Germán Andrés Paz
Rosario (Código Postal 2000), Santa Fe, Argentina
Números Primos de Sophie Germain,
Demostración de su Infinitud
==

Introducción

El presente trabajo expone la solución a uno de los problemas matemáticos que aún después de mucho tiempo no han sido resueltos. Específicamente, en estas páginas se lleva a cabo la tarea de demostrar que existen infinitos números primos de Sophie Germain, y de la misma demostración se obtienen también algunos otros resultados interesantes.

Antes de abordar la solución al problema en sí, se hará un recorrido a través de la explicación de conceptos tales como *números enteros*, *naturales*, *primos* y *compuestos*, de manera que el problema que sea plantea y su solución puedan ser comprendidos por cualquiera que tenga conocimientos básicos de Matemática, y no solamente por matemáticos entendidos en el tema.

Definición de números primos y compuestos

Para comenzar, se denominan *números enteros* a los números que no tienen parte decimal, como por ejemplo el -2, el -1, el 0, el 1, el 2, … Dentro del conjunto de los números enteros se hallan los denominados *números naturales*.

Consideraremos como *números naturales* a aquellos números enteros mayores que 0 (algunos consideran al 0 como natural). Así, los números naturales serán los siguientes:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ \ldots,\ etc.$$

Esto quiere decir que los números naturales serán todos los números enteros que van desde el 1 hasta el infinito.

Dentro del conjunto de los números naturales se definen el número 1, los *números primos* y los *números compuestos*:

$$\text{Números naturales} \begin{cases} 1 \\ \textit{números primos} \\ \textit{números compuestos} \end{cases}$$

Para poder entender estos conceptos, tendremos que definir primero el concepto de **divisibilidad**: ¿qué significa que un número es divisible por otro? Un número entero a es divisible por un número entero b (distinto de 0) cuando el resultado de $\frac{a}{b}$ es un número entero. Por ejemplo, 4 es divisible por 2, ya que $\frac{4}{2} = 2$ es un número entero. Ahora, 5 no es divisible por 2, ya que $\frac{5}{2} = 2{,}5$ no es un número entero.

Se dice que un número natural es primo si solamente es divisible por dos números naturales: él mismo y el 1. Dicho de otra forma, un número natural es primo si tiene exactamente dos números naturales como divisores.

Algunos ejemplos:

- El número 2 es primo, ya que, de los números naturales, solamente es divisible por 2 y por 1.
- El número 3 es primo, ya que, de los números naturales, solamente es divisible por 3 y por 1.
- El número 5 es primo, porque, de los números naturales, solamente es divisible por 5 y por 1.

Por otra parte, un número natural es compuesto si es divisible por al menos un número natural distinto de sí mismo y de 1.

Algunos ejemplos:

- El número 4 es compuesto, ya que, además de ser divisible por 4 y por 1, es divisible por 2.
- El número 6 es compuesto, ya que, además de ser divisible por 6 y por 1, es divisible por 2 y por 3.
- El número 8 es compuesto, porque, además de ser divisible por 8 y por 1, es divisible por 2 y por 4.

Cabe aclarar que el número 1 no se considera ni primo ni compuesto.

Los números primos son una parte muy importante de una de las ramas de la Matemática denominada ***Teoría de Números***. La distribución de estos números dentro del conjunto de los números naturales siempre ha sido (y continúa siendo en la actualidad) un objeto de investigación constante por parte de matemáticos de todo el mundo. Esto se debe a la distribución caótica que parecen tener los números primos entre todos los números naturales, pues no parecen seguir ningún patrón definido, parecen estar distribuidos de forma aleatoria, lo que los hace prácticamente "impredecibles", es decir, parece imposible determinar un patrón que nos pueda decir con exactitud cuándo nos vamos a encontrar con el próximo número primo.

Esto es, al menos en parte, lo que hace que el área de la Matemática relacionada con los números primos sea una de las más difíciles. Una prueba contundente de este hecho es que existen muchos problemas acerca de estos números que llevan décadas o hasta siglos sin resolverse.

A pesar de estos hechos, Euclides, un importante matemático griego de la antigüedad, consiguió probar que existen infinitos números primos mediante una sencilla demostración por reducción al absurdo. En las demostraciones matemáticas por reducción al absurdo, lo que se hace para probar la veracidad de una cierta proposición P es demostrar que si ocurriera lo contrario a lo que dice P, entonces se obtendría una contradicción.

En el caso de la demostración de Euclides de la infinitud de números primos, lo que se hace para demostrar que los números primos son infinitos es suponer exactamente lo contrario, es decir, que son finitos. Luego de planteada la suposición, se hacen una serie de deducciones que conducen a una contradicción. Entonces, la suposición de la finitud de números primos de la que se partió no puede ser cierta. Luego, queda demostrado que los números primos son infinitos. De este tipo de demostración se hará uso en este trabajo para demostrar que existen infinitos números primos de Sophie Germain.

Números primos de Sophie Germain

Dentro del conjunto de los números primos existen varias clasificaciones de estos números. Por ejemplo, existen los llamados *números primos de Mersenne*, los *números primos de Fermat*, los *números primos de Sophie Germain*, etc.

Los números primos de Sophie Germain deben su nombre a la matemática francesa Marie-Sophie Germain, quien vivió entre los siglos XVIII y XIX e hizo importantes contribuciones a la Matemática.

Como ya se explicó anteriormente, en el presente trabajo se procederá a demostrar que existen infinitos números primos de Sophie Germain. Ahora bien, ¿qué quiere decir que un determinado número primo es un "número primo de Sophie Germain"?

Definición: Un número primo p es un número primo de Sophie Germain si $2p+1$ es también un número primo.

Los primeros diez números primos de Sophie Germain son los siguientes:

2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, …

Demostrar que existen infinitos números primos de Sophie Germain equivale a demostrar que existen infinitos números primos de la forma $2p+1$ con p primo, ya que los números primos de la forma $2p+1$ se forman, obviamente, mediante números primos de Sophie Germain.

Nota: Una aclaración importante que hay que hacer es que el hecho de que existan infinitos números primos no implica que necesariamente existan infinitos números primos de una determinada clase. Por ejemplo, el hecho de la infinitud de los números primos propiamente dichos no implica que necesariamente existan infinitos números primos de la forma $2p+1$ (p es primo). Los números primos de la forma $2p+1$ podrían dejar de existir en algún punto y los números primos propiamente dichos podrían continuar hasta el infinito sin ningún problema. Este mismo razonamiento se aplica para cualquier otra clase de números primos. Ésta es una de las razones de la gran dificultad que generalmente conllevan los problemas relacionados con los números primos.

Intervalo de Breusch

El *Intervalo de Breusch* es el intervalo $\left[n, \frac{9(n+3)}{8}\right]$, el cual garantiza la existencia de, al menos, un número primo para todo n natural. Si n es un número natural (es decir, un número entero mayor que 0), entonces en el intervalo $\left[n, \frac{9(n+3)}{8}\right]$ hay, al menos, un número primo.

Por otra parte, existe también el denominado *Postulado de Bertrand*, que afirma que si n es un número entero mayor que 1, entonces siempre hay por lo menos un número primo entre n y $2n$. Dicho de otra forma, siempre existirá al menos un número primo p tal que $n < p < 2n$. De todos modos, no nos servirá mucho este postulado para la demostración que desarrollaremos en este trabajo.

Aclaraciones importantes: A lo largo de todo este trabajo, siempre que se mencione que un determinado número b está **entre** un número a y un número c, significará que $a < b < c$, no pudiendo ser b igual a a ni a c (lo mismo se aplica a los intervalos). Además, el número n que utilizaremos será siempre entero positivo, nunca decimal.

La pregunta que nos haremos ahora es la siguiente: **¿a partir de qué número natural n tendremos que entre n y $2n$ hay por lo menos *dos* números primos?** Para averiguar esto, haremos uso del Intervalo de Breusch.

Si entre n y $2n$ hay por lo menos dos Intervalos de Breusch que no se superponen en ningún punto, entonces podremos decir con toda seguridad que entre n y $2n$ hay por lo menos dos números primos, ya que cada Intervalo de Breusch contiene al menos un número primo.

Ahora, la mitad del intervalo $[n, 2n]$ es igual a $\frac{n+2n}{2} = \frac{3n}{2}$. De acuerdo con lo visto hasta ahora, vamos a graficar un caso en el que se daría que entre n y $2n$ hay, por lo menos, ***dos*** Intervalos de Breusch:

$$n \quad \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\textit{Intervalo de Breusch 1}} \quad \underbrace{\frac{3n}{2}}_{\textit{mitad del intervalo }[n,2n]} \quad \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\textit{Intervalo de Breusch 2}} \quad 2n$$

- El *Intervalo de Breusch 1* contiene, al menos, un número primo.
- El *Intervalo de Breusch 2* contiene, al menos, un número primo.

Si en el intervalo $\left[n, \frac{9(n+3)}{8}\right]$ hay, al menos, un número primo, entonces en el intervalo $\left[n+1, \frac{9(n+1\ +\ 3)}{8}\right]$ también existe, por lo menos, un número primo. Lo único que se hace en este caso es reemplazar n por $n+1$.

■ Para que haya un Intervalo de Breusch entre n y $\frac{3n}{2}$ se tiene que tener que $\frac{9(n+1\ +\ 3)}{8} < \frac{3n}{2}$. Esto es porque en este caso definimos a $n+1$ como principio del Intervalo de Breusch. Calculemos, entonces, cuál sería el valor de n:

$$\frac{9(n+1\ +\ 3)}{8} < \frac{3n}{2}$$

$$\frac{9(n+4)}{8} < \frac{3n}{2}$$

$$\frac{9.n+9.4}{8} < \frac{3n}{2}$$

$$\frac{9n+36}{8} < \frac{3n}{2}$$

$$2\frac{9n+36}{8} < 3n$$

$$\frac{2(9n+36)}{8} < 3n$$

$$\frac{2.9n+2.36}{8} < 3n$$

$$\frac{18n+72}{8} < 3n$$

$$18n+72 < 8.3n$$

$$18n+72 < 24n$$

$$72 < 24n-18n$$

$$72 < 6n$$

$$\frac{72}{6} < n$$

$$12 < n$$

Resultado 1: $n > 12$

Para que haya un Intervalo de Breusch entre $\frac{3n}{2}$ y $2n$ vamos a tener que considerar dos casos:

1. El resultado de $\frac{3n}{2}$ es un número entero. Esto sucede cuando $3n$ es un número par.

2. El resultado de $\frac{3n}{2}$ es un número decimal. En este caso, $\frac{3n}{2}$ será igual a la suma de un número entero más $0,5$. Este caso se da cuando $3n$ es un número impar, puesto que al dividir todo número impar por 2 se obtiene un número decimal que es igual a un número entero más $0,5$.

La razón por la cual trabajaremos de este modo es porque el número n que utilizaremos en el Intervalo de Breusch $\left[n, \frac{9(n+3)}{8}\right]$ será siempre un número entero natural, y nunca un número decimal.

* Caso 1: $\frac{3n}{2}$ es un número entero. En este caso, podemos definir el principio del Intervalo de Breusch como $\frac{3n}{2}+1$. Para que haya al menos un Intervalo de Breusch entre $\frac{3n}{2}$ y $2n$, se tiene que tener que $\frac{9(\frac{3n}{2}+1\ +\ 3)}{8} < 2n$: reemplazamos n por $\frac{3n}{2}+1$.

$$\frac{9(\frac{3n}{2}+1\ +\ 3)}{8} < 2n$$

$$\frac{9(\frac{3n}{2}+4)}{8}<2n$$

$$\frac{9.\frac{3n}{2}+9.4}{8}<2n$$

$$\frac{\frac{9.3n}{2}+9.4}{8}<2n$$

$$\frac{\frac{27n}{2}+36}{8}<2n$$

$$\frac{27n}{2}+36<8.2n$$

$$\frac{27n}{2}+36<16n$$

$$36<16n-\frac{27n}{2}$$

$$36<16n-\frac{27}{2}n$$

$$36<16n-13,5n$$

$$36<2,5n$$

$$\frac{36}{2,5}<n$$

$$14,4<n$$

$$n>14,4$$

Como sabemos que n es un número entero natural, podemos decir que $n>14$.

$$\text{Resultado 2:} \quad n>14$$

* Caso 2: $\frac{3n}{2}$ es un número decimal ($número\ entero + 0,5$). En este caso, el principio del Intervalo de Breusch sería:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{3n}{2}}_{\substack{\textit{no entero,}\\ \textit{termina en ,5}}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}=0{,}5}}_{\textit{número entero}}$$

$$\frac{3n}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3n+1}{2}$$

$\frac{3n+1}{2}$ es el valor que vamos a tomar. Para que exista un Intervalo de Breusch entre $\frac{3n}{2}$ y $2n$, se tiene que dar que $\frac{9(\frac{3n+1}{2}+3)}{8}<2n$.

$$\frac{9(\frac{3n+1}{2}+3)}{8}<2n$$

$$\frac{9(\frac{3n+1}{2}+\frac{6}{2})}{8}<2n$$

$$\frac{9(\frac{3n+1+6}{2})}{8}<2n$$

$$\frac{9(\frac{3n+7}{2})}{8}<2n$$

$$\frac{9.\frac{3n+7}{2}}{8}<2n$$

$$\frac{\frac{9(3n+7)}{2}}{8}<2n$$

$$\frac{\frac{9.3n+9.7}{2}}{8}<2n$$

$$\frac{\frac{27n+63}{2}}{8} < 2n$$

$$\frac{27n+63}{2} < 8.2n$$

$$\frac{27n+63}{2} < 16n$$

$$27n+63 < 2.16n$$

$$27n+63 < 32n$$

$$63 < 32n - 27n$$

$$63 < 5n$$

$$\frac{63}{5} < n$$

$$12,6 < n$$

$$n > 12,6$$

Como sabemos que n es un número entero natural, podemos decir que $n > 12$:

$$\text{Resultado 3:} \quad n > 12$$

Resumiendo, tenemos los siguientes resultados:

Resultado 1: $n > 12$

Resultado 2: $n > 14$

Resultado 3: $n > 12$

Si $n > 14$, entonces $n > 12$.

En consecuencia, podemos decir que si $n > 14$ es un número entero, entonces se da lo siguiente:

1. Entre n y $\frac{3n}{2}$ hay, al menos, un Intervalo de Breusch, el cual contiene al menos un número primo. Esto quiere decir que entre n y $\frac{3n}{2}$ hay por lo menos un número primo.

2. Entre $\frac{3n}{2}$ y $2n$ hay por lo menos un Intervalo de Breusch, el cual contiene al menos un número primo. Por lo tanto, entre $\frac{3n}{2}$ y $2n$ hay por lo menos un número primo.

De estos dos puntos se deduce que si $n > 14$ es entero, entonces entre n y $2n$ hay por lo menos dos números primos. En realidad, esto se cumple también para los siguientes valores de n: 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14.

$$4 < 5 < 7 < 2.4 \quad (2.4 = 8) \; (5 \text{ y } 7 \text{ son primos})$$

$$6 < 7 < 11 < 2.6 \quad (2.6 = 12) \; (7 \text{ y } 11 \text{ son primos})$$

$$7 < 11 < 13 < 2.7 \quad (2.7 = 14) \; (11 \text{ y } 13 \text{ son primos})$$

$$8 < 11 < 13 < 2.8 \quad (2.8 = 16) \; (11 \text{ y } 13 \text{ son primos})$$

$$9 < 11 < 13 < 2.9 \quad (2.9 = 18) \; (11 \text{ y } 13 \text{ son primos})$$

$$10 < 11 < 13 < 2.10 \quad (2.10 = 20) \; (11 \text{ y } 13 \text{ son primos})$$

$$11 < 13 < 17 < 2.11 \quad (2.11 = 22) \; (13 \text{ y } 17 \text{ son primos})$$

$$12 < 13 < 17 < 2.12 \quad (2.12 = 24) \; (13 \text{ y } 17 \text{ son primos})$$

$$13 < 17 < 19 < 2.13 \quad (2.13 = 26) \; (17 \text{ y } 19 \text{ son primos})$$

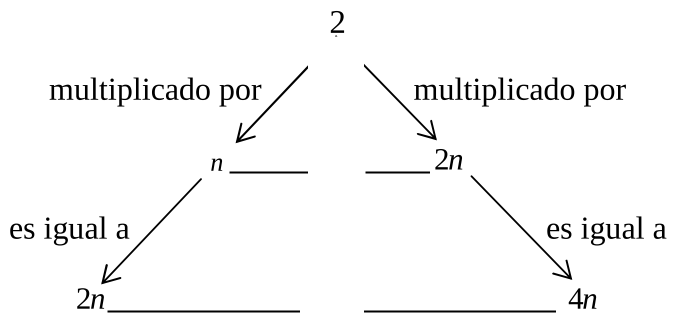
$$14 < 17 < 19 < 2.14 \quad (2.14 = 28) \; (17 \text{ y } 19 \text{ son primos})$$

Entonces, como conclusión de este tema podemos decir lo siguiente:

Para $n > 5$ entero y también para $n = 4$ se tiene que entre n y $2n$ hay, por lo menos, dos números primos.

Intervalos $[n, 2n]$ y $[2n, 4n]$

Si tenemos el número natural n y su doble $2n$, al multiplicar estos números por 2 obtenemos dos números tales que el mayor es el doble del menor:



$$2.n.2 = 2.2n$$

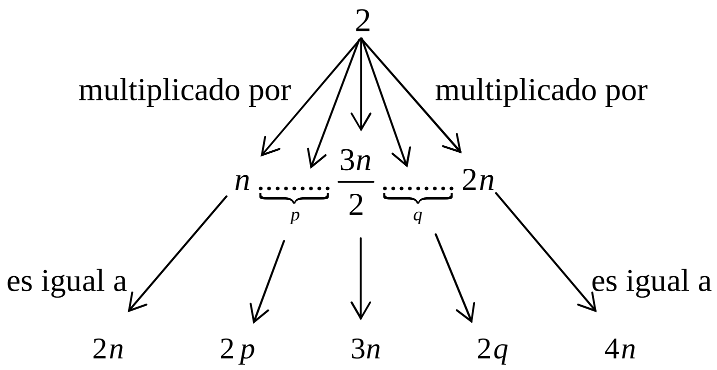
$$2n.2 = 2.2n$$

$$4n = 4n$$

El intervalo $[2n, 4n]$ es más grande (abarca más números enteros) que el intervalo $[n, 2n]$.

Teorema 1

Para $n > 14$ entero, podemos construir el siguiente gráfico:



Observación: $\frac{3n}{2}$ y $3n$ son las mitades o “centros de simetría” de los intervalos:

$$2.\frac{3n}{2} = \cancel{2}.\frac{3n}{\cancel{2}} = 3n$$

Entre n y $\frac{3n}{2}$ hay, al menos, un Intervalo de Breusch, el cual contiene, al menos, un número primo p.

De acuerdo con el gráfico, p está entre n y $\frac{3n}{2}$:

$$n < p < \frac{3n}{2}$$

De acuerdo con lo anterior, tenemos que

$$2n < 2p < 2.\frac{3n}{2}$$

que es lo mismo que decir que

$$2n < 2p < 3n$$

$2p$ es un número semiprimo par.

Esto quiere decir que entre $2n$ y $3n$ hay, al menos, un número semiprimo par.

Recordemos que los números semiprimos son aquellos números que son iguales a la multiplicación de exactamente dos números primos, pudiendo ser estos números primos iguales o distintos.

Ejemplos:

- 4 es un número semiprimo, ya que es igual a 2 * 2 (2 es un número primo).
- 6 es un número semiprimo, ya que es igual a 2 * 3 (2 y 3 son números primos).
- 15 es un número semiprimo, ya que es igual a 3 * 5 (3 y 5 son números primos).

Aclaración: Los números semiprimos son compuestos.

Además, entre $3n$ y $4n$ existe, al menos, un número primo, como se demuestra a continuación.

Para demostrar que existe un número primo entre $3n$ y $4n$, tendremos que demostrar que entre $3n$ y $4n$ hay, por lo menos, un Intervalo de Breusch. Para que esto suceda, se tiene que dar que $\frac{9(3n+1\ +\ 3)}{8} < 4n$:

$$\frac{9(3n+1\ +\ 3)}{8} < 4n$$

$$\frac{9(3n+4)}{8} < 4n$$

$$\frac{9.3n+9.4}{8} < 4n$$

$$\frac{27n+36}{8} < 4n$$

$$27n+36 < 8.4n$$

$$27n+36 < 32n$$

$$36 < 32n-27n$$

$$36 < 5n$$

$$\frac{36}{5} < n$$

$$7,2 < n$$

$$n > 7,2$$

Si, $n > 14$ entonces $n > 7,2$.

De acuerdo con estos resultados, para $n > 14$ entero tenemos que entre $2n$ y $3n$ hay, al menos, un número semiprimo par, y entre $3n$ y $4n$ existe, al menos, un número primo. Esto significa que entre $2n$ y $4n$ hay, al menos, una *pareja semiprimo par - primo*.

Aclaración: En la definición de “pareja semiprimo par - primo” (así como también en las definiciones de “pareja primo - semiprimo par”, “pareja semiprimo - primo” y “pareja primo - semiprimo”, las cuales veremos más adelante), el signo “-” no significa “menos”, es decir, no implica una sustracción. Dicho signo es solamente un guion que implica que un número (el que está a la derecha del guion) sigue a otro número (el que está a la izquierda del guion). En otras palabras, el número que está a la derecha del guion es mayor que el número que está a la izquierda del mismo. Por ejemplo, una pareja semiprimo par - primo está formada simplemente por un número semiprimo par seguido por un número primo, siendo en este caso el número semiprimo par menor que el número primo. El mismo razonamiento se aplicará para los conceptos de “pareja primo - semiprimo par”, “pareja semiprimo - primo” y “pareja primo - semiprimo”.

Si $n > 14$, entonces $2n > 2.14$, es decir, $2n > 28$. Ahora, $2n$ es siempre un número par, y el doble de $2n$ es $4n$. Y como ya dijimos, entre $2n$ y $4n$ hay, por lo menos, una pareja semiprimo par - primo.

De todo esto se deduce que si $n > 28$ es un número par, entonces entre n y $2n$ existe por lo menos una pareja semiprimo par - primo. ¿Se puede aplicar este resultado a valores impares de n? La respuesta es que sí, como veremos ahora (se recomienda usar el gráfico de la pág. 13 como guía).

Como vimos recientemente, para $n > 14$ entero tenemos que entre $2n$ y $3n$ hay, al menos, un número semiprimo par, y entre $3n$ y $4n$ hay, al menos, un número primo. **Ahora, tendremos que ver en qué caso se daría que entre el número impar $2n+1$ y $3n$ hay un número semiprimo par.** Si entre $2n+1$ y $3n$ hay un número semiprimo par y entre $3n$ y $4n$ hay un número primo, entonces entre $2n+1$ y $2(2n+1) = 4n+2$ hay una pareja semiprimo par - primo, puesto que $2n+1 < 3n < 4n < 2(2n+1)$.

Para cumplir con el objetivo planteado, vamos a tener que averiguar cuándo se daría que entre $n+1$ y $\frac{3n}{2}$ existe un Intervalo de Breusch y, por lo tanto, un número primo. Esto es porque si hay un número primo p entre $n+1$ y $\frac{3n}{2}$, entonces existe el número semiprimo par $2p$ entre $2(n+1)$ y $2.\frac{3n}{2} = 3n$, ya que

$$n+1< p<\frac{3n}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(n+1)<2p<2.\frac{3n}{2} \quad \Rightarrow \quad 2n+2<2p<3n$$

De esto obtenemos que $2n+1<2n+2<2p<3n$, es decir, que hay un número semiprimo par $2p$ entre $2n+1$ y $3n$.

Averigüemos, entonces, cuándo existe un Intervalo de Breusch entre $n+1$ **y** $\frac{3n}{2}$**:**

tenemos que tener que $\frac{9(n+1\ +\ 1\ +\ 3)}{8}<\frac{3n}{2}$.

$$\frac{9(n+1\ +\ 1\ +\ 3)}{8}<\frac{3n}{2}$$

$$\frac{9(n+5)}{8}<\frac{3n}{2}$$

$$\frac{9.n+9.5}{8}<\frac{3n}{2}$$

$$\frac{9n+45}{8}<\frac{3n}{2}$$

$$9n+45<8.\frac{3n}{2}$$

$$9n+45<\frac{8.3n}{2}$$

$$9n+45<\frac{24n}{2}$$

$$9n+45<\frac{24}{2}.n$$

$$9n+45<12.n$$

$$9n+45<12n$$

$$45<12n-9n$$

$$45<3n$$

$$\frac{45}{3}<n$$

$$15 < n$$

$$n > 15$$

Esto quiere decir que para $n > 15$ entero tenemos que entre $n+1$ y $\frac{3n}{2}$ hay, al menos, un número primo p, lo cual implica que existe el número semiprimo par $2p$ entre $2n+1$ y $3n$, de acuerdo con lo explicado anteriormente (recordemos que $2n+1 < 2(n+1)$, ya que $2n+1 < 2n+2$).

Resumiendo, para $n > 15$ entero tenemos que entre $2n+1$ y $3n$ hay, al menos, un número semiprimo par. Y, como vimos anteriormente, para $n > 14$ entero tenemos que entre $3n$ y $4n$ hay, al menos, un número primo. En consecuencia, para $n > 15$ entero tenemos un número semiprimo par entre $2n+1$ y $3n$ y también un número primo entre $3n$ y $4n$ (si $n > 15$, entonces $n > 14$).

A partir de estas afirmaciones podemos decir que para $n > 15$ entero tenemos que entre $2n+1$ y $4n$ hay, al menos, una pareja semiprimo par - primo. De acuerdo con esto, y si tenemos en cuenta que $2n+1 < 4n < 2(2n+1)$, podemos afirmar que entre $2n+1$ y $2(2n+1)$ hay una pareja semiprimo par - primo.

Si $n > 15$, entonces $2n+1 > 2.15+1$, es decir, $2n+1 > 31$. Ahora, $2n+1$ es siempre un número impar, y el doble de $2n+1$ es $2(2n+1) = 4n+2$. Y como ya dijimos, entre $2n+1$ y $2(2n+1)$ hay, por lo menos, una pareja semiprimo par - primo. **De todo esto se deduce que si $n > 31$ es un número impar, entonces entre n y $2n$ existe por lo menos una pareja semiprimo par - primo.**

Hasta ahora podemos afirmar que:

1. Si $n > 28$ es un número par ($n \geq 30$ par), entonces entre n y $2n$ existe por lo menos una pareja semiprimo par - primo.

2. Si $n > 31$ es un número impar ($n \geq 33$ impar), entonces entre n y $2n$ existe por lo menos una pareja semiprimo par - primo.

En el punto 1., el menor valor par de n es 30; en el punto 2., el menor valor impar de n es 33. De estos dos puntos se deduce que si $n > 31$ es un número entero, entonces entre n y $2n$ hay por lo menos una pareja semiprimo par - primo. En una pareja semiprimo par - primo, s es el número semiprimo par y r es el número primo, y se tiene que $s < r$.

Se puede comprobar fácilmente que esto también se cumple para los enteros desde el 3 hasta el 31, es decir, para $3 \leq n \leq 31$:

$3 < 4 < 5 < 2.3 \quad (2.3 = 6)$ (4 es semiprimo par y 5 es primo)

$4 < 6 < 7 < 2.4 \quad (2.4 = 8)$ (6 es semiprimo par y 7 es primo)

$5 < 6 < 7 < 2.5 \quad (2.5 = 10)$ (6 es semiprimo par y 7 es primo)

$6 < 10 < 11 < 2.6 \quad (2.6 = 12)$ (10 es semiprimo par y 11 es primo)

$7 < 10 < 11 < 2.7 \quad (2.7 = 14)$ (10 es semiprimo par y 11 es primo)

$8 < 10 < 11 < 2.8 \quad (2.8 = 16)$ (10 es semiprimo par y 11 es primo)

$9 < 10 < 11 < 2.9 \quad (2.9 = 18)$ (10 es semiprimo par y 11 es primo)

$10 < 14 < 17 < 2.10 \quad (2.10 = 20)$ (14 es semiprimo par y 17 es primo)

$11 < 14 < 17 < 2.11 \quad (2.11 = 22)$ (14 es semiprimo par y 17 es primo)

$12 < 14 < 17 < 2.12 \quad (2.12 = 24)$ (14 es semiprimo par y 17 es primo)

$13 < 14 < 17 < 2.13 \quad (2.13 = 26)$ (14 es semiprimo par y 17 es primo)

$14 < 22 < 23 < 2.14 \quad (2.14 = 28)$ (22 es semiprimo par y 23 es primo)

$15 < 22 < 23 < 2.15 \quad (2.15 = 30)$ (22 es semiprimo par y 23 es primo)

$16 < 22 < 23 < 2.16 \quad (2.16 = 32)$ (22 es semiprimo par y 23 es primo)

$17 < 22 < 23 < 2.17 \quad (2.17 = 34)$ (22 es semiprimo par y 23 es primo)

$18 < 22 < 23 < 2.18 \quad (2.18 = 36)$ (22 es semiprimo par y 23 es primo)

$19 < 22 < 23 < 2.19 \quad (2.19 = 38)$ (22 es semiprimo par y 23 es primo)

$20 < 22 < 23 < 2.20 \quad (2.20 = 40)$ (22 es semiprimo par y 23 es primo)

$21 < 22 < 23 < 2.21 \quad (2.21 = 42)$ (22 es semiprimo par y 23 es primo)

$22 < 26 < 29 < 2.22 \quad (2.22 = 44)$ (26 es semiprimo par y 29 es primo)

$23 < 26 < 29 < 2.23 \quad (2.23 = 46)$ (26 es semiprimo par y 29 es primo)

$24 < 26 < 29 < 2.24 \quad (2.24 = 48)$ (26 es semiprimo par y 29 es primo)

$25 < 26 < 29 < 2.25 \quad (2.25 = 50)$ (26 es semiprimo par y 29 es primo)

$26 < 34 < 37 < 2.26 \quad (2.26 = 52)$ (34 es semiprimo par y 37 es primo)

$27 < 34 < 37 < 2.27 \quad (2.27 = 54)$ (34 es semiprimo par y 37 es primo)

$28 < 34 < 37 < 2.28 \quad (2.28 = 56)$ (34 es semiprimo par y 37 es primo)

$29 < 34 < 37 < 2.29 \quad (2.29 = 58)$ (34 es semiprimo par y 37 es primo)

$30 < 34 < 37 < 2.30 \quad (2.30 = 60)$ (34 es semiprimo par y 37 es primo)

$31 < 34 < 37 < 2.31 \quad (2.31 = 62)$ (34 es semiprimo par y 37 es primo)

Para finalizar, vamos a afirmar lo que ya está demostrado:

Si $n > 2$ es un número entero, entonces entre n y $2n$ hay por lo menos una pareja *semiprimo par - primo*.

A esta verdad ya demostrada la llamaremos ***Teorema 1***. Este teorema también implica que, en general, si $n > 2$ es un número entero, entonces entre n y $2n$ hay por lo menos una pareja *semiprimo - primo*.

Teorema 2

A continuación, vamos a demostrar dos cosas:

1. Si n es un número entero, entonces entre n y $2n$ hay por lo menos una pareja *primo - semiprimo par* cuando $n = 4$, cuando $n = 6$ y cuando $n > 7$.

2. Si n es un número entero, entonces entre n y $2n$ hay por lo menos una pareja *primo - semiprimo* cuando $4 \leq n \leq 6$ y cuando $n > 7$.

Demostración:

Si $n > 14$, entonces entre $\frac{3n}{2}$ y $2n$ hay, al menos, un Intervalo de Breusch, el cual contiene, al menos, un número primo q.

De acuerdo con el gráfico de la pág. 13, q está entre $\frac{3n}{2}$ y $2n$:

$$\frac{3n}{2} < q < 2n$$

Según el gráfico, tenemos que

$$2.\frac{3n}{2} < 2q < 2.2n$$

Dicho de otra forma,

$$3n < 2q < 4n$$

$2q$ es un número semiprimo par.

Esto quiere decir que entre $3n$ y $4n$ hay, al menos, un número semiprimo par.

Ahora, para que entre $2n$ y $3n$ haya al menos un número primo, se tiene que cumplir que entre $2n$ y $3n$ haya por lo menos un Intervalo de Breusch, o sea, se tiene que dar que $\frac{9(2n+1\ +\ 3)}{8} < 3n$:

$$\frac{9(2n+1\ +\ 3)}{8} < 3n$$

$$\frac{9(2n+4)}{8} < 3n$$

$$\frac{9.2n+9.4}{8} < 3n$$

$$\frac{18n+36}{8} < 3n$$

$$18n+36 < 8.3n$$

$$18n + 36 < 24n$$

$$36 < 24n - 18n$$

$$36 < 6n$$

$$\frac{36}{6} < n$$

$$6 < n$$

$$n > 6$$

Si $n > 14$, entonces $n > 6$.

Como entre $2n$ y $3n$ hay al menos un número primo y entre $3n$ y $4n$ hay al menos un número semiprimo par, entonces **para** $n > 14$ **entero tenemos que entre** $2n$ **y** $4n$ **existe, al menos, una pareja primo - semiprimo par. Si** $n > 14$**, entonces** $2n > 2.14$**, es decir,** $2n > 28$**.**

$2n$ (con n entero) es siempre un número par, y el doble de $2n$ es $4n$. Y como ya dijimos, entre $2n$ y $4n$ hay, por lo menos, una pareja primo - semiprimo par.

De todo esto se deduce que si $n > 28$ **es un número par, entonces entre** n **y** $2n$ **existe por lo menos una pareja primo - semiprimo par.** ¿Se puede aplicar este resultado a valores impares de n? La respuesta es que sí, como veremos a continuación.

De acuerdo con el Resultado 1 (pág. 10) y con el Resultado 2 (en la misma página), podemos decir que para $n > 14$ entero tenemos que entre $\frac{3n}{2}$ y $2n$ existe, al menos, un número primo q:

$$\frac{3n}{2} < q < 2n$$

Esto significa que

$$2.\frac{3n}{2} < 2q < 2.2n$$

que es lo mismo que decir que

$$3n < 2q < 4n$$

$2q$ es un número semiprimo par, lo cual implica que existe un número semiprimo par entre $3n$ y $4n$.

Ahora, demostremos cuándo existe un Intervalo de Breusch, y por lo tanto un número primo, entre el número impar $2n+1$ y $3n$. En este caso, tenemos que tener que $\frac{9(2n+1\ +\ 1\ +\ 3)}{8} < 3n$:

$$\frac{9(2n+1\ +\ 1\ +\ 3)}{8} < 3n$$

$$\frac{9(2n+5)}{8} < 3n$$

$$9(2n+5) < 8.3n$$

$$9(2n+5) < 24n$$

$$9.2n + 9.5 < 24n$$

$$18n + 45 < 24n$$

$$45 < 24n - 18n$$

$$45 < 6n$$

$$\frac{45}{6} < n$$

$$7{,}5 < n$$

$$n > 7{,}5$$

Si $n > 14$, entonces $n > 7{,}5$.

Entonces, para $n > 14$ entero tenemos que entre $2n+1$ y $3n$ existe, al menos, un número primo. Si $n > 14$, entonces $2n+1 > 2.14+1$, es decir, $2n+1 > 29$.

$2n+1$ (con n entero) es siempre un número impar, y el doble de $2n+1$ es $2(2n+1) = 4n+2$. Y como ya dijimos, entre $3n$ y $4n$ hay, al menos, un número semiprimo par.

Esto quiere decir que tenemos un número primo entre $2n+1$ y $3n$, y también existe un número semiprimo par entre $3n$ y $4n$ (y es obvio que $4n < 2(2n+1)$, ya que

$4n < 4n+2$). **De todo esto se deduce que si $n > 29$ es un número impar, entonces entre n y $2n$ existe por lo menos una pareja primo - semiprimo par.**

Hasta ahora podemos afirmar que:

1. Si $n > 28$ es un número par ($n \geq 30$ par), entonces entre n y $2n$ existe por lo menos una pareja primo - semiprimo par.

2. Si $n > 29$ es un número impar ($n \geq 31$ impar), entonces entre n y $2n$ existe por lo menos una pareja primo - semiprimo par.

De estos dos puntos se puede deducir perfectamente que si $n > 29$ es un número entero, entonces entre n y $2n$ hay por lo menos una pareja primo - semiprimo par. En un pareja primo - semiprimo par, r es el número primo y s es el número semiprimo par, y se tiene que $r < s$.

Se puede comprobar fácilmente que esto también se cumple para $n = 4$, para $n = 6$ y para los enteros desde el 8 hasta el 29 (es decir, para $8 \leq n \leq 29$):

$4 < 5 < 6 < 2.4 \quad (2.4 = 8)$ (5 es primo y 6 es semiprimo par)

$5 < 7 < 9 < 2.5 \quad (2.5 = 10)$ (7 es primo y 9 es semiprimo impar)

$6 < 7 < 10 < 2.6 \quad (2.6 = 12)$ (7 es primo y 10 es semiprimo par)

$8 < 11 < 14 < 2.8 \quad (2.8 = 16)$ (11 es primo y 14 es semiprimo par)

$9 < 11 < 14 < 2.9 \quad (2.9 = 18)$ (11 es primo y 14 es semiprimo par)

$10 < 11 < 14 < 2.10 \quad (2.10 = 20)$ (11 es primo y 14 es semiprimo par)

$11 < 13 < 14 < 2.11 \quad (2.11 = 22)$ (13 es primo y 14 es semiprimo par)

$12 < 13 < 14 < 2.12 \quad (2.12 = 24)$ (13 es primo y 14 es semiprimo par)

$13 < 17 < 22 < 2.13 \quad (2.13 = 26)$ (17 es primo y 22 es semiprimo par)

$14 < 17 < 22 < 2.14 \quad (2.14 = 28)$ (17 es primo y 22 es semiprimo par)

$15 < 17 < 22 < 2.15 \quad (2.15 = 30)$ (17 es primo y 22 es semiprimo par)

$16 < 17 < 22 < 2.16 \quad (2.16 = 32)$ (17 es primo y 22 es semiprimo par)

$17 < 19 < 22 < 2.17 \quad (2.17 = 34)$ $(19$ es primo y 22 es semiprimo par)

$18 < 19 < 22 < 2.18 \quad (2.18 = 36)$ $(19$ es primo y 22 es semiprimo par)

$19 < 23 < 26 < 2.19 \quad (2.19 = 38)$ $(23$ es primo y 26 es semiprimo par)

$20 < 23 < 26 < 2.20 \quad (2.20 = 40)$ $(23$ es primo y 26 es semiprimo par)

$21 < 23 < 26 < 2.21 \quad (2.21 = 42)$ $(23$ es primo y 26 es semiprimo par)

$22 < 23 < 26 < 2.22 \quad (2.22 = 44)$ $(23$ es primo y 26 es semiprimo par)

$23 < 29 < 34 < 2.23 \quad (2.23 = 46)$ $(29$ es primo y 34 es semiprimo par)

$24 < 29 < 34 < 2.24 \quad (2.24 = 48)$ $(29$ es primo y 34 es semiprimo par)

$25 < 29 < 34 < 2.25 \quad (2.25 = 50)$ $(29$ es primo y 34 es semiprimo par)

$26 < 29 < 34 < 2.26 \quad (2.26 = 52)$ $(29$ es primo y 34 es semiprimo par)

$27 < 29 < 34 < 2.27 \quad (2.27 = 54)$ $(29$ es primo y 34 es semiprimo par)

$28 < 29 < 34 < 2.28 \quad (2.28 = 56)$ $(29$ es primo y 34 es semiprimo par)

$29 < 31 < 34 < 2.29 \quad (2.29 = 58)$ $(31$ es primo y 34 es semiprimo par)

En resumen, si n es un número entero, entonces entre n y $2n$ hay por lo menos una pareja *primo - semiprimo par* cuando $n = 4$, cuando $n = 6$, cuando $8 \leq n \leq 29$ y cuando $n > 29$, lo que implica que entre n y $2n$ hay por lo menos una pareja *primo - semiprimo par* cuando $n = 4$, cuando $n = 6$ y cuando $n > 7$.

También queda demostrado, mediante las explicaciones y datos anteriores, que, en general, cuando $4 \leq n \leq 6$, cuando $8 \leq n \leq 29$ y cuando $n > 29$ se tiene que entre n y $2n$ hay, al menos, una pareja *primo - semiprimo*. De esto se deduce que cuando $4 \leq n \leq 6$ y cuando $n > 7$ tenemos que entre n y $2n$ hay, al menos, una pareja *primo - semiprimo*.

Para finalizar, vamos a afirmar lo que ya está demostrado:

1. Si n es un número entero, entonces entre n y $2n$ hay por lo menos una pareja *primo - semiprimo par* cuando $n=4$, cuando $n=6$ y cuando $n>7$.

2. Si n es un número entero, entonces entre n y $2n$ hay por lo menos una pareja *primo - semiprimo* cuando $4 \leq n \leq 6$ y cuando $n>7$.

Estos dos puntos conforman un teorema al que llamaremos ***Teorema 2***.

Los números primos de Sophie Germain son infinitos

Habíamos dicho que demostrar que existen infinitos números primos de Sophie Germain equivale a demostrar que existen infinitos números primos de la forma $2p+1$ con p primo, por lo que a continuación vamos a demostrar que existen infinitos números primos de la forma $2p+1$.

Obviamente, un número primo de la forma $2p+1$ se obtiene sumándole 1 a un número semiprimo par $2p$, lo cual significa que un número primo de la forma $2p+1$ "está pegado" a un número semiprimo par. Llamaremos q a un número primo de la forma $2p+1$, es decir, $q=2p+1$.

p es un número primo de Sophie Germain

$$\ldots \quad q-2, \quad \underbrace{2p}_{=q-1}, \quad q, \quad q+1, \quad q+2, \quad \ldots$$

q es un número primo de la forma $2p+1$ (se tiene que $q=2p+1$)

Los números $2p$ y q conforman una pareja semiprimo par - primo. La diferencia entre estos dos números es igual a 1, ya que $q-2p=1$. Decimos, entonces, que los números $2p$ y q conforman una pareja semiprimo par - primo de orden $k=1$. Esto es porque k es la diferencia entre los dos números mencionados.

De acuerdo con lo anterior, un número primo de la forma $2p+1$ es el número primo en una pareja semiprimo par - primo de orden $k=1$. Probar que existen infinitos números primos de la forma $2p+1$ demuestra que existen infinitos números primos de Sophie Germain (como ya fue explicado anteriormente), y demostrar que existen infinitos números primos de la forma $2p+1$ equivale a demostrar que existen infinitas parejas semiprimo par - primo de orden $k=1$. En consecuencia, demostrar que existen infinitos números primos de Sophie Germain equivale a demostrar que existen infinitas parejas semiprimo par - primo de orden $k=1$.

El caso de una pareja semiprimo par - primo de orden $k=1$ corresponde a los números primos de la forma $2p+1$, pero también podemos definir parejas semiprimo par - primo de orden $k=3$, de orden $k=5$, de orden $k=7$, de orden $k=9$, etc. En general, podemos definir parejas semiprimo par - primo de orden i, pudiendo ser i un número natural impar cualquiera. La razón por la que i es impar es que la diferencia entre un número par y un número primo impar (es decir, un número primo mayor que 2) es siempre un número impar.

Demostración de la infinitud de primos de Sophie Germain

En el documento ***PRIMOS GEMELOS, DEMOSTRACIÓN KMELLIZA***, de **Carlos Giraldo Ospina (Lic. Matemáticas, USC, Cali, Colombia)**, el autor demuestra la existencia de infinitas parejas de números primos gemelos (números primos cuya diferencia es 2) probando que existen infinitas parejas de números primos *kmellizos*, es decir, que existen infinitas parejas de números primos cuya diferencia entre ellos es k, pudiendo ser k un número natural par cualquiera. Esta tarea se lleva a cabo por dicho autor mediante una sencilla demostración por reducción al absurdo, probablemente inesperada por la mayoría de los matemáticos, y de un razonamiento excelente.

El autor del mencionado documento prueba que existen infinitas parejas de números primos cuya diferencia es 2, infinitas parejas de números primos cuya diferencia es 4, infinitas parejas de números primos cuya diferencia es 6, etc. En general, demuestra que si k es un número natural par cualquiera, entonces existen infinitas parejas de números primos cuya diferencia entre ellos es k.

Aplicando este mismo razonamiento, procederemos a demostrar la existencia de infinitas parejas semiprimo par - primo de cualquier orden k, siendo k un número natural ***impar*** cualquiera. De acuerdo con el ***Teorema 1***, consideraremos el conjunto de los números naturales mayores que 2, es decir, los números naturales desde el 3 hasta el infinito. A este conjunto lo denominaremos ***Conjunto A***.

Nota: Es muy importante dejar en claro que de ahora en adelante k será siempre natural impar.

1. Supongamos que en el Conjunto A no existen parejas semiprimo par - primo de orden $k<u$ a partir de $n=u$ (los números n y u son números enteros que pertenecen al Conjunto A).

2. Entre u y $2u$, $n=u$ hay por lo menos una pareja semiprimo par - primo, de acuerdo con el ***Teorema 1***.

3. La diferencia entre dos números enteros ubicados entre u y $2u$ es $k<u$.

4. Entre u y $2u$, $n=u$ (y, por lo tanto, en el intervalo $[u,2u]$) hay por lo menos una pareja semiprimo par - primo de orden $k<u$, según 2. y 3.

5. En el Conjunto A, a partir de $n=u$ existe, al menos, una pareja semiprimo par - primo de orden $k<u$, según 4.

6. La conclusión del punto 5. contradice la suposición 1.

7. Por lo tanto, ninguna clase de pareja semiprimo par - primo de ningún orden k natural impar puede ser finita, según 6.

Esto quiere decir que existen infinitos números primos de la forma $2p+1$ con p primo, infinitos números primos de la forma $2p+3$ con p primo, infinitos números primos de la forma $2p+5$ con p primo, infinitos números primos de la forma $2p+7$ con p primo, etc. Como existen infinitos números primos de la forma $2p+1$ con p primo, entonces existen infinitos números primos de Sophie Germain, de acuerdo con explicaciones anteriores.

En resumen, para todo número natural impar i se cumple que hay infinitos números primos de la forma $2p+i$ con p primo (cambiamos la notación de k a i por cuestiones de comodidad).

Aplicando un método idéntico al anterior, procederemos a demostrar otro teorema interesante. De acuerdo con el ***Teorema 2***, consideraremos el conjunto de los números naturales mayores que 7, es decir, los números naturales desde el 8 hasta el infinito. A este conjunto lo denominaremos ***Conjunto B***.

1. Supongamos que en el Conjunto B no existen parejas primo - semiprimo par de orden $k<u$ a partir de $n=u$ (los números n y u son números enteros que pertenecen al Conjunto B).

2. Entre u y $2u$, $n=u$ hay por lo menos una pareja primo - semiprimo par, de acuerdo con el ***Teorema 2***.

3. La diferencia entre dos números enteros ubicados entre u y $2u$ es $k<u$.

4. Entre u y $2u$, $n=u$ (y, por lo tanto, en el intervalo $[u,2u]$) hay por lo menos una pareja primo - semiprimo par de orden $k<u$, según 2. y 3.

5. En el Conjunto B, a partir de $n=u$ existe, al menos, una pareja primo - semiprimo par de orden $k<u$, según 4.

6. La conclusión del punto 5. contradice la suposición 1.

7. Por lo tanto, ninguna clase de pareja primo - semiprimo par de ningún orden k natural impar puede ser finita, según 6.

Esto quiere decir que existen infinitos números primos z tales que $z+1$ es un número semiprimo par, infinitos números primos z tales que $z+3$ es un número semiprimo par, infinitos números primos z tales que $z+5$ es un número semiprimo par, infinitos números primos z tales que $z+7$ es un número semiprimo par, etc.

En resumen, para todo número natural impar i se cumple que hay infinitos números primos z tales que $z+i$ es un número semiprimo par. Este enunciado equivale a decir que para todo número natural impar i se cumple que existen infinitos números semiprimos pares $2p$ tales que $2p-i$ es un número primo. Esto es lo mismo que decir que para todo número natural impar i existen infinitos números primos de la forma $2p-i$ con p primo.

Conclusión

Como conclusión de este trabajo, quedan demostrados los siguientes teoremas (además de los teoremas que se demostraron durante el desarrollo del mismo):

> Si i es un número natural impar cualquiera, entonces existen infinitos números primos de la forma $2p-i$ con p primo.

Si i es un número natural impar cualquiera, entonces existen infinitos números primos de la forma $2p+i$ con p primo.

==================0===================

Contacto: germanpaz_ar@hotmail.com

Véase también: *Números primos, fórmula precisa* (trabajo original: *Cálculo de la cantidad de números primos que hay por debajo de un número dado*)