

# Breakdown of Navier-Stokes Solutions (short version)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi

[valdir.msgodoi@gmail.com](mailto:valdir.msgodoi@gmail.com)

**Abstract** – We have proved that there are initial velocities  $u^0(x)$  and forces  $F(x, t)$  such that there is no solution to the Navier-Stokes equations, which corresponds to the cases (C) and (D) of the problem relating to Navier-Stokes equations available on the website of the Clay Institute.

**Keywords** – Navier-Stokes equations, Euler equations, continuity equation, breakdown, inexistence, existence, smoothness, solutions, uniqueness, gradient field, conservative field, velocity, pressure, external force, millenium problem.

*“Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem é demasiado estreita para contê-la.”*  
(Pierre de Fermat)

## 1. Introdução

O fato de não ser possível resolver sempre o sistema  $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \phi_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , nos leva a acreditar que não pode ser sempre possível encontrar solução para a Equação de Navier-Stokes em  $n = 3$  dimensões espaciais com força externa, ou seja,

$$(1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

para  $u_i, p, F_i$  funções da posição  $x \in \mathbb{R}^3$  e do tempo  $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ . A constante  $\nu \geq 0$  é o coeficiente de viscosidade,  $p$  representa a pressão e  $u = (u_1, u_2, u_3)$  é a velocidade do fluido, medidas na posição  $x$  e tempo  $t$ . A função  $F = (F_1, F_2, F_3)$  tem dimensão de aceleração ou força por unidade de massa, mas seguiremos denominando este vetor e suas componentes pelo nome genérico de força, tal como adotado em [1].

Sejam  $\phi_i$  funções da posição  $x \in \mathbb{R}^3$  e tempo  $t \geq 0$  tal que não haja solução para o sistema  $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , nossa hipótese.

Então, quaisquer que sejam  $u_i$  e os respectivos  $u_i^0(x) = u_i(x, 0)$  é sempre possível encontrar forças  $F_i$  tais que

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + F_i = \phi_i,$$

ou seja,

$$(3) \quad F_i = \phi_i - \nu \nabla^2 u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

para todo  $i$  tal que  $1 \leq i \leq 3$ , desde que as derivadas parciais dos campos vetoriais  $u_i$  existam.

Como não há uma solução possível para o sistema  $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \phi_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , por hipótese, as funções  $F_i$  obtidas em (3) resultarão em não possibilidade de solução para o sistema (1), portanto é possível encontrar funções  $F_i$  para as componentes da força externa  $F$  tais que não haja solução para o sistema de equações diferenciais parciais (1), que são as equações de Navier-Stokes, para  $i = 1, 2, 3$ .

Verifica-se assim que existe a “quebra das soluções de Navier-Stokes” sobre  $\mathbb{R}^3$  para específicas funções da força externa  $F = (F_1, F_2, F_3)$ , e então é possível solucionar este que é um dos mais difíceis problemas de Matemática em aberto.

## 2. O Problema do Milênio

No famoso problema do milênio referente às equações de Navier-Stokes, descrito na página do Instituto Clay<sup>[1]</sup>, das quatro possibilidades para sua solução as duas primeiras pedem uma prova de que existe uma solução para as funções da pressão  $p(x, t)$  e velocidades  $u_i(x, t)$  em  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , para o caso específico de  $F(x, t) = (F_1, F_2, F_3)(x, t) = 0$  (ausência de força externa, vetor nulo 0) e  $\nu > 0$ . As duas últimas possibilidades pedem uma prova de que existem funções para a força externa  $F(x, t) = (F_1, F_2, F_3)(x, t)$  e velocidade inicial  $u^0(x)$  tais que não existe solução para as equações de Navier-Stokes com  $\nu > 0$ . O caso  $\nu = 0$  resulta na chamada Equação de Euler, que também não tem solução geral conhecida para  $n = 3$ , mas esta não faz parte do problema do milênio.

Além de  $\nu > 0$  e dimensão espacial  $n = 3$  as quatro alternativas têm em comum a condição de divergente nulo para a velocidade, propriedade dos fluidos incompressíveis (densidade de massa constante na equação da continuidade),

$$(4) \quad \operatorname{div} u \equiv \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{fluidos incompressíveis})$$

e ser a velocidade inicial  $u^0(x) = u(x, 0)$  um campo vetorial  $C^\infty$  com divergente nulo ( $\nabla \cdot u^0 = 0$ ) sobre  $\mathbb{R}^3$ . Para que uma solução  $(p, u)$  seja fisicamente razoável, se requer que  $u(x, t)$  não cresça infinitamente para  $|x| \rightarrow \infty$  e que

$$(5) \quad p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$$

e

$$(6) \quad \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx < C, \text{ para todo } t \geq 0, \quad (\text{bounded energy})$$

satisfazendo (1) e (4).

Alternativamente, a condição (6) de energia (cinética) total limitada pode ser substituída pela condição de periodicidade espacial da velocidade e respectiva velocidade inicial, assim como pressão e força externa espacialmente periódicas, i.e.,

$$(7) \quad u(x, t) = u(x + e_j, t),$$

$$(8) \quad u^0(x) = u^0(x + e_j),$$

$$(9) \quad p(x, t) = p(x + e_j, t)$$

e

$$(10) \quad F(x, t) = F(x + e_j, t),$$

onde  $e_j$  é o  $j^{\text{th}}$  vetor unitário em  $\mathbb{R}^3$ , para  $1 \leq j \leq 3$ , igualdades válidas para  $u, p, F$  sobre  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  e  $u^0$  sobre  $\mathbb{R}^3$ .

Neste artigo estamos tratando principalmente dos casos (C) e (D) descritos em [1], ou seja:

(C) Quebra das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre  $\mathbb{R}^3$ . Para  $\nu > 0$  e dimensão espacial  $n = 3$  existem um campo vetorial suave e com divergência nula  $u^0(x) = u(x, 0)$  sobre  $\mathbb{R}^3$  e uma força externa suave  $F(x, t)$  sobre  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  satisfazendo

$$(11) \quad |\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha k} (1 + |x|)^{-k} \text{ sobre } \mathbb{R}^3, \text{ para quaisquer } \alpha \in \mathbb{N}_0^3 \text{ e } k \geq 0,$$

e

$$(12) \quad |\partial_x^\alpha \partial_t^m F(x, t)| \leq C_{\alpha m k} (1 + |x| + t)^{-k} \text{ sobre } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \text{ para quaisquer } \alpha \in \mathbb{N}_0^3, m \in \mathbb{N}_0 \text{ e } k \geq 0,$$

tais que não existe solução  $(p, u)$  sobre  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  satisfazendo (1), (4), (5) e (6).

(D) Quebra das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ . Para  $\nu > 0$  e dimensão espacial  $n = 3$  existem um campo vetorial suave e com divergência nula  $u^0(x) = u(x, 0)$  sobre  $\mathbb{R}^3$  e uma força externa suave  $F(x, t)$  sobre  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  satisfazendo as condições de periodicidade espacial (8) e (10), a condição

$$(13) \quad |\partial_x^\alpha \partial_t^m F(x, t)| \leq C_{\alpha m k} (1 + t)^{-k} \quad \text{sobre } \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \quad \text{para quaisquer } \alpha \in \mathbb{N}_0^3, m \in \mathbb{N}_0 \text{ e } k \geq 0,$$

tais que não existe solução  $(p, u)$  sobre  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  satisfazendo (1), (4), (5), (7) e (9).

Utilizamos  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  = conjunto dos inteiros não negativos.

Nas seções 3 §1 e 4 buscaremos exemplos específicos de campos para  $u$  e  $F$  que obedeçam aos requisitos aqui apresentados, as seções 3 §2 e 3 §3 tratam de uma prova geral para o caso (C), na seção 5 faremos alguns comentários sobre os casos (A) e (B), de existência de soluções, concluindo-se o presente trabalho na seção 6.

### 3. O caso (C)

#### § 1

Vamos encontrar primeiramente funções  $u: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que são soluções da equação diferencial parcial (equação da continuidade para densidade de massa constante)

$$(14) \quad \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

a condição de incompressibilidade (4).

Esta equação equivale à lei de Gauss para o campo magnético e para os campos elétrico e gravitacional no vácuo.

Soluções de (14) que correspondem a campos elétricos ou gravitacionais no vácuo, para uma única partícula na origem, fonte do campo (carga ou massa, respectivamente), são da forma

$$(15) \quad u = \frac{\alpha}{r^2} \hat{r} = \frac{\alpha}{r^3} \vec{r},$$

onde  $\vec{r} = (x, y, z)$  é o vetor posição,  $\hat{r}$  seu versor,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  o módulo de  $\vec{r}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  o fator de proporcionalidade dependente do valor da carga ou massa, respectivamente.

Não fosse a condição (6) de energia total limitada, a existência de divergência na origem e sua derivabilidade nesse ponto as componentes dos campos elétricos e gravitacionais poderiam ser candidatas às funções  $u_i$  de componentes de velocidades, mas não às funções  $\phi_i$  mencionadas na Introdução, tais que não exista solução para o sistema de equações diferenciais parciais

$$(16) \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \phi_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Para satisfazer (6) vamos escolher para  $u$  campos vetoriais com decaimento exponencial tais que

$$(17) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

o que também obedece (4), por exemplo,

$$(18) \quad u_i = a_i e^{-b_i x_{i+1}^2}, \quad a_i \in \mathbb{R}^*, b_i \in (0, 1],$$

um campo de velocidades sem aceleração local, estacionário, com a convenção de ser  $x_4 \equiv x_1$ .

Sabemos que a integração do sistema (16) só é possível no caso de campos conservativos e neste caso resulta em

$$(19) \quad p = \int_L \phi \cdot dl + \theta(t),$$

com  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  contínua e  $\theta: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável, correspondendo no caso destes campos conservativos à função trabalho, ou variação da energia cinética (quando  $\phi$  é a força elétrica ou gravitacional e  $\theta(t) = 0$ ), igual à variação (negativa) da energia potencial. Nessa situação a integral sempre existe e, a menos da função  $\theta(t)$ , independe do caminho  $L$  entre os pontos  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  e  $x \in \mathbb{R}^3$ , supondo que  $L$  seja contínuo por partes, de classe  $C^1$  e não passe por nenhuma singularidade de  $\phi$ . Diz-se que  $p$  é uma função potencial para  $\phi$ .

Precisamos então buscar um campo vetorial  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  que não seja gradiente, i.e., não deve existir uma função  $p: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que exista solução para a equação

$$(20) \quad \nabla p = \phi,$$

que equivale ao sistema (16) anterior.

Em muitos livros de Análise Matemática e Cálculo Diferencial e Integral pode-se encontrar a solução para este problema. Um dos grandes clássicos é o Apostol<sup>[2]</sup> (vol. II, cap. 10, Integrais de Linha), embora Courant, Elon Lages Lima, Guidorizzi, Kaplan, Piskunov, etc. sejam igualmente ótimas referências.

No teorema 10.6 de Apostol (seção 10.16) se prova que uma condição necessária para que um campo vetorial  $f = (f_1, \dots, f_n)$  continuamente diferenciável em um conjunto aberto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  seja um gradiente em  $S$  é que as derivadas parciais das componentes de  $f$  estejam ligadas pela relação

$$(21) \quad D_i f_j(x) = D_j f_i(x),$$

para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$  e todo  $x$  de  $S$ .  $D_i$  é o operador diferencial  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

No teorema 10.9 de Apostol (seção 10.21) se prova que a condição (21) também é uma condição suficiente se o conjunto  $S$  é um conjunto convexo aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

Vamos então a seguir buscar um campo vetorial  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ,  $\phi_i: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$(22) \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j,$$

para algum par  $(i, j)$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$  e tempos  $t$  não negativos. Adotaremos que nosso conjunto convexo aberto  $S$  é o próprio  $\mathbb{R}^3$ .

Além da condição (22) a condição (14) de incompressibilidade da velocidade também deve ser satisfeita, bem como as demais condições impostas neste problema do milênio, tais como (11) e (12).

Funções simples que obedecem (22) são, por exemplo,

$$1) \quad (ay, bx, c(x + y)), \quad a \neq b \neq c,$$

$$2) \quad (0, xzt, xyt), \quad x, y, z \neq 0, \quad t \geq 0,$$

$$3) \quad (e^{-ayt}, e^{-bxt}, e^{-czt}), \quad a, b, c \neq 0, \quad t \geq 0,$$

onde usamos  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ , mas não podemos escolher arbitrariamente qualquer  $\phi$  solução de (22).

Para que  $F$  e suas derivadas tendam a zero no infinito, e obedçam (12), vamos escolher para  $\phi$  uma função limitada, contínua, com limite zero no infinito, com todas as derivadas também contínuas ( $C^\infty$ ), limitadas e indo a zero no infinito, que obedeça (22) e que resulte numa função  $F$ , conforme (3), tal que seja possível provar (12).

Analisemos as três situações possíveis para  $\phi$ .

Se o campo vetorial  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  definido por

$$(23) \quad \phi_i = v \nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

não for um gradiente, i.e., for tal que

$$(24) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \text{ para algum } i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3,$$

escolhemos  $\phi_i = \varphi_i$ , e então, conforme (3),

$$(25) \quad F_i = \phi_i - \varphi_i = 0, \text{ para todo } i \text{ tal que } 1 \leq i \leq 3.$$

Vê-se que é possível uma força nula obedecer às condições deste problema do milênio no caso de quebra de soluções. Assim, não me parece possível resolver em toda sua generalidade os casos (A) e (B) deste problema, embora não seja minha pretensão provar isto neste artigo.

Se  $\varphi$  for um gradiente devemos encontrar um campo vetorial  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  que não seja gradiente, i.e., seja não conservativo, e assim o campo vetorial

$$(26) \quad \phi = \varphi + \omega$$

também não será gradiente, será não conservativo, e

$$(27) \quad F_i = \phi_i - \varphi_i = \omega_i, \text{ para todo } i \text{ tal que } 1 \leq i \leq 3.$$

Um campo vetorial  $\omega = F$  fácil de ser obtido é

$$(28) \quad \omega = (c_1 \varphi_1, c_2 \varphi_2, c_3 \varphi_3),$$

para constantes reais  $c_i \neq c_j \neq 0, i \neq j$ .

Como neste caso  $\varphi$  é gradiente, i.e., conservativo, então (condição necessária)

$$(29) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \text{ para todo } i, j \text{ tais que } 1 \leq i, j \leq 3.$$

Mas se  $\omega_i = c_i \varphi_i$  e as derivadas parciais  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$  não são identicamente nulas então

$$(30) \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = c_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \neq c_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \neq 0, \text{ para } c_i \neq c_j \neq 0, i \neq j,$$

i.e.,

$$(31) \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}, i \neq j,$$

portanto  $\omega$  não é gradiente e

$$(32) \quad F_i = \phi_i - \varphi_i = \omega_i = c_i \varphi_i, \text{ para todo } i \text{ tal que } 1 \leq i \leq 3,$$

O terceiro e último caso ocorre quando para todo  $x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0$ ,

$$(33) \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} = 0 \text{ para todo } i, j \text{ tais que } 1 \leq i, j \leq 3,$$

indicando que  $\phi$  é um campo conservativo e suas derivadas parciais de primeira ordem são iguais a zero.

Como buscamos algum par  $(i, j)$  tal que  $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}$  em geral e queremos alguma função  $F$  cujas sucessivas derivadas parciais mistas sejam da ordem de  $(1 + |x| + t)^{-k}$  sobre  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  vamos escolher  $F$  tal que suas derivadas se anulem a partir da segunda ordem de derivação parcial mista, i.e.,

$$(34) \quad \frac{\partial^{p+q}}{\partial x_i^p \partial t^q} F = 0, \quad p \geq 1, \quad q \geq 1, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

e seja  $F$  um campo não conservativo. Assim a soma  $\phi + F$ , que deve ser igual a  $\nabla p$ ,

$$(35) \quad \phi + F = \phi = \nabla p,$$

será igual a um campo  $\phi$  não conservativo e portanto não haverá solução para (35), equivalente a (20) e (16). Usamos a propriedade de que a soma de um campo vetorial conservativo e um não conservativo é um campo vetorial não conservativo.

Escolhemos para  $F$  nesse caso um campo não conservativo que decresce exponencialmente em relação à posição e ao tempo em ao menos uma das coordenadas espaciais e pode ser igual a zero nas coordenadas restantes (se houver). Por exemplo,

$$(36) \quad F_i = a_i \left( e^{-c_{1i} x_{i+1}^2} + b_i e^{-c_{2i} t} \right), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

com  $c_{1i} \neq c_{1j}, c_{ij} \in (0, 1]$ , e  $a_i, b_i \neq 0$ . Adotamos acima a convenção de ser  $x_4 \equiv x_1$ . As componentes  $F_i$  poderiam depender do tempo ou não, conforme (36), sem alterar a propriedade de ser  $F$  um campo não conservativo, mas a não dependência do tempo faria  $F$  desobedecer (12) para  $m = 0$ .

Para que  $F$  seja fisicamente consistente é necessário que  $a_i$  tenha a dimensão de aceleração ou força por unidade de massa,  $c_{1i}$  tenha a dimensão de recíproco de comprimento ao quadrado,  $c_{2i}$  dimensão de recíproco de tempo e  $b_i$  seja adimensional.



## § 2

Faremos agora uma demonstração genérica para a quebra de soluções de Navier-Stokes para todo  $t \geq 0$ . Assemelha-se ao que já foi feito na Introdução, com uma descrição mais apropriada para o domínio, imagem e condições das variáveis.

Para um tempo real  $t \geq 0$  qualquer, dada uma velocidade  $u(x, t): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que obedeça a todas as condições deste problema, descritas na seção 2, e tais que

$$(37) \quad u^0(x) = u(x, 0)$$

seja a velocidade inicial escolhida no nosso problema, para que haja solução de Navier-Stokes deve valer

$$(38) \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + F_i = \varphi_i + F_i = \phi_i, 1 \leq i \leq 3,$$

com

$$(39) \quad \varphi_i = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, 1 \leq i \leq 3,$$

onde se supõe que  $u^0(x)$  por nós escolhido também obedece a todas as condições necessárias, em especial (11). Por convenção, escolhamos sempre  $u^0(x)$  não gradiente, i.e., não conservativo.

Para este campo vetorial de velocidades  $u(x, t)$  é possível calcular  $\varphi(x, t)$ , de (39), escolher um campo  $\phi$  não conservativo com as mesmas propriedades razoáveis que devem obedecer  $u, p$  e  $F$  para o caso (C), e calcular

$$(40) \quad F = \phi - \varphi = \phi - \nu \nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u.$$

Escolhamos, por exemplo,

$$(41) \quad \phi(x, t) = u^0(x),$$

que é um campo não conservativo pela nossa convenção e independente do tempo  $t$ . Suponhamos que a compatibilidade dimensional física entre  $\phi$  e  $u^0$  seja feita pela multiplicação do fator 1, cuja dimensão compatibiliza ambos os campos.

O valor para as componentes de  $F(x, t)$  que obtemos de (40) é então

$$(42) \quad F_i = u_i^0 - \nu \nabla^2 u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, 1 \leq i \leq 3,$$

que deve satisfazer às mencionadas condições da seção 2 e depende de  $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ , qualquer que seja o valor de  $t \geq 0$ . Evidentemente, se os  $F_i$  obtidos em (42) não

obedecerem aos requisitos esperados escolhe-se outros  $u^0(x)$  e  $u(x, t)$  e repete-se o processo até que se obtenham componentes  $F_i$  adequadas, em especial que pertençam a  $C^\infty$  e obedeçam (12).

A força  $F = (F_1, F_2, F_3)$  calculada pelo método acima e a velocidade inicial  $u^0$  escolhida convenientemente em (37) garantem que chegue-se a um valor impossível de ser obtido para a pressão  $p$ , pois  $\phi = u^0$  é não conservativo, segundo nossa escolha, o que prova a ocorrência de quebra (inexistência) de soluções para as equações de Navier-Stokes, conforme queríamos. Dado  $p$  talvez possamos sempre encontrar  $u$ , mas dado  $u$  (e respectivo  $u^0$ ) podemos não encontrar  $p$ , quando  $\phi$  é não gradiente.

### § 3

Neste parágrafo explica-se melhor a prova do § 2 anterior.

Substituindo (42) em (38) obtemos

$$(43) \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = u_i^0, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

que não possui solução por ser  $u^0$  não gradiente, pela nossa definição, e assim encontramos  $u^0(x)$ ,  $u(x, t)$  e  $F(x, t) = H(u^0(x), u(x, t), \partial, \nabla^2, x, t)$  que levam à quebra (inexistência) das soluções de Navier-Stokes. Transformamos então a equação original (1) nesta equação (43).

Talvez seja difícil (ou até muito difícil) entender como é possível fazer com que  $F(x, t) = H(u^0(x), u(x, t), \partial, \nabla^2, x, t)$  possa ser calculado e usado na demonstração. Pode-se pensar que devemos apenas encontrar “de alguma maneira” velocidades iniciais  $u^0(x)$  e forças externas  $F(x, t)$  únicas, fixas, tais que (1) não tenha solução alguma, para qualquer par de variáveis  $(p, u)$  que possam existir. Mais exatamente, parece que não podemos dar como exemplo uma força que depende da velocidade e suas derivadas  $(\partial, \nabla^2)$  em  $t \geq 0$ .

Vejamos então.

(I) Se  $u$  resolve (1) então  $u$  é uma função de  $F$  e  $u^0$ , suponhamos  $u = f(F, u^0, \partial, \nabla^2, x, t) = g(x, t)$ .

(II) Se  $u$  é uma função de  $F$  e  $u^0$  então  $F$  é uma função ou uma relação de  $u$  e  $u^0$ , mesmo que tal relação não seja unívoca, i.e.,  $F = f^{-1}(u, u^0, \partial, \nabla^2, x, t) = g^{-1}(x, t)$ .

(III) Se  $F$  pode ser expressa como função (ou relação) de  $u$  e  $u^0$  a equação (42) que utilizamos pode ser aceita, no que diz respeito a ser  $F$  dependente de  $u$  e  $u^0$ . Vejam também que a definição do problema não proíbe que  $F$  seja função de  $u$

e suas derivadas, o que nos dá liberdade para que seja parte da estratégia de nossa solução.

A segunda objeção que pode ser feita é o fato de prefixarmos  $u$ , e não apenas  $u^0$ , de tal modo que escolhemos  $F$  dado por (42) igual a

$$(44) \quad F = u^0 - \nu \nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u.$$

Mas qual o significado de não existir  $(p, u)$ , na definição do problema dado em [1]? Simbolicamente, usando Lógica, a não existência do par de variáveis  $(p, u)$  equivale à seguinte sentença:

$$(45) \quad \nexists(p, u) \leftrightarrow ((\exists p \wedge \nexists u) \vee (\exists u \wedge \nexists p) \vee (\nexists p \wedge \nexists u)).$$

A opção que adotamos dentre as três possibilidades acima foi a existência de  $u$  com a não existência de  $p$ , i.e.,

$$(46) \quad (\exists u \wedge \nexists p) \rightarrow \nexists(p, u).$$

Acredito que com estas explicações as dúvidas sobre a validade das demonstrações anteriores sejam eliminadas. A seguir um resumo da definição do problema para o caso (C), onde se acrescentou um novo requisito referente à existência de  $u$  (destacado na cor azul), mantendo-se a de não existência de  $(p, u)$ , equivalente a  $\nexists p$ , não existência de  $p$ . Os números entre asteriscos (\*) referem-se à numeração original das respectivas equações em [1].

$\nu > 0, n = 3$	
$\exists u^0(x): \mathbb{R}^3$	smooth ( $C^\infty$ ), divergence-free ( $\nabla \cdot u^0 = 0$ ) <small>(ver nota A)</small>
$\exists F(x, t): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$	smooth ( $C^\infty$ )
(*4*)	$ \partial_x^\alpha u^0(x)  \leq C_{\alpha k} (1 +  x )^{-k}, \forall \alpha, k$
(*5*)	$ \partial_x^\alpha \partial_t^m F(x, t)  \leq C_{\alpha m k} (1 +  x  + t)^{-k}, \forall \alpha, m, k$
$\exists u(x, t): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$	smooth ( $C^\infty$ )
$\nexists(p, u): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) /$	
(*1*)	$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i(x, t), 1 \leq i \leq 3 \quad (x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$
(*2*)	$\nabla \cdot u = 0$
(*3*)	$u(x, 0) = u^0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^3)$
(*6*)	$p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$
(*7*)	$\int_{\mathbb{R}^3}  u(x, t) ^2 dx < C, \forall t \geq 0 \quad (\text{bounded energy})$

#### 4. O caso (D)

Semelhantemente ao que fizemos na seção 3 §2, para um tempo real  $t \geq 0$  qualquer, dada uma velocidade  $u(x, t): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que obedeça a todas as condições deste problema, descritas na seção 2, e tais que, por exemplo,

$$(47) \quad u(x, 0) = u^0(x) = (\text{sen}(2\pi x_2), 0, 0),$$

para que haja solução de Navier-Stokes deve valer,

$$(48) \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + F_i = \varphi_i + F_i = \phi_i, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

com

$$(49) \quad \varphi_i = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Para este campo vetorial de velocidades  $u(x, t)$  é possível calcular  $\varphi(x, t)$ , de (49), escolher um campo  $\phi$  não conservativo com as mesmas propriedades razoáveis que devem obedecer  $u, p$  e  $F$  para o caso (D), e calcular

$$(50) \quad F = \phi - \varphi = \phi - \nu \nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u,$$

que deve ser uma função espacialmente periódica de período unitário nas três direções  $e_j, 1 \leq j \leq 3$ , de classe  $C^\infty$  e obedecer (12).

Escolhamos, por exemplo,

$$(51) \quad \phi(x, t) = u^0(x)e^{-t} = (e^{-t}\text{sen}(2\pi x_2), 0, 0),$$

que é um campo não conservativo de período espacial 1 e vai a zero com o aumento do tempo  $t$ , em decaimento exponencial. Suponhamos que a compatibilidade dimensional física entre  $\phi$  e  $u^0$  seja feita pela multiplicação do fator 1 cuja dimensão compatibiliza ambos os campos.

O valor das componentes de  $F(x, t)$  que obtemos de (50) é então

$$(52) \quad F_i = \begin{cases} e^{-t}\text{sen}(2\pi x_2) - \varphi_i, & i = 1 \\ -\varphi_i, & i = 2, 3 \end{cases}$$

com  $\varphi_i$  dado em (49), que deve ser espacialmente periódico de período unitário, de classe  $C^\infty$  e tendendo a zero em decaimento exponencial com o aumento do tempo, e finalmente, de (48),

$$(53) \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \phi_i = \begin{cases} e^{-t}\text{sen}(2\pi x_2), & i = 1 \\ 0, & i = 2, 3 \end{cases}$$

que é claramente um sistema sem solução para a função escalar  $p$ , qualquer que seja a velocidade  $u(x, t)$  aceitável que possamos ter utilizado inicialmente como nossa escolha, com  $u(x, 0) = u^0(x)$  e  $t \geq 0$ .

A força  $F(x, t) = H(u^0(x), u(x, t), \partial, \nabla^2, x, t)$  calculada pelo método acima e a velocidade inicial  $u^0$  escolhida em (47) garantem que para qualquer velocidade  $u(x, t)$  admissível para solução de Navier-Stokes neste problema chegue-se a um valor impossível de ser obtido para a pressão  $p$ , pois  $\phi = u^0$  é não conservativo, segundo nossa escolha, o que prova a existência de quebra de soluções para as equações de Navier-Stokes, conforme queríamos.

Lembremos que a utilização da força como uma função da velocidade já foi justificada na seção 3 §3.

Vejam ainda que o caso (D) é de menor interesse, pois nos obriga a buscar uma não solução espacialmente periódica de período unitário, quando poderia haver uma solução não espacialmente periódica ou de período não unitário em alguma direção. Velocidades iniciais e forças externas periódicas podem também implicar, talvez, em uma solução não periódica, ou seja, mesmo que todas as condições do problema no caso (D) sejam satisfeitas pode haver ainda alguma solução para as equações de Navier-Stokes.

## 5. Comentários sobre os casos (A) e (B): existência de soluções

Os casos mais difíceis de serem tratados neste problema do milênio, em minha opinião, são as duas primeiras alternativas, que pedem solução para as equações de Navier-Stokes dada uma velocidade inicial genérica qualquer  $u^0(x)$  satisfazendo determinadas condições, conforme descrito a seguir.

(A) Existência e lisura das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre  $\mathbb{R}^3$ . Para coeficiente de viscosidade  $\nu > 0$ , dimensão espacial  $n = 3$ , força externa  $F = 0$  e qualquer campo vetorial suave e com divergência nula  $u^0(x) = u(x, 0)$  sobre  $\mathbb{R}^3$  existe solução  $(p, u)$  sobre  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  para as equações de Navier-Stokes satisfazendo (1), (4), (5), (6) e (11).

(B) Existência e lisura das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ . Para coeficiente de viscosidade  $\nu > 0$ , dimensão espacial  $n = 3$ , força externa  $F = 0$  e qualquer campo vetorial suave e com divergência nula  $u^0(x) = u(x, 0)$  sobre  $\mathbb{R}^3$  satisfazendo a condição de periodicidade espacial (8) existe solução  $(p, u)$  sobre  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  para as equações de Navier-Stokes satisfazendo (1), (4), (5), (7) e (9).

Vejamos. Não fosse a exigência de ser  $F = 0$  seria muito simples resolver Navier-Stokes. Poderíamos escolher pressões  $p(x, t)$  fisicamente razoáveis, velocidades  $u(x, t)$  fisicamente razoáveis satisfazendo  $u(x, 0) = u^0(x)$  e ainda que  $p$  e  $u$  (e conseqüentemente  $u^0$ ) obedecessem às demais condições requeridas para este problema, a exemplo de  $\nabla \cdot u = 0$ , o que resultaria enfim numa força externa  $F = (F_1, F_2, F_3)(x, t)$  tal que

$$(54) \quad F_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Nossa atenção se concentraria em provar que  $F$  não viola nenhuma regra, nenhuma condição que  $F$  deveria obedecer pela imposição do problema.

A equação (54) mostra claramente que existem combinações das variáveis  $(p, u)$  que são proibidas nos movimentos de fluidos sem força externa, pois se o lado direito de (54) resultar para ao menos uma das componentes  $i$  um valor não nulo para a força externa chegaríamos a uma contradição, já que o movimento seria, por definição, sem força externa.

Também não podemos utilizar qualquer velocidade inicial  $u^0(x)$ . Todas as condições que devem obedecer  $u(x, t)$  em  $t \geq 0$  devem ser obedecidas por  $u^0(x)$ , já que esta equivale a  $u(x, t)$  no instante inicial  $t = 0$ . Em especial,  $u^0(x)$  deve obedecer também às equações de Navier-Stokes (1) e de incompressibilidade (4).

Isto nos sugere que  $u^0(x)$  pode ser, ela própria, a procurada solução de (1), inclusive para todo  $t \geq 0$ , com a imposição da condição de contorno adicional  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . Temos assim o caso de fluidos sem aceleração local, uma solução estacionária. Se a correspondente função  $\phi$  em

$$(55) \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 u_i^0 - \sum_{j=1}^3 u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} = \phi_i, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

for gradiente então o problema está resolvido, para uma infinidade de pressões possíveis, admitindo-se satisfeitas as demais condições que devem ser obedecidas por  $u$  e  $p$ . No caso de fornecermos  $p^0(x)$  como condição inicial ao invés de  $u^0(x)$ , sempre haverá solução em  $t = 0$ , e teremos

$$(56) \quad a_i^0 = \nu \nabla^2 u_i^0 - \frac{\partial p^0}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^3 u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Se o valor de  $a^0$  que se obtém acima for igual a zero então  $u(x, t) = u^0(x)$  e  $p(x, t) = p^0(x) + \theta(t)$  são uma solução do problema, para  $t \geq 0$ .

Mas o caso geral ainda nos foge neste momento: dado  $u^0(x)$  obter  $u(x, t)$  e  $p(x, t)$ , soluções das equações de Navier-Stokes. Para mim parece claro que é preciso ao menos mais uma condição inicial, como já vimos com o uso de

$a^0(x) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}$  nas seções anteriores. Além disso, nas diversas equações diferenciais ordinárias e parciais de segunda ordem da Física Matemática<sup>[3]</sup> e que já foram amplamente estudadas é comum (até necessário) a utilização de (pelo menos) duas condições iniciais ou de contorno para a sua completa solução, e não vejo motivo para aqui ser diferente.

Mesmo assim, do ponto de vista da realidade física, realidade que certamente motiva este problema, uma questão de Matemática aplicada aos fluidos, também me parece não ser possível resolver Navier-Stokes sem força externa em todas as condições, seja  $\nabla \cdot u = 0$  ou não, seja  $v = 0$  ou não.

Suponhamos  $u^0(x) = (0, 0, 0) = 0$  e, por definição,  $F(x, t) = (0, 0, 0) = 0$  (despreocupadamente temos utilizado o mesmo símbolo 0 tanto para o vetor nulo quanto para a constante numérica igual a zero, mas que não seja isso fonte de confusão).

Em  $t = 0$  a equação a ser resolvida é

$$(57) \quad \nabla p^0 = - \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0},$$

com  $p^0(x) = p(x, 0)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Para que haja solução devemos ter que  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}$  seja um campo vetorial gradiente, i.e., alguma função  $a^0(x)$  gradiente. A solução  $u = 0$  satisfaz esta condição e é uma solução fisicamente razoável: sem velocidade inicial, sem força externa, teremos um fluido imóvel, estático, estacionário, sem acelerações<sup>(ver nota B)</sup>, sem ventos e marés, exatamente o comportamento observado na natureza. Por outro lado,  $\nabla p^0 = 0$  tem uma infinidade de soluções possíveis da forma  $p^0(x) = cte.$ , o que pode não ser fisicamente razoável. Por que haveria pressão não nula se a velocidade não varia no tempo e espaço e não há força? Nesse caso não há colisões entre as partículas do fluido, então não há pressão não nula em instante algum. Aceitar unicamente  $p^0(x) = 0$  seria o mais razoável, ainda que seja de fato uma idealização do comportamento físico dos fluidos (não utilizamos teoria atômica e molecular, termodinâmica, mecânica quântica, etc.).

Se impusermos uma velocidade inicial da forma  $u^0 = (u_1^0(x_2, x_3), 0, 0)$ , fisicamente razoável, para  $u_1^0$  diferente de constante,  $u^0$  não gradiente e com  $\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} \neq 0$  e  $\frac{\partial u_1^0}{\partial x_3} \neq 0$ , como  $F(x, t) = (0, 0, 0)$  e esperamos um sistema fisicamente razoável, a solução  $u(x, t)$  ao longo do tempo deve evoluir para uma velocidade da forma  $u(x, t) = (u_1(x_1, x_2, x_3, t), 0, 0)$ , com  $u_1(x, t)$  não identicamente nulo, que representa o movimento do fluido apenas na direção  $e_1$ . Tal como no exemplo anterior, não é fisicamente razoável, abstraindo-se das complexidades termodinâmicas e quânticas a nível microscópico, esperar um movimento

macroscópico nas direções  $e_2$  e  $e_3$  quando não há velocidades iniciais e forças nessas direções.

Assim o sistema final a ser resolvido será da forma

$$(58) \quad \nabla p = (\phi_1(x, t), 0, 0),$$

que não admitirá solução para  $p$  em geral, para todo  $t \geq 0$ . Isto é mais um exemplo de quebra das soluções de Navier-Stokes, desta vez sem usar  $F(x, t) = H(u^0(x), u(x, t), \partial, \nabla^2, x, t)$  não nula. Admitimos também nesta análise um ambiente sem bordas (ou bordas muito distantes do ponto em estudo) e velocidade inicial baixa, para que não ocorram, na realidade, efeitos caóticos, de turbilhões, etc.

## 6. Conclusão

Nas seções 3 §2 e 4, utilizando implicitamente as relações lógicas (45) e (46), escolhe-se hipoteticamente uma velocidade válida  $u$  e respectivo  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , com  $u(x, 0) = u^0(x)$ , e encontra-se uma força externa  $F$  que depende destes  $u, u^0$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}$  e implique em um sistema de equações diferenciais parciais impossível de ser resolvido para a pressão  $p$ , de acordo com (2) e (3), pelo método descrito já na Introdução, o que resolve o problema de maneira geral para  $t \geq 0$ . Esta é a grande chave do método utilizado:  $(\exists u \wedge \nexists p) \rightarrow \nexists (p, u)$ .

Interessante observar que com esta lógica também podemos encontrar “inúmeras” combinações de  $F(x, t)$  e  $u(x, t)$ , mesmo sem ser  $F(x, t)$  uma função explícita de  $u(x, t)$  e suas derivadas e inclusive para  $F = 0$ , tais que (1), e consequentemente (2), não tenham solução para  $p$ , por implicarem em uma função  $\phi$  não gradiente. Dito desta forma, parece uma conclusão simples demais para que esta questão tenha se tornado um problema do milênio, mas de fato é o que conseguimos deduzir de pura Matemática.

Este método leva apenas a uma condição necessária, mas não ainda suficiente, introduzindo-se mais uma condição na tabela resumo do enunciado do problema descrito na seção 3 §3:  $\forall u(x, t)/u(x, 0) = u^0(x)$ . Assim não bastaria encontrarmos apenas um único exemplo para  $u(x, t)$ , e sim todas as infinitas possibilidades. As provas suficientes seriam, neste caso, semelhantes às dadas nas seções 3 §2 e 4, uma vez que a condição  $\exists F(x, t)$  não proíbe que seja  $F(x, t)$  uma função que varie instantaneamente com cada  $u(x, t)$  possível, conforme vimos em 3 §3. Faltariam as provas de (12) para o caso (C) ou (10) e (13) para o caso (D).

Na seção 5 fizemos alguns comentários sobre os casos (A) e (B) de existência de soluções para as equações de Navier-Stokes e demos mais um



exemplo de inexistência de solução para estas equações, com  $F = 0$ , usando a necessidade de ser o sistema fisicamente razoável, ou compatível com a observação a nível macroscópico, em um ambiente sem bordas (ou bordas muito distantes do ponto em estudo) e velocidade inicial baixa.

É oportuno mencionar que estas dificuldades com relação à integração das equações de Navier-Stokes e Euler desaparecem quando passamos a considerar que a pressão é um vetor, e não mais um escalar, tal que  $p(x, t): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  e substitui-se  $\nabla p$  por  $\nabla \otimes p = \left( \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \frac{\partial p_2}{\partial x_2}, \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \right)$ , com  $p = (p_1, p_2, p_3)$ . Vejo como natural adotar esta ampliação do conceito de pressão. O caso em que  $p_1 = p_2 = p_3$  possivelmente leva a todos os resultados já aceitos na Mecânica dos Fluidos, por exemplo, o de fluidos no estado de equilíbrio. Espero ver isso com mais detalhes oportunamente.

Nota A: Em atenção aos leitores das versões anteriores, preciso me desculpar e dizer que cometi alguns enganos (um *reality* de aprendizagem), já corrigidos, em especial:

1) ao traduzir o termo *divergence-free* para  $u^0$ , interpretando-o como a necessidade de ser limitada em todo ponto a velocidade inicial, tal que  $\lim_{x \rightarrow x_0} |u^0(x)| < C$ , i.e., livre de divergências. Na realidade o termo pede bem menos: que seja igual a zero o divergente da velocidade inicial, ou seja,  $\nabla \cdot u^0 = 0$ . Não obstante, as condições (\*4\*) e (\*5\*) impõe que  $u^0$  e  $F$ , bem como suas infinitas derivadas, tendam a zero no infinito mais rápido que o inverso de qualquer polinômio (sendo da classe  $C^\infty$ , pertencem ao espaço de Schwartz).

2) considerei o índice  $\alpha$  como pertencente ao conjunto dos números naturais, sem incluir o zero. Além disso,  $\alpha$  deve ser um multi-índice, i.e.,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ ,  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , com  $\partial_x^\alpha u^0 = \partial_t^\alpha u^0 = \partial_x^\alpha \partial_t^\alpha u^0 = u^0$ , o mesmo valendo para a força externa  $F$ . Grato ao professor Ricardo Rosa da UFRJ pela informação.

Nota B: Por um abuso de linguagem, em versões anteriores chamei de aceleração o termo  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , sendo que este é mais exatamente conhecido como aceleração local (a posição  $x$  de referência é fixa enquanto  $t$  varia). A derivada total da velocidade em relação ao tempo é  $\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u$ , conhecida como aceleração convectiva, derivada de transporte, derivada material ou derivada substancial. Esta é a aceleração que tem uma partícula do fluido inicialmente na posição  $x(t = 0)$ , segundo a descrição lagrangeana do movimento. A equação  $\frac{Du}{Dt} = 0$  é conhecida como Equação de Burgers (André Nachbin, *Aspectos da Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos*, IMPA, 2001, e Merle C. Potter e David C. Wiggert, *Mecânica dos Fluidos*, Cengage Learning, 2004).

## Referências

1. Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in <http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf>
2. Apostol, Tom M., *Calculus*, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1969).