

# Una Ecuación Radial de Movimiento

Antonio A. Blatter

Licencia Creative Commons Atribución 3.0

(2015) Buenos Aires

Argentina

Este trabajo presenta una ecuación radial de movimiento que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

## Introducción

Un par de partículas es una bipartícula. El sistema de partículas  $\{a, b, c \text{ y } d\}$  puede formar el sistema de bipartículas  $\{ab, ac, ad, bc, bd \text{ y } cd\}$  o también el sistema de bipartículas  $\{ad, bd \text{ y } cd\}$

La masa  $m_{ij}$  de una bipartícula  $ij$ , está dada por:  $m_{ij} \doteq m_i m_j / M$ , donde  $m_i$  es la masa de la partícula  $i$ ,  $m_j$  es la masa de la partícula  $j$  y  $M (\doteq \sum_k m_k)$  es la masa del sistema de partículas en observación.

La posición radial  $r_{ij}$ , la velocidad radial  $\dot{r}_{ij}$  y la aceleración radial  $\ddot{r}_{ij}$  de una bipartícula  $ij$ , están dadas por:

$$r_{ij} \doteq |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$$

$$\dot{r}_{ij} \doteq [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] / |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$$

$$\ddot{r}_{ij} \doteq [(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^2 / (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2] / |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$$

donde  $\mathbf{r}_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$  y  $\mathbf{r}_j$  es el vector de posición de la partícula  $j$  ( $\dot{r}_{ij} \doteq d(r_{ij})/dt$ ) y ( $\ddot{r}_{ij} \doteq d^2(r_{ij})/dt^2$ )

El momento radial  $P_{ij}$  de una bipartícula  $ij$  ( $m_{ij}$ ) está dado por:  $P_{ij} \doteq m_{ij} \dot{r}_{ij}$ , donde  $\dot{r}_{ij}$  es la velocidad radial de la bipartícula  $ij$ .

La fuerza radial  $F_{ij}$  que actúa sobre una bipartícula  $ij$  ( $m_{ij}$ ) está dada por:

$$F_{ij} \doteq [m_{ij} / |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|] [(\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_j}{m_j}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + 2 \int (\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_j}{m_j}) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - [2 \int [(\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_j}{m_j}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + 2 \int (\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_j}{m_j}) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] d^{1/2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2] / (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2]$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza neta que actúa sobre la partícula  $i$ ,  $\mathbf{F}_j$  es la fuerza neta que actúa sobre la partícula  $j$ ,  $m_i$  es la masa de la partícula  $i$ ,  $m_j$  es la masa de la partícula  $j$ ,  $\mathbf{r}_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$  y  $\mathbf{r}_j$  es el vector de posición de la partícula  $j$ .

## Dinámica Radial

La ecuación radial de movimiento para una bipartícula  $ij$  ( $m_{ij}$ ) está dada por:

$$F_{ij} = d(P_{ij})/dt = m_{ij} \ddot{r}_{ij}$$

donde  $F_{ij}$  es la fuerza radial que actúa sobre la bipartícula  $ij$ ,  $P_{ij}$  es el momento radial de la bipartícula  $ij$  y  $\ddot{r}_{ij}$  es la aceleración radial de la bipartícula  $ij$ .

### W, K, U, E y L

El trabajo  $W_{ij}$  realizado por las fuerzas (vectoriales) que actúan sobre una bipartícula  $ij$ , está dado por:

$$W_{ij} \doteq \int_1^2 F_{ij} d(r_{ij}) = \Delta^{1/2} m_{ij} (\dot{r}_{ij})^2 \doteq \Delta K_{ij}$$

donde  $F_{ij}$  es la fuerza radial que actúa sobre la bipartícula  $ij$ ,  $r_{ij}$  es la posición radial de la bipartícula  $ij$ ,  $m_{ij}$  es la masa de la bipartícula  $ij$ ,  $\dot{r}_{ij}$  es la velocidad radial de la bipartícula  $ij$  y  $K_{ij}$  es la energía cinética de la bipartícula  $ij$ .

El trabajo  $W_{ij}$  realizado por las fuerzas (vectoriales) conservativas que actúan sobre una bipartícula  $ij$  es igual y de signo opuesto a la variación en la energía potencial  $U_{ij}$  de la bipartícula  $ij$ .

$$\Delta U_{ij} \doteq - \int_1^2 F_{ij} d(r_{ij})$$

Por lo tanto, la energía mecánica  $E_{ij}$  de una bipartícula  $ij$  permanece constante si la bipartícula  $ij$  está sujeta sólo a fuerzas (vectoriales) conservativas.

$$\Delta E_{ij} \doteq \Delta K_{ij} + \Delta U_{ij} = 0$$

$$E_{ij} \doteq K_{ij} + U_{ij} = \text{constante}$$

donde  $K_{ij}$  es la energía cinética de la bipartícula  $ij$  y  $U_{ij}$  es la energía potencial de la bipartícula  $ij$ .

Finalmente, el Lagrangiano  $L_{ij}$  de una bipartícula  $ij$ , está dado por:

$$L_{ij} \doteq K_{ij} - U_{ij}$$

donde  $K_{ij}$  es la energía cinética de la bipartícula  $ij$  y  $U_{ij}$  es la energía potencial de la bipartícula  $ij$ .

## Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre  $\mathbf{F}_i$  ni sobre  $\mathbf{F}_j$ .

Todas las magnitudes de este trabajo ( $r_{ij}, \dot{r}_{ij}, \ddot{r}_{ij}, P_{ij}, F_{ij}, W_{ij}, K_{ij}, U_{ij}, E_{ij}$  y  $L_{ij}$ ) son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

Las magnitudes ( $W_{ij}, K_{ij}, U_{ij}, E_{ij}$  y  $L_{ij}$ ) son en realidad magnitudes escalares nuevas que por comodidad en este trabajo se les quitó el adjetivo «radial»

Las integrales de la definición de  $F_{ij}$  son integrales indefinidas. Si ninguna fuerza actúa sobre las partículas  $i$  y  $j$  entonces las integrales dan como resultado constantes.

La definición de  $F_{ij}$  podría modificarse de manera tal que no haya necesidad de trabajar con integrales indefinidas. Sin embargo, este cambio podría obligar a tener que modificar también otras ecuaciones del trabajo.

Por otro lado, este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, si un sistema de referencia inercial está fijo sobre la partícula  $j$  ( $\mathbf{r}_j = \mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j = \mathbf{F}_j = 0$ ) de una bipartícula  $ij$  ( $m_{ij}$ ) entonces de la ecuación radial de movimiento, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \mathbf{r}_i + 2 \int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot d\mathbf{r}_i - [2 \int [\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \mathbf{r}_i + 2 \int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot d\mathbf{r}_i] d^{1/2}(\mathbf{r}_i)^2] / (\mathbf{r}_i)^2 &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i - [\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i]^2 / (\mathbf{r}_i)^2 \\ (\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{r}_i + 2 \int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot d\mathbf{r}_i - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i - [2 \int [\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \mathbf{r}_i + 2 \int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot d\mathbf{r}_i] d^{1/2}(\mathbf{r}_i)^2 + [\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i]^2] / (\mathbf{r}_i)^2 &= 0 \\ (\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{r}_i = 0 \rightarrow 2 \int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot d\mathbf{r}_i - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 0 \rightarrow 2 \int [\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \mathbf{r}_i + 2 \int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot d\mathbf{r}_i] d^{1/2}(\mathbf{r}_i)^2 - [\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i]^2 &= 0 \end{aligned}$$

puesto que en todo sistema de referencia inercial siempre  $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i/m_i$  (así como en todo sistema de referencia no inercial introduciendo las fuerzas ficticias sobre  $\mathbf{F}_i$ )

Finalmente, este trabajo considera que es posible desarrollar una dinámica radial alternativa basada en el Lagrangiano  $L_{ij}$  que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

## Bibliografía

**A. Einstein**, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

**E. Mach**, La Ciencia de la Mecánica.

**H. Goldstein**, Mecánica Clásica.

# Anexo

## Transformaciones

$$|\mathbf{r}'_{ij}| = |\mathbf{r}_{ij}|$$

$$\mathbf{v}'_{ij} \cdot \hat{\mathbf{r}}'_{ij} = \mathbf{v}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij}$$

$$\mathbf{a}'_{ij} \cdot \mathbf{r}'_{ij} + \mathbf{v}'_{ij} \cdot \mathbf{v}'_{ij} = \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}$$

$$|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$$

$$(\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) / |\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j| = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) / |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$$

$$(\mathbf{a}'_i - \mathbf{a}'_j) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) + (\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j) \cdot (\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j) = (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)$$

## Energía Cinética $K_{ij}$

En coordenadas cartesianas:  $K_{ij} = 1/2 m_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})^2$

En coordenadas polares:  $K_{ij} = 1/2 m_{ij} (\dot{\rho}_{ij})^2$

En coordenadas cilíndricas:  $K_{ij} = 1/2 m_{ij} (\dot{\rho}_{ij} + \dot{z}_{ij})^2$

En coordenadas esféricas:  $K_{ij} = 1/2 m_{ij} (\dot{r}_{ij})^2$

## Momento Radial $P_{ij}$

En coordenadas cartesianas:  $P_{ij} = m_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})$

En coordenadas polares:  $P_{ij} = m_{ij} (\dot{\rho}_{ij})$

En coordenadas cilíndricas:  $P_{ij} = m_{ij} (\dot{\rho}_{ij} + \dot{z}_{ij})$

En coordenadas esféricas:  $P_{ij} = m_{ij} (\dot{r}_{ij})$

## Fuerza Radial $F_{ij}$

En coordenadas cartesianas:  $F_{ij} = m_{ij} [\mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} - (\mathbf{v}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})^2] / |\mathbf{r}_{ij}|$

En coordenadas polares:  $F_{ij} = m_{ij} (\ddot{\rho}_{ij})$

En coordenadas cilíndricas:  $F_{ij} = m_{ij} (\ddot{\rho}_{ij} + \ddot{z}_{ij})$

En coordenadas esféricas:  $F_{ij} = m_{ij} (\ddot{r}_{ij})$