Invariancia de escala y teoría de Weyl

Scale invariance and Weyl theory

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es

Sinopsis. En el mismo artículo en que Hermann Weyl publicó en 1918 su teoría de campo unificado, Albert Einstein planteó una dura crítica a la teoría recién nacida. Argumentaba que de ser cierta no existirían líneas espectrales definidas. Posteriormente Wolfgang Pauli desarrolló esta opinión con más detalle, planteamiento que aceptaron otros físicos destacados de la época, incluido el propio Weyl. El resultado fue que la primera teoría que unificaba gravitación y electromagnetismo nacía ya muerta. En esta investigación analizamos en profundidad el concepto de transformación conforme, concepto base en la teoría de Weyl, y la interpretamos como un cambio de escala de unidades, llegando a la conclusión que los fenómenos físicos no se alteran al hacer una transformación conforme, por lo que la crítica de Einstein deja de tener validez.

Abstract. In the same publication in which Hermann Weyl in 1918 published his unified field theory, Albert Einstein raised sharp criticism to the new theory. He argued that if true would not exist defined spectral lines. Later Wolfgang Pauli developed this review in more detail, than accepted other leading physicists of the time, including the own Weyl. The result was that the theory that unified gravitation and electromagnetism born dead. In this research, we analyze in depth the concept of conformal transformation, a concept basic in the theory of Weyl, and we interpret it as a change in the scale of the units, concluding that the physical phenomena that are not altered by making a conformal transformation, the which means that Einstein's criticism is incorrect.

1. Cambio de unidad y cambio de escalas

El principio de Fourier establece que las ecuaciones físicas deben ser homogéneas dimensionalmente. Es decir que si una ecuación se representa por

$$A+B=C+D$$

entonces la dimensión de todos los sumandos deben ser la misma

$$[A]=[B]=[C]=[D].$$

Este principio asegura que cuando se hace un cambio de unidades, ya sea de una única unidad o de varias unidades simultáneamente, las ecuaciones físicas deben permanecer inalterables, aunque los valores numéricos de las diferentes magnitudes puedan diferir y lo mismo pueda ocurrir con las constantes físicas que sean dimensionales. Podemos decir, por tanto, que es válido el principio de invariancia ante cambios de unidades, que afirma que las leyes físicas quedarán inalterables cuando se haga algún cambio de unidades.

Un concepto diferente es el cambio de escala de magnitud, por el cual una o varias magnitudes son alteradas. Por ejemplo, si todas las longitudes son aumentadas al doble, permaneciendo las restantes magnitudes (incluso las derivadas de la longitud) inalterables, nos encontraríamos en un cambio de escala de la magnitud longitud. Es evidente que las leyes físicas tendrían que ser alteradas y por este motivo serían perceptibles para el observador los cambios de escala de magnitud. Hay que señalar que aquí se admiten dos tipos de transformaciones: cambios globales, o sea el mismo en todo punto y en todo momento, o locales, por el cual la alteración de la magnitud depende de las coordenadas espaciales y de las temporales.

Finalmente nos encontramos con otro concepto como es el cambio de escala de unidad, en el cual la unidad permanece la misma pero su valor queda modificado. Es posible que el cambio se refiera a una única unidad o bien a varias unidades, pudiendo tener o no estos cambios las mismas leyes de transformación. También en este caso existen cambios globales y locales.

Por ejemplo, podemos alterar la unidad de masa tomando el valor de la nueva unidad kilogramo como el doble de la antigua unidad kilogramo. Este cambio afectaría a todas las magnitudes que tuvieran la masa en su dimensión, en particular podrían quedar alteradas las constantes físicas. Siguiendo con este ejemplo es fácil ver que la velocidad o la aceleración quedarían inalteradas ante este cambio de unidades, pero el momento lineal o la fuerza si serían afectadas, de tal forma que los nuevos valores de estas magnitudes estarían relacionadas con los valores antiguos por

$$p' = \lambda p; \quad F' = \lambda F \qquad \text{si} \qquad m' = \lambda m,$$

decimos que ambas magnitudes tienen de peso 1 pues se transforman con la misma ley que la masa. λ es la función del cambio de escala, que depende de las coordenadas espacio-temporales y es adimensional.

Es lógico pensar que las leyes físicas no deben modificarse al realizar un cambio de escala de unidad, pues no es más que una operación matemática; entonces suponemos válido el principio de invariancia frente a cambios de escala de unidad, principio que tiene su fundamento en el principio de Fourier antes mencionado.

Veamos un ejemplo simple. Según la ley de Newton, la aceleración de la gravedad es dada por

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

ecuación que debe permanecer inalterable en un cambio de escala de masa. La aceleración de la gravedad y la distancia r quedan invariables en el cambio $m' = \lambda m$, por tanto será necesario que la constante de gravitación universal se modifique, de tal forma que

$$G' = \lambda^{-1} G$$

entonces G tiene de peso -1. Esto significa que podemos hacer que la masa se convierta en una variable dependiente de las coordenadas espacio-temporales con sólo hacer un cambio local de escala de unidad, lo que nos lleva a que la constante de gravitación universal deje de ser una constante y sea una magnitud dependiente tanto de la posición como del tiempo.

Debemos de observar que este cambio de escala de la masa no es más que una operación matemática. Si no supiéramos de antemano cuál es la función λ que caracteriza el cambio de escala no podríamos determinarlo a partir de las leyes físicas, puesto que son invariables y por tanto no dependen de la escala, aunque si podemos determinar λ a partir de la definición de las unidades, como luego veremos.

Es fácil imaginar otros cambios más elaborados que el anteriormente descrito. Por ejemplo, se puede dar simultáneamente un cambio en la escala de las unidades de masa y tiempo, pudiendo tener leyes de transformación diferentes

$$m' = \lambda m; \qquad t' = \mu t,$$

ahora tenemos dos funciones de cambio de escala λ y μ. En este ejemplo la constante de gravitación universal tendría de peso (-1, -2), representando el primer número el peso respecto al cambio de la unidad de masa y el segundo el peso frente al cambio de la unidad de tiempo, es decir tendríamos

$$G' = \lambda^{-1}\mu^{-2}G.$$

Por tanto concluimos que la homogeneidad de las ecuaciones físicas nos conduce a una simetría de carácter universal que no es otra que la invariancia frente a cambios de escala de las unidades; aunque éstas sean recalibradas, las leyes físicas permanecen invariables.

Podemos observar la semejanza existente entre el principio de invariancia ante cambios de escala de unidades y el principio especial de la relatividad. Mientras que la relatividad especial declara la imposibilidad de detectar la velocidad absoluta de un sistema de referencia; nuestro principio de invariancia declara la imposibilidad de medir el factor de escala de las distintas unidades a partir de las leyes físicas.

2. Teoría de Weyl

En el año 1918 Hermann Weyl diseñó la primera teoría de campo unificado [1], con la que pretendía explicar tanto el campo gravitatorio como el electromagnético a partir de una base geométrica. En esencia la teoría de Weyl supone una variedad espacio-temporal tetradimensional de tensor métrico simétrico, sin torsión (es decir de conexión simétrica) y con un tensor de nometricidad no nulo dado por la expresión

$$Q_{ikr} = D_r g_{ik} = -2g_{ik}\phi_r \tag{1}$$

donde

$$d\phi = \phi_r dx^r$$

es una forma diferencial que en general no es exacta.

En la teoría de Weyl g_{ik} cumple el mismo doble papel que en la teoría general de la relatividad, a saber, es el tensor que nos informa de las propiedades métricas de la variedad y también son las componentes del potencial gravitatorio. El tetravector ϕ_r (que se llama conexión métrica) representa en la teoría de Weyl las componentes del tetrapotencial electromagnético, o mejor dicho ambos son proporcionales.

La variedad de Weyl admite cambios en la calibración o transformaciones conforme. Es decir, si $\hat{g}_{ik}$ es el tensor métrico podemos obtener nuevos valores de las componentes del tensor métrico a partir de la relación

$$g_{ik} = \psi\left(x^r\right)\hat{g}_{ik}$$

donde ψ es una función cualquiera de la posición espacio-temporal. La teoría de Weyl exige que las ecuaciones de campo sean invariantes no sólo frente a transformaciones de coordenadas genéricas, sino también ante cambios de calibración. Consideremos dos calibraciones diferentes ψ y ψ', que dan lugar a dos nuevos tensores métricos

$$g_{ik} = \psi\hat{g}_{ik} \qquad g'_{ik} = \psi'\hat{g}_{ik}$$

entonces al pasar de la calibración ψ a la ψ' el tensor métrico se transforma por

$$g'_{ik} = \frac{\psi'}{\psi}\psi\hat{g}_{ik} = \frac{\psi'}{\psi}g_{ik} = \lambda^2 g_{ik} \tag{2}$$

y decimos que el tensor métrico es de peso 2 por ser éste el exponente de la función λ en la ecuación de transformación. Fácilmente se encuentra que el tensor métrico en forma contravariante tiene de peso -2 y que el determinante del tensor métrico es de peso 8. De aquí se deduce que el peso de la conexión es 0 e igual propiedad tienen el tensor de curvatura $R^i{}_{kpq}$ y su contracción el tensor de Ricci R_{ik} (definido por $R_{ik} = R^p{}_{ikp}$); no obstante la curvatura escalar tiene de peso -2, mientras que las coordenadas espacio-temporales no tienen peso, ya que son independientes de la calibración, puesto que son meramente unos indicadores que identifican cada punto del espacio-tiempo.

La forma diferencial $d\phi$ también queda alterada en un cambio de calibración. Hallando la derivada covariante en ambos miembros de (2) se tiene

$$Dg'_{ik} = 2\lambda\, d\lambda g_{ik} - 2\lambda^2 g_{ik} d\phi,$$

pero como después del cambio de calibración el espacio sigue siendo de Weyl entonces deberá cumplirse (1)

$$Dg'_{ik} = -2g'_{ik}\, d\phi' = -2\lambda^2 g_{ik}\, d\phi + 2\lambda\, d\lambda g_{ik}$$

e igualando los dos últimos resultados se obtiene

$$d\phi' = d\phi - \frac{d\lambda}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \phi'_k = \phi_k - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^k} \tag{3}$$

que es la ley de transformación de la forma diferencial $d\phi$.

Supongamos que se efectúa el siguiente cambio de calibración

$$\psi\left(x^k\right) \to \psi'\left(x^k\right)$$

entonces el módulo de un vector que en la antigua calibración era

$$A^2 = \psi \hat{g}_{ik} A^i A^k$$

pasa a tomar el valor diferente

$$A'^2 = \psi' \hat{g}_{ik} A^i A^k = \frac{\psi'}{\psi} A^2 = \lambda^2 A^2$$

donde λ es una función de las coordenadas y distinta de cero.

Cuando hay un transporte paralelo se cumple por definición que

$$DA^i = 0 \quad \Rightarrow \quad dA^i = -\Gamma^{\,i}_{jk} A^j dx^k \tag{4}$$

mientras que la derivada de las componentes covariantes será

$$DA_i = A^k Dg_{ik} = -2A^k g_{ik} d\phi \quad \Rightarrow \quad dA_i = \Gamma^{\,j}_{ik} A_j dx^k - 2g_{ik} A^k d\phi, \tag{5}$$

por este motivo cuando se traslada paralelamente un vector su módulo queda modificado

$$dA^2 = A_i\, dA^i + A^i dA_i,$$

utilizando (4) y (5) se encuentra

$$dA = -2A\, d\phi = -2A\phi_k dx^k, \tag{6}$$

que nos da la variación que registra el módulo de un vector cuando se le somete a una traslación paralela infinitesimal. Al integrar (6) entre los sucesos P_0 y P tendremos

$$A = A_0 e^{-2\int_{P_0}^{P} \phi_k dx^k}, \tag{7}$$

donde A_0 es el valor del módulo del vector A^i en P_0 y en general la integral depende del camino que se haya seguido en el desplazamiento del vector.

Hay que añadir que si en una variedad riemanniana se realiza una transformación conforme de carácter local, la variedad deja de ser de Riemann para convertirse en una variedad de Weyl [2].

3. La crítica a la teoría de Weyl

Al final del artículo en que Weyl presentaba su teoría se encuentra una valoración crítica de Einstein. En ella reconocía que si los rayos luminosos fueran la única forma para la determinación de las relaciones métricas, la teoría de Weyl no tendría problemas; no obstante, como el tiempo propio se puede determinar tendría como consecuencia que las longitudes y las tiempos dependerían de la prehistoria de los instrumentos de medida, y por tanto no existirían líneas espectrales definidas de los elementos químicos. [3]

Pauli desarrolló con más precisión esta crítica [4] que reconstruimos a continuación. Vamos a considerar un campo gravitatorio estático y un potencial electroestático φ que al igual que las componentes del tensor métrico son independientes del tiempo, aunque ambas pueden depender de la posición espacial. Las componentes del potencial vector magnético las suponemos nulas, o sea las componentes espaciales de la conexión métrica que, Pauli identifica con el tetrapotencial electromagnético, son nulas $\phi_\alpha = 0$.

Notemos que se puede hacer un cambio de calibración tal que se mantengan las mismas condiciones anteriormente impuestas. Como las nuevas componentes del tetrapotencial tienen que ser nulas, entonces por (3) se obtiene que la función de cambio de escala λ no puede depender de las coordenadas espaciales. Como ϕ'_0 tiene que ser constante entonces tiene que cumplirse

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^0} = \mathrm{cte},$$

como ϕ_0 es constante siempre podremos poner

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^0} = (1-\alpha)\phi_0$$

donde α es un número arbitrario que define el cambio de calibración, entonces por (3) la cuarta componente del tetrapotencial es

$$\phi'_0 = \alpha\phi_0, \tag{8}$$

que representa el único cambio de calibración que mantienen las condiciones que hemos impuesto al tetrapotencial electromagnético.

Supongamos un reloj fijo en un punto del espacio y que se encuentra sometido al campo electromagnético de tetrapotencial $\phi_k = (\varphi, 0)$, siendo φ constante. Si τ_0 es el periodo en el instante P_0, en un instante posterior P el periodo será τ ya que por (7) el módulo del vector formado por los momentos extremos del periodo del reloj $dx^k = (c\tau, 0)$ viene afectado por el campo electroestático. La relación entre los periodos del reloj será

$$\tau = \tau_0 e^{-c\phi_0 t} \tag{9}$$

siendo t la diferencia entre los tiempos coordenados de los sucesos P y P_0.

Consideremos dos relojes exactamente iguales, mientras que uno permanece en un punto del espacio en el que hay un potencial electroestático φ_1, el otro es trasladado a un punto en que el potencial es φ_2. Pasado un tiempo coordenado t ambos relojes se vuelven a reunir y por (9) se encontrará que la relación entre sus marchas será

$$e^{-ct(\varphi_1-\varphi_2)},$$

si elegimos otra calibración del tipo (8) entonces la relación entre las marchas de los dos relojes sería

$$e^{-\alpha ct(\varphi_1-\varphi_2)},$$

Pauli concluía su razonamiento con las siguientes palabras: «En particular, este efecto seria notado en las líneas espectrales de una sustancia dada, y las líneas espectrales de una definida frecuencia no existirían. Por muy pequeño que α sea elegida, las diferencias se incrementarían indefinidamente con el curso del tiempo».

4. La teoría de Weyl y el principio de invariancia de escala de unidades

Los relojes físicos marcan su tiempo propio. Supongamos un reloj fijo en un punto del espacio, entonces un intervalo infinitesimal de su tiempo propio viene dado por

$$d\tau^2 = g_{00}\,dt^2.$$

Las reglas de medida miden longitudes propias. La longitud infinitesimal de una regla es dada por

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta$$

donde α y β varían de 1 a 3 y el tensor métrico tridimensional $\gamma_{\alpha\beta}$ es

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta}.$$

Observamos que el tiempo propio y la longitud propia cambian ante la transformación conforme (2) por

$$d\tau' = \lambda\, d\tau; \qquad dl' = \lambda dl.$$

Como el tiempo que se mide físicamente es el propio de un reloj y las longitudes que se miden son las propias de una regla de medida, significa que las relaciones anteriores cabe entenderlas como un cambio de escala de las unidades de tiempo y de longitud, obedeciendo ambas a la misma ley de transformación. Por tanto la transformación conforme es en realidad lo que hemos llamado un cambio de escala de unidad.

Debemos aceptar la validez del principio de invariancia frente a transformaciones conformes, que nos dice que todas las ecuaciones físicas quedan inalteradas cuando se hace una transformación conforme. O dicho de otra forma, la transformación conforme no es más que una operación matemática, no una alteración del mundo físico.

Un reloj recalibrado estará marcando segundos de distinta duración, y esta duración va a depender de su posición espacio-temporal. Cuando se mide la duración de un mismo fenómeno físico que se da en lugares diferentes del espacio y del tiempo, los relojes colcocados en esos lugares marcarán tiempos diferentes, pero esto no quiere decir que los fenómenos hayan tenido duraciones diferentes. Si en vez de medir los segundos que dura este fenómeno, lo que hacemos es contar el número de oscilaciones del reloj, entonces encontramos siempre el mismo número, ya que el número de oscilaciones es adimensional y no está afectado por la calibración.

Debemos de notar que cuando hacemos la operación de cambio de escala de unidad correspondiente a una transformación conforme, las constantes físicas pueden verse alteradas. Por ejemplo, como la ecuación dimensional de la constante de gravitación universal es

$$[G] = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

entonces su valor cambiará según

$$G' = \lambda G.$$

Por su parte la constante de Planck cambiará según

$$[h] = L^2 T^{-1} M \qquad \Rightarrow \qquad h' = \lambda h.$$

En la crítica de Pauli a la teoría de Weyl τ es el tiempo marcado por el reloj, que va a depender del potencial electroestático según la expresión (7), pero esto sólo es debido a que la unidad segundo es definida de manera diferente en los instantes que van de P a P_0. Entonces (7) se refiere a lo que marca el reloj que mide unidades de tiempo, no al tiempo que ha transcurrido; en efecto, lo que marca el reloj son segundos, cuya definición va cambiando con el tiempo y este cambio de definición de la unidad segundo lo refleja el reloj *. Esta diferencia de marcación desaparece cuando para medir el tiempo usamos una magnitud adimensional. Por ejemplo, si el tiempo es medido por el número de oscilaciones de un reloj de péndulo, lo que «marcaría» el reloj sería independiente del potencial eléctrico al que estuviera sometido el reloj de péndulo.

No se puede mantener la crítica de Einstein sobre la inexistencia de líneas espectrales definidas. Las leyes que rigen su emisión no son alteradas cuando hay una transformación con-

* Se entiende que el reloj físico debe tener un mecanismo que lo ajuste según la calibración que hayamos definido, de tal manera que pueda convertir el número de sus oscilaciones en segundos de tiempo. Naturalmente, el ajuste al que nos referimos en el texto no significa que todos los relojes físicos alteren su «marcha» de forma automática cuando hacemos un cambio de calibración. Como queda dicho los fenómenos físicos (y en particular las oscilaciones de un reloj) no quedan alterados cuando se cambia de calibración.

forme, por lo tanto la emisión quedará inalterable, lo único que varía es el valor numérico de la frecuencia de la emisión. Por tanto la prehistoria de un átomo no altera sus líneas espectrales, que siempre estarán ubicadas en el mismo lugar del espectro, aunque según el lugar de medición se le asigne frecuencias diferentes.

Si bien la calibración no aparece en las leyes físicas y por tanto a partir de ellas no se puede medir la función de cambio de escala λ, sí se puede determinar esta función a partir de medidas espacio-temporales. Para ver este asunto vamos a definir la calibración natural como aquella en que las definiciones de las unidades físicas son independientes de la posición y del tiempo y además coinciden con las definiciones del Sistema Internacional de unidades. Esta es la calibración que usamos en Física, por la simple razón que nos simplifica el estudio de la naturaleza.

En la escala natural de tiempo el segundo es la duración de 9.192$_1$631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133. Si nuestros aparatos de medida nos mostraran, por ejemplo, que el segundo es la mitad de 9.192$_1$631.770 oscilaciones del átomo de cesio 133, entonces comprobaríamos que estos aparatos están calibrados en una escala diferente de la natural, concretamente en una que daría lugar al tensor métrico

$$g_{ik} = 2\hat{g}_{ik} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 2$$

donde $\hat{g}_{ik}$ es el tensor métrico correspondiente a la calibración natural.

Por lo que hemos dicho está claro que una regla de medida no altera su magnitud cuando se hace una transformación conforme. Lo que se produce es un cambio de unidad de longitud, de tal forma que la longitud de la regla (expresada por ejemplo en metros) tendrá un valor que va a depender de su posición espacio-temporal. Si tenemos dos reglas iguales situadas en un mismo punto y trasladamos una de ellas haciendo un recorrido cerrado, las dos reglas continarán teniendo la misma longitud cuando vuelvan a coincidir. Las longitudes que se midan de esas reglas cuando están en puntos diferentes serán valores diferentes, naturalmente debido a que la unidad metro es diferente en un punto que en otro.

Si dos relojes iguales tienen la misma marcación cuando están juntos y uno de ellos realiza un recorrido cerrado y se vuelven a comparar entre sí cuando coinciden de nuevo, entonces la marcación de los dos relojes no tiene que ser la misma. Si siempre marcaran lo mismo, con independencia del camino recorrido por el reloj móvil, decimos que la geometría espacio-temporal es integrable, en caso contrario sería no integrable. [...] Dentro de la teoría de Weyl, en el primer caso no existe campo electromagnético pero sí lo hay en el segundo.

La diferencia entre los dos casos considerados radica en que el reloj no sólo mide la unidad de tiempo, sino que es un dispositivo que «acumula el tiempo», algo que no ocurre con una regla de medida.

5. Análisis de la crítica de Pauli

Las coordenadas espacio-temporales tienen unidades, dx^α tienen unidad de longitud y dt de tiempo. Estas unidades son las que corresponden a la unidad elegida para la velocidad de la luz c. De tal forma que si c es expresada, por ejemplo, en m/s entonces dx^α se mide en metros y dt en segundos.

Hay que observar que las dx^k no son distancias, sólo representan diferencias de coordenadas entre dos puntos muy cercanos. Esto quiere decir que sus unidades no son alteradas cuando se hace un cambio de escala, ya que ésta es una alteración de las longitudes y del tiempo. Dicho de otra forma el coeficiente λ no está multiplicando a dx^k en el elemento de línea, sino que multiplica a las componentes del tensor métrico y por tanto a las distancias y tiempos propios. Para mostrar esta circunstancia vamos a representar a las unidades de dx^k con el símbolo dimensional L', indicando con ello que se trata de la unidad de longitud pero que no es alterada en una transformación conforme y con esta notación la distinguimos de la dimensión L que es también longitud pero el valor de la correspondiente unidad cambia en una transformación conforme. Con este concepto el tensor de Ricci y la curvatura escalar tiene de dimensión L'^{-2}. Como $d\phi$ es adimensional por (2) y por tanto no se ve afectada por un cambio de unidades y como dx^r tiene de dimensión L', entonces la conexión métrica ϕ_r debe tener de dimension L'^{-1}. El tensor

$$F_{ik} = \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k}$$

tiene de unidad L'^{-2}. Finalmente indicar que la densidad lagrangiana usada por Weyl en su teoría

$$\mathfrak{L} = \sqrt{g}\left(R^2 + \chi F_{ik} F^{ik}\right)$$

tiene la dimensión L'^{-4}, mientras que la correspondiente acción

$$I = \int \sqrt{g}\left(R^2 + \chi F_{ik} F^{ik}\right) d\Omega$$

es adimensional, puesto que $d\Omega$ tiene de dimensión L'^4 siempre y cuando estemos en una variedad tetradimensional.

Las componentes de la conexión métrica ϕ_k no son idénticas al tetrapontencial electromagnético Φ_k, mientras que las primeras tienen la unidad de inversa de la longitud, la segunda viene dada en voltios. Podemos relacionar unas con tras mediante

$$\phi_k = \kappa \Phi_k$$

κ es una constante con las dimensiones de la inversa de voltios por metro, para que así Φ_k venga expresado en voltios, o más concretamente

$$[\kappa] = ML^2T^{-3}A^{-1}L'.$$

Ahora bien, la unidad amperio se ve afectada en un cambio de las unidades de longitud y tiempo, sin embargo la carga eléctrica queda inalterada, es decir que si Q es el símbolo dimensional de la carga eléctrica tenemos

$$[\kappa] = ML^2T^{-2}Q^{-1}L'$$

que nos muestra claramente que la constante κ no es modificada en una transformación conforme, porque si bien L y T varían con la misma ley, L' queda inalterable. Notemos, por último, que el valor numérico de κ es arbitrario.

Las consideraciones anteriores nos lleva a completar el razonamiento de Pauli. Si definiemos el tetrapotencial electromagnético por

$$\Phi^k = (\varphi, c\mathbf{A})$$

con **A** el vector magnético, entonces

$$\phi_k dx^k = \kappa g_{00} \Phi^0 cdt = \kappa c\, g_{00}\, \varphi dt$$

donde g_{00} al igual que c y κ son independientes del tiempo. Entonces la relación entre las marchas de los dos relojes es

$$e^{-\alpha\kappa g_{00} ct(\varphi_1 - \varphi_2)} = e^{-\beta ct(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

donde β es una constante indeterminada que no depende del tiempo, aunque puede depender de la posición.

6. Conclusiones

Hemos interpretado la transformación conforme como un cambio de escala de las unidades de longitud y de tiempo. Con esta interpretación llegamos al resultado de que si bien los relojes que miden unidades de tiempo tendrán una marcha que depende de su posición espaciotemporal, sin embargo eso no significa que marquen tiempos diferentes, sino que usan unidades diferentes.

Así interpretadas las transformaciones conformes las críticas que se hicieron a la teoría de Weyl ya no se pueden mantener. En particular la opinión de Einstein de que no existirían líneas definidas en los espectros estelares carece de validez, porque si bien es cierto que el valor medido de las frecuencias de emisión variará en cada posición espacio-temporal, las líneas espectrales siempre ocuparan la misma posición en el espectro electromagnético.

7. Bibliografía

1] Weyl, H.: «Gravitation and Electricity», en *The principle of relativity (a colletion of original memoirs on the special and general theory of relativity)*, Dover, 1952, pp. 201-216; Pauli, W.: *Theory of Relativity*, Dover, 1981, pp. 192-202 y pp. 223-224; Eddington, A. S.: *The mathematical theory of Relativity*, Chelsea, 1975, pp. 196-212; Weyl, Hermann: *Space-Time-Matter*, Dover, 1952, pp. 121-138 y pp. 282-312.; Vizgin, Vladimir P.: *Unified field Theories in the third of the 20th century*, Birkhäuser, pp. 71-112 y pp. 129-137; Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field theories», *Living Reviews in Relativity* 7 (2004) 1-153.

[2] Segura González, Wenceslao: «Geometrías de Weyl y ecuación de movimiento», viXra:1406.0166.

[3] Hubert F. M. Goenner, ob. cit., pp. 36-38.

[4] W. Pauli, o cit., pp. 195-196.