

## Не-белловские квантовые запутанные состояния (Non-Bell quantum entangled states)

Putenikhin P.V.  
[m55@mail.ru](mailto:m55@mail.ru)

### Abstract

This paper deals with the states of the quantum entanglement generic (non-Bell entangled states), and their creation with of a quantum gate CNOT. Transitions into each other when you rotate the entangled states of Bell, and logical entity of non-locality on the example of a thought experiment with a quantum "nonlocal dice".

Путенихин П.В.  
[m55@mail.ru](mailto:m55@mail.ru)

### Аннотация

Данная работа посвящена исследованию состояний квантовой запутанности общего вида (не-белловских состояний запутанности) и их созданию с помощью квантового гейта CNOT. Рассмотрены переходы друг в друга при повороте запутанных состояний Белла и логическая сущность нелокальности на примере мысленного эксперимента с квантовым «нелокальным кубиком».

В квантовой механике известны состояния квантовых частиц с уникальными нелокальными свойствами – так называемые состояния полной запутанности – состояния Белла:

$$\phi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$$

$$\psi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$$

Два из этих состояний в литературе известны под собственными именами:  $\psi^{-}$  - «ЭПР-состояние» и  $\phi^{+}$  - «состояние шредингеровского кота». Частицы в состоянии запутанности ведут себя как единое целое независимо от расстояния между ними, демонстрируя полную и мгновенную взаимосвязь. Однако, приведённые четыре состояния Белла – это лишь часть всех возможных состояний запутанности, их частный случай. В общем виде состояния запутанности могут быть представлены следующими уравнениями:

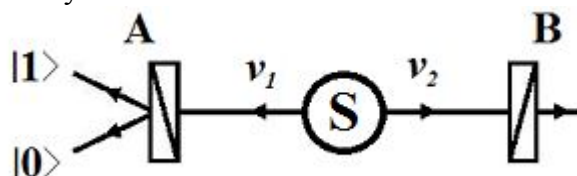
$$\phi^{\alpha\pm} = \alpha|00\rangle \pm \beta|11\rangle$$

$$\psi^{\alpha\pm} = \alpha|01\rangle \pm \beta|10\rangle$$

Исследованию этих состояний посвящена данная работа.

\* \* \*

Чтобы увидеть удивительно согласованное поведение запутанных частиц, а также некоторые отличия в поведении частиц в не-белловских состояниях от поведения частиц в чистых состояниях Белла, проведём математическое исследование не-белловских состояний на мысленной экспериментальной установке:



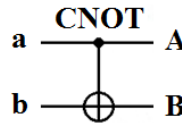
На изображенной установке частицы  $v_1$  и  $v_2$  от источника запутанных фотонов S поступают двум исследователям: А - Алисе и В - Бобу. Алиса, вращая свой двухканальный (расщепляющий) поляризатор, изменяет состояния квантовых частиц на стороне Боба вследствие их запутанности. Не используя классические каналы связи, Боб попытается определить направление поляризатора Алисы. Ещё до проведения математического анализа можно сделать очевидное предсказание:

никакие действия Алисы не могут создать на стороне Боба состояния, по которым Боб смог бы узнать о действиях Алисы.

### Как создаются запутанные состояния. Гейт CNOT

Явление запутанности непосредственно следует из математического формализма квантовой механики. В соответствии с первым постулатом квантовой механики состояние квантовой частицы полностью описывается её волновой функцией. Однако, в некоторых случаях некоторым квантовым частицам не удаётся приписать собственные волновые функции, а только одну на всех. Такое состояние частиц названо запутанностью. Это состояние удалось получить на реальных частицах, например, в так называемых процессах параметрического распада, преобразования с понижением частоты (down conversion) на специальных кристаллах.

Помимо параметрического распада для получения состояния запутанности используются квантовые гейты CNOT. Математическое описание этого процесса очень наглядно и просто. Рассмотрим его. Схематично гейт CNOT можно изобразить следующим образом:



Математически этот квантовый оператор дается выражением:

$$P_{ab}|a, b\rangle = |a, a \oplus b\rangle,$$

где  $a \oplus b$  означает логическое сложение по модулю 2.

Как видим из выражения, управляющий сигнал проходит со входа на выход без изменений. Матрица преобразования гейта CNOT имеет вид:

$$|CNOT\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Подадим на управляющий и управляемый входы CNOT два фотона, соответственно, в следующих состояниях:

$$|\psi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|\psi_b\rangle = |0\rangle$$

Это состояние системы фотонов на входе гейта будет описываться уравнением и матрицей вида:

$$|\psi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

После прохождения фотонов через гейт будет получено новое состояние системы:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

Это означает, что на выходе получено запутанное (белловское) состояние фотонов: управляющего и управляемого, поскольку такое состояние не может быть факторизовано, то есть, представлено как тензорное произведение состояний независимых фотонов. Из этого сразу же следует, что входной управляющий сигнал на выход в неизменном виде не прошел.

Если управляющий фотон взять в состоянии с неопределенной поляризацией, то будет получено состояние запутанности в общем виде (не-белловское):

$$|\psi_a\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$

В литературе гейт CNOT описывается помимо уравнений также таблицей истинности, в которой, однако, не отражено это свойство гейта – создавать запутанные состояния. То есть, традиционная таблица истинности гейта CNOT неполна и должна быть дополнена строками, отражающими запутанность. Полная таблица состояний гейта CNOT должна иметь вид:

a	b	A	B
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	0
$\alpha 0\rangle \pm \beta 1\rangle$	$ 0\rangle$	$\phi^{\alpha\pm} = \alpha 00\rangle \pm \beta 11\rangle$	
$\alpha 0\rangle \pm \beta 1\rangle$	$ 1\rangle$	$\psi^{\alpha\pm} = \alpha 01\rangle \pm \beta 10\rangle$	

В конец таблицы добавлены две строки, показывающие, что при определённых комбинациях входных сигналов на выходе образуется запутанное состояние, которое не является логическим сложением по модулю 2. Запутанные состояния приведены в общем виде, частным случаем которых являются запутанные состояния Белла  $\phi^\pm$  и  $\psi^\pm$ , для которых  $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Это дополнение расширяет понятие гейта «Controlled NOT» (CNOT, «управляемое НЕ»), поскольку его управляемый вход при определённых условиях становится управляющим.

### Почему 00+11? Взаимные превращения запутанных состояний Белла

Как видим, существует, по меньшей мере, четыре разновидности запутанного состояния, в общем равноценные. В их дальнейшем анализе мы будем использовать только одно из них -  $\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ . Во-первых, это состояние отличается от соответствующего состояния Белла («состояние шредингеровского кота»), что позволяет надеяться на некоторые дополнительные результаты. Во-вторых, три других состояния обладают специфическими свойствами: взаимным превращением друг в друга или инверсией. Это означает, что при повороте в пространстве состояния «шредингеровского кота» вид его волновой функции остаётся неизменным:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Действительно, если пропустить оба фотона пары через соответствующие гейты Адамара, будет получено состояние:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} ( (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) + (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) ) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = |\phi^+\rangle \end{aligned}$$

Как видим, при повороте фотонов, волновая функция, описывающая их состояние, не изменила своего вида. Практически такая же картина будет наблюдаться и для «ЭПР-состояния»:

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Пропустив каждый из синглетных фотонов через свой гейт Адамара, мы получим:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} ( (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) - (|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle) = -|\psi^-\rangle \end{aligned}$$

То есть, при повороте фотонов в ЭПР-состоянии мы получили инверсное «ЭПР-состояние». Но знак минус перед волновой функцией является фазовым множителем, не влияет на результаты измерений и может быть отброшен.

Совершенно иная картина будет наблюдаться при повороте двух оставшихся состояний Белла. Одно из них напоминает состояние «шредингеровского кота»:

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

Как и фотоны в состоянии шредингеровского кота, фотоны в этом состоянии при измерении поляризаторами в измерительном базисе будут давать одинаковые результаты. Если один из фотонов каждой из пар будет зарегистрирован в состоянии  $|0\rangle$ , то и второй также будет зарегистрирован в состоянии  $|0\rangle$ . Если один из фотонов пар будет зарегистрирован в состоянии  $|1\rangle$ , то и второй фотон пары тоже будет зарегистрирован в этом же состоянии. То есть базисные поляризаторы всегда будут давать коллинеарный результат измерений. Однако, если повернуть поляризаторы на  $45^\circ$  или, что то же самое, повернуть на этот угол оба фотона пары, мы получим иной результат. После поворота фотонов они будут описываться другой волновой функцией:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) - (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) = \psi^+ \end{aligned}$$

Как видим, после поворота коллинеарное состояние фотонов превращается в синглетное состояние, то есть взаимно перпендикулярные направления поляризации. Если один из фотонов пары будет измерен поляризатором и обнаружен в состоянии  $|0\rangle$ , то второй фотон пары будет обнаружен в состоянии  $|1\rangle$ . И наоборот. Фотоны после поворота оказались в ортогональном состоянии запутанности.

Теперь посмотрим, что будет с этой запутанной парой, если её повернуть ещё на  $45^\circ$ . Это также означает: что будет с оставшимся состоянием Белла, если его повернуть на этот угол:

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

После прохождения фотонов пары через гейт Адамара, они будут описываться новой волновой функцией (исходной, если считать это двойным поворотом пары):

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) + (|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) = |\phi^-\rangle \end{aligned}$$

Как видим, если до поворота запутанные фотоны находились в ортогональном (синглетном) состоянии запутанности, то после поворота они (вновь) оказались в коллинеарном состоянии. В первом случае измерение фотонов давало ортогональные поляризации фотонов, во втором (после поворота) - измерения будут давать коллинеарные результаты. Можно предположить, что существует промежуточное положение (угол поворота поляризаторов), в котором фотоны будут демонстрировать вообще отсутствие корреляции!

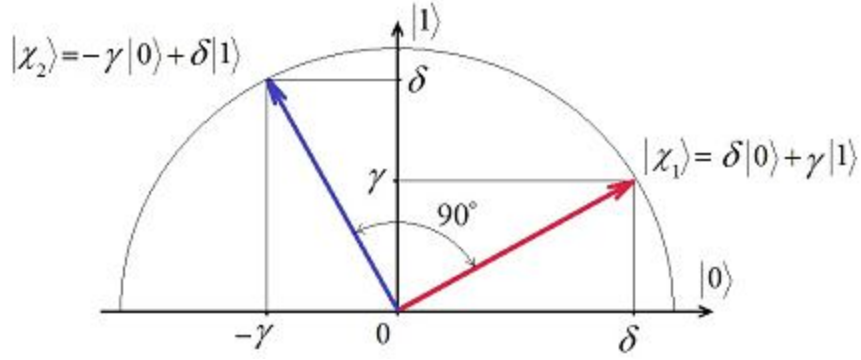
Для того, чтобы избежать возможной необходимости внесения корректив в результаты анализа, мы выбираем самое устойчивое к поворотам состояние запутанности – состояние «шредингеровского кота» в его расширенном не-белловском варианте:  $\phi^{\alpha+} = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ .

### Математическое исследование не-белловского состояния в общем виде

Рассмотрим волновую функцию не-белловского состояния запутанности, имеющую вид:

$$|\psi\rangle = \alpha|0_A 0_B\rangle + \beta|1_A 1_B\rangle$$

Назовём это состояние «поляризованной запутанностью», поскольку она внешне напоминает поток фотонов, описываемых вектором, наклоненным под углом с проекциями  $\alpha$  и  $\beta$ . Эти фотоны измеряет Алиса расщепляющим поляризатором, наклоненным под углом с проекциями  $\delta$  и  $\gamma$ . Этот поляризатор имеет два ортогональных выхода, описываемые волновыми уравнениями:



Проекторы каждого из двух выходов этого измерителя Алисы, следовательно, имеют вид:

$$|\chi_1\rangle\langle\chi_1| = (\delta|0_A\rangle + \gamma|1_A\rangle)(\delta\langle 0_A| + \gamma\langle 1_A|) = (\delta^2|0_A\rangle\langle 0_A| + \delta\gamma|0_A\rangle\langle 1_A| + \gamma\delta|1_A\rangle\langle 0_A| + \gamma^2|1_A\rangle\langle 1_A|)$$

$$|\chi_2\rangle\langle\chi_2| = (-\gamma|0_A\rangle + \delta|1_A\rangle)(-\gamma\langle 0_A| + \delta\langle 1_A|) = (\gamma^2|0_A\rangle\langle 0_A| - \delta\gamma|0_A\rangle\langle 1_A| - \gamma\delta|1_A\rangle\langle 0_A| + \delta^2|1_A\rangle\langle 1_A|)$$

Запишем действие этих проекторов Алисы, которое они оказывают только на её фотоны, и упростим выражения с учетом того, что  $\langle 1_A||0_A\rangle = \langle 0_A||1_A\rangle = 0$  и  $\langle 0_A||0_A\rangle = \langle 1_A||1_A\rangle = 1$ . Напомню о тождественности дираковских записей скалярного произведения:  $\langle 0||0\rangle \equiv \langle 0|0\rangle$ . Вычисляем результат действия первого проектора:

$$\begin{aligned} |\chi_1\rangle\langle\chi_1|\psi\rangle &= (\delta^2|0_A\rangle\langle 0_A| + \delta\gamma|0_A\rangle\langle 1_A| + \gamma\delta|1_A\rangle\langle 0_A| + \gamma^2|1_A\rangle\langle 1_A|)(\alpha|0_A0_B\rangle + \beta|1_A1_B\rangle) \\ &= \delta^2|0_A\rangle\langle 0_A| \cdot \alpha|0_A0_B\rangle + \delta\gamma|0_A\rangle\langle 1_A| \cdot \alpha|0_A0_B\rangle + \gamma\delta|1_A\rangle\langle 0_A| \cdot \alpha|0_A0_B\rangle + \gamma^2|1_A\rangle\langle 1_A| \cdot \alpha|0_A0_B\rangle + \\ &+ \delta^2|0_A\rangle\langle 0_A| \cdot \beta|1_A1_B\rangle + \delta\gamma|0_A\rangle\langle 1_A| \cdot \beta|1_A1_B\rangle + \gamma\delta|1_A\rangle\langle 0_A| \cdot \beta|1_A1_B\rangle + \gamma^2|1_A\rangle\langle 1_A| \cdot \beta|1_A1_B\rangle \\ &= \delta^2\alpha|0_A\rangle\langle 0_A||0_A0_B\rangle + \delta\gamma\alpha|0_A\rangle\langle 1_A||0_A0_B\rangle + \gamma\delta\alpha|1_A\rangle\langle 0_A||0_A0_B\rangle + \gamma^2\alpha|1_A\rangle\langle 1_A||0_A0_B\rangle + \\ &+ \delta^2\beta|0_A\rangle\langle 0_A||1_A1_B\rangle + \delta\gamma\beta|0_A\rangle\langle 1_A||1_A1_B\rangle + \gamma\delta\beta|1_A\rangle\langle 0_A||1_A1_B\rangle + \gamma^2\beta|1_A\rangle\langle 1_A||1_A1_B\rangle \\ &= \delta^2\alpha|0_A\rangle\langle 0_A||0_B\rangle + \delta\gamma\alpha|0_A\rangle\langle 1_A||0_B\rangle + \gamma\delta\alpha|1_A\rangle\langle 0_A||0_B\rangle + \gamma^2\alpha|1_A\rangle\langle 1_A||0_B\rangle + \\ &+ \delta^2\beta|0_A\rangle\langle 0_A||1_B\rangle + \delta\gamma\beta|0_A\rangle\langle 1_A||1_B\rangle + \gamma\delta\beta|1_A\rangle\langle 0_A||1_B\rangle + \gamma^2\beta|1_A\rangle\langle 1_A||1_B\rangle \\ &= \delta^2\alpha|0_A\rangle \cdot 1 \cdot |0_B\rangle + \delta\gamma\alpha|0_A\rangle \cdot 0 \cdot |0_B\rangle + \gamma\delta\alpha|1_A\rangle \cdot 1 \cdot |0_B\rangle + \gamma^2\alpha|1_A\rangle \cdot 0 \cdot |0_B\rangle + \\ &+ \delta^2\beta|0_A\rangle \cdot 0 \cdot |1_B\rangle + \delta\gamma\beta|0_A\rangle \cdot 1 \cdot |1_B\rangle + \gamma\delta\beta|1_A\rangle \cdot 0 \cdot |1_B\rangle + \gamma^2\beta|1_A\rangle \cdot 1 \cdot |1_B\rangle \\ |\chi_1\rangle\langle\chi_1|\psi\rangle &= \delta^2\alpha|0_A\rangle|0_B\rangle + \gamma\delta\alpha|1_A\rangle|0_B\rangle + \delta\gamma\beta|0_A\rangle|1_B\rangle + \gamma^2\beta|1_A\rangle|1_B\rangle \\ &= \delta^2\alpha|0_A\rangle|0_B\rangle + \delta\gamma\beta|0_A\rangle|1_B\rangle + \gamma\delta\alpha|1_A\rangle|0_B\rangle + \gamma^2\beta|1_A\rangle|1_B\rangle \end{aligned}$$

Покажем, что полученное состояние является тензорным произведением двух состояний:

$$|\chi_1\rangle\langle\chi_1|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$$

Ясно, что на стороне Алисы фотон принял состояние её поляризатора, а на стороне Боба фотон вследствие запутанности перешёл в своё определённое состояние:

$$\begin{aligned} |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle &= (\delta|0_A\rangle + \gamma|1_A\rangle) \otimes (\kappa|0_B\rangle + \lambda|1_B\rangle) \\ &= \delta|0_A\rangle\kappa|0_B\rangle + \gamma|1_A\rangle\kappa|0_B\rangle + \delta|0_A\rangle\lambda|1_B\rangle + \gamma|1_A\rangle\lambda|1_B\rangle \\ &= \delta\kappa|0_A\rangle|0_B\rangle + \gamma\kappa|1_A\rangle|0_B\rangle + \delta\lambda|0_A\rangle|1_B\rangle + \gamma\lambda|1_A\rangle|1_B\rangle \\ &= \delta\kappa|0_A\rangle|0_B\rangle + \delta\lambda|0_A\rangle|1_B\rangle + \gamma\kappa|1_A\rangle|0_B\rangle + \gamma\lambda|1_A\rangle|1_B\rangle \end{aligned}$$

Коэффициенты этих состояний находим из соотношения (попарные равенства слагаемых):

$$\delta^2\alpha + \delta\gamma\beta + \gamma\delta\alpha + \gamma^2\beta = \delta\kappa + \delta\lambda + \gamma\kappa + \gamma\lambda$$

Здесь принесена в жертву математическая строгость - коэффициенты показаны в виде мнемонических сумм лишь для наглядности, на самом деле ни суммирования, ни равенства в этом уравнении нет – его можно рассматривать, как перечисление, в котором запятые не показаны. Правильнее было бы складывать квадраты этих коэффициентов (суммы равны единице), но визуальность существенно хуже. Главное, что коэффициенты, стоящие в одинаковых позициях, равны. Коэффициенты первого множителя нам известны, поэтому из простого сравнения слагаемых находим:

$$\begin{cases} \delta^2 \alpha = \delta \kappa \\ \delta \gamma \beta = \delta \lambda \\ \gamma \delta \alpha = \gamma \kappa \\ \gamma^2 \beta = \gamma \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \delta \alpha = \kappa \\ \gamma \beta = \lambda \end{cases}$$

После измерения своего фотона Алисой состояние системы Алиса-Боб описывается тензорным произведением волновых функций:

$$|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle = (\delta|0_A\rangle + \gamma|1_A\rangle) \otimes (\delta\alpha|0_B\rangle + \gamma\beta|1_B\rangle)$$

Таким образом, вследствие измерения первым каналом поляризатора фотон Алисы перешёл в состояние  $|\psi_A\rangle = \delta|0_A\rangle + \gamma|1_A\rangle$ , а запутанный с ним фотон Боба перешёл в состояние (после нормировки):

$$|\psi_B\rangle = \frac{\delta\alpha}{\sqrt{\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2}}|0_B\rangle + \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2}}|1_B\rangle.$$

Очевидно, что это относится только к фотонам, которые прошли через первый канал поляризатора Алисы. Оценим величину (долю) от общего числа фотонов, которые прошли через этот канал. Вероятность перехода фотона Алисы в состояние первого проектора найдём по формуле

$$\begin{aligned} P_1 &= |\langle \chi_1 | \psi_A \rangle|^2 = \langle \psi_A | \chi_1 \rangle \langle \chi_1 | \psi_A \rangle \\ &= (\delta\langle 0_A | + \gamma\langle 1_A |) (\alpha\langle 0_A | \langle 0_B | + \beta\langle 1_A | \langle 1_B |) \otimes (\alpha\langle 0_A | \langle 0_B | + \beta\langle 1_A | \langle 1_B |) (\delta|0_A\rangle + \gamma|1_A\rangle) \\ &= [\alpha\delta|0_B\rangle + \beta\gamma|1_B\rangle] \otimes (\alpha\langle 0_A | \langle 0_B | + \beta\langle 1_A | \langle 1_B |) (\delta|0_A\rangle + \gamma|1_A\rangle) \\ &= [\alpha\delta|0_B\rangle + \beta\gamma|1_B\rangle] \otimes [\delta\alpha\langle 0_A | \langle 0_B | \langle 0_A | + \gamma\alpha\langle 0_A | \langle 0_B | \langle 1_A | + \delta\beta\langle 1_A | \langle 1_B | \langle 0_A | + \gamma\beta\langle 1_A | \langle 1_B | \langle 1_A |] \\ &= [\alpha\delta|0_B\rangle + \beta\gamma|1_B\rangle] \otimes [\delta\alpha\langle 0_B | + \gamma\beta\langle 1_B |] \\ &= \alpha\delta\delta\alpha\langle 0_B | \langle 0_B | + \beta\gamma\delta\alpha\langle 0_B | \langle 1_B | + \alpha\delta\gamma\beta\langle 1_B | \langle 0_B | + \beta\gamma\gamma\beta\langle 1_B | \langle 1_B | = \alpha\delta\delta\alpha + \beta\gamma\gamma\beta \\ P_1 &= \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим второй проектор Алисы:

$$|\chi_2\rangle\langle\chi_2| = (-\gamma|0_A\rangle + \delta|1_A\rangle) \cdot (-\gamma\langle 0_A| + \delta\langle 1_A|) = (\gamma^2|0_A\rangle\langle 0_A| - \delta\gamma|0_A\rangle\langle 1_A| - \gamma\delta|1_A\rangle\langle 0_A| + \delta^2|1_A\rangle\langle 1_A|)$$

Запишем действие этого проектора, которое он оказывает только на фотоны Алисы, и затем упростим все выражения:

$$\begin{aligned} |\chi_2\rangle\langle\chi_2|\psi\rangle &= (\gamma^2|0_A\rangle\langle 0_A| - \delta\gamma|0_A\rangle\langle 1_A| - \gamma\delta|1_A\rangle\langle 0_A| + \delta^2|1_A\rangle\langle 1_A|) \cdot (\alpha|0_A\rangle\langle 0_B| + \beta|1_A\rangle\langle 1_B|) \\ &= \gamma^2|0_A\rangle\langle 0_A| \cdot \alpha|0_A\rangle\langle 0_B| - \delta\gamma|0_A\rangle\langle 1_A| \cdot \alpha|0_A\rangle\langle 0_B| - \gamma\delta|1_A\rangle\langle 0_A| \cdot \alpha|0_A\rangle\langle 0_B| + \delta^2|1_A\rangle\langle 1_A| \cdot \alpha|0_A\rangle\langle 0_B| + \\ &+ \gamma^2|0_A\rangle\langle 0_A| \cdot \beta|1_A\rangle\langle 1_B| - \delta\gamma|0_A\rangle\langle 1_A| \cdot \beta|1_A\rangle\langle 1_B| - \gamma\delta|1_A\rangle\langle 0_A| \cdot \beta|1_A\rangle\langle 1_B| + \delta^2|1_A\rangle\langle 1_A| \cdot \beta|1_A\rangle\langle 1_B| \\ &= \gamma^2\alpha|0_A\rangle\langle 0_A | \langle 0_A | \langle 0_B | - \delta\gamma\alpha|0_A\rangle\langle 1_A | \langle 0_A | \langle 0_B | - \gamma\delta\alpha|1_A\rangle\langle 0_A | \langle 0_A | \langle 0_B | + \delta^2\alpha|1_A\rangle\langle 1_A | \langle 0_A | \langle 0_B | + \\ &+ \gamma^2\beta|0_A\rangle\langle 0_A | \langle 1_A | \langle 1_B | - \delta\gamma\beta|0_A\rangle\langle 1_A | \langle 1_A | \langle 1_B | - \gamma\delta\beta|1_A\rangle\langle 0_A | \langle 1_A | \langle 1_B | + \delta^2\beta|1_A\rangle\langle 1_A | \langle 1_A | \langle 1_B | \\ &= \gamma^2\alpha|0_A\rangle\langle 0_B | - \gamma\delta\alpha|1_A\rangle\langle 0_B | - \delta\gamma\beta|0_A\rangle\langle 1_B | + \delta^2\beta|1_A\rangle\langle 1_B | \\ |\chi_2\rangle\langle\chi_2|\psi\rangle &= \gamma^2\alpha|0_A\rangle\langle 0_B | - \delta\gamma\beta|0_A\rangle\langle 1_B | - \gamma\delta\alpha|1_A\rangle\langle 0_B | + \delta^2\beta|1_A\rangle\langle 1_B | \end{aligned}$$

Покажем, что полученное состояние является тензорным произведением двух состояний:

$$|\chi_2\rangle\langle\chi_2|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$$

Ясно, что на стороне Алисы фотон принял состояние её поляризатора, а на стороне Боба фотон вследствие запутанности перешёл в своё состояние:

$$\begin{aligned} |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle &= (-\gamma|0_A\rangle + \delta|1_A\rangle) \otimes (\kappa|0_B\rangle + \lambda|1_B\rangle) \\ &= -\kappa\gamma|0_A\rangle\langle 0_B | - \lambda\gamma|0_A\rangle\langle 1_B | + \kappa\delta|1_A\rangle\langle 0_B | + \lambda\delta|1_A\rangle\langle 1_B | \end{aligned}$$

Коэффициенты этих состояний находим, сравнивая это уравнение  $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$  и уравнение

$|\chi_2\rangle\langle\chi_2|\psi\rangle$  действия проектора на фотоны Алисы (как и выше, здесь коэффициенты показаны в виде сумм лишь для визуального удобства):

$$\gamma^2\alpha - \delta\gamma\beta - \gamma\delta\alpha + \delta^2\beta = -\kappa\gamma - \lambda\gamma + \kappa\delta + \lambda\delta$$

Коэффициенты первого тензорного сомножителя нам известны (это коэффициенты проектора), поэтому из простого сравнения слагаемых находим коэффициенты второго сомножителя:

$$\begin{cases} \gamma^2\alpha = -\gamma\kappa \\ -\gamma\delta\beta = -\gamma\lambda \\ -\delta\gamma\alpha = \delta\kappa \\ \delta^2\beta = \delta\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\gamma\alpha = \kappa \\ \delta\beta = \lambda \end{cases}$$

Таким образом, после измерения вторым каналом поляризатора своего фотона Алисой состояние системы Алиса-Боб описывается тензорным произведением волновых функций:

$$|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle = (-\gamma|0_A\rangle + \delta|1_A\rangle) \otimes (-\gamma\alpha|0_B\rangle + \delta\beta|1_B\rangle)$$

Фотон Алисы перешёл в состояние  $|\psi_A\rangle = -\gamma|0_A\rangle + \delta|1_A\rangle$ , а запутанный с ним фотон Боба перешёл в состояние (после нормировки):

$$|\psi_B^\perp\rangle = -\frac{\gamma\alpha}{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2}}|0_B\rangle + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2}}|1_B\rangle.$$

Поляризаторы Алисы создают ортогональные потоки фотонов. Проверим для сравнения, являются ли фотонные потоки на стороне Боба тоже ортогональными. Условием ортогональности является равенство нулю скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \langle\psi_B|\psi_B^\perp\rangle &= \left( \frac{\delta\alpha}{\sqrt{\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2}}\langle 0_B| + \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2}}\langle 1_B| \right) \left( -\frac{\gamma\alpha}{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2}}|0_B\rangle + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2}}|1_B\rangle \right) \\ &= -\frac{\gamma\alpha}{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2}} \frac{\delta\alpha}{\sqrt{\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2}} \langle 0_B||0_B\rangle + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2}} \frac{\delta\alpha}{\sqrt{\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2}} \langle 0_B||1_B\rangle \\ &\quad - \frac{\gamma\alpha}{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2}} \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2}} \langle 1_B||0_B\rangle + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2}} \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2}} \langle 1_B||1_B\rangle \\ &= -\frac{\gamma\alpha}{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2}} \times \frac{\delta\alpha}{\sqrt{\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2}} + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2}} \times \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2}} \\ &= -\frac{\gamma\delta\alpha^2}{\sqrt{(\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2)(\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2)}} + \frac{\delta\gamma\beta^2}{\sqrt{(\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2)(\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2)}} \\ &= \frac{\delta\gamma\beta^2 - \gamma\delta\alpha^2}{\sqrt{(\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2)(\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2)}} = \frac{\delta\gamma(\beta^2 - \alpha^2)}{\sqrt{(\gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2)(\delta^2\alpha^2 + \gamma^2\beta^2)}} \end{aligned}$$

Как видим, в общем случае на стороне Боба образуются два не ортогональных потока фотонов (смесь). Лишь в случае базисных измерений Алисы ( $\gamma$  или  $\delta$  равно нулю) или использования Белловского состояния запутанности ( $\alpha=\beta$ ) типа «шредингеровского кота» на стороне Боба образуются ортогональные потоки фотонов.

Итак, мы нашли волновую функцию фотона, возникающую на стороне Боба, если парный ему запутанный фотон на стороне Алисы пройдёт через второй канал поляризатора. Оценим величину (долю) от общего числа фотонов, которые прошли через этот канал. Вероятность перехода фотона Алисы в состояние второго проектора найдём по формуле

$$\begin{aligned} P_2 &= |\langle\chi_2|\psi_A\rangle|^2 = \langle\psi_A|\chi_2\rangle\langle\chi_2|\psi_A\rangle \\ &= (-\gamma\langle 0_A| + \delta\langle 1_A|)(\alpha|0_A\rangle|0_B\rangle + \beta|1_A\rangle|1_B\rangle) \otimes (\alpha\langle 0_A|\langle 0_B| + \beta\langle 1_A|\langle 1_B|)(-\gamma|0_A\rangle + \delta|1_A\rangle) \\ &= (-\alpha\gamma|0_B\rangle + \beta\delta|1_B\rangle) \otimes (-\gamma\alpha\langle 0_B| + \delta\beta\langle 1_B|) \\ &= \alpha\gamma\alpha\langle 0_B||0_B\rangle - \beta\delta\gamma\alpha\langle 0_B||1_B\rangle - \alpha\gamma\delta\beta\langle 1_B||0_B\rangle + \beta\delta\delta\beta\langle 1_B||1_B\rangle = \alpha\gamma\alpha + \beta\delta\delta\beta \\ P_2 &= \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 \end{aligned}$$

Для контроля правильности вычислений сделаем проверку. Очевидно, что общая «доля» всей смеси должна быть равна единице:

$P_1 + P_2 = \alpha^2 \delta^2 + \beta^2 \gamma^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \delta^2 = \alpha^2 \delta^2 + \beta^2 \delta^2 + \alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \gamma^2 = \delta^2 (\alpha^2 + \beta^2) + \gamma^2 (\alpha^2 + \beta^2) = 1$   
 Следовательно, вычисления произведены корректно. С учетом полученных соотношений составляющих потоков в смеси Боба найдём долю фотонов, прошедших через произвольный поляризатор Боба  $|\chi_B\rangle = \kappa|0_B\rangle + \lambda|1_B\rangle$ :

$$\begin{aligned}
 P_B &= P_1 \times \left| \langle \chi_B | \psi_B \rangle \right|^2 + P_2 \times \left| \langle \chi_B | \psi_B^\perp \rangle \right|^2 \\
 P_B &= (\alpha^2 \delta^2 + \beta^2 \gamma^2) \cdot \left| \left( \kappa \langle 0_B | + \lambda \langle 1_B | \right) \cdot \left( \frac{\delta \alpha}{\sqrt{\delta^2 \alpha^2 + \gamma^2 \beta^2}} |0_B\rangle + \frac{\gamma \beta}{\sqrt{\delta^2 \alpha^2 + \gamma^2 \beta^2}} |1_B\rangle \right) \right|^2 \\
 &+ (\alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \delta^2) \cdot \left| \left( \kappa \langle 0_B | + \lambda \langle 1_B | \right) \cdot \left( -\frac{\gamma \alpha}{\sqrt{\gamma^2 \alpha^2 + \delta^2 \beta^2}} |0_B\rangle + \frac{\delta \beta}{\sqrt{\gamma^2 \alpha^2 + \delta^2 \beta^2}} |1_B\rangle \right) \right|^2 \\
 &= (\alpha^2 \delta^2 + \beta^2 \gamma^2) \cdot \left| \frac{\delta \alpha}{\sqrt{\delta^2 \alpha^2 + \gamma^2 \beta^2}} \kappa \langle 0_B | 0_B \rangle + \frac{\gamma \beta}{\sqrt{\delta^2 \alpha^2 + \gamma^2 \beta^2}} \kappa \langle 0_B | 1_B \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\delta \alpha}{\sqrt{\delta^2 \alpha^2 + \gamma^2 \beta^2}} \lambda \langle 1_B | 0_B \rangle + \frac{\gamma \beta}{\sqrt{\delta^2 \alpha^2 + \gamma^2 \beta^2}} \lambda \langle 1_B | 1_B \rangle \right|^2 \\
 &+ (\alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \delta^2) \cdot \left| -\frac{\gamma \alpha}{\sqrt{\gamma^2 \alpha^2 + \delta^2 \beta^2}} \kappa \langle 0_B | 0_B \rangle + \frac{\delta \beta}{\sqrt{\gamma^2 \alpha^2 + \delta^2 \beta^2}} \kappa \langle 0_B | 1_B \rangle \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\gamma \alpha}{\sqrt{\gamma^2 \alpha^2 + \delta^2 \beta^2}} \lambda \langle 1_B | 0_B \rangle + \frac{\delta \beta}{\sqrt{\gamma^2 \alpha^2 + \delta^2 \beta^2}} \lambda \langle 1_B | 1_B \rangle \right|^2 \\
 &= (\alpha^2 \delta^2 + \beta^2 \gamma^2) \cdot \left| \frac{\delta \alpha}{\sqrt{\delta^2 \alpha^2 + \gamma^2 \beta^2}} \kappa + \frac{\gamma \beta}{\sqrt{\delta^2 \alpha^2 + \gamma^2 \beta^2}} \lambda \right|^2 \\
 &+ (\alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \delta^2) \cdot \left| -\frac{\gamma \alpha}{\sqrt{\gamma^2 \alpha^2 + \delta^2 \beta^2}} \kappa + \frac{\delta \beta}{\sqrt{\gamma^2 \alpha^2 + \delta^2 \beta^2}} \lambda \right|^2 \\
 &= (\alpha^2 \delta^2 + \beta^2 \gamma^2) \cdot \left| \frac{\delta \alpha \kappa + \gamma \beta \lambda}{\sqrt{\delta^2 \alpha^2 + \gamma^2 \beta^2}} \right|^2 + (\alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \delta^2) \cdot \left| \frac{\delta \beta \lambda - \gamma \alpha \kappa}{\sqrt{\gamma^2 \alpha^2 + \delta^2 \beta^2}} \right|^2 \\
 &= (\alpha^2 \delta^2 + \beta^2 \gamma^2) \times \frac{(\delta \alpha \kappa + \gamma \beta \lambda)^2}{\delta^2 \alpha^2 + \gamma^2 \beta^2} + (\alpha^2 \gamma^2 + \beta^2 \delta^2) \times \frac{(\delta \beta \lambda - \gamma \alpha \kappa)^2}{\gamma^2 \alpha^2 + \delta^2 \beta^2} \\
 P_B &= (\delta \alpha \kappa + \gamma \beta \lambda)^2 + (\delta \beta \lambda - \gamma \alpha \kappa)^2 \\
 &= (\delta \alpha \kappa)^2 + 2 \delta \alpha \kappa \gamma \beta \lambda + (\gamma \beta \lambda)^2 + (\delta \beta \lambda)^2 - 2 \delta \beta \lambda \gamma \alpha \kappa + (\gamma \alpha \kappa)^2 \\
 &= (\delta \alpha \kappa)^2 + (\gamma \alpha \kappa)^2 + (\gamma \beta \lambda)^2 + (\delta \beta \lambda)^2 \\
 &= (\alpha \kappa)^2 (\delta^2 + \gamma^2) + (\beta \lambda)^2 (\gamma^2 + \delta^2) \\
 P_B &= (\alpha \kappa)^2 + (\beta \lambda)^2
 \end{aligned}$$

Полученное выражение показывает, что результат измерения Боба, вероятность прохождения фотонов через его поляризатор не зависит от действий Алисы. Возьмём, например, запутанные пары в чистом состоянии Белла с проекциями  $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Тогда из полученного выражения находим:

$$P_B = \frac{1}{2} \kappa^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 = \frac{1}{2} (\kappa^2 + \lambda^2) = \frac{1}{2}$$

Как видим, в этом случае независимо от направления поляризатора Боба через него пройдёт ровно половина от общего числа фотонов, что полностью соответствует формализму квантовой теории.



Теперь возьмём не-белловское состояние запутанных частиц у углом наклона  $30^\circ$  к горизонтали, то есть, с проекциями  $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $\beta = \frac{1}{2}$ . Тогда из полученного выражения находим:

$$P_B = \frac{3}{4}\kappa^2 + \frac{1}{4}\lambda^2$$

Это означает, что в отличие от белловского, в случае не-белловского состояния запутанности вероятность прохождения фотонов через поляризатор Боба зависит от направления поляризатора. Запутанные фотоны будто имеют некоторое определенное, выделенное направление, являются «поляризованно запутанными». Можно отметить, что точно такой же результат получает и Алиса. Через ортогональные первый и второй каналы её поляризатора, соответственно, пройдут фотоны с вероятностью:

$$P_1 = \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{3}{4}\delta^2 \quad P_2 = \frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{1}{4}\delta^2$$

Полученные результаты являются весьма примечательными. Ортогонально-коллинеарное поведение запутанных фотонов является фундаментальной причиной невозможности передачи информации чисто математическими средствами: при любом измерении фотонов на одной стороне образуются два ортогональных потока на другой, причём любой дисбаланс одного из этих потоков всегда компенсируется вторым. То есть, уменьшение прохождения фотонов одного потока через данный поляризатор будет тождественно восполнено (компенсировано) увеличением прохождения через него же фотонов из ортогонального потока.

### Логика и философия нелокальности

Вопрос о полноте квантовой механики, поднятый в 1935 году Эйнштейном, Подольским и Розеном, был решён в пользу квантовой механики. Само явление «пугающего дальнего действия» или вероятностной корреляции, превосходящей классические, получило название нелокальности. Суть её простыми словами можно описать как «частицы не передают друг другу информацию, но ведут себя так, будто они эту информацию передают». К такому противоречивому выводу квантовая теория пришла неизбежно, поскольку стремилась сохранить приверженность теории относительности. Но это не совсем корректная позиция. Действительно, теория относительности – это совершенно другая теория, не являющаяся разделом квантовой теории. Мгновенная передача информации самой квантовой механике не противоречит, не приводит внутри неё ни к каким парадоксам. Мгновенная передача противоречит теории относительности. Но причём здесь квантовая механика? Это проблема не квантовой механики, это проблема теории относительности! И решить этот антагонизм двух теорий может только независимый арбитр, стоящий над этими теориями.

Формальная логика не допускает истинности высказываний типа «связь есть, но её нет». В квантовой теории, казалось бы, нашли выход из этого тупика: между частицами передаётся так называемая «квантовая информация», которая отличается от информации классической. Но сама фраза «передаётся нечто» уже требует наличия этого «нечто». Неважно, как его называть «квантовая информация» или как-либо иначе, вопрос сразу же переходит в философскую плоскость материальности этого «нечто». Можно закрыть глаза на это, не вдаваться в эти философские тонкости, но они никуда не исчезают. При любых достаточно глубоких рассуждениях материальность носителя «квантовой информации» неизбежно выходит на передний план. От ответа на этот вопрос о материальности носителя «квантовой информации» уйти невозможно.

Можно привести немало примеров противоречивости нелокальной формулы. Например, предположим, что две монеты всегда выпадают одной и той же стороной. Это нелокальность. Без признания наличия связи между ними невозможно дать логически разумное объяснение такому поведению, только мистическая нелокальность. Или игральные кубики, которые всегда выпадают одинаковым числом вверх. Разумеется, все числа на кубиках выпадают равновероятно, но всегда одинаковые. Можно смело заявить, что не существует разумного логического объяснения этому явлению, если отрицать передачу сигналов от одного объекта к другому. Рассмотрим подробнее ещё одну очень наглядную мысленную демонстрацию, которая отчетливо показывает

антилогичность, мистическую сущность нелокальности. Мысленный эксперимент проведём на следующей установке:



Источник запутанных фотонов S испускает в двух противоположных направлениях одновременно 8 пар запутанных фотонов  $v_1...v_8$ , которые поступают на 8 соответствующих вращаемых поляризаторов  $\Pi_1... \Pi_8$ . На выходах поляризаторов установлены, соответственно, по 8 регистраторов, преобразующих прошедшие через поляризаторы фотоны в 8 электрических импульса на каждой стороне установки. Эти импульсы поступают на двоичный дешифратор полученного двоичного кода в десятичный и индикатор, на который выводится полученное число. Каналы на 8 бит позволяют высветить на индикаторах числа от 0 до 255. Поляризаторы вращаются строго синхронно, в любой момент времени располагаясь под одинаковыми углами к горизонту.

Волновая функция системы фотонных потоков имеет вид:

$$|\phi^+\rangle^{\otimes 8} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \right)^{\otimes 8} = \frac{1}{128} (|00\rangle + |11\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle)$$

Слагаемых после преобразования будет слишком много (256 штук), поэтому покажем только три из них:

$$(|\phi^+\rangle)^{\otimes 8} = \frac{1}{128} (|00000000\rangle|00000000\rangle + \dots + |01010101\rangle|01010101\rangle + \dots + |11111111\rangle|11111111\rangle)$$

Слагаемые показаны в виде 8-разрядных сомножителей из соображения наглядности: каждый из сомножителей относится к одному из каналов – правому или левому. Эти слагаемые могли быть изображены и в других, тождественных видах, например:

$$\begin{aligned} |01010101\rangle &\equiv |0101\rangle|0101\rangle \equiv |01\rangle|01\rangle|01\rangle|01\rangle \equiv |0\rangle|1\rangle|0\rangle|1\rangle|0\rangle|1\rangle|0\rangle|1\rangle \\ |0101\rangle \otimes |0101\rangle &\equiv |01\rangle \otimes |01\rangle \otimes |01\rangle \otimes |01\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \\ |0101\rangle \cdot |0101\rangle &\equiv |01\rangle \cdot |01\rangle \cdot |01\rangle \cdot |01\rangle \equiv |0\rangle \cdot |1\rangle \cdot |0\rangle \cdot |1\rangle \cdot |0\rangle \cdot |1\rangle \cdot |0\rangle \cdot |1\rangle \equiv |01\rangle|010101\rangle|01\rangle \equiv \dots \end{aligned}$$

Также слагаемые могут быть записаны в виде (кубики А и В):

$$|01010101\rangle|01010101\rangle = |0101010101010101\rangle = |0_A 1_A 0_A 1_A 0_A 1_A 0_A 1_A 0_B 1_B 0_B 1_B 0_B 1_B\rangle$$

После прохождения через поляризаторы и регистраторы на вход дешифраторов поступят бинарные числа (фотон с номером 8 соответствует старшему биту), которые будут преобразованы в десятичные и выведены на индикатор. Например, если через поляризаторы пройдут показанные ниже фотоны, то бинарный и десятичный коды будут иметь следующие значения:

$$v_8 - v_6 - v_4 - v_2 v_1 \Rightarrow 10101011_2 = 171_{10}$$

В уравнении фотоны, не прошедшие через поляризаторы, показаны прочерком. Поскольку все поляризаторы коллинеарны, то независимо от угла их поворота и вследствие попарной запутанности фотонов через одноименные поляризаторы всегда будут парные прохождения: либо оба фотона пары пройдут через свои поляризаторы, либо оба будут ими поглощены. Это означает, что показания двух десятичных индикаторов всегда будут одинаковыми. Все пары независимы друг от друга, между разными парами нет никакой зависимости, поэтому числа на индикаторах всегда будут случайными. Другими словами, мы имеем два удалённых друг от друга числовых табло, на которых появляются случайные числа, но всегда одинаковые на обоих табло, своеобразные цифровые игральные кубики с 256 гранями. Эта установка позволяет имитировать действительно «нелокальный кубик», в отличие от обычных кубиков или монет, нелокальную

связь между которыми установить фактически невозможно. Эти квантовые «нелокальные кубики» могут быть разнесены на сотни километров и будут демонстрировать мгновенную корреляцию.

Теперь попробуем объяснить, почему два удаленных друг от друга индикатора в любой момент времени и на любом расстоянии показывают одно и то же случайное число? Логика, здравый смысл и материалистическая философия не допускают никакой мистики – такое совпадение возможно только если между индикаторами есть связь. Всегда, без исключений, когда на одном индикаторе, например, 15, то на втором – обязательно 15. Если на первом – 63, то и на втором – тоже 63. И так для любого числа от 0 до 255. Все эти числа случайны, нет никаких закономерностей их появления, кроме одной: всегда оба индикатора показывают одинаковые числа. Логически можно предположить два объяснения. Первое: это совершенно удивительное совпадение, но, как говорится, так не бывает. Второе: это зависимость одного индикатора от другого, то есть между ними есть связь, передача информации от одного индикатора (поляризатора, дешифратора, фотонов) к другому, на другой стороне.

Но мы пытаемся найти объяснение без сигналов, которыми обмениваются фотоны или индикаторы. Тогда всё-таки потрясающее совпадение? Все фотоны имеют абсолютно случайные состояния. Вращение поляризаторов приводит к тому, что фотоны достигают их каждый раз в случайном положении. Это должно быть очень сильным совпадением: каждый раз одно и то же число на двух не связанных друг с другом индикаторах. Но теория вероятности отрицает такое совпадение. При увеличении числа измерений вероятность случайных совпадений уменьшается и стремится при наших условиях к близкой нулю величине ( $2^{-16}$ ). В нашем же случае – всегда полное совпадение показаний индикаторов: на них всегда без исключения высвечиваются одинаковые числа. Следовательно, случайность тоже исключена.

Тогда, может быть, фотоны при генерации всего лишь запоминают свои состояния и при измерении просто их демонстрируют? Такое решение предлагают квантовые теории дополнительных переменных. По сути, это вариация на тему передачи информации. Но в своей знаменитой статье Белл (Bell J.S., «On the Einstein Podolsky Rosen paradox») пришёл к выводу для подобных экспериментов ЭПР-типа, что для сохранения статистических (то есть, случайных) результатов индивидуальных измерений необходим сверхсветовой механизм влияния друг на друга удалённых измерителей. То есть, если не фотоны обмениваются друг с другом сигналами, то ими должны обмениваться измерители. Но в чём тогда разница? Что позволено измерителям, должно быть позволено и фотонам! Результат индивидуального измерения одного фотона несомненно статистический, случайный. Поэтому на соответствующем индикаторе нашей экспериментальной установки высветится непредсказуемое, абсолютно случайное число. Этот результат передаётся второму фотону, у которого свой результат измерения безусловно коррелируется с первым фотоном, на втором индикаторе высвечивается это же самое число, что и на первом индикаторе, но при этом автоматически этот результат становится точно таким же *статистическим, вероятностным, случайным*. Если мы, вопреки логике, отказываемся от информационной связи между фотонами, то вывод остаётся только один – мистическая нелокальность.

Квантовая механика не предлагает никакого объяснения явлению такой высокой корреляции (нелокальности), только описывает её проявления. В сущности, нелокальность не является частью квантовой теории, она за пределами этой теории. Поэтому квантовой механике нет никакого дела до того, мистика это или за ней скрываются какие-либо реальные физические процессы.

Между запутанными частицами явно просматривается информационная связь, которая *в принципе* не может существовать без физического носителя. Квантово-механическое, математическое описание этой связи верное, но **никакая информация не может быть передана без физического носителя**, будь то частица, поле, волна или почтовые голуби. Только выявление этого носителя и создание способов его регистрации может позволить использовать запутанность для передачи информации и дать возможность Бобу без использования классических (досветовых) каналов связи определить, какие действия со своим поляризатором совершала Алиса.