

Moto: "Unei teoreme i se poate imputa că ar fi falsă dar nu i se poate permite să fie sterilă"

Grigore C. Moisil

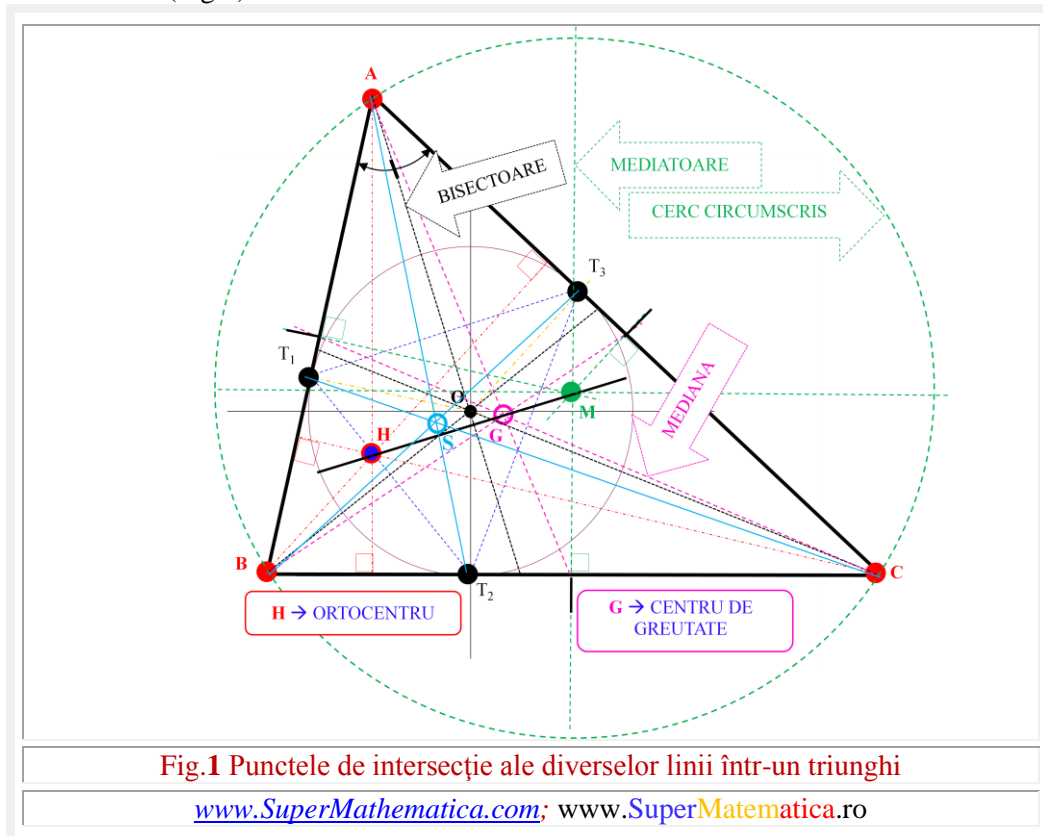
"Un om ca oricare altul", pag. 287

NOI LINII CONCURENTE ȘI UN NOU PUNCT DE INTERSECȚIE ÎNTR-UN TRIUNGHI

Mircea Eugen Șelariu

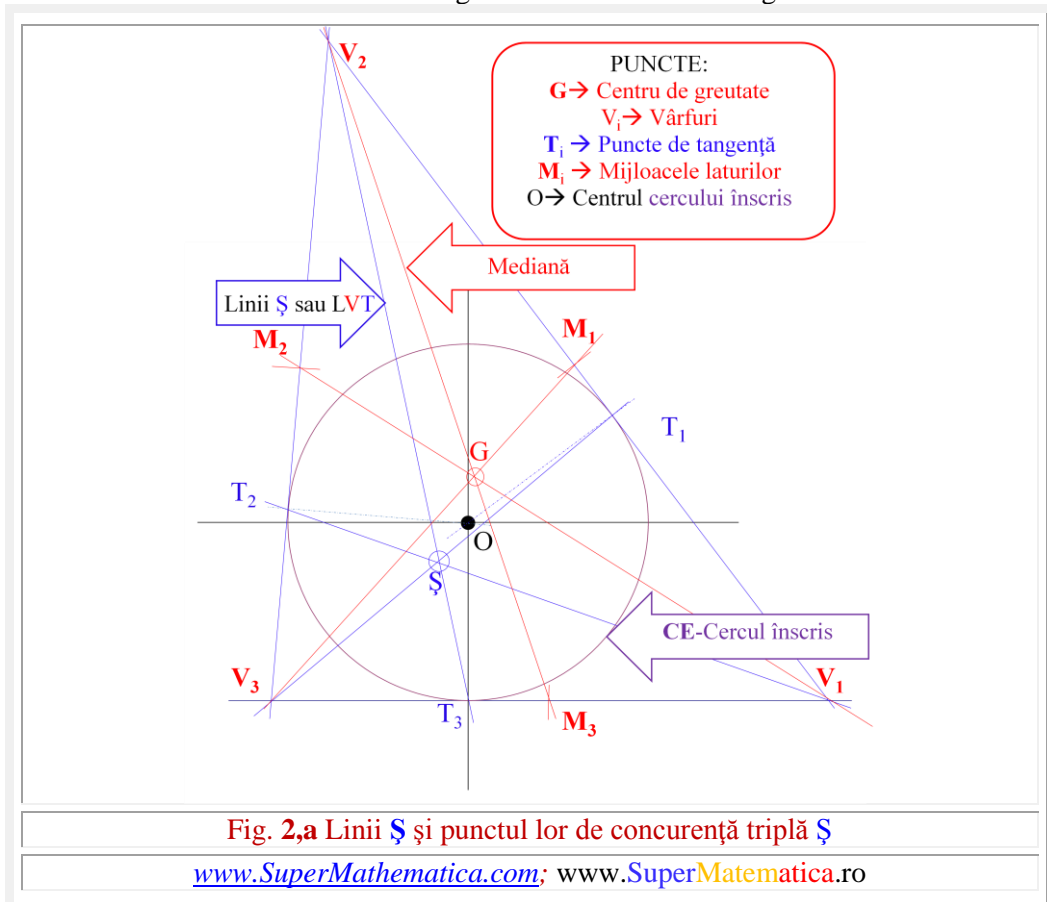
0. INTRODUCERE

În matematică, sunt cunoscute 4 teoreme referitoare la drepte și puncte remarcabile într-un triunghi, sau 4 teoreme referitoare la concurența liniilor remarcabile într-un triunghi și, în acest cadru, sunt cunoscute 4 puncte de intersecție remarcabile a câte 3 linii într-un triunghi (**G**, **H**, **M** și **O**) și 4 tipuri de linii remarcabile într-un triunghi oarecare / scalen ascuțitunghic: **mediatoarele**, **înălțimile**, **medianele** și **bisectoarele** (Fig.1).



Liniile și punctele cunoscute ca remarcabile sunt:

- 1) **Mediatoarele** laturilor unui triunghi, care se intersectează în punctul **M (Mittelpunkt)**, care este **centrul cercului circumscris** triunghiului;
- 2) **Înălțimile** triunghiului care sunt concurente în punctul **H (Höhe, Height)** denumit **ortocentru**;
- 3) **Mediane** triunghiului care sunt concurente în punctul **G**, care este **centrul de greutate** al triunghiului.
- 4) **Bisectoarele** unui triunghi, care sunt concurente în punctul **O**, care este **centrul cercului înscris** sau **înscris** în triunghi.



Totodată, s-a marcat, în figura 1, coliniaritatea punctelor **H**, **G**, **M** aparținând dreptei lui **Euler**, în conformitate cu teorema lui **Euler** a coliniarității acestor 3 puncte.

În figura 1 sunt prezentate cele 4 tipuri de linii și punctele remarcabile și cunoscute, împreună cu al 5-lea punct de concurență Ș al liniilor ce unesc câte un vârf **V_i** sau **A**, **B**, **C** al triunghiului scalen acutunghic cu câte un punct de tangență **T_i** ($i = 1, 2, 3$) al cercului înscris în triunghi.

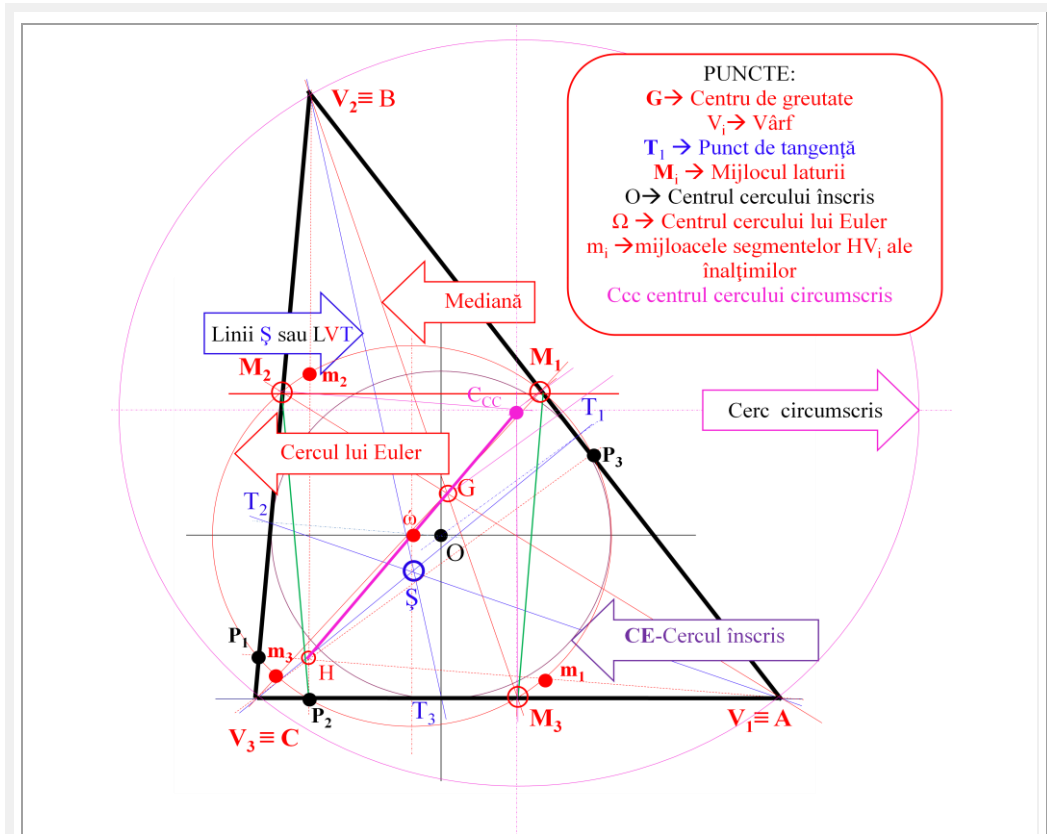
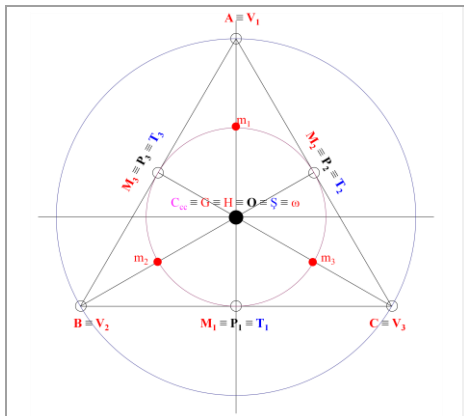
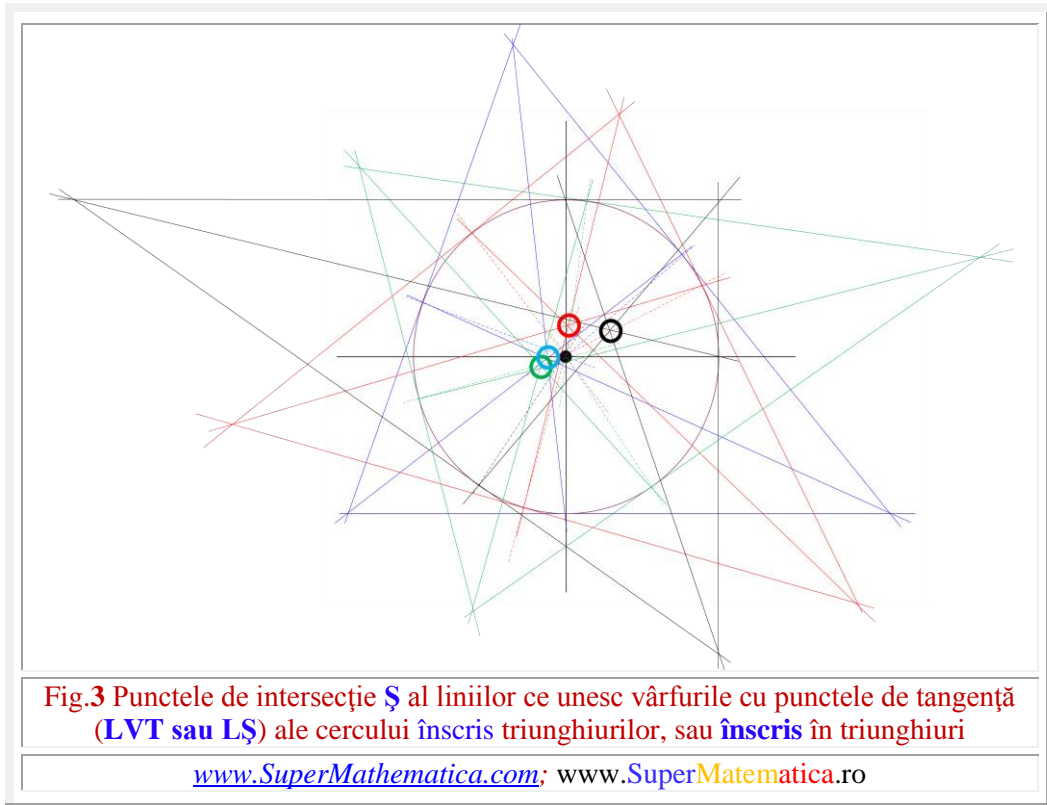


Fig. 2,b Linii Ψ și punct Ψ , precum și dreapta și cercul lui Euler



TRIGON REGULAT SAU
TRIUNGHI ECHILATERAL
PUNCTE INIȚIALE:
 V_i sau $A, B, C \rightarrow$ Vârfuri
 $M_i \equiv P_i \equiv T_i \neq m_i$
CERCURILE
 Cercurile lui Euler \equiv Cercul înscris
 Cercul circumscribit triunghiului
PUNCTE REMARCABILE:
 $C_{cc} \equiv G \equiv H \equiv O \equiv \Psi \equiv \omega$

Fig. 2,c Linii și puncte confundate, în cazul trigonului regulat / (TRIUNGHI ECHILATERAL)



În figura 2,b au fost reprezentate, în plus:

- **cercul celor 9 puncte**, sau **cercul lui Euler**. Se observă din figură că, cercul lui Euler taie în două segmentele HV_i în punctele m_i , conține punctele M_i , mijloacele laturilor trigonului și picioarele P_i ale înălțimilor triunghiului;
- **cercul circumscris** triunghiului cu centrul în punctul $C_{cc} \equiv M$;
- **dreapta lui Euler**, care trece prin ortocentrul H , centrul de greutate G și centrul cercului circumscris $C_{cc} \equiv M$.
- **trapezul isoscel** $M_1M_2P_2M_3$.

Teorema lui Euler stipulează că mijloacele laturilor unui triunghi M_i , picioarele înălțimilor P_i și mijloacele segmentelor formate de ortocentru cu vârfurile triunghiului m_i sunt 9 puncte conciclice (Fig. 2,b).

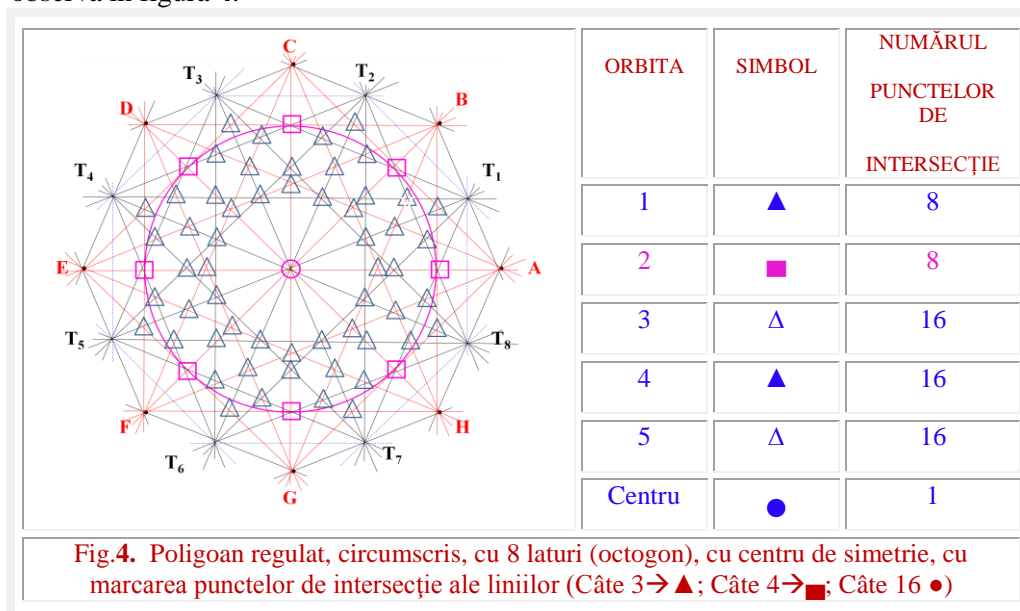
Figura 2,c este destinată triunghiului echilateral, pentru a releva deosebirile esențiale care există în cazul poligoanelor regulate față de cele neregulate. Aici, toate punctele de concurență ale liniilor se confundă în centrul cercului înscris și circumscris ale triunghiului și o serie de linii, ca înălțimile, medianele, mediatoarele sunt de asemenea confundate, ca și punctele M_i , P_i și T_i și punctele remarcabile $C_{cc} \equiv G \equiv H \equiv O \equiv S \equiv \omega$. Singurele puncte distincte sunt cele 3 puncte m_i , de intersecție ale cercului Euler, acum confundat cu cercul înscris, cu înălțimile triunghiului echilateral.

Rezultă, în consecință, că raza cercului înscris și al cercului lui **Euler** este jumătate din raza cercului circumscris triunghiului echilateral, întrucât centrele **G** și **O** sunt confundate în **O**.

În figura 3 sunt prezentate 4 triunghiuri ascuțitunghice, marcate color diferit, având același cerc înscris triunghiurilor, precum și punctele lor **S** de concurență / intersecție, în fiecare caz în parte, ale liniilor **S** ale triunghiurilor.

2. LINII ȘI PUNCTE REMARCABILE ÎN POLIGOANE

Cele expuse anterior sunt adevărate doar pentru poligonul regulat cu 3 laturi, pentru că, odată cu creșterea numărului laturilor poligoanelor, apar o serie de puncte de intersecție / concurență ale unui număr din ce în ce mai mare de linii, așa cum se poate observa în figura 4.



Nu numai în trigon, ci în toate poligoanele inscriptibile există cel puțin un punct în care se intersectează cel puțin 3 linii. Aceasta este afirmația teoremei profesorului dr. math. **Florentin Smarandache** ([1], [2], [3], și <http://www.scribd.com/doc/28325583/A-Smarandache-Concurrent-Lines-Theorem>) șeful Departamentului de Matematică de la Universitatea New Mexico Gallup USA.

Liniile la care se referă teorema **Smarandache** sunt:

- liniile ce unesc între ele vârfurile poligonului (cu excepția vârfurilor proxime / adiacente care formează / unesc laturile poligonului), denumite **diagonale** sau **liniile vârfurilor** și abreviate **LV**, linii care nu există într-un trigon, în care se confundă cu laturile triunghiului;

- liniile ce unesc punctele de tangență ale poligonului cu cercul înscris în poligon, denumite **liniile punctelor de tangență** sau linii **Smarandache**, deoarece ele au fost considerate cu ocazia enunțării teoremei liniilor concurente a lui **Smarandache** și abreviate **LPT** sau **LSm**.

În această lucrare, sunt prezentate noi linii de intersecție, dintre câte un vârf V_i și câte un punct de tangență T_i , denumite **linii șeim** (În limba engleză **sham**: prefăcut \rightarrow linii **pre - făcute**, simulate, fictive, împrumutate) abreviate **LȘ**, concurente într-un triunghi, linii posibil remarcabile în viitor, ca și cel de al **5-lea** punct de intersecție / concurență **Ș** al acestora (Fig.3,a).

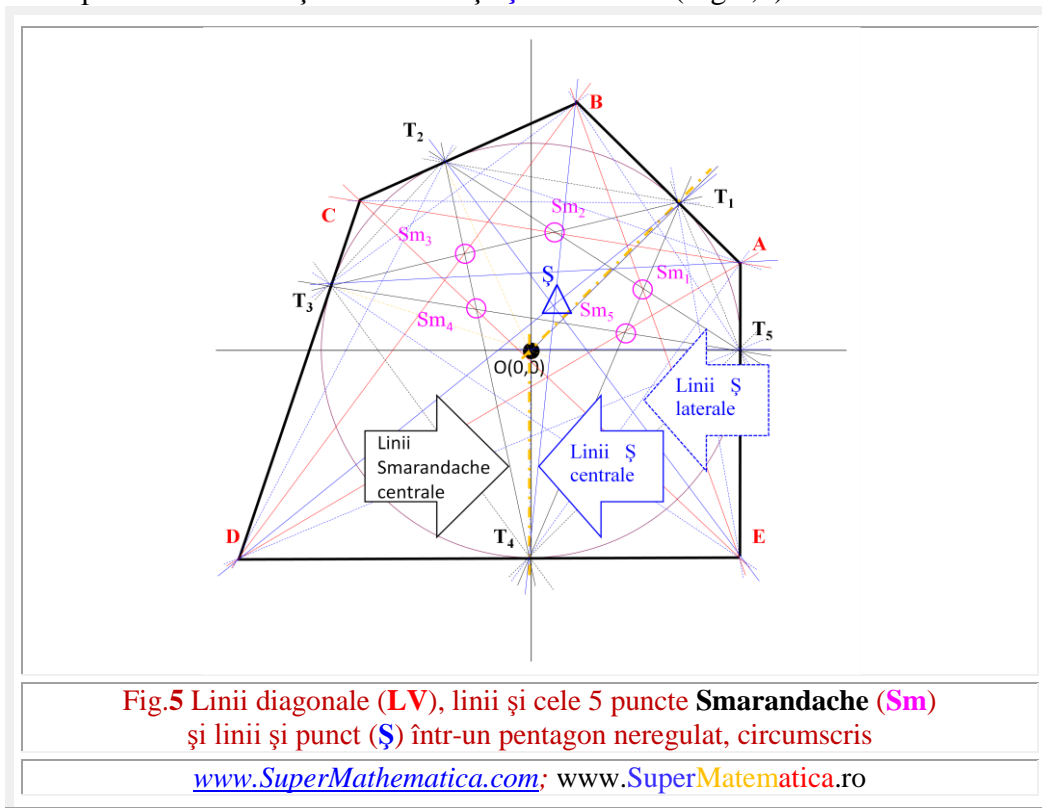


Fig.5 Liniile diagonale (LV), liniile și cele 5 puncte Smarandache (Sm) și linii și punct (Ș) într-un pentagon neregulat, circumscris

www.SuperMathematica.com; www.SuperMatematica.ro

În această figură 4, nu sunt reprezentate decât diagonalele octogonului (LV) și liniile Smarandache LSm sau LPT, pentru ca figura să rămână cât de cât descifrabilă, cu liniile și punctele din teorema lui Smarandache cât mai lizibile.

Pe lângă cele 56 de puncte de intersecție a câte 3 linii, denumite linii Smarandache, marcate cu un triunghi (Δ), sunt prezentate și punctele de intersecție a câte 4 linii, puncte notate cu un pătrat (\square).

În centrul desenului se află un unic punct de intersecție al tuturor celor 16 linii: 8 diagonale (LV) și 8 linii Smarandache (LPT), care este centrul de simetrie al octogonului regulat.

În figurile anterioare (Fig.1, Fig.2, Fig.3), nu au fost reprezentate liniile (**LSm** \equiv **LPT**) și punctele (**Sm**) **Smarandache**, pentru că, în lipsa diagonalelor (**LD**) într-un triunghi, sau a liniilor vârfurilor (**LV**), aceste puncte **Sm** nu există.

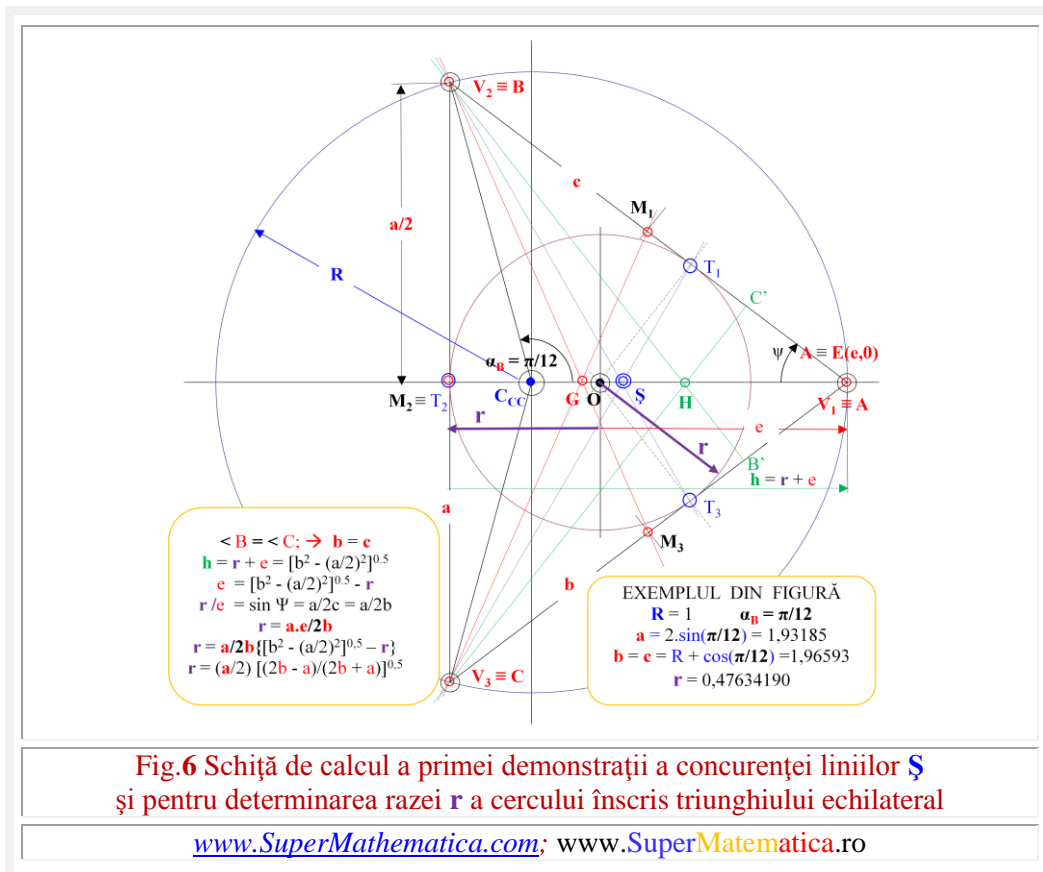
Pentagonul neregulat, inscriptibil, din figura 5, are reprezentate diagonalele (**LV**), liniile (**—LSm**) și punctele (**⊙Sm**) **Smarandache**, precum și liniile (**—**) și punctul (**⊙**) \S .

3. DEMONSTRAREA CONCURENȚEI LINIILOR \S ÎNTR-UN TRIUNGHII ECHILATERAL

3.1 PRIMA DEMONSTRĂȚIE

Fie triunghiul isoscel **ABC** de laturi **a,b,c**, unde s-a ales **b = c** (Fig.6).

Triunghiul isoscel este o figură cu axă de simetrie, în care una dintre înălțimile triunghiului este și axă de simetrie. În cazul din figura 1, axa de simetrie a fost aleasă chiar axa Ox și înălțimea din A a triunghiului echilateral, perpendiculară pe baza **BC**.



În consecință, toate punctele reprezentative ale triunghiului (**Ccc**, **H**, **O**, **G**, ω) ca și \S , precum și **m₂**, **M₂**, **P₂**, **A** \equiv **V₁** \equiv **E** și **T₂** sunt situate / conținute pe această axă.

Ca urmare, toate ordonatele y ale acestor puncte sunt nule, iar ordonatele punctelor \mathbf{m}_3 , $\mathbf{M}_1\text{-}\mathbf{M}_3$, $\mathbf{P}_1\text{-}\mathbf{P}_3$ și $\mathbf{V}_1\text{-}\mathbf{V}_3$ sunt egale și de semne opuse.

Din cele anterior expuse, rezultă că una din dreptele \mathfrak{S} , notată \mathfrak{S}_2 , se confundă cu axa x , și va avea coeficientul unghiular al acestei drepte $\mathbf{m}_2 = \mathbf{0}$ și, în consecință, va avea ecuația

$$(1) \quad \mathfrak{S}_2 : y = 0.$$

Cele 4 puncte, care determină, două câte două, celelalte două drepte \mathfrak{S} sunt definite de punctele $\mathfrak{S}_1 : \mathbf{C}\mathbf{T}_1$ și, respectiv, $\mathfrak{S}_3 : \mathbf{B}\mathbf{T}_3$, iar punctele lor au abscisele egale și ordonatele egale și de semne contrare.

$$(2) \quad \mathbf{T}_1 \text{ și } \mathbf{T}_3 \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_3 = r \cdot \sin\psi \rightarrow x_{1,3} = x' = \frac{r^2}{e} \\ y_3 = -y_1 = \pm r \cdot \cos\psi \rightarrow y_{1,3} = \pm y' = \pm \frac{r}{e} \sqrt{e^2 - r^2}; \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \mathbf{C} \text{ și } \mathbf{B} \left\{ \begin{array}{l} x_c = x_b = -r \rightarrow x_{C,B} = -x'' = -r \\ y_B = -y_C = \pm \frac{a}{2} \rightarrow y_{B,C} \pm y'' = \pm \frac{a}{2} \end{array} \right.$$

relații în care s-a ales punctul \mathbf{O} , centrul cercului înscris ca origine a unui sistem cartezian drept \mathbf{xOy} .

Ca urmare, coeficientul unghiular \mathbf{m}_1 al dreptei \mathfrak{S}_1 , conform figurii 6, va fi pozitiv, iar coeficientul unghiular \mathbf{m}_3 al dreptei \mathfrak{S}_3 va fi de aceeași valoare dar negativ, adică

$$(4) \quad m_1 = -m_3 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} m_{1,3} = \pm \mathbf{m} = \tan\alpha_{1,3} = \tan(\pm \alpha) &= \frac{y_{1,3} - y_{C,B}}{x_{1,3} - x_{1C,B}} = \frac{\pm r \cos\psi \mp \frac{a}{2}}{r \sin\psi - (-r)} = \\ &= \frac{\pm r \frac{\sqrt{e^2 - r^2}}{e} \mp \frac{a}{2}}{r(1 + \frac{r}{e})} = \frac{\pm 2r\sqrt{e^2 - r^2} \mp a}{r(1+r)} = \pm \frac{2r\sqrt{e^2 - r^2} - a}{r(1-r)} \end{aligned}$$

Ecuațiile dreptelor $\mathfrak{S}_{1,3}$ sunt

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}_1 : \mathbf{C}\mathbf{T}_1 : (y - y_1) = \frac{y_C - y_1}{x_C - x_1} (x - x_1) \rightarrow (y - y_1) = m_1 (x - x_1) \\ \mathfrak{S}_3 : \mathbf{B}\mathbf{T}_3 : (y - y_3) = \frac{y_B - y_3}{x_B - x_3} (x - x_3) \rightarrow (y - y_3) = m_3 (x - x_3) \end{array} \right. \text{ sau}$$

$$(6) \quad \mathfrak{S}_{1,3} : [y - (\pm y')] = \pm \mathbf{m} (x - x') \rightarrow (y \mp y') = \pm \mathbf{m} (x - x')$$

Intersectând aceste două drepte între ele rezultă punctul lor de intersecție \mathfrak{S}'

$$(7) \quad \begin{cases} (y - y') = + \mathbf{m} (x - x') \\ (y + y') = - \mathbf{m} (x - x') \end{cases} \rightarrow 2y - 0 = 0 \rightarrow y = 0$$

Prin adunarea ecuațiilor, rezultă ordonata punctului de intersecție \mathfrak{S} , care se știe, cum s-a afirmat anterior, iar acum și rezultă că este nulă

$$(8) \quad 2y - 0 = 0 \rightarrow y = y_{\mathfrak{S}} = \mathbf{0},$$

Prin scăderea ecuațiilor (7) se obține abscisa punctului de intersecție \mathfrak{S}

$$(9) \quad 2(0 - y') = 2\mathbf{m}(x - x') \rightarrow x = \frac{mx' - y'}{\mathbf{m}} = x' - \frac{y'}{\mathbf{m}} \rightarrow$$

$$(10) \quad x = \frac{r^2}{e} - \frac{\pm \frac{r}{e} \sqrt{e^2 - r^2}}{\pm \frac{2r\sqrt{e^2 - r^2} - a}{r(1-r)}} = \frac{r^2}{e} - \frac{\pm r(1-r)\sqrt{e^2 - r^2}}{2r\sqrt{e^2 - r^2} - a}$$

Intersectând pe rând câte o dreapta a sistemului (7) cu dreapta S_2 rezultă din intersecția $S_1 \cup S_2$

$$(11) \quad \begin{cases} (y - y') = +m(x - x') \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x'_{1,2} = \frac{x' - y'}{m}$$

iar din intersecția dreptelor $S_3 \cup S_2$ rezultă

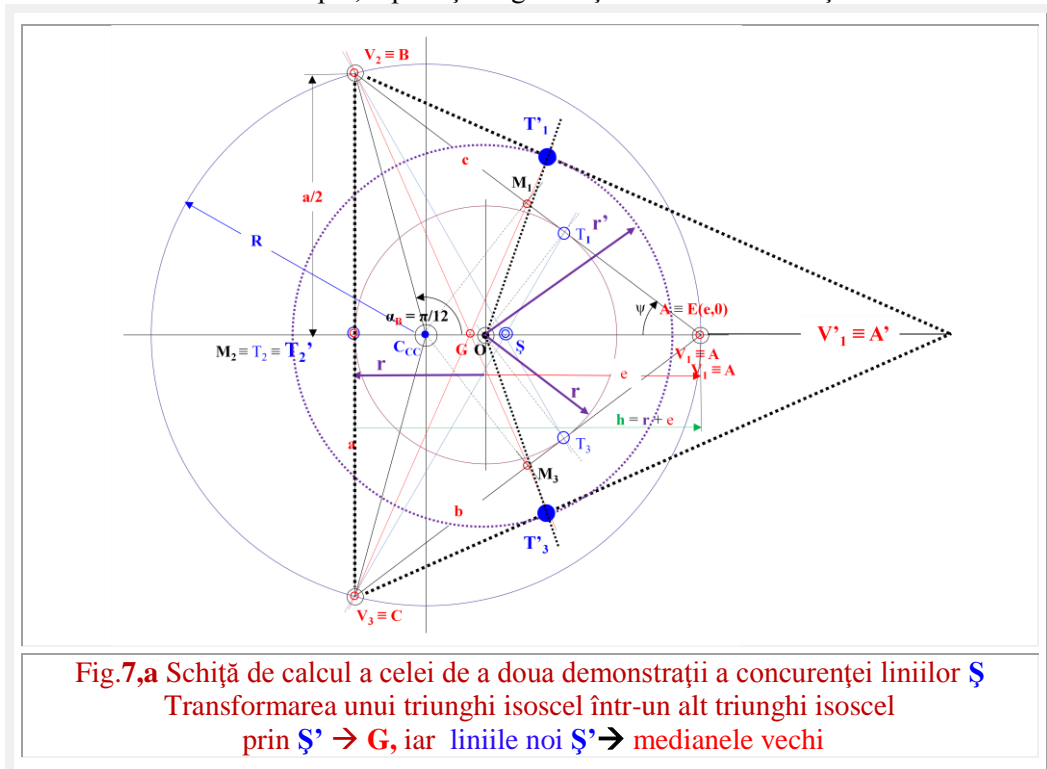
$$(12) \quad \begin{cases} (y + y') = -m(x - x') \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x'_{3,2} = \frac{x' - y'}{m}$$

$\begin{cases} (y - y') = +m(x - x') \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x'_{1,2} = \frac{x' - y'}{m}$	}	$x'_{1,2} = x'_{3,2}$
$\begin{cases} (y + y') = -m(x - x') \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x'_{3,2} = \frac{x' - y'}{m}$		$S\left(\frac{x' - y'}{m}, 0\right)$
www.SuperMathematica.com ; www.SuperMatematica.ro		

Punctele de coordonate ale celor două intersecții fiind aceleași $S\left(\frac{x' - y'}{m}, 0\right)$ rezultă ca cele trei drepte S sunt concurente în același punct $S \rightarrow$ **q.e.d.**

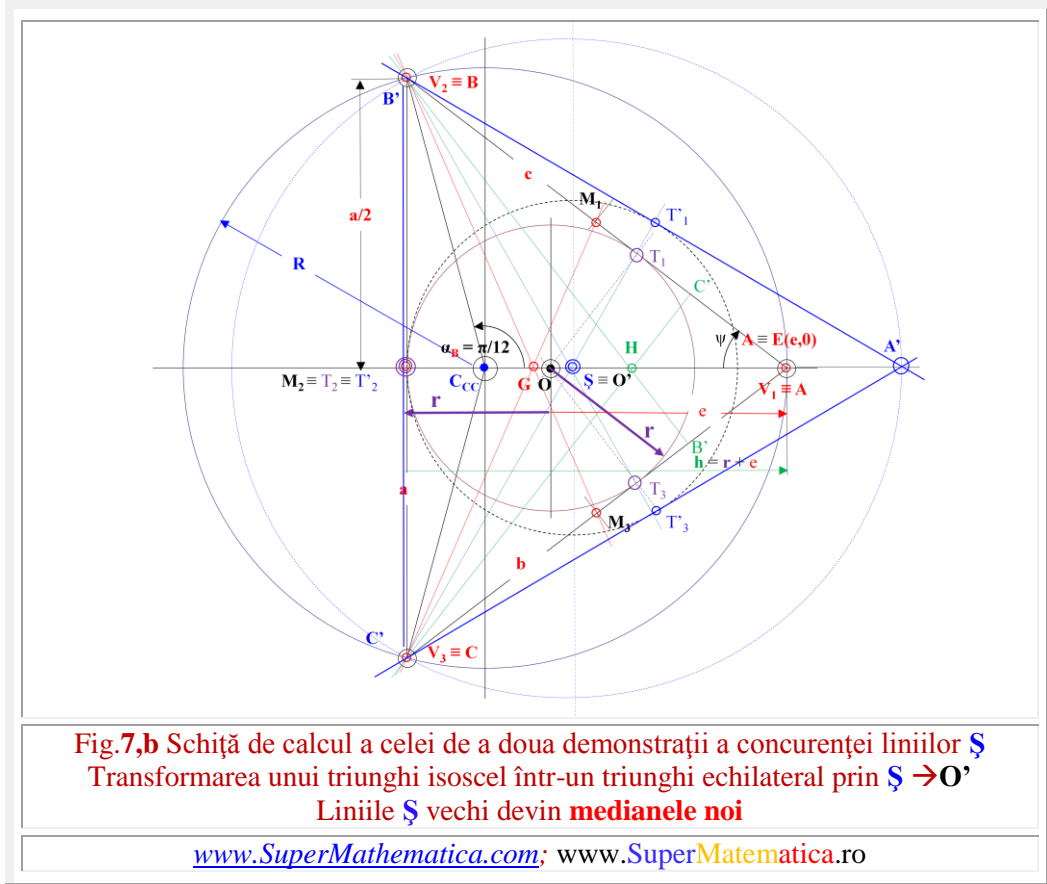
3.2 A DOUA DEMONSTRAȚIE

Este mult mai simplă, rapidă și elegantă. Și nu uzează de relații de calcul.



Pastrând invariante punctele B și C , din figura 6, așa cum se observă în figura

7,a, se deplasează punctul $V_1 \equiv A$ al triunghiului vechi (Fig.6) pe axa x, în sensul $x > 0$, până în punctul $V'_1 \equiv A'$. Până în momentul în care, noile puncte de tangență T'_1 și T'_3 , tangente la noul cerc înscris de raza r' , al noului triunghi isoscel, are noile drepte S'_i suprapuse peste vechile mediane CM_1 și, respectiv, BM_3 .



Adică, până în momentul în care noile normale, în noile punctele de tangență T'_i devin, sau se suprapun peste vechile mediane, ceea ce face ca liniile S noi să se suprapună peste **medianele** triunghiului vechi.

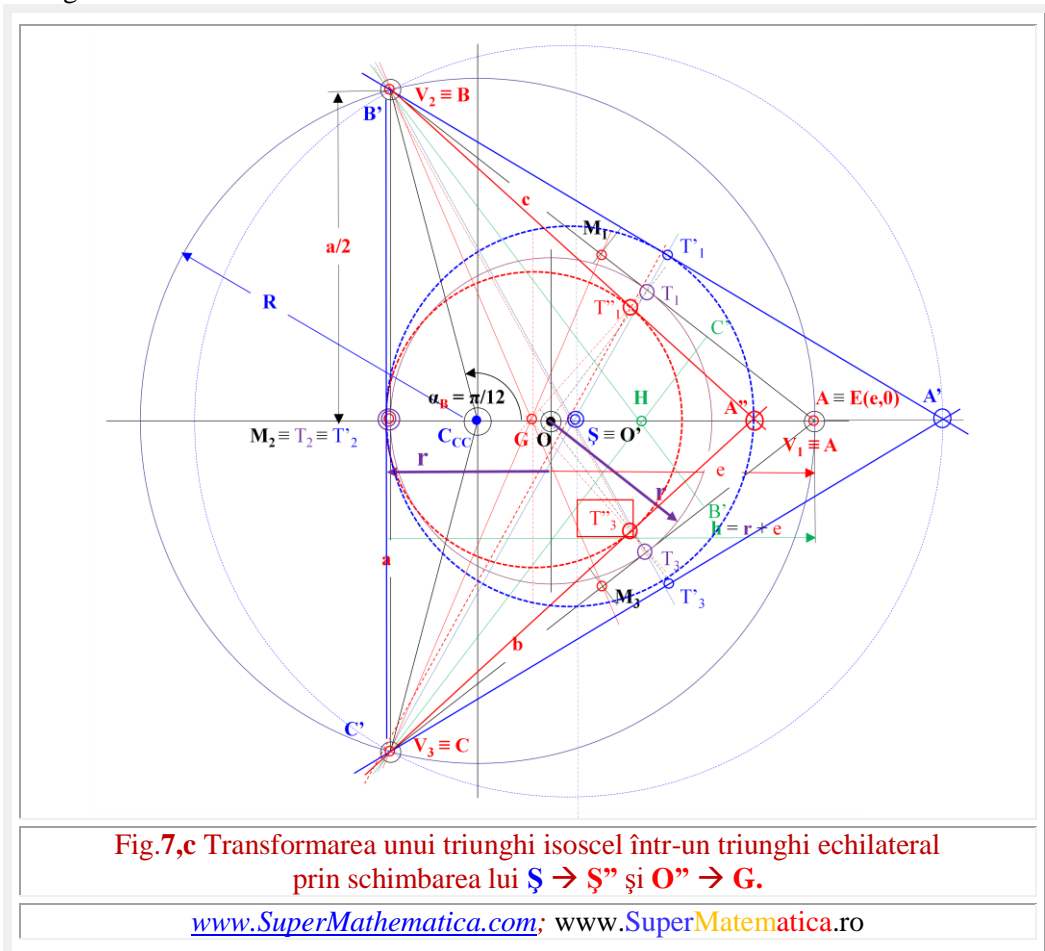
Deoarece noile linii S'_1 și S'_3 coincid cu vechiile mediane CM_1 și, respectiv, BM_3 și, cum acestea se intersectau în centrul de greutate al vechiului triunghi isoscel, în vechiul punct G , rezultă că și noile linii S , ale noului triunghi isoscel, sunt concurente în G care devine noul punct S' . **Q.E.D.**

3.3 A TREIA ȘI A PATRA DEMONSTRAȚIE

Această demonstrație este foarte importantă nu pentru ca e foarte scurtă și intuitivă, ci pentru că e susceptibilă a fi extrapolată la un triunghi oarecare (Fig.8) , în condiții puțin modificate.

Există și o altă posibilitate, ilustrată în figura 7,b. Cercul înscris, de rază r , se mărește continuu cu păstrarea contactului în punctul $M_2 \equiv T_2 \equiv T'_2$ până când noul centru O' se suprapune peste vechiul punctul S .

Din $B \equiv B'$ și din $C \equiv C'$ se duc tangente la noul cerc înscris în noul triunghi isoscel $A'B'C'$ și, la intersecția lor, pe axa Ox , se determină vârful A' al noului triunghi isoscel $A'B'C'$. Deoarece $S \rightarrow O' \rightarrow$ liniile S devin linii **mediane** ale triunghiului vechi.



O altă variantă (Fig.7,c), prin care, din vârfurile B și C s-au dus tangente la cercul cu centrul în G , punctele de tangență cu acesta fiind T''_1 și T''_3 . Este evident că aceste tangente se întretaie / intersectează în punctul A'' de pe axa Ox , iar centrul O'' devine, sau se suprapune peste vechiul punctul G , adică $O'' \rightarrow G$.

Noile linii S vor unii vârfurile inițiale B și C cu noile puncte de tangență T''_1 și T''_3 , astfel că noul punct de concurență S'' va fi situat între centrul O și punctul S ale triunghiului isoscel inițial ABC .

Triunghiul nou rezultat $A''BC$ va fi tot un triunghi isoscel, inclus în triunghiul isoscel inițial ABC .

În figura 7,c s-a păstrat și construcția din figura anterioară 7,b pentru facilitarea comparației.

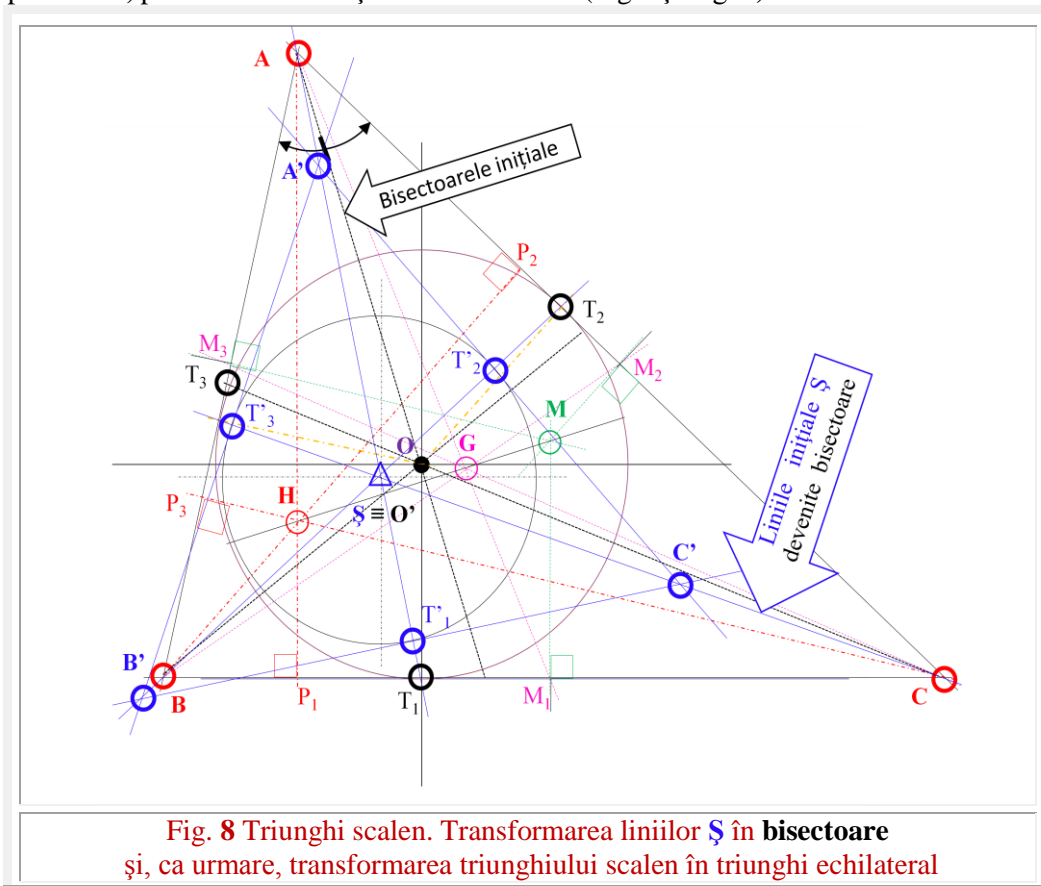
Este evident că se poate construi un cerc $C(H,R)$ cu centrul în punctul H , de intersecție al înălțimilor triunghiului isoscel inițial, tangent la latura BC .

Ducând tangentele din B și din C la $C(H,R)$ se va obține un nou punct de intersecție A_H al acestora, situat pe axa Ox . Va rezulta, astfel, un alt triunghi isoscel $A_H B C$. Și alte linii S care se vor suprapune peste vechiile înălțimi (inițiale) ale triunghiului isoscel și, ca urmare, un alt punct de intersecție al lor $S_H \equiv H$. Ceea ce constituie o a patra demonstrare a concurenței liniilor S într-un triunghi isoscel.

În acest mod au fost elucidate toate cazurile de transformare ale unui triunghi inițial isoscel, prin deplasarea liniilor S și amplasarea punctului S peste alte puncte remarcabile într-un triunghi isoscel.

4.DEMONSTRAREA CONCURENȚEI LINIILOR S ÎNTR-UN TRIUNGHI OARECARE / SCALEN

Se consideră un triunghi scalen ABC , circumscris cercului C cu centrul în punctul O , punct de concurență al bisectoarelor (Fig.1 și Fig. 8).



Se consideră, în acest triunghi inițial ABC și liniile S , care linii S , reamintim, au fost definite ca unind vârfurile V_i (A, B, C) cu punctele de tangență T_i într-un triunghi scalen, ales intenționat același, ca cel din figura 1.

Există un nou triunghi $A'B'C'$, cu centrul în O' , în care este înscris un nou cerc, de rază nedeterminată, ale cărui puncte de tangență T'_i sunt situate pe dreptele S ca și vârfurile noului triunghi (Fig.8).

Rezultă, în consecință, că acest nou triunghi $A'B'C'$ este un triunghi echilateral, deoarece punctele de intersecție ale bisectoarelor cu cercul sunt și puncte de tangență cu cercul înscris în noul triunghi (Fig. 2,c).

Este evident că, în acest caz, dreptele S , vechi, devin bisectoarele noului triunghi. Deoarece bisectoarele, se știe că, sunt concurente în O' , iar $O' \equiv S$, rezultă că S este punct de concurență al liniilor S într-un triunghi oarecare (vechi). **Q.E.D.**

Din cele expuse anterior, rezultă că există o transformare matematică care transformă un triunghi scalen într-un triunghi echilateral. Această transformare se bazează pe existența liniilor și a punctului S , precum și a proprietății acestuia.

5. BIBLIOGRAFIE

1	Smarandache, Fl	Eight Solved and Eight Open Problems in Elementary Geometry	arXiv.org, Cornell University, NY, USA
2	Smarandache, Fl	Problèmes avec et sans... problèmes!	Problem 5.36, p. 54, Somipress, Fés, Morocco, 1983.
3	Khoshnevisan, M.	Smarandache Concurrent Lines Theorem	NeuroIntelligence Center, Australia
4	Șelariu, M. E	FUNȚII CIRCULARE EXCENTRICE ȘI EXTENSIA LOR	Buletin șt. și tehn. al I. P. "TV" Timișoara, Seria Mecanică, Tom. 25(39), Fasc.I, 1980, pag. 189...196
5	Șelariu, M. E	SUPERMATEMATICA. Fundamente. Vol.I	Editura "POLITEHNICA" din Timișoara, 1907

www.Supermatematica.com

www.SuperMatematica.ro

[www. eng.upt.ro/~mselariu](http://www.eng.upt.ro/~mselariu)