
Хмельник С. И.

Структура постоянного тока

Аннотация

| Рассматривается структура постоянного тока в проводе.

Оглавление

1. Введение
 2. Математическая модель
 3. Решение уравнений
 4. Структура токов
 5. Мощность
- Приложение
Литература

1. Введение

В [1] было показано, что постоянный ток в проводе имеет сложную структуру и этим можно обосновать утверждения о том, что основной поток электромагнитной энергии

- направлен вдоль оси провода,
- распространяется вдоль оси провода,
- распространяется внутри провода,
- компенсирует тепловые потери осевой составляющей тока.

Ниже структура постоянного тока рассматривается более строго.

2. Математическая модель

Ток в проводе принято рассматривать как усредненный поток электронов. Механические взаимодействия электронов с атомами считаются эквивалентными электрическому сопротивлению.

При моделировании тока будем использовать цилиндрические координаты r , φ , z . Уравнения Максвелла для магнитных напряженностей и токов в стационарном магнитном поле имеют вид

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}) = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}, \quad (2)$$

или

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (5)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z + J_o, \quad (6)$$

Модель основана на том, что

1. основная электрическая напряженность E_o направлена вдоль оси провода,
2. она создает основной ток J_o – вертикальный поток зарядов,
3. вертикальный ток J_o формирует кольцевое магнитное поле с напряженностью H_φ и радиальное магнитное поле H_r - см. (6),
4. магнитное поле H_φ отклоняет силами Лоренца заряды вертикального потока в радиальном направлении, создавая– радиальный поток зарядов - радиальный ток J_r ,
5. магнитное поле H_φ отклоняет силами Лоренца заряды радиального потока перпендикулярно радиусам, создавая вертикальный ток J_z (дополнительно к току J_o),
6. магнитное поле H_r отклоняет силами Лоренца заряды вертикального потока перпендикулярно радиусам, создавая кольцевой ток J_φ ,
7. магнитное поле H_r отклоняет силами Лоренца заряды кольцевого потока вдоль радиусов, создавая вертикальный ток J_z (дополнительно к току J_o),
8. ток J_r формирует вертикальное магнитное поле H_z и кольцевое магнитное поле H_φ - см. (4),
9. ток J_φ формирует вертикальное магнитное поле H_z и радиальное магнитное поле H_r - см. (5),
10. ток J_z формирует кольцевое магнитное поле H_φ и радиальное магнитное поле H_r - см. (6),
11. токам соответствуют одноименные электрические напряженности, т.е.

$$E = \rho \cdot J, \quad (7)$$

где ρ - электросопротивление.

Таким образом, основной ток J_o создает дополнительные токи J_r , J_φ , J_z и магнитные поля H_r , H_φ , H_z . Они должны удовлетворять уравнениям Максвелла (3-6). Кроме того, токи должны удовлетворять условию непрерывности

$$\operatorname{div}(J) = 0. \quad (8)$$

Прежде всего, необходимо доказать, что решение системы (3-8) существует при ненулевых токах J_r , J_φ , J_z .

3. Решение уравнений

Из физических соображений ясно, что поле должно быть однородным вдоль вертикальной оси, т.е. должны отсутствовать производные по аргументу z , и, следовательно, уравнения (3-6, 8) должны быть переписаны в виде:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = J_r, \quad (10)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (11)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z + J_o, \quad (12)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (13)$$

Решение системы уравнений дано в приложении 1, где показано, что при данных j_φ , h_φ определены

$$H_r = \frac{\alpha}{2} h_\varphi r \sin(\alpha\varphi), \quad (14)$$

$$H_\varphi = h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + \frac{J_o r}{2}, \quad (15)$$

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi), \quad (16)$$

$$J_r = -\frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi), \quad (17)$$

$$J_{\varphi\cdot} = j_{\varphi} r \sin(\alpha\varphi), \quad (18)$$

$$J_z = J_o + h_{\varphi} \left((1 - \alpha^2/2) \cos(\alpha\varphi) - \alpha \sin(\alpha\varphi) \right). \quad (19)$$

4. Структура токов

На основе уравнений (17-19) рассмотрим распределение токов в объеме цилиндрического провода. Все примеры показаны при $j_{\varphi} = 1$, $h_{\varphi} = 1$, $\alpha = 10$, $R = 50$.

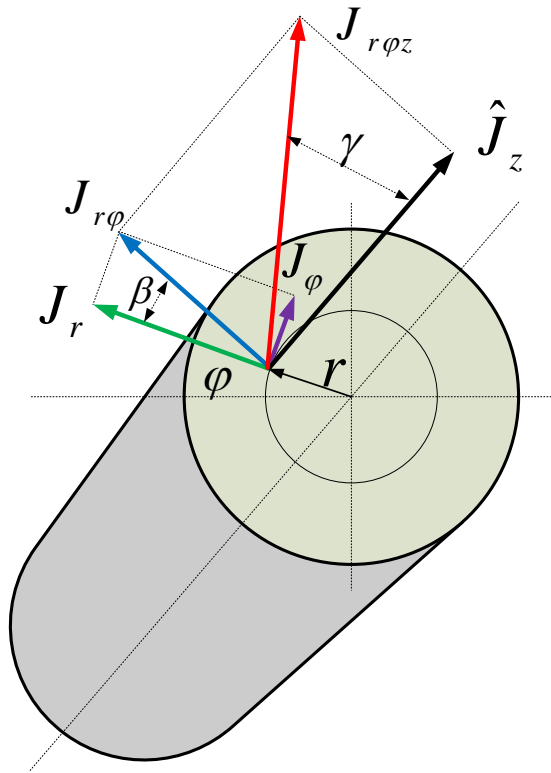


Рис. 0.

На рис. 0 показаны векторы токов J_r , J_{φ} , J_z . На этом рисунке при фиксированном значении φ показаны также вектор $J_{r\varphi}$ (равный сумме векторов J_r и J_{φ}) и вектор $J_{r\varphi z}$ (равный сумме векторов $J_{r\varphi}$ и J_z). Вектор $J_{r\varphi}$ составляет с радиусом угол β . Видно, что вектор $J_{r\varphi z}$ направлен под некоторым углом γ к оси цилиндра.

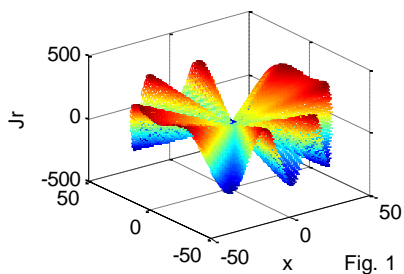


Fig. 1

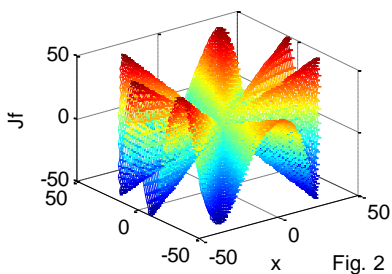


Fig. 2

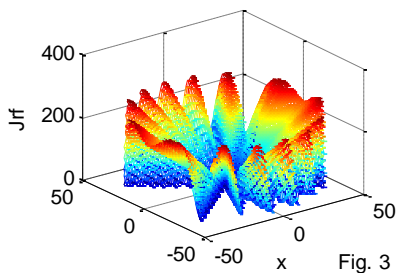


Fig. 3

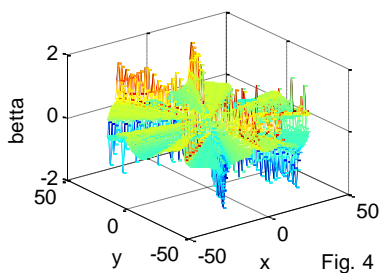


Fig. 4

На рис. 1, 2, 3, 4 показаны величины J_r , J_φ , $J_{r\varphi}$, β на плоскости сечения (r, φ) . На рис. 5 показаны линии токов J_r , J_φ на этой плоскости при $\alpha = 8$. Важно отметить, что на линиях тока J_r ток $J_\varphi = 0$. Видно, что непрерывность линий тока соблюдается – см. (13).

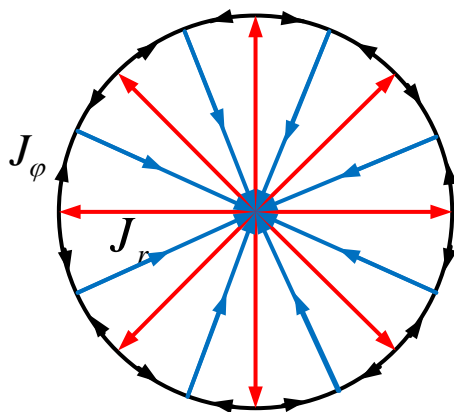


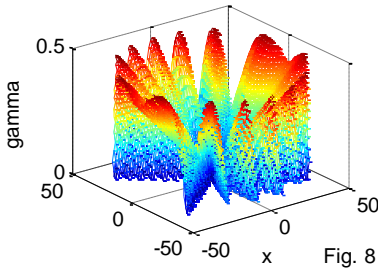
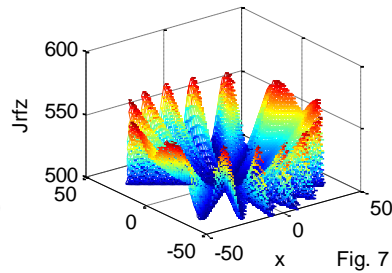
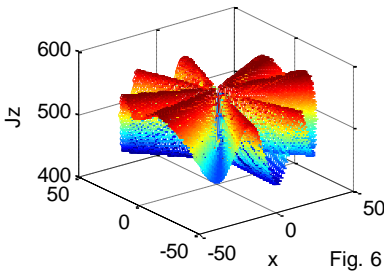
Рис. 5.

Точно так же изображаются линии напряженностей H_r , H_φ на плоскости сечения (r, φ) . Отличие заключается в том, что на линиях напряженностей H_r напряженность $H_\varphi = J_o r / 2$ - см. (15). Видно, что непрерывность силовых линий также соблюдается – см. (9).

Важно отметить, что на окружности внешнего радиуса R напряженность H_φ не постоянна, определяется из (15) и имеет вид:

$$H_{\varphi R} = h_\varphi R \cos(\alpha\varphi) + J_o R / 2 \quad (20)$$

На рис. 6 показана величина J_z на плоскости сечения (r, φ) . На рис. 7, 8 показаны величины $J_{r\varphi z}$, γ на плоскости сечения (r, φ) при $J_o = 500$. Видно, что линии тока $J_{r\varphi z}$ всегда наклонены к оси цилиндра. Именно этот факт был основным аргументом при обосновании указанных во введении выводов статьи [1]



Заметим, что существуют случаи, когда угол γ является постоянным. Например, на рис. 9, 10 показаны величины $J_{r\varphi z}$, γ при $\alpha = 2$.

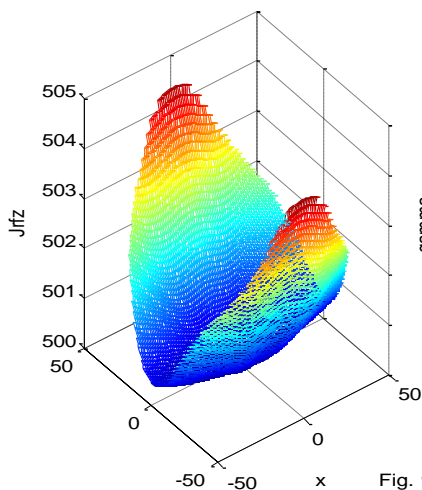


Fig. 9

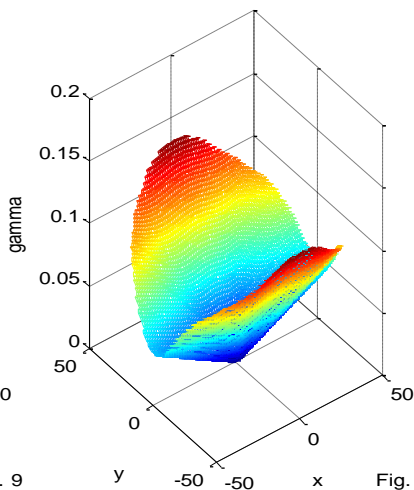


Fig. 8

5. МОЩНОСТЬ

Найдем плотность мощности тепловых потерь, обозначая через R - внешний радиус провода, L - длину провода, ρ - электросопротивление.

Ток J_r течет через сечение $Lr \cdot d\varphi$ на длине dr . Поэтому мощность потерь от этих токов равна следующему интегралу:

$$P_r = \rho L \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (J_r)^2 d\varphi = \frac{\rho L \alpha^2}{4} j_\varphi^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (r \cos(\alpha\varphi))^2 d\varphi$$

ИЛИ

$$P_r = \frac{\pi \rho \alpha^2 R^4 L}{16} j_\varphi^2. \quad (21)$$

Ток J_φ течет через сечение $L \cdot dr$ на длине $r \cdot d\varphi$. Поэтому мощность потерь от этих токов равна следующему интегралу:

$$P_\varphi = \rho L \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (J_\varphi)^2 d\varphi = \rho L j_\varphi^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (r \sin(\alpha\varphi))^2 d\varphi$$

ИЛИ

$$P_\varphi = \frac{\pi \rho R^4 L}{4} j_\varphi^2. \quad (22)$$

Ток J_z течет через сечение $r \cdot d\varphi \cdot dr$ на длине L . Поэтому мощность потерь от этих токов равна следующему интегралу:

$$\begin{aligned}
P_z &= \rho L \pi R^2 J_o^2 + \rho L \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (J_z)^2 d\varphi = \\
&\rho L \pi R^2 J_o^2 + \rho L h_\varphi^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \left(\begin{pmatrix} (1 - \alpha^2/2) \cos(\alpha\varphi) \\ -\alpha \sin(\alpha\varphi) \end{pmatrix} \right)^2 d\varphi = \\
&\rho L \pi R^2 J_o^2 + \rho L h_\varphi^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \left(\begin{pmatrix} (1 - \alpha^2/2)^2 \cos^2(\alpha\varphi) \\ -\alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \sin(2\alpha\varphi) \\ +\alpha^2 \sin^2(\alpha\varphi) \end{pmatrix} \right)^2 d\varphi = \\
&= \rho L \pi R^2 J_o^2 + \frac{\pi R^2}{2} \rho L h_\varphi^2 \left((1 - \alpha^2/2)^2 + \alpha^2 \right)
\end{aligned}$$

или

$$P_z = \rho L \pi R^2 \left(J_o^2 + \frac{1}{2} h_\varphi^2 (1 + \alpha^4/4) \right). \quad (23)$$

Итак,

$$P = \begin{bmatrix} P_r \\ P_\varphi \\ P_z \end{bmatrix} = \pi R^2 L \rho \begin{bmatrix} P_r = \alpha^2 R^2 j_\varphi^2 / 16 \\ P_\varphi = R^2 j_\varphi^2 / 4 \\ P_z = J_o^2 + h_\varphi^2 (1/2 + \alpha^4/8) \end{bmatrix} \quad (24)$$

и

$$P = P_r + P_\varphi + P_z = \pi R^2 L \rho \left(j_\varphi^2 R^2 (1/4 + \alpha^2/16) + J_o^2 + h_\varphi^2 (1 + \alpha^4/4) \right) \quad (25)$$

В электрических цепях постоянного тока соблюдается принцип минимума тепловых потерь. Впервые на такое свойство электрических цепей обратил внимание Максвелл [2], который обнаружил, что в цепях с сопротивлениями токи минимизируют мощность тепловых потерь. Минимум мощности (25) соблюдается при

$$\left(j_\varphi^2 R^2 (1/4 + \alpha^2/16) + h_\varphi^2 (1 + \alpha^4/4) \right) \rightarrow \min \quad (26)$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{j_\varphi^2 R^2 (1/4 + \alpha^2/16)} = \sqrt{h_\varphi^2 (1 + \alpha^4/4)}$$

или

$$j_\varphi = h_\varphi \eta / R. \quad (27)$$

где

$$\eta = \sqrt{(4 + \alpha^4) / (1 + \alpha^2/4)}, \quad (28)$$

т.е.

$$P = \pi R^2 L \rho (J_o^2 + h_\phi^2 (\eta^2 (1/4 + \alpha^2/16) + (1 + \alpha^4/4)))$$

или

$$P = \pi R^2 L \rho (J_o^2 + h_\phi^2 (1/4 + \alpha^4/16)) \quad (29)$$

Энергия, расходуемая силами Лоренца для создания дополнительных токов J_r , J_ϕ , J_z , доставляется основным током J_o . Следовательно, создание дополнительных токов эквивалентно увеличению сопротивления на некоторую величину $\Delta\rho$. Этот факт можно записать в следующем виде:

$$(\rho + \Delta\rho) \cdot \pi R^2 J_o^2 L = P. \quad (30)$$

Из (25, 27, 30) следует, что

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} J_o^2 = h_\phi^2 (1/4 + \alpha^4/16) \quad (31)$$

Пример.

Все вычисления будем выполнять в системе СИ. Найдём максимальные токи и напряженности из (14-19):

$$\begin{aligned} H_{r\cdot} &= \pm \frac{\alpha}{2} h_\phi R, \quad H_{\phi\cdot} = \pm h_\phi R + \frac{J_o R}{2}, \quad H_z = \pm \frac{1}{2} j_\phi R^2, \\ J_{r\cdot} &= \pm \frac{\alpha}{2} j_\phi R, \quad J_{\phi\cdot} = \pm j_\phi R, \quad J_z = J_o \pm \frac{\alpha^2}{2} h_\phi. \end{aligned} \quad (32)$$

Пусть в формуле (31) $\Delta\rho/\rho = 0.01$. Тогда $0.01 J_o^2 \approx h_\phi^2 \alpha^4/16$ или $h_\phi \approx 0.04 J_o / \alpha^2$. (33)

Пусть ещё $\alpha = 2$, $R = 0.001$. Тогда из (33, 28, 27) найдём $h_\phi \approx 0.01 J_o$, $\eta = 10$, $j_\phi = 100 J_o$, а из (32) найдём:

$$\begin{aligned} H_{r\cdot} &\approx \pm J_o 10^{-5}, \quad H_{\phi\cdot} \approx (5 \pm 0.1) J_o 10^{-4}, \quad H_z \approx \pm 5 J_o 10^{-5}, \\ J_{r\cdot} &= \pm 0.1 J_o, \quad J_{\phi\cdot} = \pm 0.1 J_o, \quad J_z = (1 \pm 0.02) J_o. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, существуют условия, при которых рассматриваемая структура тока возможна.

Приложение

Рассматривается решение уравнений (9-13). Из физических соображений ясно, что поле должно быть однородным вдоль вертикальной оси, т.е. должны отсутствовать производные по

аргументу z , и, следовательно, уравнения (9-13) основного раздела должны быть переписаны в виде:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = J_r, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z + J_o, \quad (4)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (5)$$

Предположим, что

$$H_r = h_r r \sin(\alpha\varphi) \quad (6)$$

$$H_\varphi = h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + \frac{J_o r}{2} \quad (7)$$

Из (1, 6, 7) следует:

$$\frac{h_r r \sin(\alpha\varphi)}{r} + h_r \sin(\alpha\varphi) - h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) = 0, \quad (8)$$

Следовательно,

$$h_r = h_\varphi \alpha / 2. \quad (9)$$

Из (4, 6, 7) следует:

$$\frac{h_\varphi r \cos(\alpha\varphi)}{r} - h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) - h_r \alpha \cos(\alpha\varphi) = J_z, \quad (10)$$

Из (9, 10) следует:

$$-h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) + (h_\varphi - h_r \alpha) \cos(\alpha\varphi) = J_z,$$

или

$$J_z = h_\varphi \left((1 - \alpha^2 / 2) \cos(\alpha\varphi) - \alpha \sin(\alpha\varphi) \right). \quad (11)$$

Предположим, далее, что

$$J_r = j_r r \cos(\alpha\varphi), \quad (12)$$

$$J_\varphi = j_\varphi r \sin(\alpha\varphi). \quad (13)$$

Из (5, 11, 12) следует:

$$\frac{j_r r \cos(\alpha\varphi)}{r} + j_r \cos(\alpha\varphi) + j_\varphi \alpha \cos(\alpha\varphi) = 0, \quad (14)$$

Следовательно,

$$j_r = -j_\varphi \alpha / 2 \quad (15)$$

Из (2, 3, 12, 13) находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = j_r r^2 \cos(\alpha \varphi), \quad (16)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = -j_\varphi r \sin(\alpha \varphi), \quad (17)$$

Из (15, 16) следует, что

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = -\frac{\alpha}{2} j_\varphi r^2 \cos(\alpha \varphi) \quad (18)$$

Из (17, 18) следует, что

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha \varphi) \quad (19)$$

Литература

1. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с постоянным током, «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», ISSN 2225—6717, Россия – Израиль, 2015, вып. 32. ISBN 978-1-312-19894-4, printed in USA, Lulu Inc., ID 16319679; <http://vixra.org/pdf/1503.0048v1.pdf>
2. Максвелл Кларк Д. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат, 1939, 321 с.