

## Как убежать из-под горизонта черной дыры

Путенихин П.В.  
m55@mail.ru

### Аннотация

Космологическая черная дыра, предсказываемая общей теорией относительности, явление уникальное. Загадочная сингулярность и горизонт, пройти через который можно только по направлению к её центру. Из цепких смертельных объятий гравитационного монстра вырваться невозможно. А если всё-таки попробовать?

Существование черной дыры было предсказано очень давно, задолго до появления общей теории относительности. Однако, затем долгие годы ученые не были уверены в том, что они существуют. Многие попытки их обнаружения были безуспешными. И лишь в последние годы появились четкие, бесспорные доказательства их существования.

«Черной дырой называют область пространства-времени, в которой гравитационное поле настолько сильно, что не позволяет даже свету покинуть эту область и уйти в бесконечность...

Поскольку сигналы не могут выйти из черной дыры, а физические тела и излучение могут в нее падать, поверхность черной дыры играет роль своеобразной мембраны, а граница черной дыры в пространстве-времени, называемая горизонтом событий, является световой поверхностью...» [1]

Столь жесткие ограничения на взаимодействие с черными дырами, кажется, делает невозможным или крайне сложными вопросы как их изучения, так и практического использования. Тем не менее, ученые нашли лазейку и здесь. Даже у такой неприступной системы можно отобрать и использовать энергию:

«Напомним, что хотя по определению черная дыра — это область, откуда никакие тела и световые лучи не могут выйти наружу, существуют ситуации, когда с помощью определенных физических процессов можно извлекать из черной дыры энергию» [1].

Более того, теоретические исследования приводят к совершенно фантастическим выводам:

«Поскольку черные дыры, скорее всего, существуют, путешествие во времени принципиально возможно. Отправившись на космическом корабле внутрь сверхмассивной черной дыры в ядре галактики, отважный космонавт увидит будущее». [3]

Правда, у таких «путешествий», мягко говоря, есть серьёзный изъян:

«Но при этом он не сможет вернуться назад и не сможет передать нам какую-либо информацию об увиденном им будущем. Сделать это ему помешает горизонт событий черной дыры». [3]

Тут уже речь может идти не о туристической поездке, а о сохранении самой жизни:

«Таким образом, решившись путешествовать во времени внутри сверхмассивной черной дыры, космонавт обрекает себя на самоубийство — он

никогда не вернется назад, в нашу Вселенную, а при приближении к центральной сингулярности будет разорван приливными силами. [3]

Такой фатальный исход от «посещения» внутренней области черной дыры признают практически все исследователи:

«Следовательно, любой безрассудный специалист по ракетной технике, рискнувший попасть под гравитационный радиус  $r = 2M$  внешнего гравитационного поля, обречен на гибель». [4]

И хотя в исследованиях свойств этих сверхмассивных объектов не всегда прямо указывается фатальный исход таких путешествий, смысл обычно очевиден: это путешествие без возврата. А наличие в черных дырах плотно сжатого вещества явно предсказывает судьбу путешественника:

«В идеализированном сферически симметричном случае поверхность звезды сжимается под свой гравитационный радиус («горизонт»; прекращение связи с внешним миром; точка, из которой нет возврата). [4]

Слабой надеждой остаётся даже другой вывод из теории относительности. Считается, что она предсказывает существование так называемых «кротовых нор» - особых переходов между отдалёнными частями Вселенной. Вроде бы, это должно обнадежить, хотя норы эти довольно замысловатые:

«Частицы, упавшие в одну черную дыру, покажутся частицами, выпущенными из другой, и наоборот.

Звучит так, будто именно это и требуется, чтобы позволить космические путешествия через черные дыры. Вы просто направляете свой космический корабль в подходящую черную дыру. Впрочем, лучше в дыру побольше, а то гравитационные силы разорвут вас на части, превратив в спагетти, прежде чем вы проникнете внутрь. Потом вам останется надеяться, что вы появитесь вновь из какой-то другой дыры, но где — вы выбрать не сможете». [5]

Получается почти как в сказке: пойдешь туда, не знаю куда. А то и «направо пойдёшь — коня потеряешь». Не говоря уже о кошельке - даже собственной жизни. Ничто и никогда из черной дыры не вернётся:

«В предыдущем разделе мы принимали, что в удалении от коллапсирующей звезды можно предсказать будущее. Как было показано, из этого предположения следует, что звезда уходит за горизонт событий, который скрывает сингулярность от внешнего наблюдателя. Материя и энергия, пересекающие горизонт событий, будут навсегда потеряны для внешнего мира». [2]

Довольно печальная ситуация. Хотя, если задуматься, все эти изыскания имеют скорее исследовательский интерес, нежели выражают стремление найти им практическое применение. Впрочем, многие когда-то непонятные явления не сразу были приняты к использованию. А научные объяснения их очень часто оказывались ошибочными и с течением времени отбрасывались.

С горизонтом событий черных дыр в рассматриваемом случае имеется довольно необычное решение, идущее вразрез со строго доказанными и общепринятыми выводами. Прямо или косвенно признаётся всеми: выйти из-под горизонта черной дыры невозможно.

Однако, это справедливо для одиночной черной дыры. Механику Ньютона пока никто не отменял и многие её положения должны быть справедливы и в отношении черных дыр. Например, известна так называемая точка Лагранжа. Почему бы ей не быть и внутри системы из двух черных дыр?

«Точки Лагранжа, точки либрации (лат. *libratio* — раскачивание) или L-точки — точки в системе из двух массивных тел, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, на которое не действуют никакие другие силы, кроме гравитационных сил со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным относительно этих тел». [6]

На каком расстоянии от двух черных дыр должен находиться космический корабль, чтобы его не затянуло под горизонты? А если дыры сблизятся настолько, что их горизонты пересекутся? В этом случае, очевидно, корабль окажется одновременно под горизонтами обеих черных дыр. Правда, вопрос остаётся в силе: сможет ли он вырваться из этих двух горизонтов? Пока даже и неважно, что именно увидит исследователь на этом корабле, если он не сможет рассказать об увиденном тем, кто остался снаружи.

И расчеты показывают: есть несколько странное решение задачи, из которого следует вывод о возможности выйти из-под горизонта черной дыры. Оказывается, что выход из точки Лагранжа перпендикулярно к оси, соединяющей центры черных дыр, возможен, по крайней мере, с позиций ньютоновой механики. Из истории известно, что черные дыры были предсказаны без использования теории относительности. Конечно, эти предсказания умаляются утверждениями, что ошибки тут, ошибки там в целом компенсировали друг друга, вследствие чего получился результат, полностью совпадающий с результатами, полученными с помощью уравнений общей теории относительности. Пусть так. Предлагаемый здесь к рассмотрению полученный с помощью ньютоновой физики результат и в этом случае вполне интересен.

Первые, прикидочные расчеты показали, что при сближении двух одинаковых черных дыр между ними образуется линзообразная полость с особыми гравитационными свойствами. Однако, не было видно, есть ли у этой линзы открытые края или они также замыкают горизонты двух дыр, щель не образуется и ускользнуть не удастся. Рассмотрим эти выкладки подробнее.

Две одинаковые сверхмассивные черные дыры сблизятся и в некоторый момент времени находятся на таком расстоянии, что их гравитационные радиусы сначала касаются друг друга, затем немного перекрываются. То есть, горизонт одной дыры оказывается под горизонтом другой.

Очевидно, что на середине оси, соединяющей центры двух дыр, обе дыры притягивают пробное тело с одинаковой силой. Поэтому, находясь формально под горизонтами обеих дыр, тело, тем не менее, не падает на сингулярности этих дыр. В случае же отклонения по перпендикуляру от этой точки, тело испытывает совсем не те усилия, что при обычном попадании под горизонт. Изобразим ситуацию на рисунке. Ввиду симметрии возьмём только верхние половины гравитационных радиусов этих черных дыр.

Сближение двух сверхмассивных черных дыр с образованием точки убегания

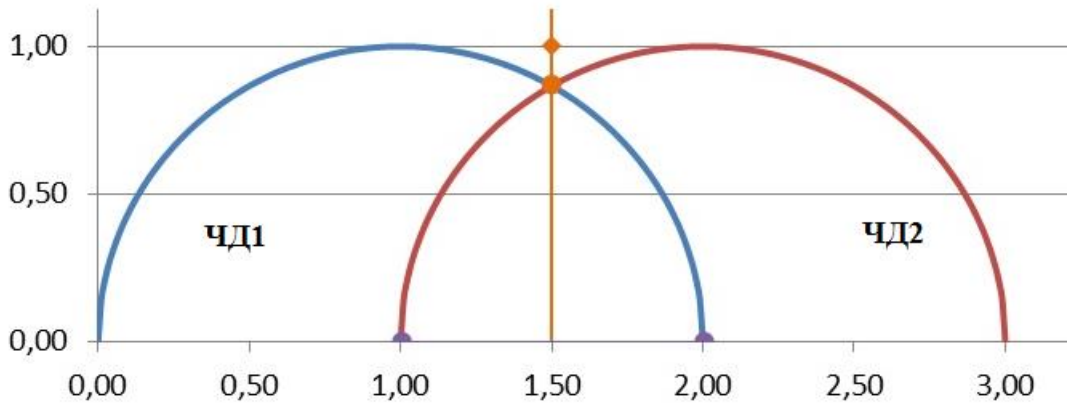


Рис.1 Полуокружности – условное изображение горизонтов двух черных дыр.

На рисунке изображены две черные дыры в виде своих горизонтов. Центры дыр имеют координаты в величинах гравитационных радиусов 1 и 2, соответственно. Это значит, что расстояние между дырами в точности равно  $r_g$  – одному гравитационному радиусу. Центры изображены также половинками точек. На половине расстояния между центрами изображена вертикальная линия предполагаемого пути (коридора, тоннеля) убегания из-под гравитационных радиусов двух черных дыр. Ромбик на этой линии – предельная точка, в которой сила притяжения корабля предполагается такой же, как и на горизонте черной дыры. Это своеобразный «совместный» горизонт двух черных дыр. Предварительные расчеты и анализ показывают его интересные особенности.

Этот горизонт, по сути, является фантомным. Он имеет форму тонкого кольца с «обратными» гравитационными свойствами. Если при пересечении классического горизонта дыры по направлению к её центру тело движется ускоренно, то внутри этого фантомного горизонта-кольца тело движется замедленно. Чем ближе к его центру, тем меньшее усилие действует на тело. А это означает, что в принципе есть возможность с помощью двигателей космического корабля удержаться вблизи этого кольца.

Однако, преодолеть его своими силами он не может. Эта уклончивая фраза, как легко догадаться, намекает, что с помощью других сил он, видимо, преодолеть эту границу может. Что это могут быть за силы? Самое очевидно – гравитационные. Действительно, если с внешней стороны к космическому кораблю приблизить, например, достаточно массивную нейтронную звезду, то её притяжения может оказаться достаточным, чтобы корабль вырвался из-под фантомного кольцевого горизонта.

Разумеется, это лишь умозрительные предположения. Нейтронная звезда достаточно мала, чтобы самой не попасть под влияние черных дыр. Попробуем поместить рядом с кораблем нейтронную звезду с массой в  $10^6$  раз меньше, чем массы наших сверхмассивных черных дыр. Оценим вертикальную силу притяжения в точке фантомного горизонта:

$$F_v = \frac{GM}{10^6 \times x_v^2}$$

Убеганию пробного тела от черных дыр препятствует вертикальная сила (на рисунке):

$$F_0 = \frac{GM}{r_g^2}$$

Для того, чтобы «вытянуть» пробное тело из-под фантомного горизонта, притяжение нейтронной звезды должно быть больше или равно этой силе:

$$F_v = \frac{GM}{10^6 \times x_v^2} \geq F_0 = \frac{GM}{r_g^2}$$

Откуда после сокращений и преобразований получаем:

$$x_v = 10^{-3} \times r_g$$

Это означает, что если расстояние от выбранной нейтронной звезды до пробного тела будет в тысячу раз меньше гравитационного радиуса, то пробное тело окажется в точке Лагранжа. Если ещё немного приблизить нейтронную звезду, то пробное тело покинет горизонт двух черных дыр.

Но можно предположить и более общий вариант, что в процессе сближения черные дыры образуют своеобразный тоннель между своими горизонтами. Через этот тоннель фантомного горизонта корабль мог бы уйти и без посторонней помощи. Оценим параметры тоннеля, образующегося между горизонтами черных дыр в зоне Лагранжа.

Обозначим координаты корабля (пробного тела) в «тоннеле убегания» –  $x_i y_i$ . Единицей измерения, как указано, берём гравитационный радиус (радиус горизонта звёзд). Расстояния  $R_1$  и  $R_2$  от пробного тела до гравитирующих центров  $x_1$  и  $x_2$  каждой звезды равны, соответственно:

$$R_1 = \sqrt{(x_i - x_1)^2 + y_i^2}$$

$$R_2 = \sqrt{(x_i - x_2)^2 + y_i^2}$$

Здесь мы учли, что центры дыр лежат на оси X. Согласно ньютоновому закону гравитационного притяжения пробное тело притягивается к каждой из них с силами  $F_1$  и  $F_2$ :

$$F_1 = \frac{GM}{R_1^2} = \frac{GM}{(x - x_1)^2 + y^2}$$

$$F_2 = \frac{GM}{R_2^2} = \frac{GM}{(x_2 - x)^2 + y^2}$$

Ясно, что обе эти силы не коллинеарны, поэтому для вычисления результирующей силы нам необходимо разложить их на ортогональные составляющие. Для этого вычисляем углы векторов этих сил, образуемые ими с осью X:

$$\cos \varphi_1 = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}}$$

Поскольку нам известны модули двух сил (векторов) и их углы, мы можем найти модуль суммарной силы (вектора). Находим проекции сил на оси координат. Проекция на ось y (вертикальная сила) равны:

$$F_{1y} = \frac{GM}{(x-x_1)^2 + y^2} \times \sin \varphi_1 = \frac{GM}{(x-x_1)^2 + y^2} \times \frac{y}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} = \frac{GM y}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}}$$

$$F_{2y} = \frac{GM}{(x-x_2)^2 + y^2} \times \sin \varphi_2 = \frac{GM}{(x-x_2)^2 + y^2} \times \frac{y}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}} = \frac{GM y}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}}$$

И, соответственно, проекции сил на ось x (горизонтальная сила):

$$F_{1x} = \frac{GM}{(x-x_1)^2 + y^2} \times \cos \varphi_1 = \frac{GM}{(x-x_1)^2 + y^2} \times \frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} = \frac{GM(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}}$$

$$F_{2x} = \frac{GM}{(x-x_2)^2 + y^2} \times \cos \varphi_2 = \frac{GM}{(x-x_2)^2 + y^2} \times \frac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}} = \frac{GM(x-x_2)}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}}$$

Модуль полной силы равен корню из суммы квадратов:

$$F = \sqrt{(F_{1x} + F_{2x})^2 + (F_{1y} + F_{2y})^2}$$

Подставляем найденные проекции сил и получаем:

$$F = \sqrt{\left\{ \frac{GM(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{GM(x-x_2)}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}^2 + \left\{ \frac{GM y}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{GM y}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}^2}$$

Здесь неявно учтены два обстоятельства. Проекции вертикальных сил всегда суммируются, поскольку они действуют в одном направлении. Проекции горизонтальных сил автоматически от суммирования переходят к вычитанию, поскольку это определяется знаком разницы координат во внутренних круглых скобках. Вынесем за знак корня общий множитель GM:

$$F = GM \sqrt{\left\{ \frac{(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{(x-x_2)}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}^2 + \left\{ \frac{y}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{y}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}^2}$$

Итак, мы получили модуль результирующей силы, действующей на пробное тело со стороны двух черных дыр. Первое, что бросается в глаза, - это уравнение неприводимое. Не видно никаких разумно сложных преобразований, чтобы выделить одну из переменных как функцию от другой. Пока что мы можем сделать только основную, необходимую процедуру. Нам необходимо выяснить, чему равна эта сила в точке нахождения пробного тела в сравнении с гравитационной силой на горизонтах наших черных дыр. По меньшей мере, она должна быть не больше, иначе наше пробное тело не сможет удалиться на бесконечность. То есть, должно обеспечиваться условие:

$$F \leq F_0 = \frac{GM}{r_g^2}$$

Что хорошо, так это то, что собственно величины этих сил нас не интересуют. Интересует только точка в пространстве, где они равны и является ли эта точка доступной для нашего пробного тела. Последнее простое преобразование, которое мы можем сделать, это упростить выражение, исключив квадратный корень:

$$\frac{GM}{r_g^2} \leq GM \left\{ \left[ \frac{(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{(x-x_2)}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right]^2 + \left[ \frac{y}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{y}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right]^2 \right\}$$

Как видим, из уравнений уходят помимо квадратного корня и последние чисто физические параметры – гравитационная постоянная и масса черных дыр:

$$\frac{1}{r_g^4} \leq \left\{ \frac{(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{(x-x_2)}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}^2 + \left\{ \frac{y}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{y}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}^2$$

Выше мы указали, что при построении графиков использовалась единица измерения – гравитационный радиус. Поэтому условием возможности ухода из-под фантомного гравитационного кольца является:

$$1 \leq \left\{ \frac{(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{(x-x_2)}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}^2 + \left\{ \frac{y}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{y}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}^2$$

Другими словами, пробное тело должно находиться в такой точке пространства, в которой выполняется полученное соотношение. Очевидно, что эта точка однозначно находится на середине между центрами черных дыр, то есть нам известно значение  $x$ . Подставив его, мы сможем найти и вторую координату, хотя и с некоторым трудом, поскольку уравнение в дробных степенях. Можно попробовать вычислить координату  $y$  итерационным методом, поскольку видим, что эта координата для итераций легко выделяется из уравнения. Проверка показала, что итерации сходятся достаточно быстро и на компьютере задача легко разрешима.

Однако, условия задачи наталкивают на мысль о возможности сканирования всего пространства вокруг двух черных дыр, позволяя построить полный, суммарный горизонт двух черных дыр. Это хорошее решение, поскольку сразу же станет видно: есть ли в этом горизонте тоннель, каковы его размеры и форма.

Но аналитическое решение этой задачи существенно сложнее, хотя и настолько же проще для компьютерных вычислений. Нам необходимо найти все координаты точек в пространстве вокруг двух черных дыр, в которых выполняется полученное соотношение. Для этого просто необходимо задавать последовательно все точки пространства и вычислять в них это соотношение, отобрав затем только те координаты, в которых оно выполняется. Эта задача легко программируется. Есть два способа: сканирование, в точности как обычный оптический офисный сканер или копир, и сканирование «радарное», наподобие авиационных или военных радаров в полярных координатах. Принципиальной разницы не видно, но есть очевидное геометрическое преимущество у радарного сканирования.

### Радарное сканирование пространства двух черных дыр

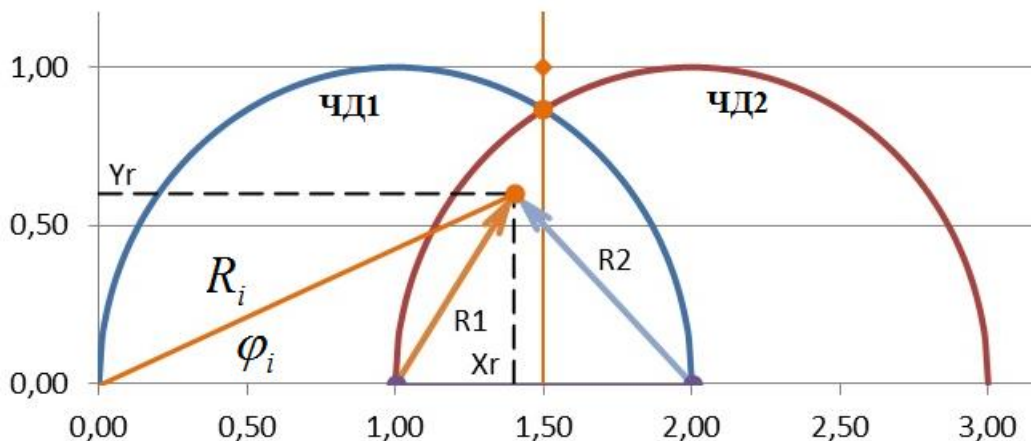


Рис.2 Радарное сканирование пространства вокруг черных дыр для нахождения фантомного горизонта

Поскольку черные дыры имеют на рисунке вид окружностей, а ожидаемая форма горизонта, скорее всего, будет иметь форму, близкую к окружности, то радарное сканирование позволит обследовать меньшую площадь и задать границы изменения параметров легче.

На рисунке стрелками изображены два радиус-вектора сил притяжения пробного тела черными дырами  $R_1$  и  $R_2$ . Линия из начала координат с точкой на конце – это и есть радарный радиус-вектор. Искомые координаты текущей точки изображены штриховыми линиями. Эти искомые координаты для выведенного соотношения получаем из полярных координат в виде:

$$x = R_i \sin \varphi_i$$

$$y = R_i \cos \varphi_i$$

Диапазоны изменения величин радиус-вектора и полярного угла необходимо выбрать такими, чтобы заведомо перекрыть предполагаемые зоны фантомного горизонта (на рисунке). Понятно также, что выбор центра полярных координат произволен. Можно предположить, что в изображенном на рисунке варианте в некотором диапазоне углов могут появиться два решения, поскольку после пересечения линии центра между дырами радиус-вектор будет пересекать оба фантомных горизонта. Поэтому, наверное, центр радиус-вектора целесообразно взять внутри горизонта первой дыры, ведь мы ожидаем, что форма кривой фантомного горизонта будет иметь обратные изгибы и, как следствие, двойные пересечения её радиус-вектором.



Выполненные на компьютере вычисления позволили получить массивы данных координат искомого фантомного горизонта двух сближающихся черных дыр для разных расстояний между ними. На рисунке показаны последовательные 8 этапов сближения черных дыр.

Сближение двух сверхмассивных черных дыр с образованием точки Лагранжа (тоннеля убежания)

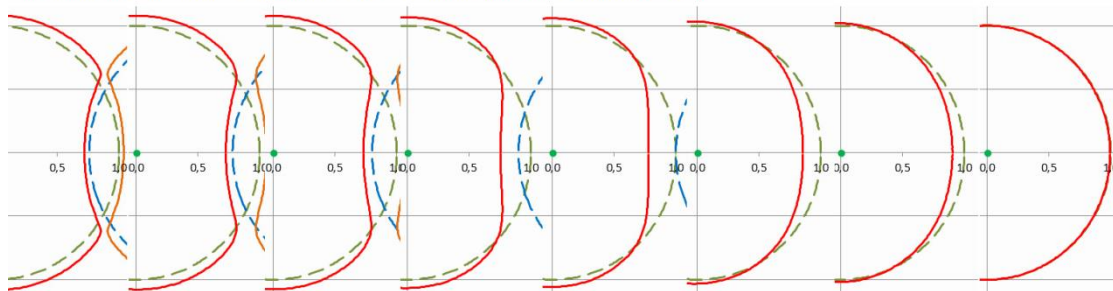
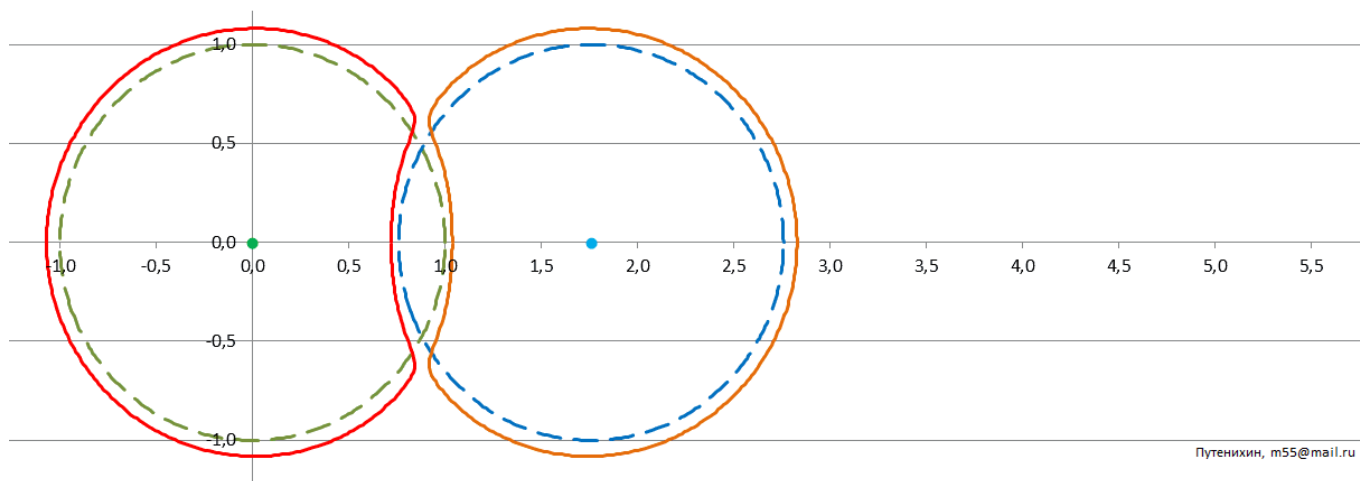


Рис.3 Образование тоннеля фантомного горизонта двух сближающихся черных дыр

Исходные, собственные горизонты черных дыр показаны синей и зелёной штриховыми линиями, а вновь образованные горизонты – красной и горчиной сплошными линиями, соответственно. Крайний справа фрагмент соответствует удалённости дыр друг от друга порядка 10 гравитационных радиусов. Крайний левый фрагмент соответствует сближению приблизительно на 1,7 гравитационных радиуса. Видно, как деформируются горизонты дыр и образуется тоннель фантомного горизонта, который впоследствии неизбежно закрывается. На расстоянии 1,756 гравитационных радиусов в принятых условиях задачи гравитационный тоннель закрывается, пробное тело оказывается в ловушке.

Линзообразная внутренняя полость с точкой Лагранжа при дальнейшем сближении смыкается и две черные дыры сливаются в одну. Наглядно процесс сближения показан на gif-анимации (кадр):

Сближение двух сверхмассивных черных дыр с образованием точки Лагранжа (тоннеля убежания)



Путенихин, m55@mail.ru

[http://samlib.ru/img/p/putenihin\\_p\\_w/escape/escape-21.gif](http://samlib.ru/img/p/putenihin_p_w/escape/escape-21.gif)

<http://www.sciteclibrary.ru/ris-stat/6624/image021.gif>

[http://scorcher.ru/theory\\_publisher/art\\_pic/590/image021.gif](http://scorcher.ru/theory_publisher/art_pic/590/image021.gif)

Рис.4 Ссылки на анимированное изображение сближения двух черных дыр с образованием тоннеля фантомного горизонта

На анимации хорошо заметно, как «раздуваются» и деформируются горизонты обеих черных дыр. Это должно быть понятно. Приближение к черной дыре «помощницы» позволяет ей захватывать своим горизонтом более удалённые объекты. Очевидно, что наблюдатель, находящийся между черными дырами может

рассматриваться как находящийся под горизонтом лишь с некоторыми оговорками. Как видно на рисунке, горизонты деформировались, сместились к центрам собственных дыр. Образовавшаяся линзообразная полость может и не рассматриваться как находящаяся под горизонтом. Тем не менее, согласно расчетам общей теории относительности, эта точка явно находится в пределах гравитационного радиуса звезды, поэтому придётся либо признать, что точка – под горизонтом, либо внести интерпретационные корректировки в расчеты ОТО, признающие возможность такой «деформации» горизонта и уменьшения гравитационного радиуса от расчетного. В этом случае у черной дыры если и не отросли волосы, то уж что-то напоминающее ямочку на подбородке явно просматривается.

В заключение можно отметить, что проверить на практике возможность «посещения с возвратом» внутренней области черной дыры в принципе возможно. К нам, как известно, приближается галактика Андромеда. Когда-то сверхмассивные черные дыры в центрах галактик Млечный Путь и Андромеда встретятся. Конечно, массы их не одинаковые, но суть явления меняется не сильно.

## Литература

1. Новиков И.Д., Фролов В.П., Физика черных дыр. – М. : Наука., Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986, 328 с.
2. Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: «Мир», 1977.
3. Черепашук А. М., Чернин А. Д. Вселенная, жизнь, черные дыры. — Фрязино: «Век 2», 2004. — 320 с. — (Наука для всех).
4. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, Том 3. – М.: «Мир», 1973
5. Хокинг С. Черные дыры и молодые вселенные / Стивен Хокинг ; [пер.с англ. М. Кононова]. — СПб.: Амфора. ТИД Амфора, 2009. —166 с.
6. Точки Лагранжа, Википедия. URL:  
[https://ru.wikipedia.org/wiki/Точки\\_Лагранжа](https://ru.wikipedia.org/wiki/Точки_Лагранжа)
7. Путенихин П.В., Как убежать из-под горизонта черной дыры, 2015 [расчеты показывают, что есть несколько странное решение задачи, из которого следует вывод о возможности выйти из-под горизонта черной дыры], URL:  
[http://samlib.ru/editors/p/putenihin\\_p\\_w/escape.shtml](http://samlib.ru/editors/p/putenihin_p_w/escape.shtml)