

# Una Reformulación de la Mecánica Clásica

Antonio A. Blatter

Licencia Creative Commons Atribución 3.0

(2015) Buenos Aires

Argentina

Este trabajo presenta una reformulación de la mecánica clásica que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

## Introducción

La posición inercial  $\mathbf{r}_i$ , la velocidad inercial  $\mathbf{v}_i$  y la aceleración inercial  $\mathbf{a}_i$  de una partícula  $i$ , están dadas por:

$$\mathbf{r}_i \doteq (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{a}_i \doteq (\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

( $\mathbf{v}_i \doteq d(\mathbf{r}_i)/dt$ ) y ( $\mathbf{a}_i \doteq d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$ ) donde  $\vec{r}_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$ ,  $\vec{R}$  es el vector de posición del centro de masa del free-system y  $\vec{\omega}$  es el vector de velocidad angular del free-system (ver Anexo I)

La fuerza neta  $\mathbf{F}_i$  que actúa sobre una partícula  $i$  ( $m_i$ ) produce una aceleración inercial  $\mathbf{a}_i$ , según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$$

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre  $\mathbf{F}_i$ .

Las magnitudes [ $m_i$ ,  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{a}_i$  y  $\mathbf{F}_i$ ] son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del free-system respecto a S es igual a cero y además S es inercial si la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del free-system respecto a S es igual a cero.

## Bipartícula

Un par de partículas es una bipartícula. El sistema de partículas  $\{a, b, c \text{ y } d\}$  puede formar el sistema de bipartículas  $\{ab, ac, ad, bc, bd \text{ y } cd\}$  o también el sistema de bipartículas  $\{ad, bd \text{ y } cd\}$

La masa  $m_{ij}$  de una bipartícula  $ij$ , está dada por:  $m_{ij} \doteq m_i m_j / M$ , donde  $m_i$  es la masa de la partícula  $i$ ,  $m_j$  es la masa de la partícula  $j$  y  $M (\doteq \sum_k m_k)$  es la masa del sistema de partículas en observación.

La posición inercial  $\mathbf{r}_{ij}$ , la velocidad inercial  $\mathbf{v}_{ij}$  y la aceleración inercial  $\mathbf{a}_{ij}$  de una bipartícula  $ij$ , están dadas por:

$$\mathbf{r}_{ij} \doteq (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\mathbf{v}_{ij} \doteq (\vec{v}_i - \vec{v}_j) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\mathbf{a}_{ij} \doteq (\vec{a}_i - \vec{a}_j) - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{v}_j) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

( $\mathbf{v}_{ij} \doteq d(\mathbf{r}_{ij})/dt$ ) y ( $\mathbf{a}_{ij} \doteq d^2(\mathbf{r}_{ij})/dt^2$ ) donde  $\vec{r}_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$ ,  $\vec{r}_j$  es el vector de posición de la partícula  $j$  y  $\vec{\omega}$  es el vector de velocidad angular del free-system (ver Anexo II)

La fuerza neta  $\mathbf{F}_{ij}$  que actúa sobre una bipartícula  $ij$  ( $m_{ij}$ ) produce una aceleración inercial  $\mathbf{a}_{ij}$ , según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F}_{ij} \doteq m_{ij} (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) = m_{ij} (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) = m_{ij} \mathbf{a}_{ij}$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza neta que actúa sobre la partícula  $i$ ,  $\mathbf{F}_j$  es la fuerza neta que actúa sobre la partícula  $j$ ,  $m_i$  es la masa de la partícula  $i$ ,  $m_j$  es la masa de la partícula  $j$ ,  $\mathbf{a}_i$  es la aceleración inercial de la partícula  $i$  y  $\mathbf{a}_j$  es la aceleración inercial de la partícula  $j$ .

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre  $\mathbf{F}_i$  ni sobre  $\mathbf{F}_j$ .

Las magnitudes [ $m_{ij}$ ,  $\mathbf{r}_{ij}$ ,  $\mathbf{v}_{ij}$ ,  $\mathbf{a}_{ij}$  y  $\mathbf{F}_{ij}$ ] son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Si la partícula  $j$  de una bipartícula  $ij$  es el centro de masa del free-system ( $\mathbf{F}_j = 0$  y  $\mathbf{a}_j = 0$ ) entonces de la última ecuación de arriba se obtiene:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$$

Por lo tanto, se puede considerar que la dinámica de la partícula es un caso especial de la dinámica de la bipartícula.

## Dinámica Lineal

La dinámica lineal para una partícula  $m$  o para una bipartícula  $m$  (debiéndose agregar el subíndice « $i$ » o el subíndice « $ij$ » a todas las magnitudes y en todas las ecuaciones según sea el caso) está dada por:

Momento L1	$\mathbf{P}_{L1} \doteq m [(\mathbf{v})]$
Momento L2	$\mathbf{P}_{L2} \doteq m [(\mathbf{v})  \mathbf{r} ]$
Momento L3	$\mathbf{P}_{L3} \doteq m [(\mathbf{v})/ \mathbf{r} ]$
Energía Cinética L1	$K_{L1} \doteq 1/2 m [(\mathbf{v})^2]$
Energía Cinética L2	$K_{L2} \doteq 1/2 m [(\mathbf{v})^2 (\mathbf{r})^2]$
Energía Cinética L3	$K_{L3} \doteq 1/2 m [(\mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^2]$
Energía Potencial L1	$U_{L1} \doteq - [(\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})]$
Energía Potencial L2	$U_{L2} \doteq - [(\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) (\mathbf{r})^2]$
Energía Potencial L3	$U_{L3} \doteq - [(\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})/(\mathbf{r})^2]$
Energía Mecánica L1	$E_{L1} \doteq K_{L1} + U_{L1}$
Energía Mecánica L2	$E_{L2} \doteq K_{L2} + U_{L2}$
Energía Mecánica L3	$E_{L3} \doteq K_{L3} + U_{L3}$
Lagrangiano L1	$L_{L1} \doteq K_{L1} - U_{L1}$
Lagrangiano L2	$L_{L2} \doteq K_{L2} - U_{L2}$
Lagrangiano L3	$L_{L3} \doteq K_{L3} - U_{L3}$

Si sobre  $m$  sólo actúan fuerzas conservativas entonces  $E_{L1}$ ,  $E_{L2}$  y  $E_{L3}$  se conservan.

Del momento lineal  $\mathbf{P}_{L1}$  se obtiene la fuerza lineal ( $\mathbf{F}_{L1}$ ) más sencilla para utilizar,

$$\mathbf{F}_{L1} \doteq d(\mathbf{P}_{L1})/dt = m d(\mathbf{v})/dt = m \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

El momento lineal  $\mathbf{P}_{L1}$  de un sistema aislado de partículas se conserva si las fuerzas internas del sistema obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil ( $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ )

## Dinámica Radial

La dinámica radial para una partícula  $m$  o para una bipartícula  $m$  (debiéndose agregar el subíndice « $i$ » o el subíndice « $ij$ » a todas las magnitudes y en todas las ecuaciones según sea el caso) está dada por:

Momento R1	$P_{R1} \doteq m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})/ \mathbf{r} ]$
Momento R2	$P_{R2} \doteq m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})]$
Momento R3	$P_{R3} \doteq m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})/(\mathbf{r})^2]$
Energía Cinética R1	$K_{R1} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^2]$
Energía Cinética R2	$K_{R2} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2]$
Energía Cinética R3	$K_{R3} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^4]$
Energía Potencial R1	$U_{R1} \doteq - [(\int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)/(\mathbf{r})^2]$
Energía Potencial R2	$U_{R2} \doteq - [(\int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)]$
Energía Potencial R3	$U_{R3} \doteq - [(\int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)/(\mathbf{r})^4]$
Energía Mecánica R1	$E_{R1} \doteq K_{R1} + U_{R1}$
Energía Mecánica R2	$E_{R2} \doteq K_{R2} + U_{R2}$
Energía Mecánica R3	$E_{R3} \doteq K_{R3} + U_{R3}$
Lagrangiano R1	$L_{R1} \doteq K_{R1} - U_{R1}$
Lagrangiano R2	$L_{R2} \doteq K_{R2} - U_{R2}$
Lagrangiano R3	$L_{R3} \doteq K_{R3} - U_{R3}$

Si sobre  $m$  sólo actúan fuerzas conservativas entonces  $E_{R1}$ ,  $E_{R2}$  y  $E_{R3}$  se conservan.

Del momento radial  $P_{R2}$  se obtiene la fuerza radial ( $F_{R2}$ ) más sencilla para utilizar,

$$F_{R2} \doteq d(P_{R2})/dt = m d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})/dt = m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = 2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \doteq T$$

La magnitud radial  $E' \doteq K' + U' \doteq [m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] + [-2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}]$  se conserva si sobre  $m$  sólo actúan fuerzas conservativas.

## Dinámica Angular

La dinámica angular para una partícula  $m$  o para una bipartícula  $m$  (debiéndose agregar el subíndice « $i$ » o el subíndice « $ij$ » a todas las magnitudes y en todas las ecuaciones según sea el caso) está dada por:

Momento A1	$\mathbf{P}_{A1} \doteq m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})/ \mathbf{r} ]$
Momento A2	$\mathbf{P}_{A2} \doteq m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})]$
Momento A3	$\mathbf{P}_{A3} \doteq m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})/(\mathbf{r})^2]$
Energía Cinética A1	$K_{A1} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^2]$
Energía Cinética A2	$K_{A2} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2]$
Energía Cinética A3	$K_{A3} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^4]$
Energía Potencial A1	$U_{A1} \doteq - [((\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})(\mathbf{r})^2 - \int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)/(\mathbf{r})^2]$
Energía Potencial A2	$U_{A2} \doteq - [((\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})(\mathbf{r})^2 - \int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)]$
Energía Potencial A3	$U_{A3} \doteq - [((\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})(\mathbf{r})^2 - \int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)/(\mathbf{r})^4]$
Energía Mecánica A1	$E_{A1} \doteq K_{A1} + U_{A1}$
Energía Mecánica A2	$E_{A2} \doteq K_{A2} + U_{A2}$
Energía Mecánica A3	$E_{A3} \doteq K_{A3} + U_{A3}$
Lagrangiano A1	$L_{A1} \doteq K_{A1} - U_{A1}$
Lagrangiano A2	$L_{A2} \doteq K_{A2} - U_{A2}$
Lagrangiano A3	$L_{A3} \doteq K_{A3} - U_{A3}$

Si sobre  $m$  sólo actúan fuerzas conservativas entonces  $E_{A1}$ ,  $E_{A2}$  y  $E_{A3}$  se conservan.

Del momento angular  $\mathbf{P}_{A2}$  se obtiene la fuerza angular ( $\mathbf{F}_{A2}$ ) más sencilla para utilizar,

$$\mathbf{F}_{A2} \doteq d(\mathbf{P}_{A2})/dt = m d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})/dt = m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \doteq \mathbf{M}$$

El momento angular  $\mathbf{P}_{A2}$  de un sistema aislado de partículas se conserva si las fuerzas internas del sistema obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte ( $\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$ )

## Relaciones

$$\text{Energía Cinética 1} \quad K_{L1} = K_{R1} + K_{A1}$$

$$\text{Energía Cinética 2} \quad K_{L2} = K_{R2} + K_{A2}$$

$$\text{Energía Cinética 3} \quad K_{L3} = K_{R3} + K_{A3}$$

$$\text{Energía Potencial 1} \quad U_{L1} = U_{R1} + U_{A1}$$

$$\text{Energía Potencial 2} \quad U_{L2} = U_{R2} + U_{A2}$$

$$\text{Energía Potencial 3} \quad U_{L3} = U_{R3} + U_{A3}$$

$$\text{Energía Mecánica 1} \quad E_{L1} = E_{R1} + E_{A1}$$

$$\text{Energía Mecánica 2} \quad E_{L2} = E_{R2} + E_{A2}$$

$$\text{Energía Mecánica 3} \quad E_{L3} = E_{R3} + E_{A3}$$

$$\text{Lagrangiano 1} \quad L_{L1} = L_{R1} + L_{A1}$$

$$\text{Lagrangiano 2} \quad L_{L2} = L_{R2} + L_{A2}$$

$$\text{Lagrangiano 3} \quad L_{L3} = L_{R3} + L_{A3}$$

## Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias sobre  $\mathbf{F}_i$  ni sobre  $\mathbf{F}_j$ .

En este trabajo, las magnitudes  $[m_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{P}_i, F_i, P_i, K_i, U_i, E_i, L_i, m_{ij}, \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{a}_{ij}, \mathbf{F}_{ij}, \mathbf{P}_{ij}, F_{ij}, P_{ij}, K_{ij}, U_{ij}, E_{ij} \text{ y } L_{ij}]$  son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, la ecuación  $[\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i]$  y la ecuación  $[\mathbf{F}_{ij} = m_{ij} \mathbf{a}_{ij}]$  son simples reformulaciones de la segunda ley de Newton.

Por último, las integrales usadas en este trabajo son integrales indefinidas. Si ninguna fuerza actúa sobre la partícula  $i$ , sobre la partícula  $j$  o sobre la bipartícula  $ij$  entonces las integrales dan como resultado constantes.

# Anexo I

## Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición  $\vec{R}$ , la velocidad  $\vec{V}$  y la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular  $\vec{\omega}$  y la aceleración angular  $\vec{\alpha}$  del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$M \doteq \sum_i^N m_i$$

$$\vec{R} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \vec{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\vec{I} \doteq \sum_i^N m_i [|\vec{r}_i - \vec{R}|^2 \vec{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})]$$

$$\vec{L} \doteq \sum_i^N m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del free-system,  $\vec{I}$  es el tensor de inercia del free-system (respecto a  $\vec{R}$ ) y  $\vec{L}$  es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

## Transformaciones

$$(\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{V}') - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}) - 2 \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{A}') - 2 \vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{V}') + \vec{\omega}' \times [\vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}')] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i$$

## Anexo II

### Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición  $\vec{R}$ , la velocidad  $\vec{V}$  y la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular  $\vec{\omega}$  y la aceleración angular  $\vec{\alpha}$  del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$M \doteq \sum_i^N m_i$$

$$\vec{R} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \vec{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\vec{I} \doteq \sum_i^N m_i [|\vec{r}_i - \vec{R}|^2 \vec{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})]$$

$$\vec{L} \doteq \sum_i^N m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del free-system,  $\vec{I}$  es el tensor de inercia del free-system (respecto a  $\vec{R}$ ) y  $\vec{L}$  es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

### Transformaciones

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \doteq \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}'_{ij}$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) \doteq \mathbf{r}'_{ij} = \mathbf{r}_{ij}$$

$$(\vec{v}_i - \vec{v}_j) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \doteq \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}'_{ij}$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{v}'_j) - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) \doteq \mathbf{v}'_{ij} = \mathbf{v}_{ij}$$

$$(\vec{a}_i - \vec{a}_j) - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{v}_j) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \doteq \mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}'_{ij}$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{a}'_j) - 2\vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{v}'_j) + \vec{\omega}' \times [\vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j)] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) \doteq \mathbf{a}'_{ij} = \mathbf{a}_{ij}$$