

# Gravitational forces are not conservative

Florentino Muñiz Ania

March 3 2013// Revised December 12 2013

flomunia@gmail.com

## Abstract:

**English:** This article shows how the gravitational force is conservative only in ideal models of small size. It is shown as strictly mathematical generally is not conservative. From it you can get energy by asymmetric systems.

**Spanish:** En este artículo se muestra como la fuerza gravitatoria sólo es conservativa en modelos ideales de pequeño tamaño. Se demuestra con rigor matemático como, en general, no es conservativa. De ella se puede obtener energía mediante sistemas asimétricos.

## 1. Con Fuerza gravitatoria

Sea una tubería llena de agua con tres tramos de idéntica sección, como la mostrada en la Figura (1), con uno de sus tramos, el  $\overline{BC}$ , descansando sobre el suelo, y el  $\overline{AB}$  normal a él y en la dirección del campo gravitatorio. El

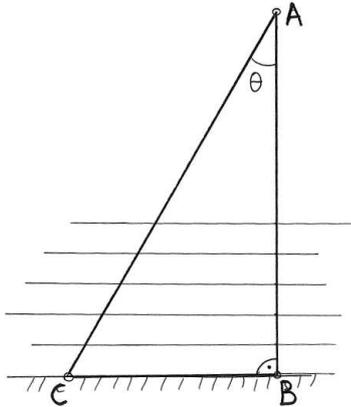


Figura 1: Tuberías y fuerzas en una situación ideal.

tercer tramo, el  $\overline{AC}$  une a los anteriores. Las líneas horizontales finas representan a superficies equipotenciales que atraviesan al dispositivo. Como éste es ideal, el campo gravitatorio en el que descansan las tuberías también. Si ahora procedemos a calcular las fuerzas gravitatorias que sobre las tuberías actúan, nos encontramos que la derivada direccional es máxima para el líquido encerrado por la tubería  $\overline{AB}$ , ya que en ella el líquido circularía en la dirección exacta del Campo gravitatorio, formando entonces el gradiente del potencial gravitatorio, que no es otra cosa que la aceleración, ( $\vec{g}_{AB} = \nabla\Phi$ ). La sección  $\overline{AC}$  está inclinada con respecto al gradiente formando un ángulo  $\theta$ , con lo que su aporte a la fuerza sería  $\vec{g}_{AC} = \nabla\Phi \cdot \cos(\theta)$ . Pero si tenemos en cuenta las fuerzas, en función de las masas, y consideramos la densidad lineal de masa constante, la longitud de esta tubería es también mayor, siendo entonces su masa, expresada en función del tramo vertical:  $m_{AC} = \frac{m_{AB}}{\cos(\theta)}$ , con lo que la fuerza en función del gradiente calculado anteriormente, y teniendo en cuenta al ángulo que forma la tubería con el gradiente es:

$$\vec{F}_{AC} = \frac{m_{AB}}{\cos(\theta)} \nabla\Phi \cos(\theta) = m_{AB} \nabla\Phi = \vec{F}_{AB}.$$

Con lo que, una vez considerado nulo el aporte de fuerzas al tramo del suelo, por ser normal al Campo gravitatorio, hay que concluir que la resultante de fuerzas es cero, ya que ambas son iguales pero de distinto sentido (ambas parten del punto  $A$  y entonces se cancelan), y no habrá ni movimiento alguno ni cesión de energía.

Una situación bien distinta a esta (ideal), es la real y representada en la Figura 2. En ésta se muestra a una tubería que parte de un punto  $C$  y se alarga por el horizonte, en lugar de ir pegada al suelo, como va el tramo  $\overline{CB}$ . El tramo  $\overline{AB}$  las une mediante una trayectoria con dirección al centro terrestre. Esto, que podría parecer muy exigente, no lo es tan-

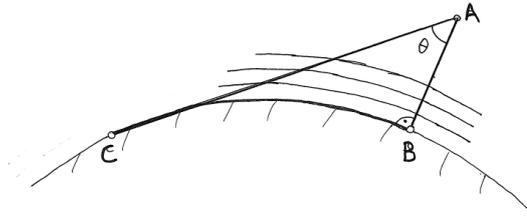


Figura 2: Situación real de una espira formada por tres tuberías.

to para los astrónomos cuando intentan construir un espejo de algunos metros de diámetro para un telescopio reflector, eso sin tener en cuenta que no tenemos porque ceñirnos a dispositivos de pequeño tamaño. Siguiendo con el razonamiento, en este nuevo diseño se ve claramente que el gradiente coincide, como en el anterior, con el tramo de tubería normal al suelo, el que mayor número de superficies equipotenciales penetra por unidad de longitud. Pero en el tramo  $\overline{AC}$  el número de superficies equipotenciales por unidad de longitud que penetra no es lineal, aunque coincida el número. Esto es así porque el Campo gravitatorio terrestre tiene simetría esférica. O, lo que es igual, y se tendrá ocasión de calcular: las fuerzas de los tramos  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  ya no van a ser iguales. El tramo  $\overline{BC}$  no hace falta que intervenga, ya que es equipotencial. Y entonces  $\vec{F}_{AB} \neq \vec{F}_{AC} \cos(\theta)$ .

Para demostrarlo recurriremos a la Figura 3 y al cálculo infinitesimal:

En esta figura,  $O$  es el centro terrestre,  $R$  el radio terrestre,  $l$  el tramo de tubería  $\overline{AC}$  (de caída tangencial en la Figura 2),  $b$  el tramo  $\overline{AB}$  (de caída vertical) en la Figura 2, y  $\beta$  el ángulo  $\widehat{BOC}$ , que es el máximo ángulo de la integración.

La integración de la fuerza del tramo  $\overline{AC}$  será el recorrido por  $l$  en función de la variación del ángulo, que ofrecerá la distancia de un punto sobre  $l$  al centro de la Tierra, y la fracción de fuerza que está en la trayectoria de  $l$ , todo ello teniendo en cuenta que la densidad lineal de masa es  $\rho$  ( $kg/m$ ),  $m_{\oplus}$  es la masa terrestre y  $G$  la constante de Newton:

$$\vec{F}_{AC} = \frac{\int_0^{\beta} \frac{G m_{\oplus} \rho R \tan \alpha}{\left(\frac{R}{\cos(\alpha)}\right)^2} \sin(\alpha) d\alpha}{\beta}. \quad (1.1)$$

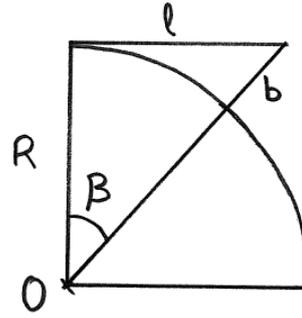


Figura 3: Esquema del cálculo infinitesimal para resolver la Figura 2.

Por otra parte, la integración sobre  $b$  no ofrece mayores complicaciones, ya que en ella el único ángulo que interviene es el que da la altura en función de  $\beta$  y del radio terrestre, por estar alineada con el centro terrestre:

$$\vec{F}_{AB} = \int_R^{R/\cos(\beta)} \frac{G m_{\oplus} \rho}{r^2} dr, \quad (1.2)$$

con lo que, y dado que ambas integrales parten del vértice  $A$ , restándolas, simplificando y sacando factor común, obtenemos:

$$\vec{F}_{AB} - \vec{F}_{AC} = \frac{G m_{\oplus} \rho}{R} \cdot \left( \frac{\sin \beta (\cos \beta)^2}{3\beta} - \cos \beta - \frac{\tan \beta}{3\beta} + 1 \right), \quad (1.3)$$

con lo que queda claro que las fuerzas no se anulan:  $\vec{F}_{AB} - \vec{F}_{AC} > 0 \mid \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Y por lo tanto, la fuerza gravitatoria no es conservativa. Y se puede obtener energía a partir de un campo gravitatorio con simetría esférica.

Así que la Figura 1 es un sistema ideal y una aproximación del caso general de la Figura 2, la cual tiene en cuenta la curvatura de la superficie terrestre, así como la variación implícita de  $\vec{g}$ .

## Referencias

- [1] W. Edward Gettys; Frederick J. Keller; Malcom J. Skove (2000) *Física clásica y moderna* Madrid, McGraw-Hill/INTERAMERICANA DE ESPAÑA S.A.U.