The idea of the Arithmetica

Hajime Mashima

August 9, 2016

Abstract

Ago 379 years, Pierre de Fermat wrote the following idea to Diophantus's "Arithmetica".

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Later, this proposition has continued to be a presence, such as the One Ring that appeared in J·R·R·Tolkien's "Lord of the Rings". Finally in 1994, it has been proven by Andrew Wiles. However, interesting Fermat's proof is still unknown. Perhaps this is assumed to algebra category.

Contents

1 introduction **1**

1.1 Fermat's Last Theorem とは 2

1.2 三項の考察 2

1.3 $p > 3$ のとき 4

1.4 $p = 3$ のとき 5

1 introduction

最後に残ったフェルマーの命題が現代数学の総力を結集し "定理" と認められて以降、「フェルマーは本当に証明していたのだろうか？」という疑問が増してくる。しかし別の見方をすれば、証明可能な命題と分かった事は逆の可能性も示唆していると言える。この証明を試みる上で必要なのは当時の数学的手法はもちろん、フェルマーの人柄や当時の行い、証明のための哲学およびヒューリスティック等の多角的アプローチが主体となっている。

1.1 Fermat's Last Theorem とは

Proposition 1 (Fermat's Last Theorem) 自然数 n の冪について, 以下の等式を満たす異なる x, y, z の自然数解は存在しない。

$$x^n + y^n = z^n \quad (xyz \neq 0\ ,\ n \geq 3)$$

1.2 三項の考察

Corollary 2 フェルマーの命題が偽であるならば、3 以上の素数 p において以下の合同式を満たす。

$$x + y - z \equiv 0 \pmod{p}$$

Proof 3 係数が 1 でない数式は $p\mathbb{N}$(p は奇素数) と表わせるので

$$\begin{aligned}(x+y-z)^p &= x^p + y^p - z^p + p\mathbb{N}\\ \\ x^p + y^p - z^p = 0\ \text{であるから} & \\ (x+y-z)^p &= p\mathbb{N}\\ x+y-z\ \text{は}\ p\ \text{を約数に持つので} & \\ x+y-z &\equiv 0 \pmod{p}\end{aligned}$$

□

この時 $x + y > z$ でなければならない。

Proof 4 $z > x + y$ ならば、$\mathbf{N}$ を自然数として

$$\begin{aligned} z-(x+y) &= \mathbf{N} > 0 \quad \text{と仮定できる。}\\ \\ z &= x+y+\mathbf{N}\\ z^p &= (x+y+\mathbf{N})^p\\ \text{係数が 1 でない数式は}\quad p\mathbb{N} & \quad \text{と表わせるので}\\ \\ z^p &= x^p+y^p+\mathbf{N}^p+p\mathbb{N}\\ z^p &= x^p+y^p\text{であるから}\\ 0 &= \mathbf{N}^p+p\mathbb{N}\\ \text{しかし}\quad x,y,\mathbf{N} &> 0\ \text{なので解が存在しないのは明らかである。}\\ 0 &\neq \mathbf{N}^p+p\mathbb{N}\end{aligned}$$

□

Proposition 5 フェルマーの命題が偽ならば、3 の冪について互いに素な x, y, z のいずれかは 3 で割り切れる。また $(x+y), (z-x), (z-y)$ のいずれかは 3^2 を約数に持ち、互いに素である。

Proof 6

$$\begin{aligned}
(x+y-z)^3 &= x^3+y^3-z^3+3x^2y+3xy^2-3x^2z+3xz^2-3y^2z+3yz^2-6xyz \\
& \quad x^3+y^3-z^3=0 \text{ より} \\
&= 3\left(x^2y+xy^2-x^2z+xz^2-y^2z+yz^2-2xyz\right) \\
&= 3\left(xy\left(x+y\right)+xz^2+yz^2-x^2z-y^2z-2xyz\right) \\
&= 3\Big(xy\left(x+y\right)+z^2\left(x+y\right)-z\left(x+y\right)^2\Big) \\
&= 3(x+y)\left(xy+z^2-z\left(x+y\right)\right) \\
&= 3(x+y)(z-x)(z-y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x+y-z &\equiv 0 \pmod 3 \text{ であるから} \\
x+y &\equiv z \pmod 3 \\
z-x &\equiv y \pmod 3 \\
z-y &\equiv x \pmod 3
\end{aligned}$$

x, y, z は互いに素であるから $(x+y), (z-x), (z-y)$ のいずれかは 3^2 を約数に持つ。

$$\begin{aligned}
(x+y-z)^3 &\equiv 0 \pmod{3^3} \\
(x+y)(z-x)(z-y) &\equiv 0 \pmod{3^2}
\end{aligned}$$

仮に公約数 $r(\neq 3)$ を持つとすると適当な自然数 l, m とおき

$$\begin{aligned}
z-x &= rl && (1) \\
z-y &= rm && (2) \\
(1)+(2) & \\
2z-x-y &= r(l+m) \\
z-(x+y) &= r(l+m)-z \\
(x+y-z)^3 &= (z-r(l+m))^3 \\
(x+y-z)^3 &\equiv 0 \pmod{r^2} \\
(z-r(l+m))^3 &\equiv 0 \pmod{r^2} \\
z &\equiv 0 \pmod r
\end{aligned}$$

(1), (2) より x, y, z が公約数 r を持つので、互いに素である前提に反する。これは $x+y$ の組についても同様である。 □

1.3　$p > 3$ のとき

$\left(x^{\frac{p}{3}} + y^{\frac{p}{3}} - z^{\frac{p}{3}}\right)^3 =$

$$x^p + y^p - z^p + 3x^{\frac{2p}{3}}y^{\frac{p}{3}} + 3x^{\frac{p}{3}}y^{\frac{2p}{3}} - 3x^{\frac{2p}{3}}z^{\frac{p}{3}} + 3x^{\frac{p}{3}}z^{\frac{2p}{3}} - 3y^{\frac{2p}{3}}z^{\frac{p}{3}} + 3y^{\frac{p}{3}}z^{\frac{2p}{3}} - 6(xyz)^{\frac{p}{3}}$$

$x^p + y^p - z^p = 0$ より

$= 3(x^{\frac{p}{3}} + y^{\frac{p}{3}})(z^{\frac{p}{3}} - x^{\frac{p}{3}})(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}})$

$$\left(x^{\frac{p}{3}} - \left(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}}\right)\right)^3 = x^p - 3\left(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}}\right)x^{\frac{2p}{3}} + 3\left(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}}\right)^2 x^{\frac{p}{3}} - \left(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}}\right)^3$$

$$= (z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}})\left(x^p(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}})^{-1} - 3x^{\frac{2p}{3}} + 3\left(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}}\right)x^{\frac{p}{3}} - \left(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}}\right)^2\right)$$

$$3(x^{\frac{p}{3}} + y^{\frac{p}{3}})(z^{\frac{p}{3}} - x^{\frac{p}{3}}) = x^p(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}})^{-1} - 3x^{\frac{2p}{3}} + 3\left(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}}\right)x^{\frac{p}{3}} - \left(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}}\right)^2 \tag{3}$$

Remark 7 左辺のみ $x^p + y^p - z^p = 0$ を仮定している。

$$\begin{aligned} k &= \sqrt[3]{z^p} - \sqrt[3]{y^p} \\ k\left(\sqrt[3]{z^p} + \sqrt[3]{y^p}\right) &= \sqrt[3]{z^{2p}} - \sqrt[3]{y^{2p}} \\ &\vdots \\ k\left(\sqrt[3]{z^p} + \sqrt[3]{y^p}\right)()()\cdots &= \sqrt[3]{z^{2^n p}} - \sqrt[3]{y^{2^n p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \sqrt[3]{z^p} - \sqrt[3]{y^p} \\ k\sqrt[3]{z^{2p}} &= z^p - \sqrt[3]{y^p z^{2p}} \\ kz^p\sqrt[3]{y^{2p}} &= z^p\sqrt[3]{y^{2p}z^p} - y^p z^p \\ k\sqrt[3]{y^{2p}} &= \sqrt[3]{y^{2p}z^p} - y^p \\ ky^p\sqrt[3]{z^{2p}} &= y^p z^p - y^p\sqrt[3]{y^p z^{2p}} \\ k\sqrt[3]{z^{2p}} &= z^p - \sqrt[3]{y^p z^{2p}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

x , y , z の文字式では、 (3) 右辺に分母が必要であるが左辺に分母がない。
よって

$$3(x^{\frac{p}{3}} + y^{\frac{p}{3}})(z^{\frac{p}{3}} - x^{\frac{p}{3}}) \neq x^p(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}})^{-1} - 3x^{\frac{2p}{3}} + 3\left(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}}\right)x^{\frac{p}{3}} - \left(z^{\frac{p}{3}} - y^{\frac{p}{3}}\right)^2$$

$$x^p + y^p \neq z^p \qquad (p > 3)$$

1.4 $p = 3$ のとき

$$(x+y-z)^5 =$$
$$x^5 + 5x^4y - 5x^4z + 10x^3y^2 - 20x^3yz + 10x^3z^2 + 10x^2y^3 - 30x^2y^2z$$
$$+ 30x^2yz^2 - 10x^2z^3 + 5xy^4 - 20xy^3z + 30xy^2z^2 - 20xyz^3 + 5xz^4 + y^5$$
$$- 5y^4z + 10y^3z^2 - 10y^2z^3 + 5yz^4 - z^5$$

$x^5 + y^5 - z^5 = 0$ より

$$(x+y-z)^5 =$$
$$5x^4y - 5x^4z + 10x^3y^2 - 20x^3yz + 10x^3z^2 + 10x^2y^3 - 30x^2y^2z$$
$$+ 30x^2yz^2 - 10x^2z^3 + 5xy^4 - 20xy^3z + 30xy^2z^2 - 20xyz^3 + 5xz^4$$
$$- 5y^4z + 10y^3z^2 - 10y^2z^3 + 5yz^4$$

$$= 5\left(x^4y - x^4z + 2x^3y^2 - 4x^3yz + 2x^3z^2 + 2x^2y^3 - 6x^2y^2z\right.$$
$$+6x^2yz^2 - 2x^2z^3 + xy^4 - 4xy^3z + 6xy^2z^2 - 4xyz^3 + xz^4$$
$$\left.-y^4z + 2y^3z^2 - 2y^2z^3 + yz^4\right)$$

$$= 5\left(x^4y - x^4z + 2x^3z^2 + 2x^2y^3 - 4xy^3z + 6xy^2z^2 - 4xyz^3 + xz^4\right.$$
$$+2x^3y^2 - 4x^3yz + 6x^2yz^2 + xy^4 - y^4z + 2y^3z^2 - 2y^2z^3 + yz^4$$
$$\left.-2x^2z^3 - 6x^2y^2z\right)$$

$$= 5\left(x^4y - x^4z + 2x^3z^2 + x^2y^3 - xy^3z + 2xy^2z^2 - 2xyz^3 + xz^4\right.$$
$$+x^3y^2 - x^3yz + 2x^2yz^2 + xy^4 - y^4z + 2y^3z^2 - 2y^2z^3 + yz^4$$
$$+x^2y^3 - 3xy^3z + 4xy^2z^2 - 2xyz^3 + x^3y^2 - 3x^3yz + 4x^2yz^2$$
$$\left.-2x^2z^3 - 6x^2y^2z\right)$$

$$= 5\left(x\left(x^3y - x^3z + 2x^2z^2 + xy^3 - y^3z + 2y^2z^2 - 2yz^3 + z^4\right)\right.$$
$$+y\left(x^3y - x^3z + 2x^2z^2 + xy^3 - y^3z + 2y^2z^2 - 2yz^3 + z^4\right)$$
$$+x^2y^3 + x^3y^2 - 3x^3yz + 4xy^2z^2 - 3xy^3z + 4x^2yz^2 - 2xyz^3$$
$$\left.-2x^2z^3 - 6x^2y^2z\right)$$

$$= 5\left((x+y)\left(x^3y - x^3z + 2x^2z^2 + xy^3 - y^3z + 2y^2z^2 - 2yz^3 + z^4\right)\right.$$
$$+x^2y^2(x+y) - 3x^3yz - 6x^2y^2z + 4x^2yz^2 - 3xy^3z + 4xy^2z^2 - 2xyz^3$$
$$\left.-2x^2z^3\right)$$

$$= 5\left((x+y)\left(x^3y - x^3z + 2x^2z^2 + xy^3 - y^3z + 2y^2z^2 - 2yz^3 + z^4\right)\right.$$
$$+x^2y^2(x+y) - 3x^2yz(x+y) - 3x^2y^2z + 4x^2yz^2 - 3xy^3z + 4xy^2z^2$$
$$\left.-2xz^3(x+y)\right)$$

$$= 5\left((x+y)\left(x^3y - x^3z + 2x^2z^2 + xy^3 - y^3z + 2y^2z^2 - 2yz^3 + z^4\right)\right.$$
$$+x^2y^2(x+y) - 3x^2yz(x+y) - 3xy^2z(x+y) + 4x^2yz^2 + 4xy^2z^2$$
$$\left.-2xz^3(x+y)\right)$$

$$= 5\left((x+y)\left(x^3y - x^3z + 2x^2z^2 + xy^3 - y^3z + 2y^2z^2 - 2yz^3 + z^4\right)\right.$$
$$+x^2y^2(x+y) - 3x^2yz(x+y) - 3xy^2z(x+y) + 4xyz^2(x+y)$$
$$\left.-2xz^3(x+y)\right)$$

$$= 5\,(x+y)\left(x^3y - x^3z + 2x^2z^2 + xy^3 - y^3z + 2y^2z^2 - 2yz^3 + z^4\right.$$
$$\left.+x^2y^2 - 3x^2yz - 3xy^2z + 4xyz^2 - 2xz^3\right)$$

$$= 5\,(x+y)\left(-x^3(z-y) + 2x^2z^2 + xy^3 - y^3z + 2y^2z^2 - yz^3 + z^3(z-y)\right.$$
$$\left.+x^2y^2 - 3x^2yz - 3xy^2z + 4xyz^2 - 2xz^3\right)$$

$$= 5\,(x+y)\left(\left(z^3 - x^3\right)(z-y) + 2x^2z^2 + xy^3 - y^3z + y^2z^2 + y^2z^2 - yz^3\right.$$
$$\left.+x^2y^2 - x^2yz - 2x^2yz - 3xy^2z + 4xyz^2 - 2xz^3\right)$$

$$= 5\,(x+y)\left(\left(z^3 - x^3\right)(z-y) + xy^3 - y^3z + y^2z^2 + y^2z^2 - yz^3\right.$$
$$\left.+x^2y^2 - x^2yz + 2x^2z(z-y) - 3xyz(y-z) + xyz^2 - 2xz^3\right)$$

$$= 5\,(x+y)\left(\left(z^3 - x^3 + 2x^2z + 3xyz\right)(z-y) + xy^3 - y^2z(y-z)\right.$$
$$\left.+y^2z^2 - yz^3 + x^2y^2 - x^2yz + xyz^2 - 2xz^3\right)$$

$$= 5\,(x+y)\left(\left(z^3 - x^3 + 2x^2z + 3xyz + y^2z\right)(z-y) + xy^3\right.$$
$$\left.+yz^2(y-z) + x^2y(y-z) + xyz^2 - 2xz^3\right)$$

$$= 5\,(x+y)\left(\left(z^3 - x^3 + 2x^2z + 3xyz + y^2z - yz^2 - x^2y\right)(z-y)\right.$$
$$\left.+xy^3 + xyz^2 - 2xz^3\right)$$

$$= 5\,(x+y)\left(\left(z^3 - x^3 + 2x^2z + 3xyz + y^2z - yz^2 - x^2y\right)(z-y)\right.$$
$$\left.+xy^3 + xyz^2 - xz^3 - xz^3\right)$$

$$= 5\,(x+y)\,\big(\big(z^3 - x^3 + 2x^2z + 3xyz + y^2z - yz^2 - x^2y\big)\,(z-y)$$
$$+xy^3 + xz^2(y-z) - xz^3\big)$$

$$= 5\,(x+y)\,\big(\big(z^3 - x^3 + 2x^2z + 3xyz + y^2z - yz^2 - x^2y\big)\,(z-y)$$
$$+xy^3 - xz^3 + xz^2(y-z)\big)$$

$$= 5\,(x+y)\,\big(\big(z^3 - x^3 + 2x^2z + 3xyz + y^2z - yz^2 - x^2y\big)\,(z-y)$$
$$+x(y^3 - z^3) + xz^2(y-z)\big)$$

$$= 5\,(x+y)\,\big(\big(z^3 - x^3 + 2x^2z + 3xyz + y^2z - yz^2 - x^2y - xz^2\big)\,(z-y)$$
$$-x(z-y)(y^2 + yz + z^2)\big)$$

$$= 5\,(x+y)\,(z-y)\,\big((z-x)(x^2 + xz + z^2)$$
$$+2x^2z + 3xyz + y^2z - yz^2 - x^2y - xz^2 - x(y^2 + yz + z^2)\big)$$

$$= 5\,(x+y)\,(z-y)\,\big((z-x)(x^2 + xz + z^2)$$
$$+2x^2z + 3xyz + y^2z - yz^2 - x^2y - xz^2 - xy^2 - xyz - xz^2\big)$$

$$= 5\,(x+y)\,(z-y)\,\big((z-x)(x^2 + xz + z^2)$$
$$+2x^2z - 2xz^2 + 2xyz + y^2z - yz^2 - x^2y - xy^2\big)$$

$$= 5\,(x+y)\,(z-y)\,\big((z-x)(x^2 + xz + z^2)$$
$$+2xz(x-z) + 2xyz + y^2(z-x) - yz^2 - x^2y\big)$$

$$= 5\,(x+y)\,(z-y)\,\big((z-x)(x^2 - xz + z^2 + y^2)$$
$$+xyz + xyz - yz^2 - x^2y\big)$$

$$= 5\,(x+y)\,(z-y)\,\big((z-x)(x^2 - xz + z^2 + y^2)$$
$$+xyz + yz(x-z) - x^2y\big)$$

$$= 5\,(x+y)\,(z-y)\,\big((z-x)(x^2 - xz + z^2 + y^2 - yz)$$
$$+xyz - x^2y\big)$$

$$= 5\,(x+y)\,(z-y)\,\big((z-x)(x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz) + xy(z-x)\big)$$

$$= 5(x+y)(z-y)(z-x)(x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + xy)$$

$x^3+y^3-z^3=0$ より

$$\left(x^{\frac{3}{5}}+y^{\frac{3}{5}}-z^{\frac{3}{5}}\right)^5$$
$$=5(x^{\frac{3}{5}}+y^{\frac{3}{5}})(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}})(z^{\frac{3}{5}}-x^{\frac{3}{5}})(x^{\frac{6}{5}}+y^{\frac{6}{5}}+z^{\frac{6}{5}}-(xz)^{\frac{3}{5}}-(yz)^{\frac{3}{5}}+(xy)^{\frac{3}{5}})$$
$$\left(x^{\frac{3}{5}}-\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)\right)^5=x^3-5\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)x^{\frac{12}{5}}+10\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^2x^{\frac{9}{5}}$$
$$-10\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^3x^{\frac{6}{5}}+5\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^4x^{\frac{3}{5}}-\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^5$$

$$\left(x^{\frac{3}{5}}-\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)\right)^5=\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)\left(x^3\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^{-1}-5x^{\frac{12}{5}}+10\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)x^{\frac{9}{5}}\right.$$
$$\left.-10\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^2x^{\frac{6}{5}}+5\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^3x^{\frac{3}{5}}-\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^4\right)$$

$$\begin{aligned}&5(x^{\frac{3}{5}}+y^{\frac{3}{5}})(z^{\frac{3}{5}}-x^{\frac{3}{5}})(x^{\frac{6}{5}}+y^{\frac{6}{5}}+z^{\frac{6}{5}}-(xz)^{\frac{3}{5}}-(yz)^{\frac{3}{5}}+(xy)^{\frac{3}{5}})\\&=x^3\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^{-1}-5x^{\frac{12}{5}}+10\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)x^{\frac{9}{5}}-10\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^2x^{\frac{6}{5}}\\&+5\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^3x^{\frac{3}{5}}-\left(z^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}\right)^4\end{aligned}\tag{4}$$

Remark 8 左辺のみ $x^3+y^3-z^3=0$ を仮定している。

$$k=\sqrt[5]{z^3}-\sqrt[5]{y^3}$$
$$k\left(\sqrt[5]{z^3}+\sqrt[5]{y^3}\right)=\sqrt[5]{z^{2\cdot 3}}-\sqrt[5]{y^{2\cdot 3}}$$
$$\vdots$$
$$k\left(\sqrt[5]{z^3}+\sqrt[5]{y^3}\right)()()\cdots=\sqrt[5]{z^{2^n\cdot 3}}-\sqrt[5]{y^{2^n\cdot 3}}$$

$$\begin{aligned}k&=\sqrt[5]{z^3}-\sqrt[5]{y^3}\\k\sqrt[5]{z^2}&=z-\sqrt[5]{y^3z^2}\\kz\sqrt[5]{y^2}&=z\sqrt[5]{y^2z^3}-yz\\k\sqrt[5]{y^2}&=\sqrt[5]{y^2z^3}-y\\ky\sqrt[5]{z^2}&=yz-y\sqrt[5]{y^3z^2}\\k\sqrt[5]{z^2}&=z-\sqrt[5]{y^3z^2}\end{aligned}$$
$$\vdots$$

x , y , z の文字式では、 (4) 右辺に分母が必要であるが左辺に分母がない。
よって

$$x^3+y^3\neq z^3$$