

---

Хмельник С. И.

# Дополнение к математической МОДЕЛИ ПЕСЧАНОГО ВИХРЯ

## Аннотация

Математическая модель песчаного вихря, представленная в [1], дополняется за счет включения в модель массового тока, который появляется из-за сопротивления воздуха и инерция песчинок. Дополненная модель позволяет объяснить причину движения вихря и утверждать, что существует положительная обратная связь между скоростью движения вихря и его механическим импульсом: импульс увеличивается с увеличением скорости и, начав движение, вихрь разгоняется.

## Оглавление

1. Введение
2. Математическая модель
3. Потоки энергии
- Приложение 1
- Приложение 2
- Литература

## 1. Введение

В [1] представлена математическая модель песчаного вихря. Там указывалось, что сопротивление воздуха и инерция песчинок являются причиной поступательного движения (навстречу силе сопротивления воздушной среды). Здесь это утверждение доказывается более строго.

## 2. Математическая модель

В [1] показано, что гравитоманнитные напряженности  $H$  и плотность массовых токов  $J$  в стационарном гравитоманнитном поле связаны максвеллоподобными уравнениями гравитации вида

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (1)$$

$$\text{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}, \quad (2)$$

$$\text{div}(\mathbf{J}) = 0, \quad (3)$$

которые и являются уравнениями песчаного вихря. Эти уравнения описывают неподвижный вихрь. Но при движении вихря надо учесть тот факт, что сопротивление воздуха и инерция песчинок создает дополнительный поток песчинок, направленный против скорости  $v$  поступательного движения вихря. Можно полагать, что существует некоторый источник постоянного тока  $\overline{J}_o \equiv -\overline{v}$ . Тогда уравнение (3) необходимо представить в виде:

$$\text{div}(\mathbf{J}) = \mathbf{J}_o. \quad (4)$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  будем полагать, что скорость направлена вдоль той оси, от которой против часовой стрелки отсчитывается угол  $\varphi$ . Тогда

$$\mathbf{J}_o = j_o q(\varphi) \cos(\varphi), \quad (5)$$

где функция

$$q(\varphi) = \begin{cases} -1, & \text{if } -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 1, & \text{if } 3\pi/2 > \varphi > \pi/2 \end{cases}. \quad (5a)$$

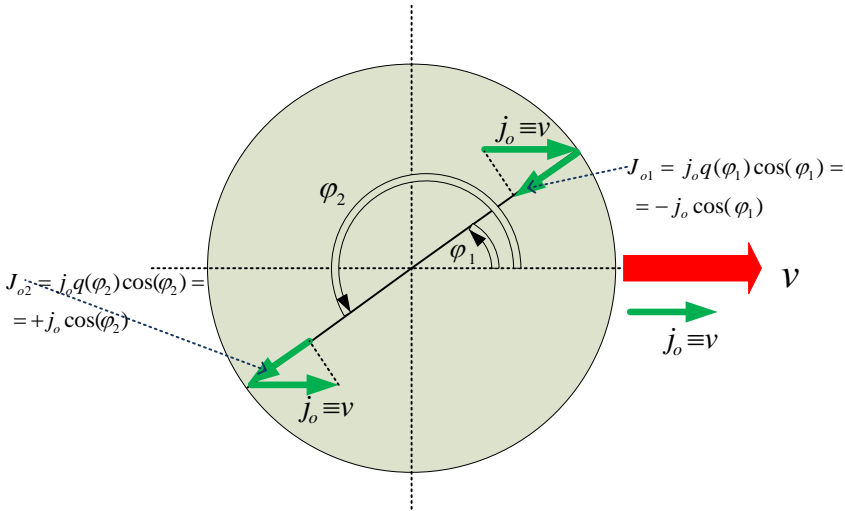


Рис. 1.

На рис. 1 показаны величины, используемые в формулах (5, 5a). Видно, что при постоянном

$$\overline{j}_o \equiv \overline{v} \quad (5b)$$

ток (5) всегда направлен противоположно скорости. Например, при  $\varphi_1 = \pi/6$  и  $\varphi_2 = \pi + \varphi_1 = \pi + \pi/6$  имеем:  $q(\varphi_1) = -1$ ,  $q(\varphi_2) = 1$ ,  $\cos(\varphi_1) = -\cos(\varphi_2)$  и  $J_{o1} = J_{o1} = -j_o \cos(\varphi_1)$ .

Из физических соображений ясно, что поле должно быть однородным вдоль вертикальной оси. Тогда в цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  уравнения (1, 2, 4, 5) примут вид:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = J_r, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (8)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (9)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} = j_o q(\varphi) \cos(\varphi). \quad (10)$$

Решение системы (6-10) найдено в приложении 1 и имеет следующий вид:

$$H_r = \frac{\alpha}{2} h_\varphi r \sin(\alpha \varphi), \quad (14)$$

$$H_\varphi = h_\varphi r \cos(\alpha \varphi), \quad (15)$$

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha \varphi) + j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi), \quad (16)$$

$$J_r = -\frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha \varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi), \quad (17)$$

$$J_\varphi = j_\varphi r \sin(\alpha \varphi) - j_o q(\varphi) \sin(\varphi), \quad (18)$$

$$J_z = h_\varphi \left( (1 - \alpha^2/2) \cos(\alpha \varphi) - \alpha \sin(\alpha \varphi) \right), \quad (19)$$

где  $j_\varphi$ ,  $h_\varphi$ ,  $j_o$  - некоторые константы,  $\alpha$  - целое число, константа.

Массовые токи циркулируют по сечениям тела вихря и по вертикали. Рассмотрим, как и в [1], траекторию массы, которая все время находится на одном и том же расстоянии от центра. Ее траектория опишется вектор-функцией вида

$$\bar{J} = \bar{J}_r(r, \varphi) + \bar{J}_\varphi(r, \varphi) + \bar{J}_z(r, \varphi),$$

где слагаемые векторы вычисляются по формулам (17-19) при  $r = const$ ,  $\varphi = var$ . На рис. 1. показаны три траектории при  $r = 1$ ,  $r = 13$ ,  $r = 29$  и  $0 \leq \varphi = \pi$ ,  $\alpha = 10$ ,  $j_\varphi = 1$ ,  $h_\varphi = 1$ ,  $j_o = 20$ . Безусловно, одна и та же песчинка не может находиться постоянно на одном и том же радиусе, т.е. песчинки сменяют друг друга на каждом радиусе. Но в среднем именно эти траектории можно считать траекториями струй в потоке песчинок вихря – сравни с аналогичными траекториями для неподвижного вихря.

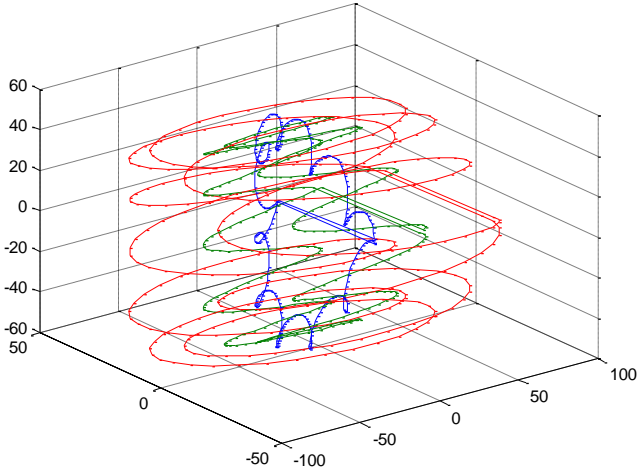


Рис. 1.

### 3. Потоки энергии

По аналогии с [3] и используя (14-19) можно найти проекции вектора плотности гравитационной энергии в теле песчаного вихря. Громоздкие вычисления этих проекций вынесены в приложение 2 и показаны там достаточно подробно, чтобы читатель легко убедился в справедливости полученных результатов. В приложении показано, что при существовании тока  $J_o$  на каждой окружности данного радиуса существуют суммарные неуравновешенные потоки. Они имеют вид:

$$\overline{S_r} = -1.5\pi j_o j_\varphi r^2, \quad (21)$$

$$\overline{S_\varphi} = 0, \quad (22)$$

$$\overline{S_z} = -\alpha \pi j_\varphi h_\varphi r^2 - 2 j_o h_\varphi r \eta(\alpha), \quad -2 \leq \eta(\alpha) \leq 2. \quad (23)$$

Итак, ток  $J_o$

- является причиной появления потока гравитационной энергии (21), направленного навстречу скорости (поскольку в силу (5в)  $j_o > 0$ , т.е. направлен **по** скорости),
- не создает кругового потока энергии,
- дополняет или уменьшает вертикальный поток энергии (23).

Вертикальный поток энергии направлен вниз и, в соответствии с законом сохранения импульса, создает механический импульс тела вихря, направленный вверх. Этот импульс сохраняет вертикальную форму вихря. Этот импульс существует даже в неподвижном вихре. В подвижном вихре этот импульс может увеличиваться или уменьшаться, но аналитически эту зависимость установить не удастся, поскольку остается неизвестной величина  $\alpha$ .

Поток гравитационной энергии направлен против скорости движения вихря. В соответствии с законом сохранения импульса, этот поток создает механический импульс тела вихря, направленный вдоль скорости. Поскольку ток пропорционален скорости, то механический импульс возрастает с увеличением скорости. Таким образом, существует положительная обратная связь между скоростью вихря и его механическим импульсом: начав движение, вихрь разгоняется.

Гравитационная энергия преобразуется в кинетическую энергию пылинок вихря, которая, в свою очередь, преобразуется в тепловую энергию при трении пылинок и в кинетическую энергию движения вихря.

## Приложение 1

Рассматривается решение уравнений (6-10) из основного текста. Для удобства читателя перепишем их сюда:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = J_r, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z + J_o, \quad (4)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} = j_o q(\varphi) \cos(\varphi). \quad (5)$$

Далее по аналогии с [2] предположим, что

$$H_r = h_r r \sin(\alpha\varphi) \quad (6)$$

$$H_\varphi = h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) \quad (7)$$

Из (1, 6, 7) следует:

$$\frac{h_r r \sin(\alpha\varphi)}{r} + h_r \sin(\alpha\varphi) - h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) = 0, \quad (8)$$

Следовательно,

$$h_r = h_\varphi \alpha / 2. \quad (9)$$

Из (4, 6, 7) следует:

$$\frac{h_\varphi r \cos(\alpha\varphi)}{r} - h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) - h_r \alpha \cos(\alpha\varphi) = J_z, \quad (10)$$

Из (9, 10) следует:

$$-h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) + (h_\varphi - h_r \alpha) \cos(\alpha\varphi) = J_z,$$

или

$$J_z = h_\varphi \left( (1 - \alpha^2 / 2) \cos(\alpha\varphi) - \alpha \sin(\alpha\varphi) \right). \quad (11)$$

Предположим, далее, что

$$J_r = j_r r \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi), \quad (12)$$

$$J_\varphi = j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - j_o q(\varphi) \sin(\varphi). \quad (13)$$

Из (5, 11, 12) следует:

$$\begin{aligned} \frac{j_r r \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi)}{r} + j_r \cos(\alpha\varphi) + \\ + j_\varphi \alpha \cos(\alpha\varphi) - \frac{j_o q(\varphi) \cos(\varphi)}{r} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно,

$$j_r = -j_\varphi \alpha / 2 \quad (15)$$

Из (2, 12) находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = j_r r^2 \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) r \cos(\alpha\varphi). \quad (16)$$

Из (15, 16) следует, что

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) r \sin(\varphi). \quad (17)$$

Из (3, 13) находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = -j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \sin(\varphi). \quad (18)$$

Из (17) следует, что

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) r \sin(\varphi). \quad (19)$$

Формулы (17, 19) совпадают, что свидетельствует о правильности решения.

## Приложение 2

По аналогии с [3] и используя формулы (14-19) основного текста, найдем проекции вектора плотности гравитационной энергии:

$$S_{r\varphi z} = \left[ \begin{array}{l} S_r = J_\varphi H_z - J_z H_\varphi = (j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - j_o q(\varphi) \sin(\varphi)) \bullet \\ \bullet \left( -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) \right) - \\ - (h_\varphi \left( (1 - \alpha^2/2) \cos(\alpha\varphi) - \alpha \sin(\alpha\varphi) \right)) \bullet (h_\varphi r \cos(\alpha\varphi)) \\ S_\varphi = J_z H_r - J_r H_z = h_\varphi \left( \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \cos(\alpha\varphi) - \alpha \sin(\alpha\varphi) \right) \bullet \\ \bullet \frac{\alpha}{2} h_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - \left( -\frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi) \right) \bullet \\ \bullet \left( -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) \right) \\ S_z = J_r H_\varphi - J_\varphi H_r = \left( -\frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi) \right) \bullet \\ \bullet (h_\varphi r \cos(\alpha\varphi)) - (j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - j_o q(\varphi) \sin(\varphi)) h_\varphi \frac{\alpha}{2} r \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right]. \quad (1)$$

Выполняя умножение находим:

$$\begin{aligned} S_r = & -j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) \frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) + \\ & + j_o q(\varphi) \sin(\varphi) \frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) - j_o q(\varphi) \sin(\varphi) j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) - \\ & - h_\varphi (1 - \alpha^2/2) \cos(\alpha\varphi) h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
S_\varphi = & h_\varphi \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \cos(\alpha\varphi) \frac{\alpha}{2} h_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - \alpha \sin(\alpha\varphi) \frac{\alpha}{2} h_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - \\
& - \frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) \frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + \frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) + \quad (3) \\
& + j_o q(\varphi) \cos(\varphi) \frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) - j_o q(\varphi) \cos(\varphi) j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_z = & -\frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi) h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) \quad (4) \\
& - j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) h_\varphi \frac{\alpha}{2} r \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \sin(\varphi) h_\varphi \frac{\alpha}{2} r \sin(\alpha\varphi)
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
S_r = & -\frac{1}{2} j_\varphi^2 r^3 \sin^2(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) j_\varphi r^2 \sin^2(\alpha\varphi) + \\
& + \frac{1}{2} j_o q(\varphi) j_\varphi r^2 \sin^2(\varphi) - (j_o q(\varphi))^2 r \sin^2(\varphi) - \quad (5) \\
& - h_\varphi^2 r \left(1 - \alpha^2/2\right) \cos^2(\alpha\varphi) + h_\varphi^2 \alpha r \sin(\alpha\varphi) \cos(\alpha\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_\varphi = & h_\varphi^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) r \cos(\alpha\varphi) \sin(\alpha\varphi) - h_\varphi r \frac{\alpha^2}{2} \sin^2(\alpha\varphi) - \\
& - \frac{\alpha}{4} j_\varphi^2 r^3 \cos(\alpha\varphi) \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) j_\varphi \frac{\alpha}{2} r^2 \cos(\alpha\varphi) \sin(\varphi) + \quad (6) \\
& + \frac{1}{2} j_o q(\varphi) j_\varphi r^2 \cos(\varphi) \sin(\alpha\varphi) - (j_o q(\varphi))^2 r \cos(\varphi) \sin(\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_z = & -\frac{\alpha}{2} j_\varphi h_\varphi r^2 \cos^2(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) h_\varphi r \cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \quad (7) \\
& - j_\varphi h_\varphi \frac{\alpha}{2} r^2 \sin^2(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) h_\varphi \frac{\alpha}{2} r \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi)
\end{aligned}$$

После дальнейших упрощений с учетом того, что  $(q(\varphi))^2 = 1$ , находим:



$$S_r = -\frac{1}{2} j_\varphi^2 r^3 \sin^2(\alpha\varphi) + \frac{3}{2} j_o q(\varphi) j_\varphi r^2 \sin^2(\varphi) - j_o^2 r \sin^2(\varphi) - h_\varphi^2 r \left(1 - \alpha^2/2\right) \cos^2(\alpha\varphi) + \frac{1}{2} h_\varphi^2 \alpha r \sin(2\alpha\varphi) \quad (8)$$

$$S_\varphi = h_\varphi^2 \frac{\alpha}{4} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) r \sin(2\alpha\varphi) - \frac{\alpha^2}{2} h_\varphi r \sin^2(\alpha\varphi) - \frac{\alpha}{8} j_\varphi^2 r^3 \sin(2\alpha\varphi) + \frac{1}{2} j_o q(\varphi) j_\varphi r^2 \left( \begin{array}{l} \alpha \cdot \cos(\alpha\varphi) \sin(\varphi) + \\ + \cos(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right) - \frac{1}{2} j_o^2 r \sin(2\varphi) \quad (9)$$

$$S_z = -\frac{\alpha}{2} j_\varphi h_\varphi r^2 + j_o q(\varphi) h_\varphi r \left( \begin{array}{l} \cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \\ + \alpha \cdot \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right) \quad (10)$$

Найдем суммарные неуравновешенные потоки на окружности данного радиуса, отбрасывая те слагаемые, которые имеют равные значения на противоположно направленных вектор-радиусах:

$$\overline{S_r} = \int_0^{2\pi} S_r d\varphi = \frac{3}{2} j_o j_\varphi r^2 \int_0^{2\pi} q(\varphi) \sin^2(\varphi) d\varphi \quad (11)$$

$$\overline{S_\varphi} = \int_0^{2\pi} S_\varphi d\varphi = \frac{1}{2} j_o j_\varphi r^2 \int_0^{2\pi} q(\varphi) \left( \begin{array}{l} \alpha \cdot \cos(\alpha\varphi) \sin(\varphi) + \\ + \cos(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right) d\varphi \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \overline{S_z} &= \int_0^{2\pi} S_z d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \left( -\frac{\alpha}{2} j_\varphi h_\varphi r^2 + j_o q(\varphi) h_\varphi r \left( \begin{array}{l} \cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \\ + \alpha \cdot \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right) \right) = \\ &= -\alpha \pi j_\varphi h_\varphi r^2 + j_o h_\varphi r \int_0^{2\pi} q(\varphi) \left( \begin{array}{l} \cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \\ + \alpha \cdot \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right) d\varphi \end{aligned} \quad (13)$$

В соответствии с (5а) для любой монотонной функции  $f(\varphi)$  имеем:

$$\int_0^{2\pi} q(\varphi) f(\varphi) d\varphi = -2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi. \quad (14)$$

Следовательно, интегралы (11-13) могут быть представлены в виде:

$$\overline{S_r} = -3 j_o j_\varphi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(\varphi) d\varphi, \quad (15)$$

$$\overline{S_\varphi} = -j_o j_\varphi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \alpha \cdot \cos(\alpha\varphi) \sin(\varphi) + \right. \\ \left. + \cos(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \right) d\varphi, \quad (16)$$

$$\overline{S_z} = -\alpha \pi j_\varphi h_\varphi r^2 - 2 j_o h_\varphi r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \right. \\ \left. + \alpha \cdot \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \right) d\varphi. \quad (17)$$

В этих формулах выражения

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad (18)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \alpha \cdot \cos(\alpha\varphi) \sin(\varphi) + \right. \\ \left. + \cos(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \right) d\varphi = 0, \quad (19)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \right. \\ \left. + \alpha \cdot \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \right) d\varphi = \eta(\alpha). \quad (20)$$

Функция представлена на рис. 1. Итак,

$$\overline{S_r} = -1.5 \pi j_o j_\varphi r^2, \quad (21)$$

$$\overline{S_\varphi} = 0, \quad (22)$$

$$\overline{S_z} = -\alpha \pi j_\varphi h_\varphi r^2 - 2 j_o h_\varphi r \eta(\alpha), \quad -2 \leq \eta(\alpha) \leq 2. \quad (23)$$

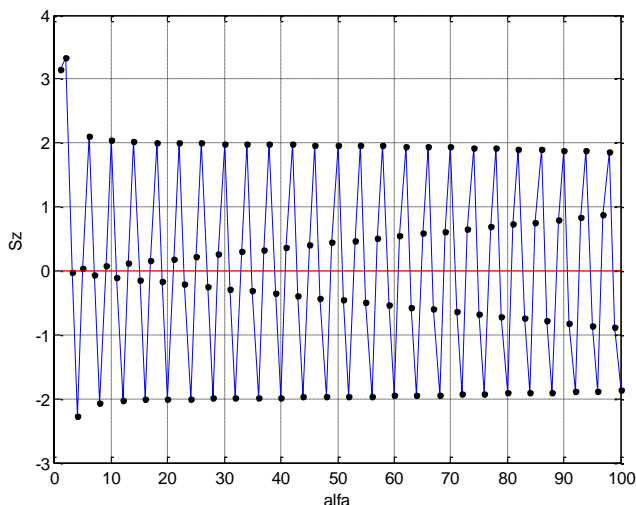


Рис. 1.

---

## Литература

1. Хмельник С.И. Математическая модель песчаного вихря,  
<http://vixra.org/pdf/1504.0169v3.pdf>
2. Хмельник С.И. Структура постоянного тока,  
<http://vixra.org/pdf/1503.0241v2.pdf>
3. Хмельник С.И. Структура потока электромагнитной энергии в проводе с постоянным током,  
<http://vixra.org/pdf/1504.0061v1.pdf>