

# Una Ecuación Escalar de Movimiento

Antonio A. Blatter

Licencia Creative Commons Atribución 3.0

(2015) Buenos Aires

Argentina

Este trabajo presenta una ecuación escalar de movimiento que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

## Introducción

Un par de partículas es una bipartícula. El sistema de partículas  $\{a, b, c \text{ y } d\}$  puede formar el sistema de bipartículas  $\{ab, ac, ad, bc, bd \text{ y } cd\}$  o también el sistema de bipartículas  $\{ad, bd \text{ y } cd\}$

La masa  $m_{ij}$  de una bipartícula  $ij$ , está dada por:  $m_{ij} \doteq m_i m_j / M$ , donde  $m_i$  es la masa de la partícula  $i$ ,  $m_j$  es la masa de la partícula  $j$  y  $M (\doteq \sum_k m_k)$  es la masa del sistema de partículas en observación.

La posición escalar  $r_{ij}$ , la velocidad escalar  $v_{ij}$  y la aceleración escalar  $a_{ij}$  de una bipartícula  $ij$ , están dadas por:

$$r_{ij} \doteq 1/2 [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

$$v_{ij} \doteq 1/1 [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

$$a_{ij} \doteq 1/1 [(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)]$$

donde  $\mathbf{r}_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$  y  $\mathbf{r}_j$  es el vector de posición de la partícula  $j$  ( $v_{ij} \doteq d(r_{ij})/dt$ ) y ( $a_{ij} \doteq d^2(r_{ij})/dt^2$ )

El momento escalar  $P_{ij}$  de una bipartícula  $ij$  ( $m_{ij}$ ) está dado por:  $P_{ij} \doteq m_{ij} v_{ij}$ , donde  $v_{ij}$  es la velocidad escalar de la bipartícula  $ij$ .

La fuerza escalar  $F_{ij}$  que actúa sobre una bipartícula  $ij$  ( $m_{ij}$ ) está dada por:

$$F_{ij} \doteq m_{ij} [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + 2 \int (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza neta que actúa sobre la partícula  $i$ ,  $\mathbf{F}_j$  es la fuerza neta que actúa sobre la partícula  $j$ ,  $m_i$  es la masa de la partícula  $i$ ,  $m_j$  es la masa de la partícula  $j$ ,  $\mathbf{r}_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$  y  $\mathbf{r}_j$  es el vector de posición de la partícula  $j$ .

## Dinámica Escalar

La ecuación escalar de movimiento para una bipartícula  $ij$  ( $m_{ij}$ ) está dada por:

$$F_{ij} = d(P_{ij})/dt = m_{ij} a_{ij}$$

donde  $F_{ij}$  es la fuerza escalar que actúa sobre la bipartícula  $ij$ ,  $P_{ij}$  es el momento escalar de la bipartícula  $ij$  y  $a_{ij}$  es la aceleración escalar de la bipartícula  $ij$ .

### W, K, U, E y L

El trabajo  $W_{ij}$  realizado por las fuerzas (vectoriales) que actúan sobre una bipartícula  $ij$ , está dado por:

$$W_{ij} \doteq \int_1^2 F_{ij} d(r_{ij}) = \Delta^{1/2} m_{ij} (v_{ij})^2 \doteq \Delta K_{ij}$$

donde  $F_{ij}$  es la fuerza escalar que actúa sobre la bipartícula  $ij$ ,  $r_{ij}$  es la posición escalar de la bipartícula  $ij$ ,  $m_{ij}$  es la masa de la bipartícula  $ij$ ,  $v_{ij}$  es la velocidad escalar de la bipartícula  $ij$  y  $K_{ij}$  es la energía cinética de la bipartícula  $ij$ .

El trabajo  $W_{ij}$  realizado por las fuerzas (vectoriales) conservativas que actúan sobre una bipartícula  $ij$  es igual y de signo opuesto a la variación en la energía potencial  $U_{ij}$  de la bipartícula  $ij$ .

$$\Delta U_{ij} \doteq - \int_1^2 F_{ij} d(r_{ij})$$

Por lo tanto, la energía mecánica  $E_{ij}$  de una bipartícula  $ij$  permanece constante si la bipartícula  $ij$  está sujeta sólo a fuerzas (vectoriales) conservativas.

$$\Delta E_{ij} \doteq \Delta K_{ij} + \Delta U_{ij} = 0$$

$$E_{ij} \doteq K_{ij} + U_{ij} = \text{constante}$$

donde  $K_{ij}$  es la energía cinética de la bipartícula  $ij$  y  $U_{ij}$  es la energía potencial de la bipartícula  $ij$ .

Finalmente, el Lagrangiano  $L_{ij}$  de una bipartícula  $ij$ , está dado por:

$$L_{ij} \doteq K_{ij} - U_{ij}$$

donde  $K_{ij}$  es la energía cinética de la bipartícula  $ij$  y  $U_{ij}$  es la energía potencial de la bipartícula  $ij$ .

## Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre  $\mathbf{F}_i$  ni sobre  $\mathbf{F}_j$ .

Todas las magnitudes de este trabajo ( $r_{ij}, v_{ij}, a_{ij}, P_{ij}, F_{ij}, W_{ij}, K_{ij}, U_{ij}, E_{ij}$  y  $L_{ij}$ ) son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

Las magnitudes ( $W_{ij}, K_{ij}, U_{ij}, E_{ij}$  y  $L_{ij}$ ) son en realidad magnitudes escalares nuevas que por comodidad en este trabajo se les quitó el adjetivo «escalar»

La integral de la definición de  $F_{ij}$  es una integral indefinida. Si ninguna fuerza actúa sobre las partículas  $i$  y  $j$  entonces la integral da como resultado una constante.

La definición de  $F_{ij}$  podría modificarse de manera tal que no haya necesidad de trabajar con una integral indefinida. Sin embargo, este cambio podría obligar a tener que modificar también otras ecuaciones del trabajo.

Por otro lado, este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, si un sistema de referencia inercial está fijo sobre la partícula  $j$  ( $\mathbf{r}_j = \mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j = \mathbf{F}_j = 0$ ) de una bipartícula  $ij$  ( $m_{ij}$ ) entonces de la ecuación escalar de movimiento, se obtiene:

$$m_{ij} [\mathbf{F}_i/m_i \cdot \mathbf{r}_i + 2 \int \mathbf{F}_i/m_i \cdot d\mathbf{r}_i] = m_{ij} [\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i]$$

$$m_{ij} [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{r}_i + 2 \int \mathbf{F}_i/m_i \cdot d\mathbf{r}_i - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i] = 0$$

$$\rightarrow (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{r}_i = 0 \rightarrow 2 \int \mathbf{F}_i/m_i \cdot d\mathbf{r}_i - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 0$$

puesto que en todo sistema de referencia inercial siempre  $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i/m_i$  (así como en todo sistema de referencia no inercial introduciendo las fuerzas ficticias sobre  $\mathbf{F}_i$ )

Finalmente, este trabajo considera que es posible desarrollar una dinámica escalar alternativa basada en el Lagrangiano  $L_{ij}$  que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

## Bibliografía

**A. Einstein**, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

**E. Mach**, La Ciencia de la Mecánica.

**H. Goldstein**, Mecánica Clásica.

# Anexo I

## Transformaciones

$$\mathbf{r}'_{ij} \cdot \mathbf{r}'_{ij} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}$$

$$\mathbf{v}'_{ij} \cdot \mathbf{r}'_{ij} = \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}$$

$$\mathbf{a}'_{ij} \cdot \mathbf{r}'_{ij} + \mathbf{v}'_{ij} \cdot \mathbf{v}'_{ij} = \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}$$

$$(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$$(\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$$(\mathbf{a}'_i - \mathbf{a}'_j) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) + (\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j) \cdot (\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j) = (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)$$

## Energía Cinética $K_{ij}$

En coordenadas cartesianas:  $K_{ij} = 1/2 m_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})^2$

En coordenadas polares:  $K_{ij} = 1/2 m_{ij} (\dot{\rho}_{ij} \rho_{ij})^2$

En coordenadas cilíndricas:  $K_{ij} = 1/2 m_{ij} (\dot{\rho}_{ij} \rho_{ij} + \dot{z}_{ij} z_{ij})^2$

En coordenadas esféricas:  $K_{ij} = 1/2 m_{ij} (\dot{r}_{ij} r_{ij})^2$

## Momento Escalar $P_{ij}$

En coordenadas cartesianas:  $P_{ij} = m_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})$

En coordenadas polares:  $P_{ij} = m_{ij} (\dot{\rho}_{ij} \rho_{ij})$

En coordenadas cilíndricas:  $P_{ij} = m_{ij} (\dot{\rho}_{ij} \rho_{ij} + \dot{z}_{ij} z_{ij})$

En coordenadas esféricas:  $P_{ij} = m_{ij} (\dot{r}_{ij} r_{ij})$

## Fuerza Escalar $F_{ij}$

En coordenadas cartesianas:  $F_{ij} = m_{ij} (\mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})$

En coordenadas polares:  $F_{ij} = m_{ij} (\ddot{\rho}_{ij} \rho_{ij} + \dot{\rho}_{ij} \dot{\rho}_{ij})$

En coordenadas cilíndricas:  $F_{ij} = m_{ij} (\ddot{\rho}_{ij} \rho_{ij} + \dot{\rho}_{ij} \dot{\rho}_{ij} + \ddot{z}_{ij} z_{ij} + \dot{z}_{ij} \dot{z}_{ij})$

En coordenadas esféricas:  $F_{ij} = m_{ij} (\ddot{r}_{ij} r_{ij} + \dot{r}_{ij} \dot{r}_{ij})$

## Anexo II

### Sistema de N Partículas

$$\begin{aligned}
 I_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N 1/2 m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N 1/2 m_i [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] + \\
 &\quad \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [2 \int (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_{cm}/M) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] + \\
 &\quad \sum_{i=1}^N m_i [2 \int (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_{cm}/M) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{ij} a_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] + \\
 &\quad \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)] \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] + \\
 &\quad \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \int_1^2 [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] d^{1/2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 + \\
 &\quad \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \int_1^2 [2 \int (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] d^{1/2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i \int_1^2 [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_{cm}/M) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] d^{1/2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})^2 + \\
 &\quad \sum_{i=1}^N m_i \int_1^2 [2 \int (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_{cm}/M) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] d^{1/2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})^2
 \end{aligned}$$