

Les plans définis par les vecteurs  $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$ ,  $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$  et  $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$  sont appelés respectivement plan osculateur, plan normal et plan rectifiant.

### I.2.2.6. Torsion

Dérivons le vecteur  $\mathbf{B}$  par rapport à  $s$ , on obtient :

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \wedge \mathbf{N} + \mathbf{T} \wedge \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \wedge \frac{d\mathbf{N}}{ds} \quad (15)$$

car  $\mathbf{T}$  et  $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$  sont colinéaires, par conséquent  $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$  est orthogonal à  $\mathbf{T}$ . Comme  $\mathbf{B}$  est unitaire,

$\frac{d\mathbf{B}}{ds}$  est aussi orthogonal à  $\mathbf{B}$ , donc  $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$  est colinéaire à  $\mathbf{N}$ . On pose :

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{-1}{\tau(s)} \cdot \mathbf{N} = \frac{-\mathbf{N}}{\tau(s)} \quad (16)$$

Le réel  $1/\tau(s)$  est appelé torsion de  $(\gamma)$  au point  $M(s)$ .

Calculons la dérivée du vecteur  $\mathbf{N}$ . Comme  $\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}$ , on obtient:

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \wedge \mathbf{T} + \mathbf{B} \wedge \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{-1}{\tau(s)} \cdot \mathbf{N} \wedge \mathbf{T} + \mathbf{B} \wedge \frac{\mathbf{N}}{R} = \frac{-\mathbf{T}}{R} + \frac{\mathbf{B}}{\tau(s)}$$

Donc :

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{-\mathbf{T}}{R} + \frac{\mathbf{B}}{\tau(s)} \quad (17)$$

Les trois relations exprimant les dérivés premières des vecteurs du repère Frénet peuvent s'écrire sous forme matricielle :

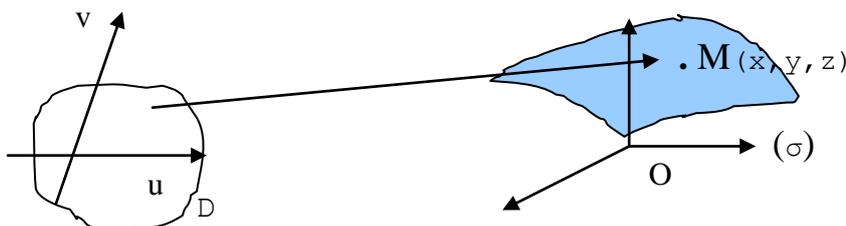
$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & \frac{1}{\tau} \\ 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (18)$$

### I.2.3. Surfaces

**I.2.3.1. Définition:** Une surface est une application de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  à  $(u,v) \in \mathbb{R}^2$  fait correspond un triplet  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$  où  $x,y,z$  sont des fonctions continues des deux paramètres  $(u,v)$  :

$$(u,v) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{OM}(u,v) \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (19)$$

$$(u,v) \in D \longrightarrow (x,y,z) \in \sigma$$



Les paramètres  $(u,v)$  sont dits les coordonnées curvilignes sur la surface  $(\sigma)$ . Une courbe tracée sur la surface est définie par une relation  $g(u,v)=0$  ou par  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  avec  $t$  un paramètre. En particulier les courbes  $u = \text{constante}$  et  $v = \text{constante}$  sont dites les courbes coordonnées.

Si la fonction  $\mathbf{OM}(u,v)$  est dérivable dans le domaine  $D$ , on peut définir en tout point de  $(\sigma)$  un plan tangent et une normale.

Soient  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}(u,v)$  et  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}(u,v)$  les deux vecteurs au point  $M$  avec :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}(u,v) = \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \end{cases} \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}(u,v) = \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{cases} \quad (20)$$

Alors l'équation du plan tangent est définie par :

$$\mathbf{MP} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}(u,v) \right) = 0 \quad (21)$$

Où  $P$  est un point courant du plan tangent.

Posons :

$$\mathbf{M}'_u = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}(u,v) \quad \text{et} \quad \mathbf{M}'_v = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}(u,v) \quad (22)$$

La normale est définie par le vecteur unitaire :

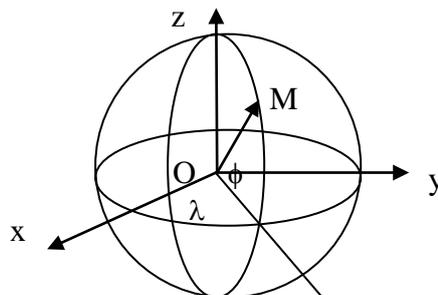
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v}{\|\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v\|} \quad (23)$$

Avec  $\|a\|$  = la norme du vecteur  $\mathbf{a}$  = la longueur du vecteur  $\mathbf{a}$ .

Exemple: Considérons une sphère de rayon  $R$ , on peut paramétrer cette surface par les 2 paramètres :

$\lambda$  = la longitude  $\in [0, 2\pi]$

$\phi$  = la latitude  $\in [-\pi/2, \pi/2]$



$$A(\phi, \lambda) \in D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbf{OM}(\phi, \lambda) = \begin{cases} x = R \cdot \cos \lambda \cdot \cos \phi \\ y = R \cdot \sin \lambda \cdot \cos \phi \\ z = R \cdot \sin \phi \end{cases} \quad (24)$$

Calculons les vecteurs  $\mathbf{M}'_\lambda$  et  $\mathbf{M}'_\phi$  :

$$\mathbf{M}'_\lambda = \begin{cases} -R \cdot \sin \lambda \cdot \cos \phi \\ R \cdot \cos \lambda \cdot \cos \phi \\ 0 \end{cases} = R \cdot \cos \phi \begin{cases} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{cases} \quad (25-a)$$

$$\mathbf{M}'_\phi = \begin{cases} -R \cdot \cos \lambda \cdot \cos \phi \\ -R \cdot \sin \lambda \cdot \sin \phi \\ R \cdot \cos \phi \end{cases} = R \cdot \begin{cases} -\cos \lambda \cdot \sin \phi \\ -\sin \lambda \cdot \sin \phi \\ \cos \phi \end{cases} \quad (25-b)$$

$$\text{Par suite, on obtient le vecteur de la normale } \mathbf{n} = \begin{cases} \cos \lambda \cdot \cos \phi \\ \sin \lambda \cdot \cos \phi \\ \sin \phi \end{cases} \quad (26)$$

Le vecteur  $\mathbf{n}$  est dirigé vers l'extérieur.

Les courbes  $\lambda = \text{constante}$  sont les méridiens, les courbes  $\phi = \text{constante}$  sont les parallèles. Pour la sphère,  $\mathbf{M}'_\lambda$  est tangent au parallèle  $\phi = \text{constante}$  et  $\mathbf{M}'_\phi$  est tangent au méridien  $\lambda = \text{constante}$ .

### I.3. La Première Forme Quadratique Fondamentale

L'élément linéaire  $ds$  sur la surface ( $\sigma$ ) est la distance de deux points infiniment voisins, le carré de  $ds$  est le carré scalaire de  $d\mathbf{M}$  soit :

$$ds^2 = d\mathbf{M} \cdot d\mathbf{M} = \|d\mathbf{M}\|^2 \quad (27)$$

$$\text{Or } \mathbf{OM}(u, v) \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \rightarrow d\mathbf{M} = \begin{cases} dx = x'_u du + x'_v dv \\ dy = y'_u du + y'_v dv \\ dz = z'_u du + z'_v dv \end{cases} \quad (28)$$

$$\text{Par suite : } d\mathbf{M}^2 = ds^2 = \mathbf{M}'_u \cdot \mathbf{M}'_u \cdot du^2 + 2 \cdot \mathbf{M}'_u \cdot \mathbf{M}'_v \cdot du \cdot dv + \mathbf{M}'_v \cdot \mathbf{M}'_v \cdot dv^2 \quad (29)$$

$$\text{On pose : } E = \mathbf{M}'_u \cdot \mathbf{M}'_u ; F = \mathbf{M}'_u \cdot \mathbf{M}'_v ; G = \mathbf{M}'_v \cdot \mathbf{M}'_v \quad (30)$$

$$(29) \text{ devient : } ds^2 = E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2 \quad (31)$$

(31) est dite la première forme quadratique fondamentale, elle définit la métrique de la surface.

Dans le cas de l'exemple de la sphère traité ci-dessus, on a :

$$u = \lambda, E = \mathbf{M}'_u \cdot \mathbf{M}'_u = \mathbf{M}'_\lambda \cdot \mathbf{M}'_\lambda = R^2 \cos^2 \phi$$

$$v = \phi, G = \mathbf{M}'_v \cdot \mathbf{M}'_v = \mathbf{M}'_\phi \cdot \mathbf{M}'_\phi = R^2$$

$$\text{et } F = \mathbf{M}'_u \cdot \mathbf{M}'_v = \mathbf{M}'_\lambda \cdot \mathbf{M}'_\phi = 0$$

$$\text{D'où} \quad \underline{ds^2 = R^2 \cos^2 \phi \, d\lambda^2 + R^2 d\phi^2} \quad (32)$$

### I.3.1. Angles de deux courbes coordonnées

$$\text{On a } F = \mathbf{M}'_u \cdot \mathbf{M}'_v = \|\mathbf{M}'_u\| \|\mathbf{M}'_v\| \cos \alpha$$

$$\text{D'où :} \quad \cos \alpha = \frac{F}{\|\mathbf{M}'_u\| \|\mathbf{M}'_v\|} = \frac{F}{\sqrt{E} \cdot \sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}} \quad (33)$$

et

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{E \cdot G}} = \sqrt{\frac{E \cdot G - F^2}{E \cdot G}} \quad (34)$$

$$\text{On pose parfois :} \quad H = \sqrt{E \cdot G - F^2} = h^2(u, v) \quad (35)$$

$$\text{Soit:} \quad H = \|\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v\| = \|\mathbf{M}'_u\| \|\mathbf{M}'_v\| \sin \alpha \quad (36)$$

Par suite, le vecteur unitaire normal a pour expression :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v}{\|\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v\|} = \frac{\mathbf{M}'_u \wedge \mathbf{M}'_v}{H} \quad (37)$$

### I.3.2. Coordonnées Orthogonales et Coordonnées Symétriques

Les coordonnées (u,v) sont dites **orthogonales** si  $F = \mathbf{M}'_u \cdot \mathbf{M}'_v = 0$  soit  $\cos \alpha = 0$ . Donc  $\alpha$  est un angle droit.

Les coordonnées orthogonales sont dites **symétriques** si de plus  $E = G$ . Alors la première forme quadratique s'écrit :

$$ds^2 = E \cdot du^2 + G \cdot dv^2 = E(du^2 + dv^2) = H(du^2 + dv^2) = h^2(u, v) \cdot (du^2 + dv^2) \quad (38)$$

Pour l'exemple traité, on a trouvé  $F = 0$  donc les courbes coordonnées  $\phi = \text{constante}$  et  $\lambda = \text{constante}$  sont orthogonales mais symétriques. En effet :

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \phi (d\lambda^2 + d^2 \phi / \cos^2 \phi) \quad (39)$$

La variable  $\xi$  telle que  $d\xi = \frac{d\phi}{\cos \phi}$  forme avec  $\lambda$  un couple de coordonnées symétriques, car :

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \phi (d\lambda^2 + d\xi^2) \quad (40)$$

La quantité  $\xi$  est appelée latitude croissante ou variable de Mercator, elle a pour valeur :

$$\xi = \text{Log} |\text{tg}(\pi/4 + \phi/2)| \quad (41)$$

$$\text{D'où : } \text{tg}(\pi/4 + \phi/2) = e^\xi$$

Soit l'expression de la latitude  $\phi$  en fonction de  $\xi$  :

$$\underline{\phi = 2 \cdot \text{Arctg}(e^\xi) - \pi/2} \quad (42)$$

# Chapitre II

## Représentation d'une surface sur une autre

### II.1. Définitions

Représenter une surface sur une autre, c'est établir une correspondance entre un point  $a$  d'une surface ou portion de surface ( $\sigma$ ), appelée modèle et un point  $A$  d'une surface ou portion de surface ( $\Sigma$ ), appelée image.

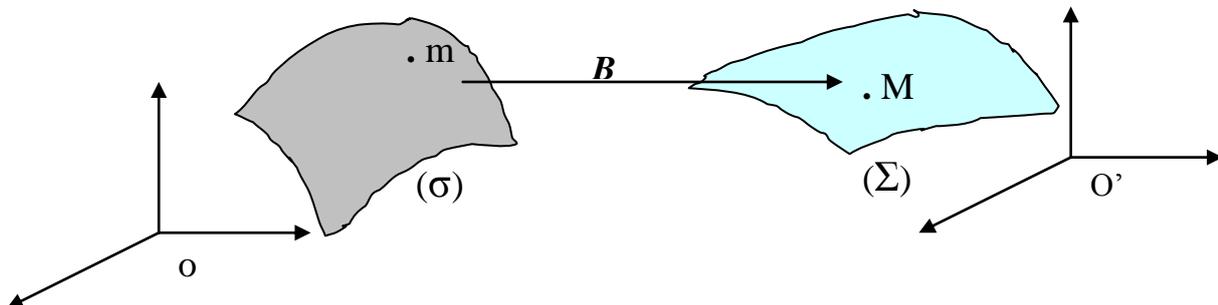
Le but poursuivi (cartographie mathématique) permet de restreindre l'étude aux cas où les hypothèses suivantes sont réalisées :

- a- la surface modèle est sans points singuliers ; la correspondance peut introduire des points singuliers (ou points critiques), mais en dehors de ceux-ci, elle est bijective,
- b- en tout point où la correspondance est bijective, elle est continue (donc respecte les relations de voisinage).

Dans ces conditions, et mis à part les éventuels points critiques sur la surface image, représenter ( $\sigma$ ) sur ( $\Sigma$ ) consiste à définir une bijection  $B$  de ( $\sigma$ ) sur ( $\Sigma$ ) :

$$\text{À } m(u,v) \in (\sigma) \Rightarrow M(U,V) \in (\Sigma) \text{ avec } U = U(u,v) \text{ et } V = V(u,v) \quad (43-1)$$

$$\text{On note :} \quad \mathbf{O'M} = B(\mathbf{om}) = B(\mathbf{om}(u,v)) = \mathbf{O'M}(U(u,v), V(u,v)) \quad (43-2)$$

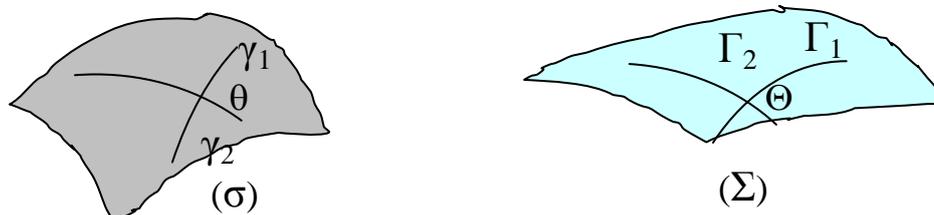


$(u,v)$  les paramètres qui définissent la surface( $\sigma$ ) et  $U,V$  sont ceux de la surface ( $\Sigma$ ). On suppose que les fonctions  $U = U(u,v)$  et  $V = V(u,v)$  sont différentiables et de jacobien non nul.

Les points  $m(u,v)$  et  $M(U,V)$  sont appelés points correspondants. Si le point  $m$  décrit une courbe ( $\gamma$ ) sur ( $\sigma$ ), son image  $M$  décrit une courbe ( $\Gamma$ ), on dit que les courbes ( $\gamma$ ) et ( $\Gamma$ ) sont dites courbes correspondantes.

De même, on appelle tangentes correspondantes, les tangentes à deux courbes correspondantes en deux points correspondants.

L'angle de deux tangentes à deux courbes sur ( $\sigma$ ) et l'angle des tangentes correspondantes sont dites angles correspondants.



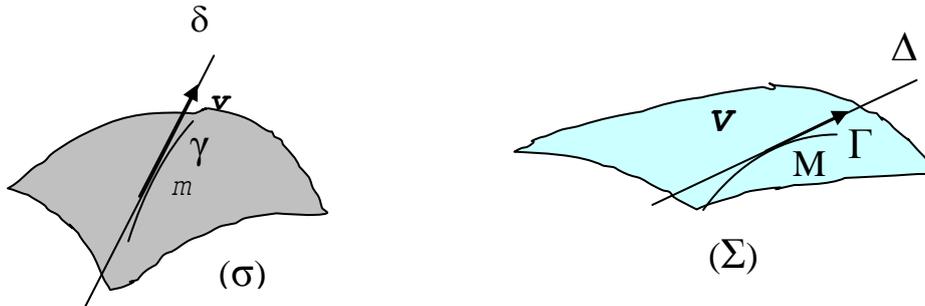
**L'Altération Angulaire :**

On appelle altération angulaire la différence des deux angles correspondants soit :  $\Theta - \theta$ .

**Le Module Linéaire dans une direction  $\delta$**

Soit  $\delta$  la direction de la tangente en un point donné  $m$  du modèle ( $\sigma$ ),  $s$  et  $S$  les abscisses curvilignes sur les 2 courbes correspondantes ( $\gamma$ ) et ( $\Gamma$ ), on appelle module linéaire dans la direction  $\delta$  le rapport :

$$m_\delta(u, v) = \frac{dS}{ds} = \frac{\|\mathbf{dM}(U, V)\|}{\|\mathbf{dm}(u, v)\|} = \frac{\|\mathbf{V}\|}{\|\mathbf{v}\|} \tag{44}$$



En utilisant les éléments de la 1ère forme quadratique fondamentale des surfaces ( $\sigma$ ) et ( $\Sigma$ ), on alors :

$$m_\delta^2 = \left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{EdU^2 + 2FdU.dV + GdV^2}{edu^2 + 2fdU.dv + gdv^2}$$

Soit :

$$m_\delta = \sqrt{\frac{EdU^2 + 2FdU.dV + GdV^2}{edu^2 + 2fdU.dv + gdv^2}} \tag{45}$$

Au point considéré, le module linéaire dépend de la direction de  $\delta$  (ou  $\Delta$ ), mais pas du vecteur  $v$  (ou  $V$ ). On montre que  $m_\delta$  est fonction du rapport  $du/dv$ .

**L'Altération Linéaire**

On appelle altération linéaire la quantité :  $m_\delta - 1$  (46)

**Le Module aréolaire :**

Soient  $da$  de ( $\sigma$ ) et  $dA$  de ( $\Sigma$ ) des aires de domaines limités par des contours correspondants, alors le module aréolaire ou rapport des aires est donné par :

$$m_a = \frac{dA(\Sigma)}{da(\sigma)} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{e.g - f^2}} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{e.g - f^2}} \tag{47}$$

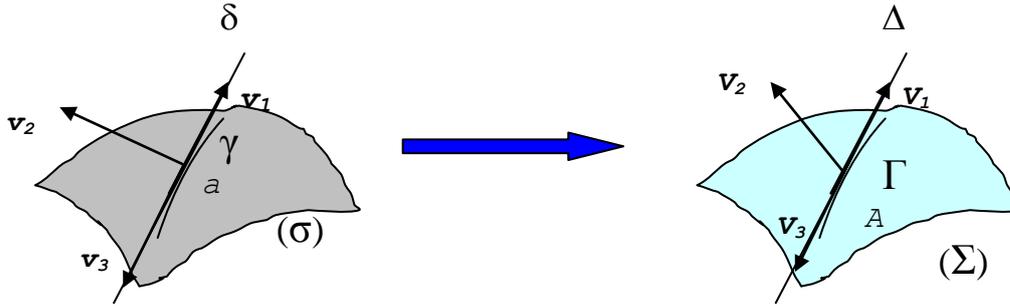
**II.2. Indicatrice de Tissot**

**II.2.1. Le Lemme de Tissot**

En 2 points correspondants, il existe au moins deux 2 vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  orthogonaux sur ( $\sigma$ ) admettant deux vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  correspondants orthogonaux sur ( $\Sigma$ ).

La démonstration suivante suppose réalisée l'hypothèse formulée en II.1 : en tout point où la correspondance est bijective, elle est continue.

Soit dans le plan tangent en un point  $a$  de ( $\sigma$ ), trois vecteurs se déduisent l'un de l'autre par une rotation de  $+\pi/2$   $v_1, v_2, v_3$ .  $v_1$  et  $v_3$  ayant une même direction  $\delta$  à savoir la tangente en  $a$  à une courbe ( $\gamma$ ) tracée sur ( $\sigma$ ), les vecteurs  $V_1, V_3$  sont portés par la tangente en  $A$  à la courbe correspondante ( $\Gamma$ ) sur ( $\Sigma$ ).  $V_2$  est en général quelconque.



Si on considère la rotation autour de  $a$ , qui amène l'angle  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  sur  $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ , l'hypothèse de la continuité permet de dire que sur  $(\Sigma)$ , l'angle  $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$  se déforme de manière continue jusqu'en  $(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$ , il existe donc une position intermédiaire telle que l'angle soit égal à  $\pi/2$ , ce qui démontre la proposition.

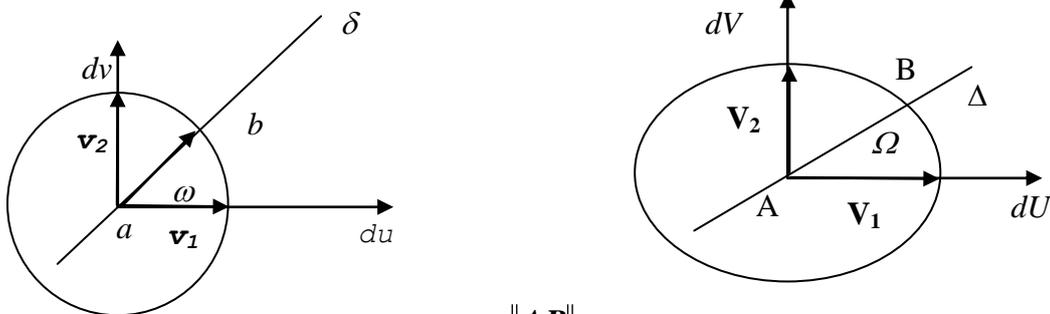
Le couple de directions correspondants orthogonales à la fois sur la surface image  $(\Sigma)$  et sur la surface modèle  $(\sigma)$  sont appelées directions principales (au sens de Tissot), soit  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . Les modules linéaires dans les directions  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont dits modules principaux:

$$m_{\delta_1} = m_1 \quad m_{\delta_2} = m_2 \quad (48)$$

### II.2.2. Indicatrice de Tissot

Soit  $a$  un point de  $(\sigma)$ , dans le plan tangent à  $(\sigma)$  au point  $a$ , le repère orthonormé  $(a, du, dv)$  de vecteurs unitaires  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ .

Soit  $b$  un point voisin de  $a$  tel que  $ab = 1$ . Au repère  $(a, du, dv)$  correspond le repère orthonormé  $(A, dU, dV)$  sur la surface  $(\Sigma)$ , et au point  $b$  correspond le point  $B$ .



Par définition, on a :

$$m_{\delta} = \frac{\|AB\|}{\|ab\|} = \|AB\| \quad (49)$$

Et :

$$m_1 = \frac{\|\mathbf{V}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|} = \|\mathbf{V}_1\| \quad ; \quad m_2 = \frac{\|\mathbf{V}_2\|}{\|\mathbf{v}_2\|} = \|\mathbf{V}_2\| \quad (50)$$

Par la définition des modules linéaires  $m_1$  et  $m_2$ , on peut écrire :

$$m_1 = \frac{\|AB\| \cos \Omega}{\|ab\| \cos \omega} = \frac{m_{\delta} \cos \Omega}{1 \cdot \cos \omega} \Rightarrow m_1 \cdot \cos \omega = m_{\delta} \cdot \cos \Omega \quad (51)$$

$$m_2 = \frac{\|AB\| \sin \Omega}{\|ab\| \sin \omega} = \frac{m_{\delta} \sin \Omega}{1 \cdot \sin \omega} \Rightarrow m_2 \cdot \sin \omega = m_{\delta} \cdot \sin \Omega \quad (52)$$

Les coordonnées du point  $B$  dans  $(A, dU, dV)$  sont ::

$$dU = AB \cdot \cos \Omega = m_{\delta} \cos \Omega = m_1 \cos \omega \quad (53-1)$$

$$dV = AB \sin \Omega = m_{\delta} \sin \Omega = m_2 \sin \omega \quad (53-2)$$

Quand le point b varie c'est-à-dire w varie, l'image de b soit B décrit une ellipse d'équation:

$$\frac{dU^2}{m_1^2} + \frac{dV^2}{m_2^2} = 1 \quad (54)$$

Cette ellipse est appelée **indicatrice de Tissot**. Elle est l'image du cercle de rayon unité dans le plan tangent au point a de ( $\sigma$ ). Les longueurs des demis grands et petits axes sont les modules principaux  $m_1$  et  $m_2$ . La longueur d'un demi diamètre est le module linéaire dans la direction  $\delta$  soit  $m$ .

Dans le cas général, il existe un seul couple de vecteurs orthogonaux correspondants. S'il y'en a une infinité, l'indicatrice de Tissot est un cercle et quelque soit la direction  $\delta$  :

$$m_\delta = m_1 = m_2 = m \quad (55)$$

Le module linéaire est indépendant de la direction.

L'indicatrice de Tissot est entièrement déterminée par les modules principaux et l'une des directions principales (placée par rapport à l'une des lignes coordonnées). Elle peut être définie par la donnée (en grandeur et en position) de deux demi-diamètres conjugués, images de deux directions rectangulaires sur le modèle. Si par exemple ( $u, v$ ) sont des coordonnées orthogonales, les modules correspondants  $m_u$  et  $m_v$  correspondent à deux diamètres conjugués de l'indicatrice ; l'angle des deux demi-diamètres est  $\Theta_0$  avec :

$$\sin\Theta_0 = \sqrt{\frac{E.G - F^2}{E.G}} \quad (56)$$

On obtient les modules principaux à partir du théorème d'Apollonius :

$$m_1^2 + m_2^2 = m_u^2 + m_v^2 = \frac{E}{e} + \frac{G}{g} \quad (57-1)$$

$$m_1 \cdot m_2 = m_u m_v \sin\Theta_0 = \sqrt{\frac{EG - F^2}{e.g}} \quad (57-2)$$

### II.3. L'Indicatrice de Tissot et les déformations

Toutes les déformations ou altérations introduites par la représentation sont entièrement déterminées par la seule connaissance (en grandeur et en position) de l'indicatrice de Tissot, cette proposition découle immédiatement de la définition de l'indicatrice ; elle est précisée dans les points suivants :

**II.3.1. L'altération linéaire** est  $m_\delta - 1$ , il suffit donc pour la déterminer de connaître  $m_\delta$ , module linéaire dans la direction  $\delta$  : celle-ci est précisée sur le modèle par l'angle  $\theta$  que fait un vecteur porté par  $\delta$  et la première direction principale (on peut aussi utiliser  $\Delta$  et  $\Theta$ ).  $\theta$  étant donné, on obtient  $\Theta$  par :

$$tg\Theta = \frac{m_2}{m_1} tg\theta \quad (58)$$

D'où :

$$m_\delta = m_1 \frac{\cos\theta}{\cos\Theta} = m_2 \frac{\sin\theta}{\sin\Theta} \quad (59)$$

**II.3.2. l'altération angulaire** est la différence de deux angles correspondants; elle peut s'écrire  $(\Theta_2 - \Theta_1) - (\theta_2 - \theta_1)$  ou  $(\Theta_2 - \theta_2) - (\Theta_1 - \theta_1)$ . Elle sera donc déterminée si on connaît  $\Theta - \theta$ , en fonction soit de  $\Theta$ , soit de  $\theta$ .

Or

$$tg\Theta = \frac{m_2}{m_1} tg\theta \Rightarrow \frac{tg\Theta - tg\theta}{tg\Theta + tg\theta} = \frac{\sin(\Theta - \theta)}{\sin(\Theta + \theta)} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \quad (60)$$

Qui définit  $\Theta - \theta$  en fonction de l'une ou l'autre des variables  $\Theta$  ou  $\theta$ .  $|\Theta - \theta|$  est maximale en même temps que son sinus, donc pour :

$$|\sin(\Theta - \theta)| = 1 \quad (61)$$

La valeur maximale de  $|\Theta - \theta|$ , soit  $\omega$ , est donc définie par :

$$\sin \omega = \frac{|m_2 - m_1|}{m_2 + m_1} \quad (62)$$

et l'altération angulaire maximale  $2\omega$ , est :

$$2\omega = 2 \text{Arcsin} \left( \frac{|m_2 - m_1|}{m_2 + m_1} \right) \quad (63)$$

Si l'altération linéaire est nulle :  $\Theta - \theta = 0$  ; alors  $m_2 = m_1$  et l'indicatrice de Tissot est un cercle, il y a équivalence entre :

$$\text{Altération angulaire nulle} \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow \forall \delta \ m_\delta = m \quad (64)$$

La représentation est dite dans ce cas **conforme**, parce que deux figures infiniment petites correspondants sont semblables (dans ce cas, et dans ce cas seulement, on peut éventuellement désigner  $m$  par "échelle locale" mais sans dissocier le nom et l'adjectif).

**II.3.3. L'altération des surfaces** est définie par le module aréolaire :

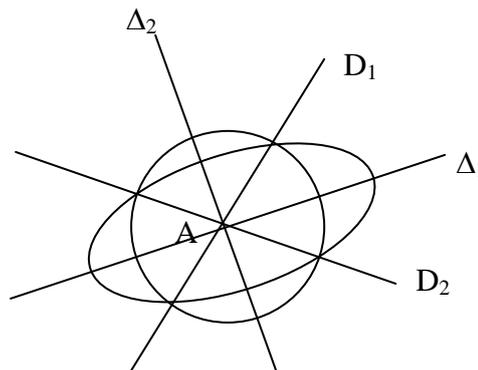
$$\frac{dA(\Sigma)}{da(\sigma)} = m_1 m_2 \quad (65)$$

**II.3.4. Directions et lignes automécoïques**

Si les modules principaux sont tels que :  $m_2 < m_1$ , il existe deux directions  $d_1$  et  $d_2$  (resp.  $D_1$  et  $D_2$ ) telles que :

$$m_{d1} = m_{d2} = 1 \quad (66)$$

Ces directions sur le modèle ou sur l'image sont dites automécoïques, ce sont les diamètres communs à l'indicatrice de Tissot et au cercle concentrique de rayon unité, elles sont symétriques par rapport aux directions principales.



Les courbes admettant en tout point une tangente portée par une direction automécoïque sont dites lignes automécoïques - les lignes automécoïques sur le modèle et sur l'image sont des courbes correspondantes. Sur l'une ou l'autre des deux surfaces, elles sont les courbes intégrales d'une équation différentielle du premier degré.

# Chapitre III

## Les Représentations Planes en Cartographie

Diverses représentations planes d'une sphère sont utilisées pour des buts non cartographiques :

- les cristallographes se servent de la projection stéréographique pour représenter de façon commode les schémas cristallins ;
- la représentation directe de Littrow (voir annexe) est employée dans le compas solaire Abramus;
- la représentation de Lecoq a été imaginée pour une résolution graphique simple du relèvement en navigation.

Les chapitres suivants sont plus particulièrement consacrés à l'étude des représentations planes utilisées en cartographie. Avant de définir les critères permettant de classer les principales d'entre elles, il convient de préciser la notion 'échelle'.

### III.I. Echelle nominale

S'il s'agit de cartes, la notion *d'échelle* est essentielle dans la pratique. La définition élémentaire qu'on en donne est : rapport d'homothétie entre le modèle (terre) et l'image (la carte), elle n'est correcte que pour un plan, c'est-à-dire la représentation d'une toute petite portion de la surface terrestre, qu'on peut légitimement assimiler au plan tangent à un modèle sphérique, par exemple. Sinon, la définition élémentaire n'est qu'une première - souvent grossière- approximation. En effet, il n'y a pas homothétie entre le modèle et l'image, si ce n'est, dans certains cas, localement et pour des figures infiniment petites. L'échelle n'est, en aucun cas, uniforme dans toute l'étendue de la zone représentée (ou champ de la représentation), puisqu'il faut faire intervenir un rapport proportionnel au module linéaire, lui-même en général fonction non seulement du point considéré, mais de la direction.

Mais deux cartes, établies dans le même type de représentation et qui ne diffèrent entre elles que par l'échelle au sens ordinaire (et peu correct) du terme, sont deux figures semblables : elles ont au point de vue des déformations, les mêmes caractéristiques. L'étude des déformations est donc indépendante du choix de cette échelle.

Or il est toujours possible de faire subir à une carte quelconque une homothétie telle que l'échelle suivant une direction (automécoïque) soit égale à 1/1, au moins en un point, le plus souvent suivant une ou plusieurs lignes (automécoïques). Toute carte devrait donc mentionner de façon explicite non pas l'échelle mais l'échelle nominale : c'est-à-dire le facteur par lequel il faut multiplier le modèle de la terre pour que la correspondance entre le modèle ainsi modifié et la carte considérée présente au moins un point automécoïque, ou une ou plusieurs lignes automécoïques.

Il apparaît donc que, pour l'étude des représentations, il suffit d'adapter comme échelle nominale 1/1: c'est ce que sous-entendu de façon souvent peu explicite l'expression souvent utilisée : les longueurs sont conservées sur telle ou telle ligne du modèle (il voudrait mieux dire : le long de telle ligne). L'expression « ligne d'échelle conservée » est un jargon peu admissible. Il apparaît aussi que pour une représentation plane, les dimensions du modèle sont indifférentes : on pourra toujours considérer un modèle ellipsoïdique tel que  $a=1$  ou un modèle sphérique de rayon unité, pour toute étude des déformations.

### III.2. Classification d'après les caractères locaux

On désigne par caractères locaux d'une représentation plane ceux qui sont liés aux déformations, donc concernent le voisinage d'un point et peuvent être précisés par la seule indicatrice de Tissot. Les paragraphes suivants précisent le vocabulaire utilisé.

**III.2.1.** les représentations conformes sont celles dans lesquelles l'altération angulaire est nulle en tout point. La condition de conformité (condition nécessaire et suffisante) s'écrit :  $m_1 = m_2$ , égalité des modules principaux.

Il faut noter que le caractère de conformité concerne les tangentes et non les cordes : il s'agit d'un caractère local, relatif à des figures infiniment petites (qui sont semblables sur l'image à celles du modèle) et non à des figures finies.

**III.2.2.** Les représentations équivalentes sont celles pour lesquelles le module aréolaire est égal à l'unité ; la condition d'équivalence (condition nécessaire et suffisante) s'écrit :  $m_1 m_2 = 1$ . Le domaine limité par l'indicatrice de Tissot et le domaine limité par le cercle ont des aires égales ou encore sont d'aire équivalente.

Le caractère d'équivalence se conserve pour les domaines finis, dont l'aire est la somme intégrale d'aires infiniment petites. Ainsi une représentation équivalente d'une sphère de rayon unité est tout entière comprise dans un domaine plan limité par un contour fermé et dont l'aire intérieure est  $4\pi$  : la condition est nécessaire mais n'est pas suffisante.

Une représentation d'ellipsoïde sur la sphère ou d'un modèle de la terre sur le plan ne peut être à la fois conforme et équivalente : la double condition  $m_1 = m_2$ ,  $m_1 m_2 = 1$  entraîne  $m_1 = m_2 = 1$  et ne peut être réalisée que si les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre.

**III.2.3.** Les représentations qui ne sont ni conformes ni équivalentes sont dites aphylactiques (adjectif dont l'étymologie grecque donne la signification ne conserve rien). Dans ce cas, l'indicatrice de Tissot peut être une ellipse quelconque.

**III.2.4.** Certains caractères locaux concernent les lignes automécoïques, une représentation est dite :

- tangente si elle admet un parallèle automécoïque,
- sécante si elle admet deux parallèles automécoïques.

(Plus précisément, la représentation est tangente si le parallèle automécoïque est double, limite de deux parallèles automécoïques).

Une représentation est dite équivalente si tous les méridiens sont automécoïques :

$$\forall \lambda, m_\lambda = 1 \quad (67)$$

Certaines représentations sont telles que tous les parallèles sont automécoïques (représentation de Bonne, représentation polyconique du Coast and Geodetic Survey -USA) :

$$\forall \varphi, m_\varphi = 1 \quad (68)$$

Elles ne portent pas de nom particulier.

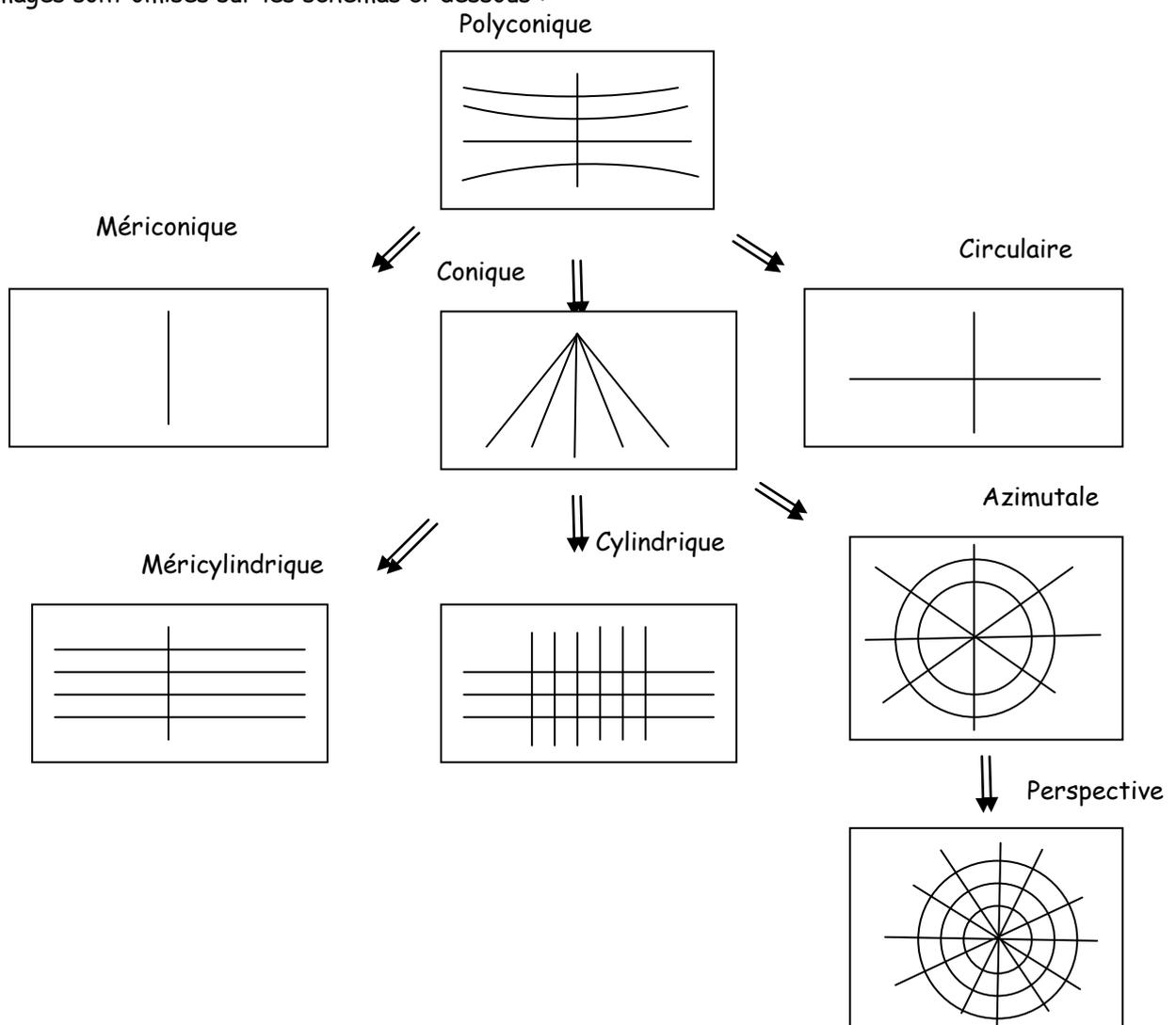
### III.3. Classification d'après les caractères globaux

#### III.3.1. Caractères du canevas

Le canevas est, par définition, l'ensemble des images planes des méridiens et des parallèles. Suivant la nature du canevas, on désigne la représentation par les adjectifs indiqués dans le tableau suivant :

Représentation	Images	
	Des parallèles	Des méridiens
Cylindriques	Droites parallèles $\Delta(\varphi)$	Droites parallèles perpendiculaires aux $\Delta(\varphi)$
Méricylindrique	Droites parallèles	~
Conique	Arcs de cercles de centre S	Droites concourantes en S
Mériconique	Arcs de cercles concentriques	~
Azimutale (ou zénithale) Cas particulier: perspective (projection)	Cercles concentriques de centre S	Droites issues de S
Polyconique  Cas particulier : circulaire	Cercles non concentriques centrés sur une droite, image d'un méridien -idem-	~ <b>arcs de cercles</b>

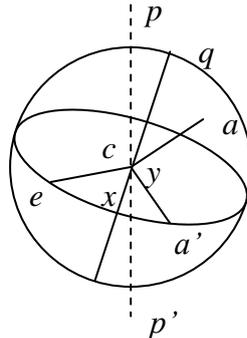
Le signe ~ indique que les images des méridiens ne sont ni des droites ni des arcs de cercle : ces images sont omises sur les schémas ci-dessous :



Les flèches → indique un caractère d'inclusion, avec la signification : « contient comme cas particulier ».

### III.3.2. Caractères d'orientation

Lorsque le modèle est une sphère, on peut définir un point  $a$  par deux coordonnées sphériques  $(x,y)$ , le plus souvent désignées sous le nom de coordonnées de Cassini-Soldner, à partir d'un grand cercle quelconque dit pseudo-équateur et de l'un des pôles,  $q$  de ce grand cercle. Les grands cercles issues de  $q$  sont dits pseudo-méridiens, les petits cercles de pôle  $q$  pseudo-parallèles.



Si le pseudo-méridien de  $a$  coupe en  $a'$  le pseudo-équateur, coupé en  $e$  par le pseudo-méridien origine, les coordonnées de Cassini-Soldner sont par exemple :

$$x = (ce, \hat{ca}') \quad y = (ca', \hat{ca}) \quad (69)$$

Le point  $q$ , les pseudo méridiens et pseudo parallèles peuvent jouer un rôle analogue au pôle  $p$  et aux méridiens et parallèles considérées dans le paragraphe précédent. On dit alors que  $q$  est le pivot de la représentation. Dans le paragraphe précédent III.3.1, le pivot était implicitement l'un des pôles  $p$  ou  $p'$ .

Suivant le choix du pivot, la représentation est désignée par l'un des qualificatifs suivant :

Pivot	Représentation
- Un des pôles $p$ ou $p'$	- Directe (ou polaire)
- Sur l'équateur	- Transverse (ou méridienne)
- Quelconque	- Oblique (ou sur l'horizon de tel lieu)

On dit aussi aspect direct, aspect transverse, aspect oblique de telle ou telle représentation. Dans l'aspect direct d'une représentation azimutale, les longitudes sont conservées ; dans l'aspect oblique, ce sont les azimuts qui sont représentés par des angles égaux : d'où le nom d'azimutale.

Si le modèle qu'on cherche à représenter est un ellipsoïde, bien qu'on ne puisse, comme pour la sphère, faire appel à un ensemble de courbes jouant le rôle analogue aux méridiens et aux parallèles, on conserve néanmoins, par analogie, les qualificatifs précédents, on peut d'ailleurs considérer qu'on se ramène au cas de la sphère en imaginant une double représentation : représentation de l'ellipsoïde sur la sphère, puis de celle-ci sur le plan.

### III.4. Etude d'une représentation plane

Une représentation plane sera entièrement déterminée par la donnée d'un certain nombre de caractères compatibles choisis parmi les caractères définis en III.2 et III.3.

On peut ensuite être amené à considérer le champ de la représentation et imposer d'autres conditions, par exemple une valeur maximale de la valeur absolue de l'altération linéaire.

L'étude des représentations planes peut être entreprise. On peut, par exemple :

- a- fixer la nature du canevas, et l'orientation,
- b- imposer un caractère local (conformité, équivalence,...),
- c- préciser la ou les lignes automécoïques,

ou bien :

- d- fixer l'orientation et les lignes automécoïques,
- e- en déduire le caractère local (conformité, équivalence,...),
- f- étudier le canevas.

A titre d'exemple, une représentation est entièrement déterminée par les conditions suivantes :

- elle est directe et mériconique,
- un méridien est automécoïque et a pour image une droite,
- Tous les parallèles sont automécoïques,
- L'image du parallèle de latitude  $\varphi_0$  est un arc de cercle et de rayon  $R_0$ .

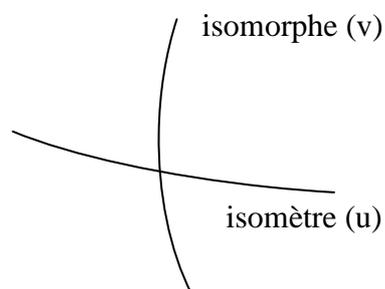
Ces conditions (compatibles) entraînent de façon immédiate à la conclusion: la représentation est équivalente. Il faut ensuite étudier les images des méridiens, préciser l'orientation de l'indicatrice de Tissot, les modules principaux,...

L'étude d'une représentation peut être également faite à partir des données initiales purement analytiques :

- on peut imposer par exemple  $X = X(\lambda)$  et chercher à déterminer une fonction  $f$  telle que si  $Y = f(\varphi)$ , la représentation présente tel ou tel caractère local.
- on peut définir une représentation conforme en associant à tout point du modèle un affixe complexe  $z$  et son image l'affixe  $Z$  : toute fonction analytique  $Z(z)$  définit une représentation conforme (voir chapitre IX).

### III.5. Cas particuliers des représentations conformes

Dans une représentation conforme, le module linéaire est indépendant de la direction : il existe des courbes n'ayant aucun point d'intersection deux à deux, telles que  $m = \text{constante}$ . Ces courbes sont dites lignes isométriques ou isomètres. Leurs trajectoires orthogonales sont dites isomorphes.



On peut, naturellement, définir le modèle et l'image en utilisant ces deux familles de courbes et leurs images comme lignes coordonnées. Par exemple : les isomètres sont les courbes  $u = \text{constante}$ , les isomorphes les courbes  $v = \text{constante}$ , alors le module linéaire  $m$  est fonction d'une seule variable à savoir  $u$ .  $m(u)$  est essentiellement positive, elle admet un minimum  $m(u_0)$  correspond à  $u = u_0$ . L'isomètre correspondant est dit isomètre stationnaire c'est-à-dire :

$$\left(\frac{dm}{du}\right)_{u=u_0} = 0 \quad (70)$$

Isomètres et isomorphes étant sur les deux surfaces des courbes correspondantes, les coordonnées  $(u,v)$  et  $(U,V)$  peuvent être choisies de telle façon que :

$$\frac{dU}{du} = \frac{dV}{dv} \quad (71)$$

Il apparaît alors qu'on obtient une autre représentation homothétique de la précédente, en multipliant  $U$  et  $V$  par un facteur  $k$ ; le module linéaire est lui-même multiplié par  $k$ .

Si, initialement, la valeur stationnaire du module était égale à 1, (donc  $m(u) > 1$ ), et qu'on choisisse  $k < 1$ , la valeur absolue de l'altération linéaire est déterminée.

Par exemple, si le champ de la représentation s'étend de  $u_0$  à  $u_M$ ,  $m(u)$  varie de  $m(u_0)=1$  à  $m(u_M) = M$ , on peut prendre :

$$k = \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (72)$$

Le nouveau module linéaire varie de  $\frac{1}{\sqrt{M}}$  à  $\sqrt{M}$  et l'altération linéaire est minimisée en valeur absolue dans l'ensemble du champ.

$k$  est souvent appelé facteur de réduction d'échelle, expression qu'on peut avantageusement remplacer par facteur d'homothétie.

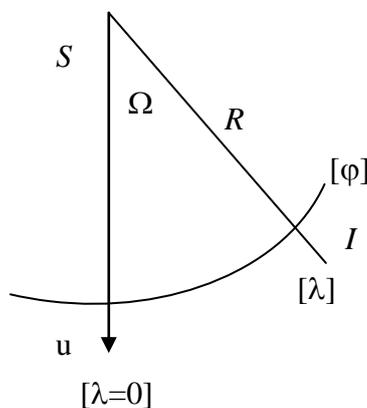
Il revient au même d'ailleurs de considérer qu'on a multiplié les dimensions du modèle par ce facteur  $k$ : ce procédé est souvent utilisé dans le cas de double représentation; la sphère intermédiaire sur laquelle on représente d'abord l'ellipsoïde est choisie avec un rayon non plus égal à 1, mais à  $k < 1$ .

# Chapitre IV

## Les Représentations Coniques

Seul l'aspect direct des représentations coniques est couramment employé. Il n'existe guère qu'un exemple d'utilisation d'une représentation conique oblique d'une sphère, elle-même représentation conforme d'un ellipsoïde (Tchécoslovaquie). L'étude suivante se borne à considérer les représentations directes.

Pour définir de façon commode les coordonnées planes d'une représentation conique directe, il suffit de faire appel aux coordonnées polaires, en effet, les images des méridiens sont des droites concourantes en un point  $S$ , celles des parallèles des arcs de cercle de centre commun  $S$ . Cette condition entraîne que les coordonnées polaires de l'image  $I$  du point  $i(\varphi, \lambda)$  sont de la forme :



$$SI = R(\varphi) \quad (73-1)$$

$$(\widehat{Su}, SI) = \Omega(\lambda) \quad (73-2)$$

$Su$  étant l'image du méridien origine.  $R$  est souvent appelé rayon graphique (de l'image) du parallèle.

Les images  $[\varphi]$  et  $[\lambda]$  du parallèle et du méridien sont orthogonales donc les directions principales sont l'image du méridien et la tangente à l'image du parallèle et les modules principaux  $m_1$  et  $m_2$  sont :

$$m_1 = m_\lambda = \frac{-dR}{\rho d\varphi} \quad (74)$$

$$m_2 = m_\varphi = \frac{Rd\Omega}{N \cos \varphi d\lambda}$$

avec  $\rho$  et  $N$  les deux rayons de courbure de l'ellipsoïde.

### VI.1. Les Représentations coniques équidistantes

Par définition, tous les méridiens sont automécoïques  $\Rightarrow \forall \lambda, m_\lambda = 1$ . Donc :

$$dR = -\rho d\varphi = -d\beta(\varphi) \quad (75)$$

Avec  $\beta(\varphi)$  la longueur de l'ellipse méridienne donnée par :

$$\beta(\varphi) = \int_0^\varphi ds = \int_0^\varphi \rho dt = a(1-e^2) \int_0^\varphi (1-e^2 \sin^2 t)^{-3/2} dt \quad (76)$$

La fonction  $\Omega(\lambda)$  peut être choisie arbitrairement. On convient de choisir la fonction la plus simple (fonction linéaire), on obtient alors :

$$R(\varphi) = C - \beta(\varphi) \quad (77-1)$$

$$\Omega(\lambda) = n\lambda \quad (77-2)$$

et :

$$m_1 = m_\lambda = 1$$

$$m_2 = m_\varphi = \frac{nR}{N \cos \varphi} = \frac{nR}{r} \quad (78)$$

Les deux constantes introduites ( $C$  et  $n$ ) seront déterminées en imposant deux autres conditions.

#### IV.1.1. Les Représentations coniques équidistantes Sécantes

Si on impose à la représentation d'admettre deux parallèles automécoïques de latitude  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , on peut écrire :

$$m_{\varphi_1} = \frac{nR_1}{r_1} = m_{\varphi_2} = \frac{nR_2}{r_2} = 1 \quad (79)$$

avec :

$$R_1 = C - \beta_1 \quad R_2 = C - \beta_2 \quad (80)$$

D'où l'on tire :

$$n = \frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2} = \frac{r_2 - r_1}{R_2 - R_1} \quad (81)$$

$$C = R_1 + \beta_1 \text{ or } R_1 = r_1/n \text{ d'où : } C = R_1 + \beta_1 = \beta_1 + \frac{r_1}{n} = \frac{\beta_1 r_2 - \beta_2 r_1}{r_2 - r_1}$$

$$\text{Soit : } n = \frac{r_2 - r_1}{R_2 - R_1} \quad \text{et} \quad C = \frac{\beta_1 r_2 - \beta_2 r_1}{r_2 - r_1} \quad (82)$$

Remarquons que :  $n > 0$  car  $r_2 > r_1 \Rightarrow \beta_2 < \beta_1$ .

Le rayon graphique de l'image du parallèle est  $R(\varphi) = C - \beta(\varphi)$ .

Si  $C \neq \beta(\pi/2)$ , l'image du pôle est un arc de cercle. L'image du pôle P est un point (le point S) si et seulement si  $C = \beta(\pi/2)$ . Or C est déterminé par :

$$\frac{r_1}{C - \beta_1} = \frac{r_2}{C - \beta_2} \quad (83)$$

L'égalité  $\frac{r_1}{\beta(\pi/2) - \beta_1} = \frac{r_2}{\beta(\pi/2) - \beta_2}$  est impossible, en effet, les numérateurs sont les

rayons des parallèles, les dénominateurs des arcs de l'ellipse méridienne. L'image du pôle n'est donc un point que si  $\beta_2 = \beta(\pi/2)$  c'est-à-dire si le pôle est lui-même automécoïque.

#### Cas de la sphère de rayon unité

$$R = C - \phi$$

$$\Omega(\lambda) = n\lambda$$

Si les parallèles  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont automécoïques :

$$n = \frac{\cos \phi_2 - \cos \phi_1}{\phi_1 - \phi_2} \quad \text{et} \quad C = \frac{\phi_1 \cos \phi_2 - \phi_2 \cos \phi_1}{\cos \phi_2 - \cos \phi_1} \quad (84)$$

C n'est égal à  $\pi/2$  que si  $\phi_2 = \pi/2$ , c'est-à-dire si le pôle est automécoïque. Dans ce cas, le pôle est automécoïque et le parallèle  $\phi_1$  est automécoïque :

$$\begin{cases} R(\phi) = \pi/2 - \phi \\ \Omega(\lambda) = n\lambda \end{cases} \text{ avec } n = \frac{\cos \phi_1}{\pi/2 - \phi_1} \quad n < 1 \quad (85)$$

#### IV.1.2. Représentation équidistante tangente

On obtient une représentation tangente en écrivant que le parallèle automécoïque de latitude  $\varphi_0$  est un parallèle automécoïque double c'est-à-dire en faisant simultanément tendre  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  vers  $\varphi_0$  :

$$\varphi_1 \longrightarrow \varphi_0 \text{ et } \varphi_2 \longrightarrow \varphi_0 \Rightarrow n = \frac{r_2 - r_1}{\beta_1 - \beta_2} \rightarrow \left(-\frac{dr}{d\beta}\right)_{\varphi=\varphi_0} \text{ or } \frac{dr}{d\beta} = -\sin \varphi$$

Donc :

$$n = \sin \varphi_0 \quad \text{et} \quad C = R(\varphi_0) + \beta(\varphi_0) \quad (86-1)$$

avec :

$$R(\varphi_0) = \frac{r_0}{n} = N(\varphi_0) \cot g \varphi_0 \quad (86-2)$$

L'image du pôle est un arc de cercle de rayon :

$$R(\pi/2) = N(\varphi_0) \cot g \varphi_0 + \beta(\varphi_0) - \beta(\pi/2) \quad (87)$$

On peut également raisonner en disant que le parallèle automécoïque est stationnaire, c'est-à-dire :

$$m(\varphi_0)=1 \text{ et } \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = 0, \text{ or } m_\varphi = \frac{nR}{r} \Rightarrow m_{\varphi_0} = \frac{nR_0}{r_0} = 1 \Rightarrow n = \frac{r_0}{R_0}$$

Par suite :

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dm_\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{R} \frac{dR}{d\varphi} - \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \rho \left( \frac{1}{R} - \frac{\sin \varphi}{r} \right) \text{ et } \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = 0 \Rightarrow \sin \varphi_0 = \frac{r_0}{R_0}$$

D'où :

$$n = \sin \varphi_0 \quad \text{et} \quad R(\varphi_0) = \frac{r_0}{n} = N(\varphi_0) \cot g \varphi_0 \quad (88)$$

#### IV.2. Les Représentations coniques conformes (Lambert)

La condition de conformité ( $m_1 = m_2$ ) s'écrit  $m_\varphi = m_\lambda$  soit :

$$\frac{-dR}{\rho d\varphi} = \frac{R d\Omega}{N \cos \varphi d\lambda} \quad (89-1)$$

ou

$$\frac{-N \cos \varphi dR}{R \rho d\varphi} = \frac{d\Omega}{d\lambda} \quad (89-2)$$

Égalité qui ne peut être réalisée (le premier membre contient la seule variable  $\varphi$ , le second la seule variable  $\lambda$ ) que si chaque membre est égal à la même constante  $n$  :

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{d\lambda} = n \\ \frac{-N \cos \varphi dR}{R \rho d\varphi} = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega = n(\lambda - \lambda_0) \\ R = C e^{-nL} \end{cases} \quad (90)$$

Avec  $e$  la base du logarithme népérien = 2.7182818 et  $L$  la latitude isométrique donnée par :

$$L = \text{Logtg}(\pi/4 + \varphi/2) - \frac{e}{2} \text{Log} \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right) \quad (91)$$

où  $e$  est la première excentricité de l'ellipsoïde (modèle).

On peut calculer le module linéaire  $m$  par :

$$m = m_\varphi = m_\lambda = \frac{-dR}{\rho d\varphi} = n \frac{R}{r} \quad (92)$$

L'image du pôle  $p$  ( $\varphi = \pi/2$ ) est le point  $S$  ( $R = 0$ ), l'autre est rejeté à l'infini.

#### IV.2.1. La Représentation conique conforme sécante

Les deux constantes  $n$  et  $C$  seront déterminées par deux conditions : par exemple en imposant deux parallèles ( $\varphi_1$ ) et ( $\varphi_2$ ) automécoïques. Alors :

$$n \frac{R_1}{r_1} = n \frac{R_2}{r_2} = 1 \quad \text{avec} \quad R_1 = C e^{-nL_1} \quad \text{et} \quad R_2 = C e^{-nL_2} \quad (93)$$

D'où :

$$n = \frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2}{R_1} = \left( \frac{e^{-L_2}}{e^{-L_1}} \right)^n$$

Soit :

$$n = \frac{\text{Log}(r_2 / r_1)}{L_1 - L_2} \quad C = R_1 e^{nL_1} = R_2 e^{nL_2} = \frac{r_1}{n} e^{nL_1} \quad (94)$$

$C = R(0)$  le rayon graphique de l'équateur.  $R(\varphi)$  s'écrit :

$$R = C \left( \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right)^{-n} \quad (95)$$

Forme qui justifie le nom d'exposant donné à  $n$ .

#### IV.2.2. La Représentation conforme tangente

V.□.□. Dans ce cas, le parallèle automécoïque ( $\varphi_0$ ) est double,  $m(\varphi_0) = 1$  et :

$$n = \frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2} = \frac{r_2 - r_1}{R_2 - R_1}$$

C'est-à-dire en faisant simultanément tendre  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  vers  $\varphi_0$  :

$$\varphi_1 \longrightarrow \varphi_0 \quad \text{et} \quad \varphi_2 \longrightarrow \varphi_0 \Rightarrow n = \frac{r_2 - r_1}{R_2 - R_1} \rightarrow \left( \frac{dr}{dR} \right)_{\varphi=\varphi_0} \quad (96)$$

Or d'après (92) :

$$m(\varphi_0) = 1 = \frac{-1}{\rho_0} \left( \frac{-dR}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} \quad \text{et} \quad \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = -\rho_0 \sin \varphi_0$$

Donc :

$$n = \sin \varphi_0 \quad (97-1)$$

On peut alors écrire :

$$R(\varphi) = R(\varphi_0) e^{-\sin \varphi_0 (L - L_0)} \quad (97-2)$$

avec :

$$R(\varphi_0) = \frac{r_0}{n} = N(\varphi_0) \cot g \varphi_0 \quad (97-3)$$

V.□.□. On peut aussi retrouver directement ces résultats en écrivant que le parallèle ( $\varphi_0$ ) est un isomètre stationnaire, c'est-à-dire :

$$m(\varphi_0) = 1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{dm}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

Or :

$$m_\varphi = \frac{nR}{r} = \frac{-dR}{\rho d\varphi}$$

Par suite :

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dm_\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{R} \frac{dR}{d\varphi} - \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \rho \left( \frac{1}{R} - \frac{\sin\varphi}{r} \right) \text{ et } \left( \frac{dm}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = 0 \Rightarrow \sin\varphi_0 = \frac{r_0}{R_0}$$

$$\text{D'où :} \quad n = \sin\varphi_0 \quad \text{et} \quad R(\varphi_0) = \frac{r_0}{n} = N(\varphi_0) \cot g \varphi_0 \quad (97-4)$$

#### IV.2.3. Les représentations sécante et tangente de même exposant sont semblables

En effet, soit une représentation conique conforme sécante d'exposant  $n$  inférieur à 1. Il existe une valeur  $\varphi_0 = \text{Arcsin}(n)$  c'est-à-dire  $n = \sin\varphi_0$ . La représentation tangente de même exposant  $n$  ne diffère de la représentation sécante que par la valeur de la constante  $C$  :

$$\text{Représentation sécante : } R_s(\varphi) = C_s e^{-nL}$$

$$\text{Représentation tangente : } R_t(\varphi) = C_t e^{-nL} \quad (98)$$

Les angles polaires sont égaux :  $\Omega_s = \Omega_t = n\lambda$

L'une des représentations se déduit de l'autre par une simple homothétie : on obtient la représentation sécante, par exemple, en multipliant  $R_t(\varphi)$  par la constante  $k = C_s/C_t$  (facteur d'homothétie, souvent désigné par facteur d'échelle).

On peut ainsi établir une représentation sécante à partir d'une représentation tangente. Le module linéaire vaut  $m(\varphi) = nR/r$  en choisissant  $k < 1$ , on obtient  $m(\varphi_0) = k < 1$  ce qui diminue la valeur absolue de l'altération linéaire dans le champ de la représentation considérée.

### IV.3. Les Représentations coniques équivalentes

IV.3.1. La condition d'équivalence  $m_1 m_2 = 1$  s'écrit  $m_\varphi m_\lambda = 1$  : soit :

$$\frac{-dR}{\rho d\varphi} \cdot \frac{R d\Omega}{N \cos \varphi d\lambda} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{-\rho N \cos \varphi d\varphi}{R dR} \quad (99)$$

L'égalité ne peut avoir lieu que si et seulement si,  $n$  étant une constante, on :

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{d\lambda} = n \\ nR dR = -\rho N \cos \varphi d\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega = n\lambda \\ \frac{1}{2} nR^2 = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho N \cos \varphi d\varphi \end{cases} \quad (100)$$

On appelle latitude équivalente la quantité :

$$L_{eq.} = \int_0^{\varphi} \rho N \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2} \cos \varphi d\varphi \quad (101)$$

$$\text{Soit :} \quad L_{eq.} = \int_0^{\varphi} \rho N \cos \varphi d\varphi = a^2(1-e^2) \frac{1}{4e} \left( \text{Log} \left( \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right) + \frac{2e \sin \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \right) \quad (102)$$

(100) sont les équations de la représentation courante pour les cartes civiles du continent nord-américain (représentation d'Albers avec deux parallèles automécoïques).

#### IV.3.2. Cas de la sphère (rayon = 1)

Dans ce cas, (100) s'écrivent :

$$\begin{cases} \Omega = n\lambda \\ \frac{1}{2} nR^2 = C - \sin \phi \end{cases} \quad (103)$$

Les deux paramètres  $n$  et  $C$  peuvent être déterminés en imposant deux conditions.

#### IV.3.2.1. La Représentation sécante

Si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les latitudes des parallèles automécoïques :

$$m_{\phi_1} = m_{\phi_2} = 1 \Rightarrow n \frac{R_1}{\cos \phi_1} = n \frac{R_2}{\cos \phi_2} = 1 \quad (104)$$

$$\text{D'où : } n = \frac{\cos \phi_1}{R_1} = \frac{\cos \phi_2}{R_2} \text{ et } n^2 = \frac{\cos^2 \phi_1 - \cos^2 \phi_2}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{n \sin^2 \phi_2 - \sin^2 \phi_1}{2 \sin \phi_2 - \sin \phi_1}$$

$$\text{Soit : } n = \frac{\sin \phi_1 + \sin \phi_2}{2} \quad (105)$$

$$\text{Et : } C = \frac{1}{2} n R_1^2 + \sin \phi_1 = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \phi_1}{n} n R_1^2 + \sin \phi_1 = \frac{1 + \sin \phi_1 \sin \phi_2}{\sin \phi_1 + \sin \phi_2} \quad (106)$$

#### IV.3.2.2. La Représentation tangente

$\phi_0$  étant la latitude du parallèle automécoïque double, en faisant tendre  $\phi_1$  et  $\phi_2$  vers 0, on obtient :

$$n = \sin \phi_0 \quad \text{et} \quad C = \frac{1 + \sin^2 \phi_0}{2 \sin \phi_0} \quad (107)$$

$$m_{\phi_0} = 1 = n \frac{R(\phi_0)}{\cos \phi_0} \Rightarrow R(\phi_0) = \cot g(\phi_0) \quad (108)$$

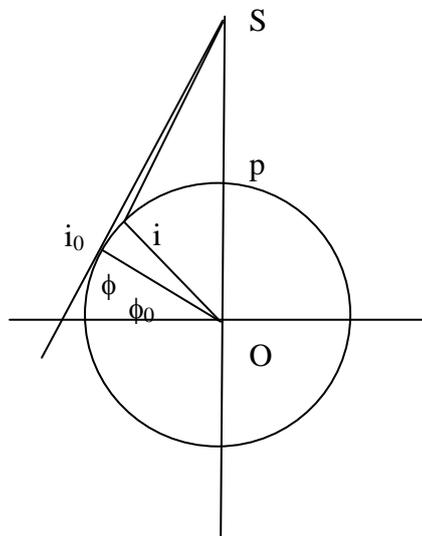
La représentation est ainsi définie par les deux équations :

$$\begin{cases} \Omega = \lambda \sin \phi_0 \\ R(\phi) = \left( 1 + \frac{1}{\sin^2 \phi_0} - 2 \frac{\sin \phi}{\sin \phi_0} \right)^{1/2} \end{cases} \quad (109)$$

On a alors :

$$m_\phi = \sin \phi_0 \frac{R(\phi)}{\cos \phi} \quad \text{et} \quad m_\lambda = \frac{\cos \phi}{\sin \phi_0 R(\phi)} \quad (110)$$

L'expression de  $R(\phi)$  montre que le rayon graphique du parallèle de latitude  $\phi$  est égal à la longueur du segment Si joignant le point  $i(\phi)$  et le point S sommet du cône tangent à la sphère le long du parallèle  $\phi_0$ .



L'image du pôle  $p$  est un arc de cercle de rayon :  $R(\pi/2) = (1 - \sin\phi_0)/\sin\phi_0$  (111)

#### IV.3.2.3. Représentations où l'image du pôle est un point

Si impose comme première condition : l'image du pôle est ponctuelle, c'est-à-dire  $C = 1$ , on ne dispose que d'une autre condition pour déterminer  $n$ .

Quelle que soit  $C$ , on peut écrire :

$$\frac{1}{2}nR^2(\pi/2) = C - \sin(\pi/2) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}nR^2(\pi/2) = C - 1 \quad \text{d'où l'expression de } R :$$

$$R^2(\phi) = R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{n}(1 - \sin\phi) = R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad (112)$$

Si l'image du pôle est un point donc  $R(\pi/2) = 0 \Leftrightarrow C = 1$ , d'où :

$$R^2(\phi) = \frac{4}{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad (113)$$

- Si on impose (Atlas anglais et allemands) la condition supplémentaire : le parallèle  $\phi_0$  est automécoïque (simple) :

$$\text{Or } m_\phi = n \frac{R(\phi)}{\cos\phi} \Rightarrow m_{\phi_0} = n \frac{R(\phi_0)}{\cos\phi_0} = 1 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\cos\phi_0}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_0}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_0}{2}\right)$$

$$\text{Ou encore :} \quad n = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_0}{2}\right) = \frac{1 + \sin\phi_0}{2} \quad (114)$$

(Résultat qu'on obtient immédiatement, d'après IV.3.2.1. en disant que la représentation admet comme parallèles automécoïques le parallèle  $\phi_0$  et le parallèle de rayon nul c'est-à-dire le pôle).

- Si on impose (Lambert) la condition supplémentaire :  $R(\phi_0) = \cot g\phi_0$

$$\text{Alors :} \quad \sqrt{n} = \frac{\cos\phi_0}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_0}{2}\right)} = 2tg\phi_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_0}{2}\right) \quad (115)$$

$n$  n'est pas égal à  $\sin\phi_0$  comme dans la représentation tangente. Le pôle est automécoïque et il existe un parallèle automécoïque de latitude  $\phi_1$  tel que :

$$\sqrt{n} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}\right) \quad (116)$$

# Chapitre V

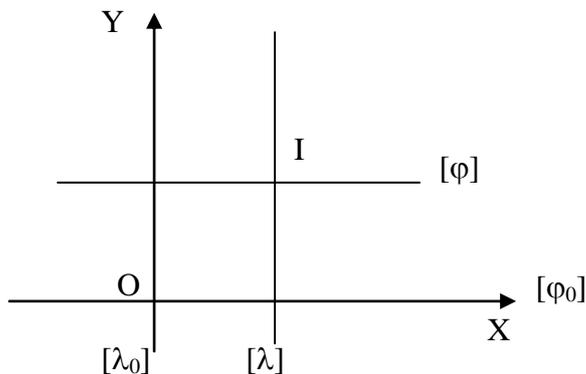
## Les Représentations Cylindriques

### V.1. Les représentations cylindriques directes

Les images des parallèles sont des droites parallèles à l'axe des  $X$  par exemple ; celles des méridiens des droites parallèles à l'axe des  $Y$ . les coordonnées rectangulaires de l'image I du point  $i(\lambda, \varphi)$  sont donc de la forme :

$$X = X(\lambda) \quad (117-1)$$

$$Y = Y(\varphi) \quad (117-2)$$



Les directions principales sont, dans le plan, parallèles aux axes des coordonnées et les modules linéaires principaux sont :

$$m_1 = m_\lambda = \frac{dY}{\rho d\varphi} = \frac{dY}{d\beta} \quad (118)$$

$$m_2 = m_\varphi = \frac{dX}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{dX}{rd\lambda}$$

#### V.1.1. les Représentations cylindriques directes équidistantes

Par définition, tous les méridiens sont automécoïques  $\Rightarrow \forall \lambda, m_\lambda = 1$ .

Donc :

$$dY = d\beta \Rightarrow Y = \beta - \beta_0 \quad (119)$$

Pour la sphère (de rayon unité) :

$$Y = \phi - \phi_0 \quad (120)$$

Et  $X$  est une fonction arbitraire de  $\lambda$ . On choisit la fonction la plus simple (fonction linéaire). On donc :

$$X = A(\lambda - \lambda_0) \quad (121-1)$$

$$Y = \phi - \phi_0 \quad (121-2)$$

Alors :

$$m_\varphi = \frac{dX}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{A}{N \cos \varphi} = \frac{A}{r} \quad (122)$$

Pour la sphère :

$$m_\phi = \frac{A}{\cos \phi} \quad (123)$$

Si  $A < 1$ , la représentation de la sphère est sécante : elle admet deux parallèles automécoïques  $\phi_0 = \text{Arccos}(A)$  et  $-\phi_0$ .

Si  $A = 1$ , la représentation est tangente (équateur automécoïque).

Les conclusions sont identiques pour l'ellipsoïde.

La représentation tangente est dite « carte plate carrée », la représentation sécante « carte plate rectangulaire ».

Les pôles sont singuliers : leurs images sont des segments de droite.

### V.1.2. Les Représentation cylindriques directes conformes (Mercator)

V.1.2.1. La condition de conformité  $m_1 = m_2$  s'écrit  $m_\phi = m_\lambda$  soit :

$$\frac{dX}{N \cos \phi d\lambda} = \frac{dY}{\rho d\phi} \quad (124)$$

soit :

$$\frac{dX}{d\lambda} = \frac{N \cos \phi dY}{\rho d\phi} \quad (125)$$

L'égalité ne peut être réalisée que si les deux membres sont égaux à une même constante  $k$ , alors :

$$X = k(\lambda - \lambda_0) \quad (126-1)$$

$$Y = k(L(\phi) - L(\phi_0)) = k(L - L_0) \quad (126-2)$$

$L$  est la latitude isométrique donnée par (91). Le module linéaire est fonction de  $\phi$  seulement (les isomètres sont les parallèles) :

$$m(\phi) = \frac{k}{N \cos \phi} = \frac{k}{r} \quad (127)$$

Pour la sphère :

$$m(\phi) = \frac{k}{\cos \phi} \quad (128)$$

Si  $k < 1$  les parallèles  $\phi_1$  et  $-\phi_1$  tels que  $\phi_1 = \text{Arccos}k$  sont automécoïques, la représentation est sécante.

Si  $k = 1$  la représentation est tangente (équateur automécoïque).

Mais le choix de  $k$  est indifférent pour l'étude des altérations. En effet toute représentation cylindrique directe conforme se déduit d'une quelconque autre par une similitude, il suffit donc d'étudier la représentation tangente et d'écrire :

$$X = \lambda \quad (129-1)$$

$$Y = L \quad (129-2)$$

$\lambda_0 = 0$  et  $L_0 = 0 \Leftrightarrow$  l'axe des  $X$  est l'image de l'équateur, l'axe des  $Y$  est l'image du méridien origine.

#### V.1.2.2. Les Courbes de Favé

La représentation cylindrique directe conforme est couramment utilisées pour les planisphères, et a rendu de grands services à la navigation maritime. Elle est connue sous le nom de représentation de Mercator.

Pour les planisphères (à échelle nominale petite) ou les cartes maritimes, il suffit de considérer la terre un modèle sphérique. Dans ces conditions, les images planes des courbes tracées sur la sphère ont pour des courbes dont il est aisé de déterminer les équations.

En effet, entre la latitude  $\phi$  et la latitude croissante  $\xi$ , on établit facilement les relations :

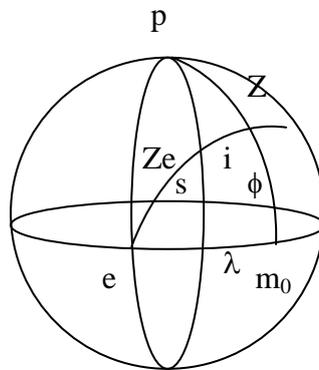
$$ch\xi = \frac{1}{\cos\phi} \quad ; \quad sh\xi = tg\phi \quad ; \quad th\xi = \sin\phi \quad ; \quad th\frac{\xi}{2} = tg\frac{\phi}{2} \quad (130)$$

or  $\xi = \text{Log}tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \Rightarrow e^\xi = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \frac{1+tg(\phi/2)}{1-tg(\phi/2)}$  soit  $tg(\phi/2) = \frac{e^\xi - 1}{e^\xi + 1}$

ou encore :

$$tg(\phi/2) = \frac{e^\xi - 1}{e^\xi + 1} = \frac{e^{\xi/2} - e^{-\xi/2}}{e^{\xi/2} + e^{-\xi/2}} = \frac{sh(\xi/2)}{ch(\xi/2)} = th(\xi/2) \quad (131)$$

**Exercice:** démontrer les trois autres relations de (130).



Soit  $e$  le point de l'équateur de longitude nulle, le point  $i(\phi, \lambda)$  de la sphère de rayon unité, peut être aussi déterminé par  $s$  et  $Ze$  :

$s$  : arc de grand cercle  $si$

$Ze$  : azimut équatorial de ce grand cercle

En  $i$ , l'azimut du grand cercle issu de  $e$ , orienté, est désigné par  $Z$ . les cinq angles  $\phi, \lambda, Z, s, Ze$  sont liés par des relations simples (application de la trigonométrie sphérique à un triangle rectangle) : d'où :

$$\begin{aligned} \sin\lambda &= tgZe \cdot tg\phi \\ \cos(s) &= \cos\phi \cdot \cos\lambda \\ \sin\phi &= \cotgZ \cdot tg\lambda \end{aligned} \quad (132)$$

D'où l'on tire, puisque  $X = \lambda$ ,  $Y = \xi$  :

- équation des grands cercles issus de  $e$  d'azimut  $Ze$  :  $\sin X = tgZe \cdot sh Y$  (133-1)

- équation des petits cercles de pôle  $e$  ( $s = \text{constante}$ ) :  $\cos X = \cos(s) \cos Y$  (133-2)

- équation des trajectoires sous l'angle  $Z$  des grands cercles issus de  $e$  (isoclines des images) :  $tg X = tg Z \cdot th Y$  (133-3)

Ces courbes sont dites **les courbes de Favé**.

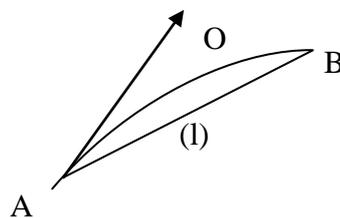
Toutes les courbes analogues définies à partir d'un point quelconque  $e'$  de l'équateur se déduisent sur la sphère par une rotation d'angle  $\lambda_{e'}$  autour de  $pp'$ , donc sur le plan par une translation  $X_{e'} = \lambda_{e'}$  le long de l'équateur.

Les courbes de Favé, tracées sur un calque, permettent de résoudre les problèmes suivants :

- détermination de l'orthodromie (chemin le plus court, c'est-à-dire grand cercle de la sphère),
- distance de ces deux points,
- azimut en un point quelconque de l'orthodromie.

En navigation, on distingue la navigation orthodromique (adoptée pour d'évidents raisons d'économie) et la navigation loxodromique (une loxodromie est la trajectoire sous angle constant des méridiens : la navigation loxodromique est dite à cap constant). La conformité montre immédiatement que l'image d'une loxodromie dans une représentation cylindrique directe conforme est une droite.

En navigation, si on considère un arc d'orthodromie(O) joignant deux points A et B , la corde AB est un segment de loxodromie, et l'angle entre l'arc AB de (O) et la corde (l) est dit : « correction de Givry ».



### V.1.3. Les Représentations cylindriques équivalentes

La condition d'équivalence  $m_1 m_2 = 1$  conduit à écrire :

$$\frac{dX}{d\lambda} = \rho N \cos \varphi \frac{d\varphi}{dY} = \text{constante} = n \quad (134)$$

soit :

$$\begin{cases} X = n\lambda \\ Y = \frac{1}{n} \int \rho N \cos \varphi d\varphi \end{cases} \quad (135)$$

Sur la sphère, on obtient :

$$\begin{cases} X = n\lambda \\ Y = \frac{1}{n} \sin \phi \end{cases} \quad (136)$$

et : 
$$m_\phi = \frac{n}{\cos \phi} = \frac{1}{m_\lambda} \quad (137)$$

si  $n < 1$ , la représentation est sécante, les parallèles automécoïques ayant pour latitudes  $\phi_1$  et  $-\phi_1$  telles que  $\cos \phi_1 = n$ .

si  $n = 1$ , la représentation est tangente, elle dite représentation isocylindrique :

$$\begin{cases} X = \lambda \\ Y = \sin \phi \end{cases} \quad (138)$$

cette dernière peut être définie géométriquement de façon simple : l'image I d'un point i de la sphère est la projection orthogonale de i sur la génératrice du cylindre circonscrit à la sphère le long de l'équateur, génératrice ayant même longitude que i.

Cette correspondance géométrique ne peut être généralisée à la représentation sécante, on peut envisager une représentation par projection orthogonale sur les génératrices d'un cylindre de rayon  $n < 1$ , mais cette représentation est aphyllactique.

Si on fait appel à un cylindre intermédiaire, la représentation équivalente admet comme parallèle automécoïque le parallèle  $\phi_1$  de la sphère avec  $\phi_1 = \text{Arccos } n$  ; l'image de ce parallèle est un cercle du cylindre de même rayon, mais non confondu avec le cercle intersection du cylindre et de la sphère, en effet  $n = \cos \phi_1$ , donc :

$$X = \lambda \cos \phi_1 \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{\cos \phi_1} \sin \phi \quad (139)$$

L'ordonnée de l'image de  $i$  de latitude  $\phi_1$  est donc  $\text{tg} \phi_1$ .

Ces remarques montrent que le schéma simpliste d'une représentation sécante en introduisant une surface cylindrique intermédiaire est dangereuse. Toute représentation plane peut être définie sans faire appel à un cylindre (ou un cône) intermédiaire : cette façon d'exposer les questions relatives aux représentations est plus dangereuse qu'utile et devrait être abandonnée, même pour des représentations élémentaires.

## **V.2. Les Représentations cylindriques transverses**

### **V.2.1. les représentations cylindriques transverses équidistantes**

L'aspect transverse de la représentation cylindrique équidistante a été utilisée par Cassini pour sa première carte de la France à l'échelle 1/86000 : il s'agit d'une représentation de l'ellipsoïde dans laquelle le méridien central est automécoïque et représenté par une droite et toutes les géodésiques de l'ellipsoïde orthogonales à ce méridien (ou dont le vertex est sur ce méridien) sont automécoïques.

# Chapitre VI

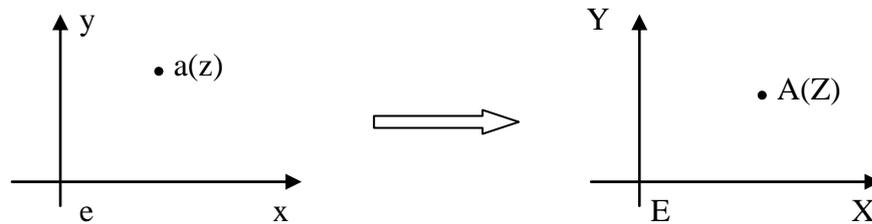
## Les Représentations Planes et les Fonctions Analytiques

### VI.1. Fonction analytique

A tout nombre complexe  $z = x + iy$  on peut faire correspondre un nombre complexe  $Z = X + iY$  par l'intermédiaire d'une fonction  $f$ . on note, en appelant  $P$  et  $Q$  les parties réelle et imaginaire de  $f$  :

$$Z = f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) \quad (140)$$

Cette correspondance entre  $z$  et  $Z$  définit une représentation d'un plan ( $p$ ) sur un plan ( $P$ ) dans laquelle le point  $A$  d'affixe  $Z$  du plan ( $P$ ) est l'image d'un point  $a$  d'affixe  $z$  du plan ( $p$ ).



L'extension des propriétés concernant les limites et la continuité, pour la fonction  $f$ , se déduit immédiatement des propriétés analogues concernant les fonctions  $P$  et  $Q$  des deux variables  $(x,y)$ .

Pour étendre à la fonction  $f$  la notion de dérivée, il faut étudier la limite, lorsque  $z \rightarrow 0$ , du rapport  $\frac{dZ}{dz}$ , qui s'écrit :

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dX + i dY}{dx + i dy} = \frac{P'_x dx + P'_y dy + i(Q'_x dx + Q'_y dy)}{dx + i dy} = \frac{(P'_x + i Q'_x) dx + (P'_y + i Q'_y) dy}{dx + i dy} \quad (141)$$

Ce rapport dépend en général de  $\frac{dy}{dx}$  ; sa limite dépend de la manière dont  $dz$  tend vers zéro, ou encore de la façon dont le point  $a'$  d'affixe  $z + dz$  tend vers le point  $a$  d'affixe  $z$  : si  $a'$  tend vers  $a$  en décrivant une spirale dont  $a$  est le point asymptotique, par exemple, la limite n'existe pas.

Mais le rapport  $\frac{dZ}{dz}$  est une fonction homographe de  $(dx, dy)$ . La limite quand  $dz \rightarrow 0$ , est indépendante de la façon dont  $dz \rightarrow 0$ , c'est-à-dire dont  $dx$  et  $dy$  tendent (indépendamment)

vers 0, si :

$$P'_x + i Q'_x = \frac{P'_y + i Q'_y}{i} \quad (142)$$

C'est-à-dire si :

$$P'_x = Q'_y \quad \text{et} \quad P'_y = -Q'_x \quad (143)$$

Ou :

$$\boxed{\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}} \quad (144)$$

Relations connues sous le nom de **conditions de Cauchy**.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, la fonction  $f$  admet, en tout point de son domaine de définition, une dérivée notée :

$$\boxed{f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{dZ}{dz} = P'_x + iQ'_x = Q'_y - iP'_y} \quad (145)$$

La fonction  $f$  est dite **analytique**.

Au point  $a$  du plan ( $p$ ), quelle que soit la direction du vecteur  $\mathbf{a_0a}$ , d'affixe  $dz$ , on peut écrire :

$$dZ = f'(z_0) \cdot dz = \|f'(z_0)\| \cdot e^{i\text{Arg}f'(z_0)} \cdot dz \quad (146)$$

relation qui exprime que le vecteur  $\mathbf{A_0A}$  se déduit du vecteur  $\mathbf{a_0a}$  par une similitude, dont le rapport est  $\|f'(z_0)\|$  et l'angle  $\text{Arg}f'(z_0)$ .

La représentation du plan ( $p$ ) sur le plan ( $P$ ) est donc conforme. On peut écrire :

$$dS = \|dZ\| \quad \text{et} \quad ds = \|dz\| \quad (147)$$

Le module linéaire de la représentation est :

$$m = \left\| \frac{dZ}{dz} \right\| \quad \text{et} \quad \text{Arg} \left( \frac{dZ}{dz} \right) = \text{Arctg} \left( \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}}{\frac{\partial X}{\partial x}} \right) = \alpha \quad (148)$$

$\alpha$  angle de la tangente en  $A_0$  à l'image  $\{y_0\}$  de la droite  $y = y_0$  du plan ( $p$ ), en effet, cette image est définie en fonction du paramètre  $x$ , par :

$$X = X(x, y_0) \quad (149-1)$$

$$Y = Y(x, y_0) \quad (149-2)$$

Les conditions de Cauchy se traduisent aussi en disant que les fonctions  $P$  et  $Q$  sont des fonctions harmoniques, c'est-à-dire qu'elles satisfont l'équation de Laplace :

$$\boxed{\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0} \quad (150)$$

On démontre les propriétés suivantes :

- si  $f$  est une fonction analytique, elle admet des dérivées de tous les ordres : elle est donc développable en série entière en tout point de son domaine de définition.
- Une fonction analytique est déterminée dans tout son domaine d'existence, si elle est définie dans une région, aussi petite qu'on la suppose, entourant un point  $a$  ; ou même tout le long d'un arc de courbe, aussi petit qu'on le suppose, aboutissant au point  $a$ .

En effet, la connaissance de  $f$  au voisinage de  $a$  permet (théoriquement tout au moins) de former la suite des dérivées de  $f$  au point  $a$ , donc, d'écrire son développement en série de Taylor. Si  $b$  est un point intérieur au cercle de convergence de cette série, on peut alors calculer les dérivées successives de  $f$  au point  $b$ , et ainsi de suite. L'opération est dite prolongement analytique de  $f$ .

## VI.2. Représentation conforme d'une surface sur une autre

La représentation d'une surface modèle ( $\sigma$ ) sur une surface image ( $\Sigma$ ) est définie en établissant une correspondance entre les coordonnées curvilignes  $(u, v)$  de ( $\sigma$ ) et  $(U, V)$  de ( $\Sigma$ ) :

$$U = U(u, v) \quad (151-1)$$

$$V = V(u, v) \quad (151-2)$$

Le module linéaire est alors :

$$m(u, v) = \frac{dS}{ds} \Rightarrow m^2(u, v) = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{EdU^2 + 2FdU \cdot dV + GdV^2}{edu^2 + 2fdU \cdot dv + gdv^2} \quad (152)$$

La représentation est conforme si  $m$  est indépendante de  $du/dv$ , c'est-à-dire si :

$$\frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g} \quad (153)$$

- si les coordonnées  $(u, v)$  sont orthogonales, les deux conditions précédentes deviennent :

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{E}{e} = \frac{G}{g} \quad (154)$$

- si les coordonnées  $(u, v)$  sont symétriques, alors  $e = g$ , les conditions de conformité s'écrivent :

$$F = 0, \quad E = G \Rightarrow \text{les coordonnées } U \text{ et } V \text{ sont symétriques}$$

$$\text{Or :} \quad F = 0 \Rightarrow U'_u U'_v + V'_u V'_v = 0 \quad (156)$$

$$E = G \Rightarrow U'_u{}^2 + V'_u{}^2 = U'_v{}^2 + V'_v{}^2 \quad (157)$$

De la première relation (156), on tire :

$$V'_u = -\frac{U'_u U'_v}{V'_v} \quad (158)$$

D'où :

$$U'_u{}^2 \left( 1 + \frac{U'_v{}^2}{V'_v{}^2} \right) = U'_v{}^2 + V'_v{}^2 \quad (159)$$

Soit :

$$U'_u = \pm V'_v \quad \text{et} \quad U'_v = \pm V'_u \quad (160)$$

Les équations (160) sont, pour les fonctions  $U$  et  $V$ , les conditions de Cauchy.

La correspondance entre le plan des  $(u, v)$  et celui des  $(U, V)$  est une représentation conforme et on peut poser :

$$Z = U + iV, \quad z = u + iv \quad (161)$$

Toute fonction analytique  $f$  définit une représentation conforme de ( $\sigma$ ) sur ( $\Sigma$ ).

$(u, v)$  et  $(U, V)$  étant des coordonnées symétriques, les éléments linéaires  $ds$  et  $dS$  s'écrivent :

$$ds^2 = h^2(u, v)(du^2 + dv^2) \quad \text{ou} \quad ds = |h(u, v)| \cdot \|dz\| \quad (162)$$

et :

$$dS^2 = H^2(U, V)(dU^2 + dV^2) \quad \text{ou} \quad dS = |H(U, V)| \cdot \|dZ\| \quad (163)$$

Alors le module linéaire est donné par :

$$m = \left| \frac{H(U, V)}{h(u, v)} \right| \cdot \left\| \frac{dZ}{dz} \right\| \quad (164)$$

L'argument de  $\frac{dZ}{dz}$  s'interprète d'une manière analogue à ce qui se passe dans la représentation d'un plan sur un plan.

Si en particulier, la surface image est un plan :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 \quad (165)$$

Et :

$$m = \left| \frac{1}{h(u, v)} \right| \cdot \left\| \frac{dZ}{dz} \right\| \quad (166)$$

Si la surface modèle est un modèle de la terre : on a  $ds^2 = r^2(d\lambda^2 + d\xi^2)$  (167)

Pour un ellipsoïde :  $r = N \cos \phi$  et  $\xi$  est la latitude isométrique,

Pour une sphère :  $r = a \cos \phi$  et  $\xi$  est la latitude croissante ou variable de Mercator.

Pour une représentation plane conforme, le modèle linéaire est :

$$m = \frac{1}{r} \cdot \left\| \frac{dZ}{dz} \right\| \quad (168)$$

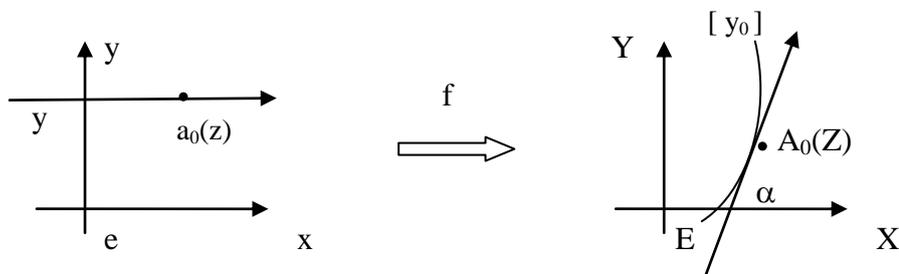
avec  $z = \lambda + i\xi$  et  $Z = X + iY$  ou  $z = \xi + i\lambda$  et  $Z = Y + iX$ . Dans ce dernier cas, on a :

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{\partial Y}{\partial \xi} + i \frac{\partial X}{\partial \xi} \quad (169)$$

Donc :

$$\text{Arg} \left( \frac{dZ}{dz} \right) = \text{Arctg} \left( \frac{\frac{\partial X}{\partial \xi}}{\frac{\partial Y}{\partial \xi}} \right) \quad (170)$$

qui n'est autre que le gisement de l'image du méridien.



### VI.3. Exemples

Si  $z = \lambda + i\xi$  et  $Z = X + iY$

1- L'équation:  $Z = kz$  (171)

définit toutes les représentations cylindriques directes. Le module linéaire est :

$$m = \frac{1}{r} \cdot \left\| \frac{dZ}{dz} \right\| = \frac{k}{r} \quad (172)$$

2- Le modèle étant une sphère de rayon a,

$$Z = ae^{iz} \quad (173)$$

définit une représentation plane conforme. Si on désigne par  $R$  et  $\Omega$  le module et l'argument du complexe  $Z$ , on a :

$$R \cdot e^{i\Omega} = ae^{-\xi} e^{i\lambda} = \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) e^{i\lambda} \quad (174)$$

Soit :  $\Omega = \lambda$  et  $R = a \cdot \text{tg}(\pi/4 - \phi/2)$  (175)

Il s'agit de la projection stéréographique directe, perspective de la sphère à partir du pôle  $p'$  sur le plan de l'équateur. Le module linéaire s'écrit :

$$m = \frac{-dR}{a d\phi} = \frac{1}{2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)} = \frac{1}{1 + \sin \phi} \quad (176-1)$$

ou :

$$m = \frac{1}{a \cos \phi} \cdot \left\| \frac{dZ}{dz} \right\| = \frac{\text{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)}{\cos \phi} = \frac{1}{1 + \sin \phi} \quad (176-2)$$

3- L'équation :  $Z = ke^{iz}$  (177)

définit pour l'ellipsoïde une représentation azimutale directe, analogue à la précédente, mais qui n'est pas une "projection" et qu'il est préférable de ne pas qualifier de stéréographique, comme pour la sphère.

4- Toutes les représentations coniques conformes directes d'un modèle de la terre (sphérique ou ellipsoïdique) peuvent être définies par :

$$Z = C \cdot e^{niz} \Leftrightarrow R \cdot e^{i\Omega} = C e^{-n\xi} e^{in\lambda} \quad (178)$$

Le module linéaire est :

$$m = \frac{1}{r} \cdot \left\| \frac{dZ}{dz} \right\| = \frac{1}{r} \cdot nC \cdot e^{-n\xi} = n \frac{R}{r} \quad (179)$$

L'argument de  $(dZ/dz)$  est  $n\lambda$  : c'est au signe près, le gisement du méridien.

5- **Représentation de Littrow** : à titre d'exercice, étudier la représentation conforme d'une sphère de rayon unité définie par :

$$\boxed{Z = \sin z} \quad (180)$$

Avec  $z = \lambda + i\xi$  et  $Z = X + iY$ .

Préciser le canevas, l'image de l'équateur, celles des méridiens.

Vérifier que les points  $f$  et  $f'$  ( $\phi = 0, \lambda = \pm\pi/2$ ) sont des points singuliers.

Etudier les images plans des cercles de diamètre  $ff'$  et des petits cercles orthogonaux.

Soit  $s$  le point ( $\lambda = 0, \phi = \phi_0$ ). On appelle segment capable sphérique l'ensemble des points  $b$  tels que l'angle  $(bp, bs) = \alpha$ . Quel est l'image plane de cette courbe dans la représentation de Littrow ? (application : relèvement radiogonométrique en navigation).

6- La projection stéréographique d'une sphère est la seule représentation plane conforme qui couvre tout le plan. Pour une sphère de rayon unité, elle est définie par :

$$Z = e^{iz} \quad (181)$$

On peut définir une autre variable complexe :

$$\zeta = e^{iz} \quad (182)$$

qu'on désigne par variable stéréographique. Alors toute fonction analytique de  $\zeta$  définit une nouvelle représentation plane conforme. Ainsi :

$$\boxed{Z = C \zeta^n} \quad (183)$$

définit toutes les représentations coniques conformes.

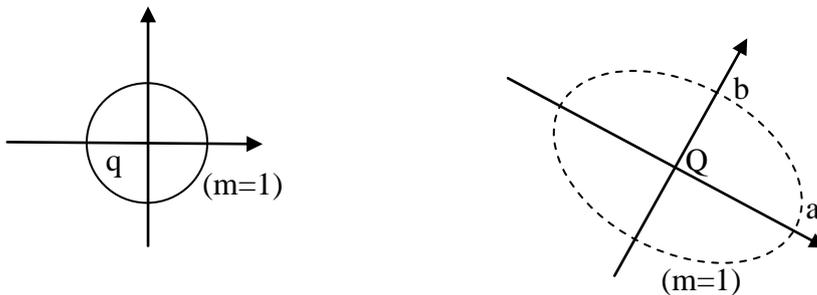
On peut aussi prendre pour  $f$  un polynôme en  $\zeta$  et déterminer les coefficients de ce polynôme en imposant à la représentation considérée certaines conditions particulières. A titre d'exemple, deux cartes (l'une de l'Afrique, l'autre de l'Océan Pacifique) ont été réalisées de la façon suivante :

- on définit une projection stéréographique sécante d'un modèle sphérique, projection oblique de pivot  $q$ . Les isomètres sont des cercles de pôle  $q$  sur la sphère, de centre  $Q$  dans le plan ; en particulier l'isomètre  $m = 1$ . La variable  $\zeta'$  étant définie par rapport à  $\phi'$  et  $\lambda'$  pseudo longitude et pseudo latitude, comme  $\zeta$  est définie par rapport à  $\phi$  et  $\lambda$ , on obtient une autre représentation conforme en écrivant :

$$Z = C_1 \zeta'^3 + C_2 \zeta \quad (184)$$

On détermine les deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  en imposant les deux conditions suivantes :

le module linéaire est égal à l'unité en deux points  $a$  et  $b$  choisis sur deux grands cercles orthogonaux issus de  $q$ . Les isomètres sont alors des ovales. Sur la carte du Pacifique, par exemple, les coefficients sont déterminés pour que l'isomètre automécoïque épouse sensiblement l'ensemble des côtes des continents qui bordent cet océan.



### 7- Représentations polyconiques circulaires conformes de la sphère

Une représentation est dite circulaire si le canevas est composé de cercles ou d'arcs de cercles. Une représentation circulaire conforme est nécessairement polyconique : en effet, les images des méridiens appartiennent au faisceau des cercles à points de base P et P' images des pôles p et p' de la sphère, l'un des méridiens a comme image la droite PP' et les images des parallèles sont centrées sur cette droite, puisqu'elles appartiennent au faisceau à points limites P et P'.

Toute projection stéréographique (de pivot quelconque) appartient à cette famille de représentations. Or la projection stéréographique directe est définie par :

$$Z = \zeta \quad (185)$$

Et la fonction la plus générale qui, à des cercles orthogonaux du plan des  $\zeta$  fait correspondre dans le plan des Z des cercles orthogonaux est la fonction homographique la plus générale de  $\zeta^n$  (n réel positif).

Donc les représentations polyconiques circulaires conformes de la sphère peuvent être définies

par :

$$Z = \frac{a\zeta^n + a'}{b\zeta^n + b'} \quad (186)$$

Où a, a', b, b' sont des paramètres complexes et n un réel positif.

On ne restreint pas la généralité en choisissant comme axe des Y l'image du méridien origine ( $\lambda = 0$ ) et pour images P et P' des pôles p et p' les points de cet axe d'ordonnées +1 et -1.

Dans le plan des  $\zeta$ , le pôle sud p' est rejeté à l'infini ; dans le plan des Z, l'affixe de P' est -i :

$$\zeta = \infty \text{ et } Z = -i \Rightarrow \boxed{a/b = -i} \quad (187)$$

Dans le plan des  $\zeta$ , le pôle nord p a pour affixe  $\zeta = 0$  ; dans le plan des Z, l'affixe de P est +i :

$$\zeta = 0 \text{ et } Z = +i \Rightarrow \boxed{a'/b' = +i} \quad (188)$$

Les images des méridiens sont les cercles du faisceau à points de base P et P' ; l'axe des X médiatrice de PP', est donc l'image d'un cercle orthogonal à tous les méridiens, donc l'image d'un parallèle de latitude  $\phi_0$ .

Alors l'origine est l'image du point ( $\phi = \phi_0, \lambda = \lambda_0$ ), c'est-à-dire du point dont l'affixe dans le plan des  $\zeta$  est  $\zeta_0 = e^{-n\lambda_0}$  :

$$\zeta_0 = e^{-n\xi_0} \quad \text{et} \quad Z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{a'}{a} = -\zeta_0^n} \quad (189)$$

Finalement, les paramètres  $a'$ ,  $b$  et  $b'$  sont liés à  $a$  et  $\zeta_0$  par les relations :

$$a' = -a\zeta_0^n, \quad b = a.i, \quad b' = a.i.\zeta_0^n \quad (190)$$

Donc les représentations polyconiques circulaires conformes sont définies par :

$$\boxed{Z = \frac{1}{i} \frac{\zeta^n - \zeta_0^n}{\zeta^n + \zeta_0^n} = i \cdot \frac{\zeta_0^n - \zeta^n}{\zeta_0^n + \zeta^n} = \operatorname{tg} \frac{n}{2} (z - z_0)}$$

avec  $\zeta_0 = e^{-\xi_0}$  et  $z_0 = i\xi_0$

(191)

Si en particulier, on choisit  $\phi_0 = 0$ , l'axe des  $X$  est alors l'image de l'équateur, et :

$$\boxed{Z = \operatorname{tg} \frac{n}{2} z} \quad (192)$$

représentations connues sous le nom de représentations de Lagrange.

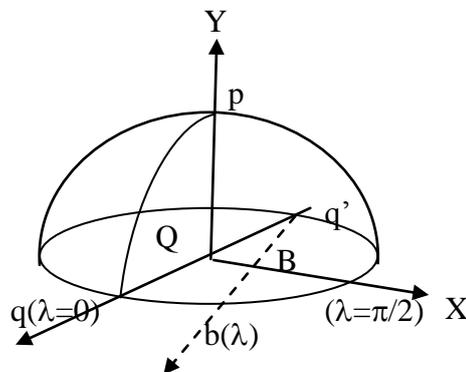
Si  $n = 1/2$ , l'ensemble de la sphère est représenté à l'intérieur du cercle de diamètre  $PP'$ .

Si  $n = 1$ , la représentation est la projection stéréographique de pivot  $q(\phi = 0, \lambda = 0)$ , perspective de la sphère à partir du point  $q'(\phi = 0, \lambda = \pi)$  sur le plan des méridiens  $\lambda = \pm\pi/2$ .

Si  $n = 2$ , la représentation est l'aspect transverse de la représentation de Littrow (voir précédemment).

#### VI.4. Aspect transverse des représentations conformes

La seconde propriété mentionnée (prolongement analytique) permet de déterminer très simplement la fonction  $f$  définissant pour une sphère, une représentation conforme transverse de tel ou tel type.



\* Ainsi, soit  $f$  la fonction analytique définissant la projection stéréographique transverse (ou méridienne), de pivot  $q(\phi = 0, \lambda = 0)$ , c'est-à-dire la perspective de la sphère à partir de  $q'(\phi = 0, \lambda = \pi)$  sur le plan des méridiens  $\lambda = \pm\pi/2$ .

On adopte comme axes :  $QX$  image de l'équateur,

$QY$  image du méridien  $\lambda = 0$

$$Z = X + iY = f(\lambda + i\xi)$$

Si  $\phi = 0$ , alors  $\xi = 0$  et on veut que  $Y = 0$ , alors  $X = f(\lambda)$ .

Or le point  $b$  de l'équateur de longitude  $\lambda$  a pour image le point  $B$  de l'axe  $QX$ , d'abscisse :

$$X = \operatorname{tg}(\lambda/2)$$

La fonction  $f$  est donc déterminée par :  $f(\lambda) = \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$  (193)

Et la fonction stéréographique de pivot  $q$  est donc définie par :  $Z = \operatorname{tg} \frac{z}{2}$  (194)

Autrement : tout point de longitude nulle, de latitude  $\phi$ , a pour image sur l'axe des  $Y$ , d'abscisse nulle  $X = 0$  et d'ordonnée  $\operatorname{tg}(\phi/2)$ .

Or si  $\lambda = 0$ ,  $X = 0$  donc  $iY = f(i\xi)$

Et  $Y = \operatorname{tg}(\phi/2) = \operatorname{th}(\xi/2)$  relation qui permet d'écrire :

$iY = i \cdot \operatorname{th}(\xi/2) = \operatorname{tg}(i\xi/2)$  et  $iY = f(i \cdot \xi)$  ce qui donne:  $Z = \operatorname{tg} \frac{z}{2}$  (195)

La représentation considérée peut être aussi définie à partir de la variable stéréographique  $\zeta$ .

$$Z = f(\zeta) = f(e^{-\xi} \cdot e^{i\lambda}) \quad (196)$$

L'équateur ( $\phi = 0$ ) a pour image l'axe des  $X$  ( $Y = 0$ ). Or pour  $\phi = 0$ ,  $e^{-\xi} = 1$ . Donc pour tout point d'ordonnée nulle, on a :

$$\left. \begin{array}{l} X = f(e^{i\lambda}) \\ \text{et } X = \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1 \cdot e^{i\lambda} - 1}{i \cdot e^{i\lambda} + 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{1 \cdot \zeta - 1}{i \cdot \zeta + 1}} \quad (197)$$

D'une façon analogue, l'image du méridien origine ( $\lambda = 0$ ) a pour image l'axe des  $Y$  ( $X = 0$ ). Alors, pour tout point d'abscisse nulle :

$$\left. \begin{array}{l} iY = f(e^{i\lambda}) \\ \text{et } Y = \operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right) = \operatorname{th}\left(\frac{\xi}{2}\right) \text{ ou } iY = i \operatorname{th}\left(\frac{\xi}{2}\right) = i \frac{e^{\xi} - 1}{e^{\xi} + 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Z = i \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}} \quad (198)$$

- une représentation cylindrique conforme transverse de la sphère, de pivot  $q$  ( $\phi = 0$ ,  $\lambda = \pi/2$ ) peut être précisée dans le plan par l'un ou l'autre système d'axes :
  - $(PX_1)$  et  $(PY_1)$  images des méridiens ( $\lambda = 0$ ) et ( $\lambda = \pi/2$ ).
  - $(EX)$  et  $(EY)$  images de l'équateur et du méridien origine.

Si on pose  $Z_1 = X_1 + i Y_1$ ,  $z = \lambda + i\xi$  ou encore  $\zeta = e^{iz} = e^{-\xi} \cdot e^{i\lambda}$ .

Dans le premier système  $(P, X_1, Y_1)$  :

$$\lambda = 0 \Rightarrow Y = 0 \quad \text{d'où} \quad X_1 = f(e^{-\xi}) \quad (199)$$

$$\text{Le méridien origine est automécoïque donc : } X_1 = \frac{\pi}{2} - \phi \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{X_1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = e^{-\xi} \quad (200)$$

La représentation est alors définie par :

$$\boxed{Z = 2\operatorname{Arctg}(\zeta) = 2\operatorname{Arctg}(e^{iz})} \quad (201)$$

Si on pose  $Z_1 = X_1 + i Y_1$ ,  $z = \lambda + i\xi$  ou encore  $\zeta = e^{iz} = e^{-\xi} \cdot e^{i\lambda}$ .

Dans le deuxième système  $X + i Y = f(\lambda + i\xi)$  :

$$\lambda = 0 \Rightarrow X = 0 \quad \text{d'où} \quad iY = f(i\xi) \quad (202)$$

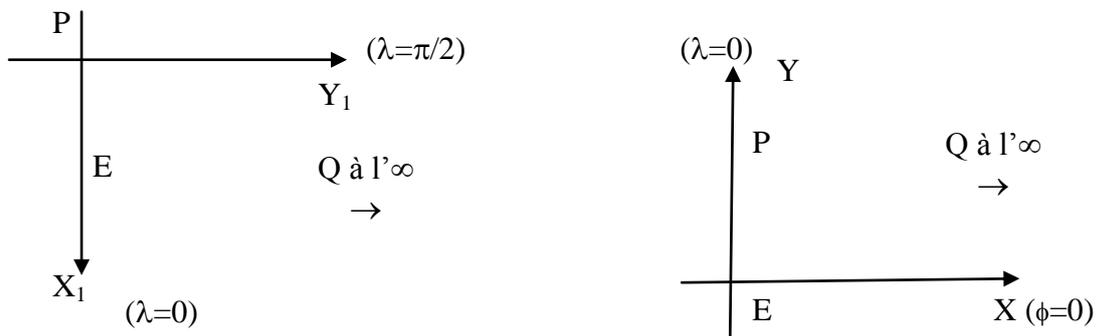
Le méridien origine est automécoïque donc :  $Y = \phi \Rightarrow i\phi = f(i\xi)$  (203)

Or :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right) = \operatorname{th}\left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow i\operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right) = i\operatorname{th}\left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{th}\left(i\frac{\phi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(i\frac{\xi}{2}\right) \quad (204)$$

La représentation est alors définie par :

$$\boxed{Z = 2\operatorname{Argth}\left(\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right) \text{ ou } Z = \operatorname{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)} \quad (205)$$



# Chapitre VII

## Représentation d'un Ellipsoïde sur une Sphère

### VII.1. Généralités

La représentation d'un ellipsoïde sur une sphère intervient d'une part en cartographie, comme intermédiaire pour définir une représentation plane (double projection), en particulier lorsque le pivot n'est pas l'un des pôles ; d'autre part, dans les différentes questions de géodésie géométrique, en raison de la faible valeur de l'excentricité, le module linéaire d'une représentation sphérique reste voisin de l'unité les longueurs sur l'ellipsoïde pourront être facilement obtenues à partir des longueurs calculées sur une sphère au moyen des formules finies de la trigonométrie sphérique.

La notion d'échelle nominale d'une carte peut naturellement être étendue à une représentation sphérique, et les remarques du chapitre III restent valables dans ce cas. Pour l'étude d'une représentation plane, il est commode et suffisant d'adopter comme unité de longueur, sur le modèle et sur l'image, un élément du modèle : rayon de la sphère ou demi grand axe de l'ellipsoïde. Pour l'étude d'une représentation d'un ellipsoïde sur une sphère, il est préférable de définir le modèle par son excentricité et la longueur  $a$  du demi grand axe de l'ellipse méridienne, l'image par son rayon  $R$ .

Une représentation sphérique quelconque est alors définie :

A - si on précise la valeur du rayon  $R$  de la sphère,

B - si on établit entre le point  $i(\varphi, \lambda)$  du modèle (ellipsoïde) et le point  $I(\phi, \Lambda)$  de l'image (sphère) une correspondance de la forme :

$$\phi = \phi(\varphi, \lambda) \quad (206-1)$$

$$\Lambda = \Lambda(\varphi, \lambda) \quad (206-2)$$

Mais pour la résolution des problèmes envisagés en géodésie ou en cartographie, il suffit de généraliser, de considérer les seules représentations sphériques dans lesquelles les méridiens et les parallèles ellipsoïdiques ont pour image respectivement les grand cercles de la sphère passant par un point et les petits cercles orthogonaux qui leur sont (méridiens et parallèles sphériques) autrement dit, l'étude faite dans les paragraphes suivants se bornera à des correspondances de la forme :

$$\phi = \phi(\varphi) \quad (207)$$

$$\Lambda = \Lambda(\lambda)$$

Dans ces conditions, les directions principales sont sur les deux surfaces, les méridiens et les parallèles ; et les modules principaux sont les modules linéaires  $m_\lambda$  (suivant les méridiens) et  $m_\varphi$  (suivant les parallèles) ; avec les notations précédentes, ceux-ci ont pour valeurs :

$$m_1 = m_\lambda = \frac{R d\phi}{\rho d\varphi} \quad \text{et} \quad m_2 = m_\varphi = \frac{R \cos \phi d\Lambda}{N \cos \varphi d\lambda} \quad (208)$$

C'est aux représentations conformes que le plus souvent, le géodésien donne la préférence, le cartographe peut en outre, avoir besoin, pour définir une représentation plane équivalente, d'une représentation intermédiaire sur une sphère, représentation qu'il convient alors de choisir équivalente. Ces deux types de représentations amènent à introduire deux nouveaux paramètres :

latitude conforme et latitude équivalente. Mais d'autres types de représentations peuvent être envisagées : le plus simple est décrit dans le paragraphe suivant.

### VII.2. La Représentation de Bessel

La représentation de Bessel utilise la sphère de rayon  $a$  tangente à l'ellipsoïde le long de l'équateur- la correspondance entre le modèle et l'image est l'affinité qui permet de passer de l'ellipse méridienne à son cercle principal.

Il apparaît immédiatement que tous les parallèles sont automécoïques :

$$\forall \varphi \quad m_\varphi = 1 \quad (209)$$

Le module linéaire suivant les méridiens a pour valeur :

$$m_\lambda = \frac{a d\phi}{\rho d\varphi} \quad (210)$$

Avec :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = a(1-e^2) \cdot \frac{1}{W^3} \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{W^2} \quad (211)$$

$$W = 1 - e^2 \sin^2 \varphi \quad (212)$$

D'où :

$$m_\lambda = \frac{W}{\sqrt{1-e^2}} = V = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi \quad (213)$$

$e'$  la deuxième excentricité.

### VII.3. Les Représentations Conformes

Remarque importante : il convient de bien noter que la lettre  $\phi$  est toujours relative à une sphère, mais et ceci pour éviter de multiplier les notations que la signification de ce symbole est propre à la sphère considérée.

Dans le paragraphe précédent,  $\phi$  est la latitude réduite, déjà utilisée.

Dans ce paragraphe et les suivants si  $\varphi$  est la latitude ellipsoïdique du point  $i$ ,  $\phi$  est la latitude du point correspondant  $I$  d'une sphère image qui sera précisée ultérieurement.

#### VII.3.1. Cas général

La condition de conformité  $m_\lambda = m_\varphi$  s'écrit :

$$\frac{R d\phi}{\rho d\varphi} = \frac{R \cos \phi d\Lambda}{N \cos \phi d\lambda} \quad \text{ou} \quad \frac{d\Lambda}{d\lambda} = \frac{N \cos \phi d\phi}{\rho \cos \phi d\varphi} \quad (214)$$

Si on considère uniquement les représentations dans lesquelles  $\Lambda$  est fonction de la seule variable  $\lambda$  et  $\phi$  fonction de la seule variable  $\varphi$ , l'égalité précédente ne peut être réalisée que si les deux membres sont constants.

$n$  étant une constante, la représentation conforme est donc définie par :

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} = n \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{\cos \phi} = n \frac{\rho d\phi}{N \cos \varphi} \quad (215)$$

Ou encore par:

$$d\Lambda = n d\lambda \quad \text{et} \quad dL_S = n dL_E \quad (216)$$

En désignant par  $L_S$  la latitude croissante (sphère) et  $L_E$  la latitude isométrique (ellipsoïde).

Si on adopte comme origines des longitudes sur les deux surfaces deux méridiens correspondants, l'intégration de ces deux équations différentielles conduit à :

$$\Lambda = n\lambda \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = C \left( \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right)^n \quad (217)$$

Ou

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{C} \left( \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right)^n \quad (218)$$

Les relations qui définissent  $\phi$ , où  $C$  est une constante d'intégration, montrent que les pôles sont des points correspondants. La place qu'y occupe la constante  $n$  justifie le nom qu'on lui donne d'exposant de la représentation.

Enfin, le module linéaire, fonction de la seule variable  $\varphi$  a pour expression

$$m(\varphi) = n \frac{R \cos \phi}{N \cos \varphi} \quad (219)$$

Si on considère les variables complexes :

$$Z_S = \Lambda + iL_S \quad Z_E = \lambda + iL_E \quad (220)$$

Les résultats précédents sont résumés par la relation linéaire :

$$Z_S - (Z_S)_0 = n(Z_E - (Z_E)_0) \quad (221)$$

Où l'indice zéro correspond à la latitude  $\phi_0$  sur la sphère et à la latitude  $\varphi_0$  sur l'ellipsoïde.

Les carrés des éléments linéaires s'écrivent :

$$dS^2 = R^2 \cos^2 \phi (d\Lambda^2 + dL_S^2) \quad (222)$$

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (d\lambda^2 + dL_E^2) \quad (223)$$

$$\left| \frac{dZ_S}{dZ_E} \right| = n \quad (224)$$

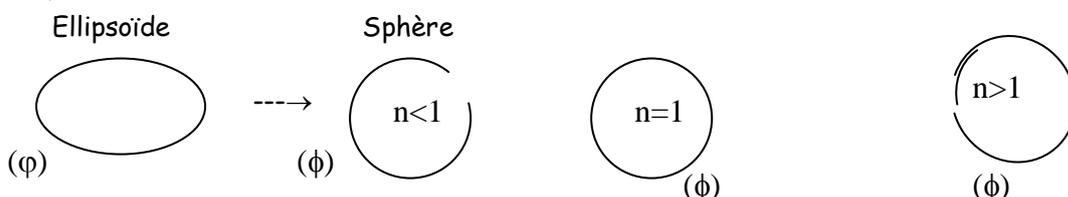
On retrouve ainsi la valeur du module linéaire par la méthode indiquée précédemment.

La représentation dépend de trois paramètres  $R$ ,  $n$ ,  $C$ .

Dans tous les cas, les pôles sont des points correspondants : ce sont en général, puisque  $\Lambda = n\lambda$ , des points singuliers sauf si  $n = 1$ .

Les équateurs ne sont des courbes correspondantes que si  $C = 1$ .

Suivant les valeurs de  $n$ , l'image du parallèle ellipsoïdique de latitude  $\varphi$  est un arc de cercle d'amplitude inférieur à  $2\pi$  ( $n < 1$ ), égale à  $2\pi$  ( $n = 1$ ) ou supérieur à  $2\pi$  ( $n > 1$ ), dans ce dernier cas, la représentation de la surface totale de l'ellipsoïde présente sur la sphère un recouvrement partiel.



S'il existe un parallèle automécoïque ( $\varphi_0$ ) sur l'ellipsoïde, son image est un parallèle ( $\phi_0$ ) de la sphère (qui peut se présenter sous l'une des trois formes précédentes)  $\varphi_0$  et  $\phi_0$  étant liés par :

$$n \frac{R \cos \phi_0}{N_0 \cos \varphi_0} = 1 \quad (225)$$

Relation satisfaite également pour les latitudes correspondantes ( $-\varphi_0$ ) et ( $-\phi_0$ ). Donc s'il existe un parallèle automécoïque, il en existe nécessairement deux, de latitudes opposées : la représentation est dite **sécante**.

Les deux parallèles automécoïques ne peuvent être confondus que si  $\varphi_0 = 0$  et  $\phi_0 = 0$ , c'est-à-dire si les équateurs sont des courbes correspondantes. Dans ce cas,  $C = 1$  et  $N_0 = a$  entraînent :

$$n.R = a \quad (226)$$

La représentation est dite **tangente**.

### VII.3.2. Représentations de Soldner

Les représentations les plus simples sont obtenues pour  $n = 1$  : les longitudes sont conservées  $\Lambda = \lambda$ .

Si les parallèles automécoïques ont pour latitudes ( $\varphi_0$ ) et ( $-\varphi_0$ ) et qu'on pose :

$\phi_0 = \varphi_0$ , de la relation :

$$\frac{R \cos \phi_0}{N_0 \cos \varphi_0} = 1 \quad (227)$$

on tire :

$$R = N_0 \quad (228)$$

C'est la représentation conforme sécante sur la sphère de rayon  $N_0$  ou **sphère de Soldner**.

Si  $n = 1$  et  $C = 1$ , les équateurs se correspondent :  $\varphi = 0 \Rightarrow \phi = 0$

Si, en outre, la représentation est tangente (équateur automécoïque),  $\varphi_0 = \phi_0 = 0$  et  $(L_S)_0 = (L_E)_0$ . On obtient la représentation conforme tangente sur la sphère de Soldner de rayon  $a$ , définie par :

$$\Lambda = \lambda \quad L_S = L_E \quad \text{ou} \quad \phi = \varphi_c \quad (229)$$

$\varphi_c$  Etant la latitude conforme définie par :

$$\frac{d\varphi_c}{\cos \varphi_c} = \frac{\rho d\phi}{N \cos \varphi} \quad (230)$$

ou :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}\right)^{e/2} \quad (231)$$

La latitude conforme, ou plus exactement, la différence  $\varphi - \varphi_c$  est tabulée (O. Adams, [1]) pour les différentes ellipsoïdes utilisées, à partir d'un développement qui s'écrit (en négligeant les termes en  $e^6$ ) :

$$\varphi - \varphi_c = \left[ \frac{e^2}{2} + \frac{5e^4}{24} + \dots \right] \sin 2\varphi - \left[ \frac{5e^4}{48} + \dots \right] \sin 4\varphi + \dots \quad (232)$$

La différence  $\varphi - \varphi_c$ , toujours positive, est nulle pour  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 90^\circ$  ; sa valeur maximale, pour  $\varphi = 45^\circ$  est environ  $11'30''$ .

On appelle latitude géocentrique  $\varphi_g$  l'angle que fait un demi-diamètre de l'ellipse méridienne avec son grand axe. La différence  $\varphi - \varphi_g$  peut s'écrire :

$$\varphi - \varphi_g = \left[ \frac{e^2}{2} + \frac{6e^4}{24} + \dots \right] \sin 2\varphi - \left[ \frac{6e^4}{48} + \dots \right] \sin 4\varphi + \dots \quad (233)$$

La partie principale de la différence  $\varphi_g - \varphi_c$  est donc :

$$\varphi_g - \varphi_c = \left[ \frac{e^4}{24} + \dots \right] \sin 2\varphi - \left[ \frac{e^4}{48} + \dots \right] \sin 4\varphi + \dots \quad (234)$$

dont la valeur maximale n'excède pas 0.5".

La représentation conforme de l'ellipsoïde sur la sphère de rayon  $a$  peut donc être considérée sensiblement comme une perspective de l'ellipsoïde sur cette sphère à partir de son centre.

### Remarques

Les sphères de Soldner sont souvent appelées sphères tangentes le long de tel parallèle. Pour éviter toute faute d'interprétation, il serait préférable de dire simplement sphère de Soldner ou sphère de rayon  $N_0$ .

L'épithète 'tangente' risque d'entraîner une confusion avec représentation tangente. Si la figure (1) met en évidence le rayon de la sphère, il semble plus correct de schématiser la représentation par la figure (2).

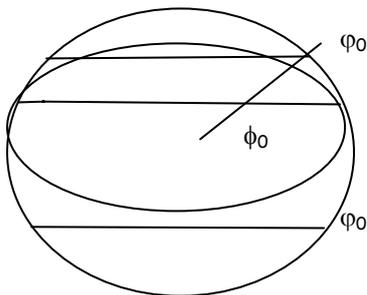


Fig. 1

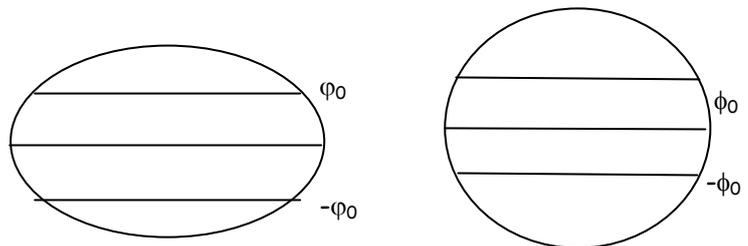


Fig. 2

Il convient aussi de noter que l'expression " représentation sécante " doit être comprise avec la signification donnée : la qualificatif résume simplement le fait que la représentation admet deux parallèles automécoïques. Il ne s'agit, bien entendu en aucune manière de la sphère coupant l'ellipsoïde suivant les deux parallèles ( $\varphi_0$ ) et ( $-\varphi_0$ ).

La représentation de Bessel (affinité) et la représentation conforme tangente de Soldner utilisent l'un et l'autre une sphère de rayon  $a$ . mais le point I correspondant au point  $i$  de latitude ellipsoïdique  $\varphi$  est défini :

Sur la sphère de Bessel par la latitude réduite  $\phi$ .

Sur la sphère de Soldner par la latitude conforme  $\varphi_c$ .

### VI.3.3. Représentation conforme à déformation minimale - sphère de Gauss

On peut chercher à déterminer les trois paramètres  $R$ ,  $n$ ,  $C$  dont dépend la représentation pour que le module linéaire reste aussi voisin que possible de l'unité.

Soit  $\varphi_0$  la latitude du parallèle automécoïque et  $\phi_0$  la latitude sphérique correspondante. Ces deux quantités et les trois paramètres  $R, n, C$  sont liées par :

$$m(\varphi_0) = 1 \quad \text{soit} \quad nR \cos \phi_0 = N_0 \cos \varphi_0 \quad (235-1)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2}\right) = C \left( \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 + e \sin \varphi_0} \right)^{e/2} \right)^n \quad (235-2)$$

On peut donc encore imposer deux conditions, on obtiendra une représentation à déformation minimale.

a- si le module linéaire est stationnaire pour  $\varphi = \varphi_0$ , c'est-à-dire si :

$$\left( \frac{dm}{d\varphi} \right)_0 = 0 \quad (236)$$

Et :

b- si on peut également (sous réserve que ces deux conditions soient compatibles) annuler pour  $\varphi$

$$= \varphi_0 \text{ la dérivée seconde du module linéaire c'est-à-dire : } \left( \frac{d^2m}{d\varphi^2} \right)_0 = 0 \quad (237)$$

Puisque,  $m(\varphi_0) = 1$ , il revient au même de chercher à annuler les deux premières dérivées de  $\operatorname{Log}m(\varphi)$ . Le module linéaire a pour valeur :

$$m(\varphi) = n \frac{R \cos \phi}{N \cos \varphi} = n \frac{R \cos \phi}{r} = \frac{R}{\rho} \frac{d\phi}{d\varphi} \quad (238)$$

$$\text{Donc :} \quad \frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{\rho}{r} n \cos \phi \quad \text{or} \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\rho \sin \varphi \quad (239)$$

Les dérivées première et seconde de  $\operatorname{Log}m$  s'écrivent :

$$\frac{d\operatorname{Log}m}{d\varphi} = -\operatorname{tg} \phi \frac{d\phi}{d\varphi} - \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\rho}{r} (n \sin \phi - \sin \varphi) \quad (240)$$

$$\frac{d^2\operatorname{Log}m}{d\varphi^2} = -\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\rho}{r} \right) (n \sin \phi - \sin \varphi) - \frac{\rho}{r} \left( n \cos \phi \frac{d\phi}{d\varphi} - \cos \varphi \right)$$

$$\frac{d^2\operatorname{Log}m}{d\varphi^2} = -\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\rho}{r} \right) (n \sin \phi - \sin \varphi) - \frac{\rho^2}{r^2} \left( n^2 \cos^2 \phi - \frac{r}{\rho} \cos \varphi \right) \quad (241)$$

Et :

$$\left( \frac{d\operatorname{Log}m}{d\varphi} \right)_0 = 0 \Rightarrow n \sin \phi_0 = \sin \varphi_0 \quad (242)$$

$$\left( \frac{d^2 \text{Log} m}{d\varphi^2} \right)_0 = 0 \Rightarrow n^2 \cos^2 \phi_0 = \frac{N_0}{\rho_0} \cos^2 \varphi_0 = V_0^2 \cos^2 \varphi_0 \quad (243)$$

soit :

$$n \cos \phi_0 = V_0 \cos \varphi_0 \quad (244)$$

De (242) et (244), on tire :

$$n^2 = V_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 \Rightarrow n^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0 \quad (245)$$

Avec  $e'$  la deuxième excentricité de l'ellipsoïde. Les deux conditions sont compatibles, et la représentation est déterminée par :

-  $n$ , la relation (245) montre que, sauf pour  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $n$  est supérieur à l'unité :  $n > 1$ , il y a donc recouvrement (p.44)

- la relation (242) 
$$\sin \phi_0 = \frac{\sin \varphi_0}{n} \quad (246)$$

a une solution unique en  $\phi_0$ , puisque  $|\phi_0| < \frac{\pi}{2}$  et  $\frac{|\sin \varphi_0|}{n} < 1$

-  $C$ ,  $n$ ,  $\varphi_0$  et  $\phi_0$  étant déterminés, la relation (235-2) donne  $C$ .

-  $R$ , de la relation (235-1), on tire enfin  $R$  :

$$R = \frac{N_0 \cos \varphi_0}{n \cos \phi_0} \quad (247)$$

expression dans laquelle  $n \cos \phi_0 = V_0 \cos \varphi_0$ . Le rayon de la sphère est donc :

$$R = \frac{N_0}{V_0} = \frac{C}{V_0^2} = \sqrt{\frac{C}{V_0} \cdot \frac{C}{V_0^3}} = \sqrt{N_0 \rho_0} \quad (248)$$

Cette sphère, dont la courbure est égale à la courbure totale de l'ellipsoïde est dite sphère de Gauss ou sphère de courbure totale (abusivement sphère de courbure moyenne).

On obtient le premier terme non nul du développement de  $m(\varphi) - 1$  en fonction de  $(\varphi - \varphi_0)$  en calculant la dérivée troisième pour  $\varphi = \varphi_0$  de  $\text{Log} m(\varphi)$ . En utilisant (241), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \text{Log} m}{d\varphi^3} = & -\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{\rho}{r} \right) (n \sin \phi - \sin \varphi) - 2 \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\rho}{r} \right) \left( n \cos \phi \frac{d\phi}{d\varphi} - \cos \varphi \right) \\ & - \frac{\rho}{r} \left( \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\rho}{r} \right) n^2 \cos^2 \phi - 2 \frac{\rho}{r} n^2 \sin \phi \cos \phi \frac{d\phi}{d\varphi} + \sin \varphi \right) \end{aligned} \quad (249)$$

Pour  $\varphi = \varphi_0$ , les deux premiers termes sont nuls. Pour le troisième terme, on a :

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{N \cos \varphi} = \frac{1}{V^2 \cos \varphi} \Rightarrow \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\rho}{r} \right) = \frac{\sin \varphi (1 + 3e'^2 \cos^2 \varphi)}{V^4 \cos^2 \varphi} \quad (250)$$

$$\frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{\rho}{r} n \cos \phi = \frac{n \cos \phi}{V^2 \cos \varphi} \quad (251)$$

et pour  $\varphi = \varphi_0$ , on a en tenant compte que  $n \cos \phi_0 = V_0 \cos \varphi_0$  :

$$\left(\frac{d\phi}{d\varphi}\right)_0 = \frac{1}{V_0} \quad (252)$$

En reportant ces valeurs et en tenant compte de (242) et (244), il vient :

$$\left(\frac{d^3 \text{Log} m}{d\varphi^3}\right)_0 = -\frac{\sin\varphi_0 d^2}{V_0^2 \cos\varphi_0} \left(\frac{1+3e'^2 \cos\varphi_0}{V_0^2} - \frac{1}{V_0^2} + 1\right) = -\frac{4e'^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0}{V_0^4} \quad (253)$$

On peut donc écrire :

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e'^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0}{3V_0^4} (\varphi - \varphi_0)^3 + O^4(\varphi - \varphi_0) \quad (254)$$

Les calculs précédents auraient pu être conduits en considérant le module linéaire comme fonction de  $\phi$  ; on obtient alors :

$$m(\phi) = 1 - \frac{2e'^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0}{3V_0^4} (\phi - \phi_0)^3 + O^4(\phi - \phi_0) \quad (255)$$

#### VI.3.4. Cas particuliers

Pour  $\varphi_0 = 0$  et  $|\varphi_0| = \frac{\pi}{2}$ , on obtient des représentations particulières, et il est intéressant de comparer, dans ces cas limites, les représentations sur une sphère de Gauss, d'une part, sur une sphère de Soldner, d'autre part.

Dans le cas général, sur ces deux sphères, la représentation est définie par :

$$\Lambda = n\lambda \quad \text{et} \quad Z_S - (Z_S)_0 = n(Z_E - (Z_E)_0) \quad (256)$$

et elle est entièrement déterminée si on fixe :

$$\varphi_0 \text{ (d'où } \phi_0), R, n \text{ et } C = (L_S)_0 - n(L_E)_0$$

La relation entre les latitudes peut s'écrire aussi, en utilisant la latitude conforme (230) :

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = C \left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2}\right)\right)^n = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2}\right) \left(\frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_{c_0}}{2}\right)}\right)^n \quad (257-1)$$

Le module linéaire est :

$$m(\varphi) = n \frac{R \cos\phi}{N \cos\phi} \quad (257-2)$$

Sur la sphère de Gauss :

$$R = \sqrt{N_0 \rho_0} \quad n = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0} \quad \sin\phi_0 = \frac{\sin\varphi_0}{n} \quad \text{ou} \quad \text{tg}\phi_0 = \frac{\text{tg}\varphi_0}{V_0} \quad (258)$$

$$\text{Et :} \quad C = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2}\right) / \left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(\varphi_c)_0}{2}\right)\right)^n \quad (259)$$

sur la sphère de Soldner :

$$R = N_0 \quad n = 1 \quad \varphi_0 = \phi_0 \quad C = \left(\frac{1 + e \sin\varphi_0}{1 - e \sin\varphi_0}\right)^{e/2} \quad (260)$$

A -  $\varphi_0 = 0$ , la représentation ne peut être tangente que si les équateurs se correspondent dans ces conditions :

$$\varphi_0 = \phi_0 = (\varphi_c)_0 \quad \text{et} \quad C = 1 \quad \text{quelque soit } n$$

On obtient alors :

- sur la sphère de Gauss :

$$R = b \quad n = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{1+e'^2} \quad (261)$$

$$\Lambda = \lambda \frac{a}{b} \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2}\right)\right)^{a/b} \quad (262)$$

Et :

$$m(\varphi) = \frac{a}{b} \cdot \frac{b \cos \phi}{N \cos \varphi} = \frac{a \cos \phi}{N \cos \varphi} \quad (263)$$

Sur la sphère de Soldner :

$$R = a \quad n = 1 \quad (264)$$

$$\Lambda = \lambda \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2}\right)\right) \Rightarrow \phi = \varphi_c \quad (265)$$

Et :

$$m(\varphi) = \frac{a \cos \phi}{N \cos \varphi} \quad (266)$$

Les modules linéaires ont, dans les deux représentations, la même expression littérale, simplement parce que les latitudes sphériques sont désignées par la même lettre  $\phi$  mais  $\phi$  n'est pas la même fonction de  $\varphi$  dans les deux cas.

B-  $|\varphi_0| = \frac{\pi}{2}$  Les pôles ont toujours des points correspondants si  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  ce qui

entraîne  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ , les pôles sont les deux seuls points automéconiques de la représentation. On

obtient alors :

Sphère de Gauss :

$$R = c = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1+e'^2} \quad n = 1 \quad C = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{e/2} \quad (267)$$

$$\Lambda = \lambda \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = C \left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2}\right)\right) \quad (268)$$

Sphère de Soldner :

$$R = c = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1+e'^2} \quad n = 1 \quad C = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{e/2} \quad (269)$$

$$\Lambda = \lambda \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = C \left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_c}{2}\right)\right) \quad (270)$$

Les deux représentations, dans ce cas limite, sont identiques. Le module linéaire est :

$$m(\varphi) = \frac{c \cos \phi}{N \cos \varphi} \quad (271)$$

#### VI.4. Les Représentations équivalentes

La condition d'équivalence :

$$m_1 \cdot m_2 = 1 \quad (272)$$

s'écrit :

$$\frac{R^2 \cos \phi}{\rho N \cos \varphi} \frac{d\phi}{d\varphi} \frac{d\Lambda}{d\lambda} = 1 \Rightarrow \frac{d\Lambda}{d\lambda} = \frac{\rho N \cos \varphi d\varphi}{R^2 \cos \phi d\phi} \quad (273)$$

Le même raisonnement qu'au paragraphe 3.1. conduit, n étant une constante, à :

$$\begin{cases} \frac{d\Lambda}{d\lambda} = n \\ nR^2 \cos \phi d\phi = \rho N \cos \phi d\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda = n\lambda \\ nR^2 \sin \phi = \int_0^\phi \rho N \cos \phi d\phi + K \end{cases} \quad (274)$$

où K est une constante.

L'intégrale précédente se calcule facilement :

$$\int_0^\phi \rho N \cos \phi d\phi = \int_0^\phi \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^2} \cos \phi d\phi = a^2(1-e^2) \frac{1}{e} \int_0^\phi \frac{d(e \sin \phi)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^2} \quad (275)$$

D'où l'on tire :

$$nR^2 \sin \phi = a^2(1-e^2) \frac{1}{4e} \left( \text{Log} \left( \frac{1+e \sin \phi}{1-e \sin \phi} \right) + \frac{2e \sin \phi}{1-e^2 \sin^2 \phi} \right) + K \quad (276)$$

On peut faire un raisonnement analogue à celui du paragraphe 3.1. au sujet des parallèles automécoïques, et choisir les constantes  $\phi_0, \phi_0, n, K$  et  $R$  comme au paragraphe 3.3.

Le cas le plus simple correspond aux conditions suivantes :

- les longitudes sont conservées :  $n = 1$ ,
- les équateurs se correspondent :  $\phi_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0$  d'où  $K = 0$
- les pôles se correspondent :  $\phi = \pi/2 \Rightarrow \phi = \pi/2$  (ce qui entraîne  $\phi = -\pi/2 \Rightarrow \phi = -\pi/2$ ). Le rayon de la sphère prend alors une valeur  $A : R = A$  telle que :

$$A^2 = a^2(1-e^2) \frac{1}{4e} \left( \text{Log} \left( \frac{1+e}{1-e} \right) + \frac{2e}{1-e^2} \right) = \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{1-e^2}{2e} \text{Log} \left( \frac{1+e}{1-e} \right) \right) \quad (277)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$A^2 = a^2 \left( 1 - \frac{1}{3} e^2 - \frac{1}{3 \times 5} e^4 - \frac{1}{5 \times 7} e^6 - \dots \right) \quad (278)$$

On peut alors écrire :

$\phi = \phi_E$ ,  $\phi_E$  étant la latitude équivalente, définie par :

$$A^2 \cos \phi_E d\phi_E = \rho N \cos \phi d\phi \quad (279)$$

ou :

$$\sin \phi_E = a^2(1-e^2) \frac{1}{2A^2} \left( \frac{1}{2} \text{Log} \left( \frac{1+e \sin \phi}{1-e \sin \phi} \right) + \frac{\sin \phi}{1-e^2 \sin^2 \phi} \right) \quad (280)$$

O.S Adams[1] a déterminé un développement de la différence  $\phi - \phi_E$ . La valeur maximale de  $|\phi - \phi_E|$  est d'environ  $7'40''$ .

La représentation est bijective : donc l'aire de l'ellipsoïde est égale à l'aire de la sphère soit  $4\pi A^2$ .

L'aire totale d'un ellipsoïde de révolution de demi-grand axe a est d'excentricité e est finalement :

$$\text{Aire de l'ellipsoïde} = 2\pi a^2 \left( 1 + \frac{1-e^2}{e} \text{Log} \left( \frac{1+e}{1-e} \right) \right) \quad (281)$$

## Références

- [1]. Oscar S. Adams. 1921. Latitude developments connected with geodesy and cartography. U.S. Coast and Geodetic Survey. Special Publication n°67. 1921.
- [2]. Jean-Jacques Levallois. 1995. Représentation conforme et Adaptations. Revue XYZ, n°64, 3<sup>ème</sup> trimestre, pp 37-56.