

Author name

Giuliano Bettini

Abstract

Electroweak forces acting on TE, TM, TEM.

In a previous paper [1] we showed that the energy impulse four vector of the propagation of electromagnetic fields into a waveguide and in free space can be described by a Dirac spinor ψ .

This suggest an analogy with for example TE-electron, TM-positron and possibly TEM-neutrino.

Aim of this work is an interpretation of the action, if any, of the electroweak gauge group $SU(2)\otimes U(1)$ on the before mentioned e.m. fields (TE, TM, TEM modes). This is based on the following observation: the energy impulse four vector is invariant under a global transformation of $SU(2)\otimes U(1)$, so ψ can be “gauged” in order to verify the effect not only of the electromagnetic force but also of the weak forces.

In other words, what are “weak forces”, if any, on TE, TM and TEM?

Obviously this requires “a modification of the Dirac equation to accomodate the larger gauge group” (Hestenes, [2]).

This is in fact done here, and it is shown that the analogous of the “weak forces” can be roughly interpreted in the following way: the W boson acts as a horn antenna (receiving or transmitting), performing the transformation $TEM \longleftrightarrow TE, TM$, giving or subtracting mass to the field; the Z^0 boson is as a radar target acting on the TEM (neutrinos) with a doppler frequency. Those objects have a mathematical counterpart in gauge fields.

No Higgs boson is needed in the theory.

[1] G. Bettini, “Algebra di Clifford ed equazione di Dirac per i campi in guida”, available in vixra.

[2] D. Hestenes, “Clifford Algebra and the interpretation of quantum mechanics”, in “Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics”, NATO ASI Series, Reidel (1986)

TE, TM, TEM e interazioni elettrodeboli

Introduzione e sommario

Ciò di cui intendo occuparmi qui (salvo suggestive digressioni) non è la fisica delle particelle e annessi e connessi, ma è la descrizione della propagazione di un qualsivoglia campo elettromagnetico tramite il suo quadrivettore energia e impulso totali.

Riferimenti utili (elettromagnetismo, Algebra di Clifford etc.) sono in [1]..... [7], e sulla teoria dell'elettrone in [8] [14].

Credo di avere ben dimostrato in [15] “Algebra di Clifford ed equazione di Dirac per i campi in guida” che la usuale descrizione con V ed I dei campi in guida ripropone la equazione di Dirac. Inversamente, ho dimostrato che l'equazione di Dirac prevede (e distingue) i campi TE e i campi TM e ne descrive la polarizzazione. Come sottoprodotto, ovviamente, sono compresi nella stessa descrizione i TEM.

Evitando considerazioni come direbbe Bohm “ontologiche”, da un punto di vista epistemologico ciò che abbiamo di fronte e possiamo studiare è quantomeno una completa analogia formale. Abbiamo cioè una equazione di Dirac che ammette campi TE e TM, ciascuno con polarizzazioni eventualmente opposte, e idem con campi TEM alla velocità della luce. L'analogia formale è con elettroni positroni e neutrini. Ho “visualizzato” la massa m con la frequenza di taglio di una guida che ammetta i campi TE e TM che in essa si propagano. Ho infine “visualizzato” l'azione e l'effetto di un campo di gauge generato da $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i\varphi(t)}$ (ossia un potenziale elettrico), con una variazione di dimensione della guida.

Esiste a questo punto una estensione dell'analisi che non può che incuriosire, e che è per definizione un problema da ingegnere elettronico, alla portata di un ingegnere elettronico. Accade quanto segue:

1°) il gruppo che lascia invariato il quadrivettore energia e impulso totali del campo elettromagnetico non è solo l'“electromagnetic gauge group” $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i\varphi}$ (Hestenes) ma è il gruppo $SU(2) \otimes U(1)$;

2°) la applicazione di una trasformazione $SU(2) \otimes U(1)$ locale è in fisica il modo con cui si produce e si descrive la “unificazione fra le forze elettromagnetiche e le forze elettrodeboli”.

Orbene per farla breve non si può essere soddisfatti finché non si sia visualizzato l'effetto di una trasformazione $SU(2) \otimes U(1)$ locale sul campo elettromagnetico ovvero l'effetto delle “forze elettrodeboli” (if any) sui campi TE TM e TEM.

Le due principali difficoltà sono le seguenti.

Primo: la difficoltà di una equazione di Dirac che accetti il gruppo $e^{T_{j\beta} + ij\nu - i\Phi + j\rho}$ ovvero il gruppo $SU(2) \otimes U(1)$ con esponenziali da destra come trasformazione globale. Ciò è necessario per introdurre campi di gauge di $SU(2) \otimes U(1)$.

Secondo: la difficoltà di poter esprimere matematicamente il passaggio dalla velocità della luce (ovvero TEM) a velocità v (ovvero TE TM) e viceversa, ovvero “dotare di massa un TEM”, che potrei anche chiamare “la difficoltà della particella di Higgs”.

La forza debole

Ho più volte espresso l'idea che la azione di oggetti fisici su un segnale incidente potesse essere interpretabile come la azione delle forze elettrodeboli, ovvero la azione delle particelle γ Z^0 e W , rendendole così "fisicamente visibili".

Per quanto riguarda la forza elettromagnetica, di cui è responsabile la particella γ "fotone", ho già dato in [15] una interpretazione in termini di campi TE e TM in guida d'onda.

Ho tentato più volte ma mi è sembrato praticamente impossibile visualizzare la azione delle particelle Z^0 e W , assimilandola alla azione di oggetti operanti in modo acconcio sui TE TM TEM.

Teniamo per un attimo in mente la analogia "elettrone" \longleftrightarrow "segnale elettromagnetico", oppure se vogliamo la analogia "metodi della meccanica quantistica" \longleftrightarrow "elettromagnetismo e radar".

La deviazione o il rallentamento o accelerazione di un segnale in guida ([15]) trovano la corrispondenza in fisica ovvero in meccanica quantistica con la cosiddetta "forza e.m." o "interazione e.m.". Questa forza è esercitata dalla particella fotone, portatore della "forza e.m."

Le particelle W e Z^0 portatrici della "forza debole" dovrebbero trovare la loro interpretazione nella azione di un bersaglio radar, o di un ostacolo in guida, o simili. È possibile sostenere questo punto di vista?

Si può visualizzare la azione di un oggetto su un segnale elettromagnetico incidente per arrivare a dire: "ecco, questa è la azione della particella Z^0 " oppure "questo è come la azione della particella W "?

Ora mi sembra che questo sia possibile.

Intendo mostrare che esistono oggetti fisici che operano sui TE TM e TEM analogamente all'azione delle particelle Z^0 e W su elettroni e neutrini.

Per il momento limitiamoci ad un esame qualitativo.

Rammento le analogie e mi aiuto con dei disegni.

neutrino:

campo e. m. trasversale (TEM)
in polarizzazione circolare a velocità c

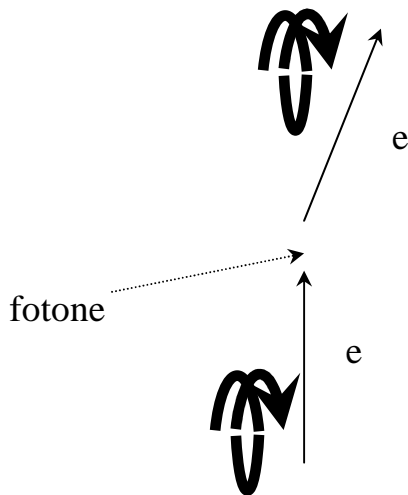


elettrone (e positrone)

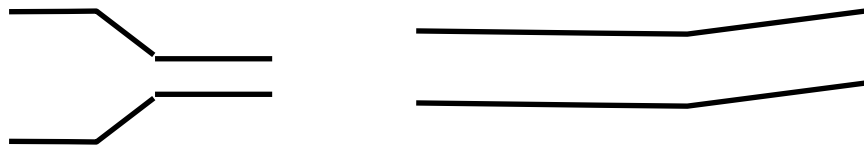
campo e. m. avvolto a elica (TE o TM)
in polarizzazione circolare a velocità V



Cominciamo a riassumere la azione del fotone. Esso rallenta o devia elettroni



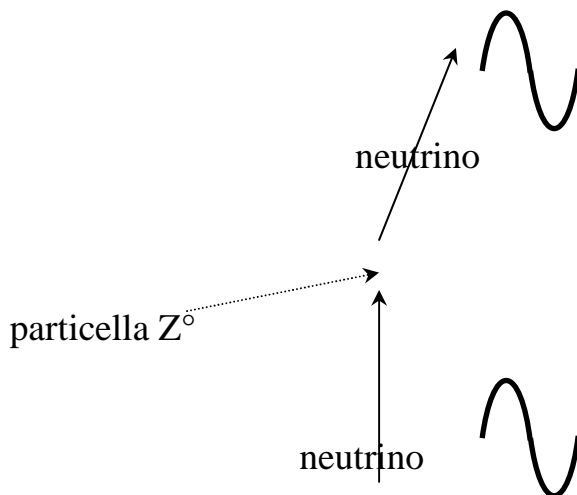
Nella analogia radar-elettromagnetica è un fittizia “guida equivalente” che rallenta o devia modi TE o TM.



(Ho dato questa interpretazione in [15], Nel seguito darò una interpretazione più semplice di questa).

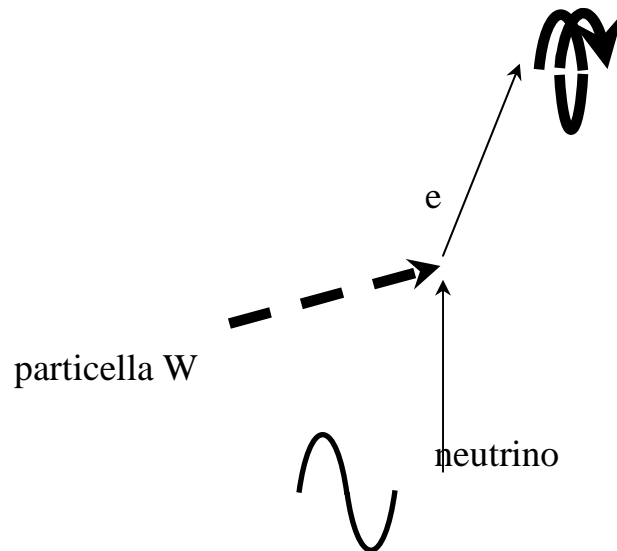
Proviamo invece a interpretare le azioni delle particelle W e Z⁰ portatrici della “forza debole”.

Nessun fotone è in grado di agire (deviare o rallentare) un neutrino, e ciò è coerente col fatto che nessuna guida agisce su un TEM essendo per definizione un TEM libero da qualsivoglia guida. Sui neutrini viceversa può agire la Z⁰, la cui azione, vista in termini di azione di un bersaglio radar, può essere rappresentata da uno scattering da TEM a TEM, deviato o rallentato (o accelerato) a pari polarizzazione.

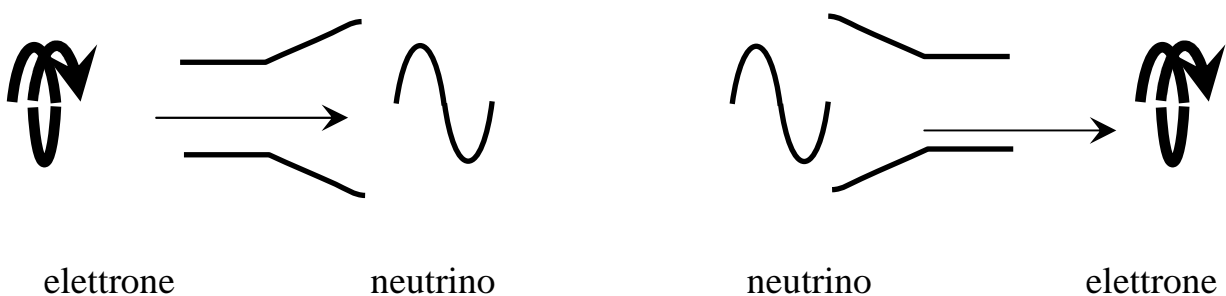


L'oggetto che può fare questo potrebbe essere semplicemente un bersaglio radar in eventuale moto di avvicinamento o allontanamento.

Più complessa è la azione della particella W. Essa è in grado di trasformare neutrini in elettroni o viceversa (ed è pertanto una particella dotata di carica).



Nella analogia radar-elettromagnetica un oggetto che trasforma TE, TM in TEM o viceversa esiste ed è..... la porta di uscita o di ingresso di una guida. Essa opera la transizione spazio – guida e quindi obbliga le sopradette trasformazioni.



Si tratta ora di tradurre la azione di questi oggetti in operatori matematici tali da operare in modo analogo alle particelle Z^0 e W in meccanica quantistica. Oppure viceversa, tradurre il formalismo matematico della azione delle particelle Z^0 e W in meccanica quantistica in operatori matematici rappresentanti la azione elettromagnetica dei vari oggetti.

È questo il compito che cercherò di risolvere studiando l'azione del gruppo $SU(2) \otimes U(1)$ sui campi TE TM e TEM.

L'invarianza con $SU(2) \otimes U(1)$ del quadrivettore energia e impulso

L'osservazione di base da cui partire è la seguente.

Ho visto in [15] che ψ ha in definitiva il compito di fornire il quadrivettore $\psi \hat{T} \psi^*$.

Orbene uno spinore si assegna con 8 parametri mentre ne bastano 4 per assegnare un tetravettore. Esiste quindi una quadruplice arbitrarietà in ψ (Hestenes, [3], [4]), che è rappresentata dalla trasformazione a 4 parametri:

$$(1) \quad \psi' \rightarrow \psi e^{T_{ji}\beta} e^{ij\nu} e^{-i\Phi} e^{j\rho}$$

(o meglio $\psi' \rightarrow \psi e^{T_{ji}\beta + ij\nu - i\Phi + j\rho}$ essendo gli esponenziali non commutativi, tranne $e^{T_{ji}\beta}$).

ed è infatti significativo che una arbitraria trasformazione di questo tipo lascia $\psi \hat{T} \psi^*$ inalterato (vedi anche Appendice 1).

Ora il gruppo $e^{T_{ji}\beta + ij\nu - i\Phi + j\rho}$ è il gruppo $SU(2) \otimes U(1)$. In particolare i, j, ij è $SU(2)$, il gruppo di tutte le rotazioni spaziali, le quali lasciano inalterato \hat{T} . La stessa cosa fa T_{ji} . Ne segue che nella descrizione del campo elettromagnetico con un quadrivettore $\psi \hat{T} \psi^*$ è possibile sottoporre ψ ad una trasformazione globale $SU(2) \otimes U(1)$ senza alterare il quadrivettore velocità (o il quadrivettore energia e impulso).

Cosa accade se la trasformazione da globale diventa locale? Se imponiamo la invarianza della equazione di Dirac anche per trasformazioni locali di $SU(2) \otimes U(1)$ nascono campi di gauge secondo le usuali tecniche delle teorie di gauge.

Il problema, per poter proseguire, è però che la (1) sia anzitutto accettata come lecita trasformazione globale in una nuova equazione ("a modification of the Dirac equation to accommodate the larger gauge group", Hestenes, [4]).

L'equazione di Dirac infatti così come è formulata accetta solo l'"electromagnetic gauge group" $e^{-i\Phi}$.

Una equazione di Dirac modificata che accetta $SU(2)$

Le basi di partenza che mi hanno fatto arrivare al risultato sono, direi, tre.

Una è la seguente. Mi ha sempre dato una sorta di turbamento, soprattutto dopo che ho riscritto a modo mio l'equazione di Dirac, il fatto che fosse scritta:

$$(3) \quad \partial^* \psi = -\hat{i} m \psi \hat{T}$$

$$(4) \quad \psi = \psi_1 + j\psi_2 + Tj\psi_3 + T\psi_4$$

con il segno (-) e non con il segno (+). Perché (-) e non (+)? Fra l'altro inizialmente io l'avevo scritta col (+), poi ho dovuto correggermi per ricavare le equazioni scritte con i segni così come le scrivono i libri.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_4 + \frac{\partial}{\partial z}\psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im\right)\psi_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_3 - \frac{\partial}{\partial z}\psi_4 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im\right)\psi_2 = 0$$

(5)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_2 + \frac{\partial}{\partial z}\psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im\right)\psi_3 = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_1 - \frac{\partial}{\partial z}\psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im\right)\psi_4 = 0$$

Questa è la prima premessa. Dirò poi come l'ho adoperata.

Ora racconto la seconda premessa. Nella (3) chi impedisce $SU(2)$ come simmetria globale (esponenti i, j, ij da destra) è la irritante posizione di i . Se non ci fosse, ovvero se fosse commutabile e commutato con ψ , tutto sarebbe risolto.

Per la parte ψ_+ di ψ , essendo giustappunto i commutabile, posso scrivere l'equazione nel modo da me desiderato cioè

$$(6) \quad \partial^* \psi_+ = -\hat{i} m i \psi_+ \hat{T}$$

che significa prendere per ψ la parte:

$$(7) \quad \psi = \psi_+ = \psi_1 + Tj\psi_3$$

Così però è apparente ma illusorio dire che (6) accetta $SU(2)$.

(Per esempio se modifico ψ con un esponenziale da destra $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{j\theta}$, sostituendo in (7) si constata che nascono termini indesiderati nelle componenti $j\psi_2$ che sono inaccettabili, perché ψ non commuterebbe più con i che è la ipotesi iniziale).

Questa è la seconda premessa. Dirò poi cosa ne ho cavato.

Terza osservazione.

Le soluzioni a riposo della equazione di Dirac $\partial^* \psi = -\hat{i}m\psi\hat{T}$ sono:

$$(8) \quad \begin{aligned} \psi &= e^{-i\alpha t} & \psi_1 &\neq 0 \\ \psi &= je^{-i\alpha t} & \psi_2 &\neq 0 \\ \psi &= Tjje^{+i\alpha t} & \psi_3 &\neq 0 \\ \psi &= Tji(je^{+i\alpha t}) & \psi_4 &\neq 0 \end{aligned}$$

Nella mia rappresentazione della polarizzazione radar la soluzione con solo $\psi_1 \neq 0$ e cioè:

$$(9) \quad \psi = \psi_1 = e^{-i\alpha t}$$

rappresenta un TE a riposo con un campo elettrico

$$(10) \quad \vec{E} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j)\hat{i} = \psi_+ \hat{i} = e^{-\alpha t} \hat{i} \rightarrow |\vec{E}| = 1$$

che ruota sul piano x, y da x verso y.

La soluzione con solo $\psi_2 \neq 0$ ossia $\psi = j\psi_2 = je^{-i\alpha t}$ rappresenta, come nella teoria dell'elettrone, la rotazione opposta.

Ma tutto questo accade solo perchè ho scelto arbitrariamente, per rappresentare il TE (soddisfacendo la condizione che valga l'equazione di Klein Gordon), l'equazione di Dirac $\partial^* \psi = -\hat{i}m\psi\hat{T}$. Se avessi scelto l'equazione con il segno opposto per m avrei avuto le soluzioni con ω opposto e dunque stavolta sarebbe stato invece $\psi = je^{+i\alpha t}$ (soluzione con $\psi_2 \neq 0$) a rappresentare la stessa rotazione di prima per il campo elettrico:

$$(11) \quad \vec{E} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j)\hat{i} = \psi_- (-j)\hat{i} = je^{+\alpha t} (-j)\hat{i} = e^{-i\alpha t} \hat{i}$$

Dunque è possibile usare per rappresentare la stessa rotazione di prima per il campo elettrico anche con le equazioni di Dirac (5), ma con il segno opposto di m nelle equazioni che forniscono ψ_2 .

E' anche possibile usare democraticamente entrambe le componenti, combinate in quadratura con sin e cos, in modo da mantenere la condizione:

$$(12) \quad |\vec{E}| = 1$$

Ciò premesso, ho risolto tutta la questione poggiandomi proprio su questi tre fatti, arrivando alla seguente proposta. Scrivo le equazioni per il solo senso di rotazione $\vec{E} = e^{-\alpha \hat{i}}$ del campo elettrico, usando la stessa equazione (6)

$$(13) \quad \partial^* \psi = -\hat{i} m i \psi \hat{T}$$

ma ora intesa con la accettabilità anche del termine ψ_2 e più in generale di tutti, nella forma solita:

$$(14) \quad \psi = \psi_1 + j\psi_2 + Tj\psi_3 + T\psi_4$$

Ora non solo è apparente ma è anche possibile che (13) accetti $SU(2)$.

(Infatti ora se per esempio modifico ψ con un esponenziale da destra $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{jip}$, sostituendo in (13) nascono termini nelle componenti $j\psi_2$ che ora sono accettabili). Sviluppata la (13) ottengo le equazioni (le scrivo per onda piana in z per un motivo che spiegherò dopo):

$$(15) \quad \begin{aligned} & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_1 = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_2 = 0 \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_3 = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_4 = 0 \end{aligned}$$

cioè coincidono con le equazioni di Dirac (5) per onda piana in z , ma con il segno di m opposto nei termini $m\psi_2$ e $m\psi_4$.

Si interpreta la soluzione con le (10) e (11) che vanno modificate in $\vec{E} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j) \hat{j}$, con un \hat{j} per la parte ψ_- , per mantenere la condizione:

$$(16) \quad |\vec{E}|^2 = 1$$

(Per ulteriori considerazioni e dettagli si veda l' Appendice 2).

Ribadisco che l'equazione (13) rappresenta le sole rotazioni $e^{-\alpha \hat{i}}$ del campo elettrico, ossia quella che nelle convenzioni IEEE è una polarizzazione R ("right").

Si può vedere che l'equazione fornisce i TE R e invece i TM L.

Una equazione analoga fornisce le polarizzazioni TE L ("left") e TM R con un cambio di segno di m al secondo membro.

Le scrivo come promemoria, con l'opportuno indice R e L:

$$(13 a) \quad \partial^* \psi_R = -\hat{i} m i \psi_R \hat{T}$$

$$(13 b) \quad \partial^* \psi_L = +\hat{i} m i \psi_L \hat{T}$$

Ovviamente poi per $m = 0$ si confluisce in un'unica equazione valida per TEM sia R che L:

$$(13c) \quad \partial^* \psi = 0$$

Analisi

La (13) non è più la equazione di Dirac, ma è una equazione di Dirac “ristretta” (o ampliata?), tuttavia si dimostra facilmente (salto i passaggi) che:

-è invariante per rotazioni spaziali intorno all’asse z;

-è relativisticamente invariante per qualunque velocità lungo l’asse z;

-non soddisfa l’equazione di Klein Gordon in generale, ma la soddisfa per

$$\partial^* = j \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial \tau}, \text{ ossia per onde piane in } z.$$

Il tutto basta e avanza per studiare TE TM TEM in z.

Ho sottoposto la (13) ad una lunga serie di verifiche su cui non mi voglio dilungare.

Racconto quella che è (forse) la più significativa e cioè l’effetto di un campo di gauge di $SU(2)$, e precisamente quello generato da

$$(17) \quad \psi \rightarrow \psi' = \psi e^{+ijWt}.$$

L’equazione (13) con la introduzione di una acconcia “derivata covariante” diventa:

$$(18) \quad \partial^* \psi + \hat{im} i \psi \hat{T} - T \psi i j W = 0$$

e con lunghi ma canonici sviluppi:

$$(19) \quad \begin{aligned} & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_1 - \psi_2 * iW = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_2 + \psi_1 * iW = 0 \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_3 + \psi_4 * iW = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_4 - \psi_3 * iW = 0 \end{aligned}$$

Per $W = 0$ si ottiene la soluzione TE seguente:

$$(20) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= e^{-i\omega t + ik_z z} & \psi_2 &= e^{+i\omega t - ik_z z} \\ \psi_3 &= B e^{-i\omega t + ik_z z} & \psi_4 &= -B e^{+i\omega t - ik_z z} \end{aligned}$$

$$B = \frac{\sqrt{\omega - \omega_0}}{\sqrt{\omega + \omega_0}} \quad k_z^2 = \omega^2 - \omega_0^2 \quad \omega_0 \equiv m$$

Una soluzione analoga vale per i TM.

Per $m = 0$ e $W = 0$ si ha invece (fra le tante) la soluzione TEM (TEM “right”):

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= e^{-i\alpha + ik_z z} & \psi_2 &= e^{+i\alpha - ik_z z} \\
 \psi_3 &= e^{-i\alpha + ik_z z} & \psi_4 &= -e^{+i\alpha - ik_z z}
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

$$k_z = \omega$$

In breve le (19) rappresentano per $W = 0$ campi TE e TM in una guida con taglio a $\omega_0 = m$, e si propagano nel modo che ci si aspetterebbe.

Per $m = 0$ e $W = 0$ sono campi TEM.

Più complessa è la situazione per $W \neq 0$. Qui ho avuto varie difficoltà, finché non ho capito che occorre supporre che l'accoppiamento delle componenti magnetiche col campo creato da $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{+ijW\tau}$ sia tramite una “carica di accoppiamento” di segno opposto. In queste condizioni nelle (19) $\psi_4^* iW$ e $\psi_3^* iW$ cambiano di segno e si trovano così le equazioni “giuste”:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_1 - \psi_2^* iW = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_2 + \psi_1^* iW = 0 \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_3 - \psi_4^* iW = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_4 + \psi_3^* iW = 0
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Esaminiamo l'effetto del campo di gauge.

Cerco una soluzione nella ipotesi tentativo (da verificarsi a posteriori) che essa abbia:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \psi_2^* \\
 \psi_2 &= \psi_1^* \\
 \psi_3 &= -\psi_4^* \\
 \psi_4 &= -\psi_3^*
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Le equazioni (22) diventano

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + i(m-W) \right) \psi_1 = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - i(m-W) \right) \psi_2 = 0 \\
 (24) \quad & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - i(m-W) \right) \psi_3 = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + i(m-W) \right) \psi_4 = 0
 \end{aligned}$$

di evidente soluzione:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= e^{-i\alpha t + ik_z z} & \psi_2 &= e^{+i\alpha t - ik_z z} \\
 (25) \quad \psi_3 &= B e^{-i\alpha t + ik_z z} & \psi_4 &= -B e^{+i\alpha t - ik_z z} \\
 B &= \frac{\sqrt{\omega - (m-W)}}{\sqrt{\omega + (m-W)}} & k_z^2 &= \omega^2 - (m-W)^2
 \end{aligned}$$

Ma le (25) soddisfano anche alle ipotesi tentativo (23) e quindi sono soluzione.

Nelle (22) quindi le soluzioni con $\psi_1, \psi_2 \neq 0$ a riposo, campi TE, rappresentano TE che si propagano in una guida con taglio a $\omega_0 = m - W$.

Egualemente le soluzioni con $\psi_3, \psi_4 \neq 0$ a riposo, campi TM, rappresentano TM che si propagano nella stessa guida con taglio a $\omega_0 = m - W$.

In sostanza la applicazione di questo campo di $SU(2)$ equivale alla transizione in una guida con taglio a $\omega_0 = m - W$, con $k_z^2 = \omega^2 - (m - W)^2$ e con velocità di gruppo:

$$(26) \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \sqrt{1 - \frac{\omega_{0,2}^2}{\omega^2}} \quad \text{dove } \omega_{0,2} = (m - W)$$

La particolarità di questa guida è che per $W = m$ diventa una “horn antenna”, ossia sparisce, ossi il campo diventa un TEM.

La conclusione è che la trasformazione di gauge $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{+ijWt}$ nelle equazioni (13) dei TE TM equivale alla azione di una “horn antenna” in trasmissione.

Partendo da un TEM si ottiene il risultato esattamente inverso, da TEM a TE, il che in Meccanica Quantistica sarebbe come dire che è sparita l'esigenza della particella di Higgs.

Faccio i passaggi relativi.

Si parta dalle equazioni di un TEM

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_1 = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_2 = 0 \\
 (27) \quad & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_3 = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_4 = 0
 \end{aligned}$$

di cui considero ad esempio la soluzione TEM R (“right”)

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= e^{-i\omega\tau + ik_z z} & \psi_2 &= e^{+i\omega\tau - ik_z z} \\
 (28) \quad \psi_3 &= B e^{-i\omega\tau + ik_z z} & \psi_4 &= -B e^{+i\omega\tau - ik_z z} \\
 B &= 1 & k_z^2 &= \omega^2
 \end{aligned}$$

Si introduca ora nelle (27) un campo di gauge come in (22) ma di segno opposto. (Presumo infatti ovviamente che, se la trasformazione di gauge $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{+ijWt}$ equivale alla azione di una “horn antenna” in trasmissione, servirà la trasformazione opposta $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-ijWt}$ per la azione di una antenna in ricezione). Le equazioni del TEM sotto la azione del campo di gauge diventano così le seguenti:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_1 + \psi_2 * iW = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_2 - \psi_1 * iW = 0 \\
 (29) \quad & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_3 + \psi_4 * iW = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_4 - \psi_3 * iW = 0
 \end{aligned}$$

E' possibile che queste equazioni forniscano un TE R ("right")?
 Cerchiamone una possibile soluzione ancora una volta nella ipotesi tentativo (da verificare a posteriori):

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \psi_2^* \\
 \psi_2 &= \psi_1^* \\
 \psi_3 &= -\psi_4^* \\
 \psi_4 &= -\psi_3^*
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

In questa ipotesi le (29) diventano:

$$\begin{aligned}
 +\frac{\partial}{\partial z}\psi_3 + \frac{\partial}{\partial \tau}\psi_1 + \psi_1 iW &= 0 \\
 -\frac{\partial}{\partial z}\psi_4 + \frac{\partial}{\partial \tau}\psi_2 - \psi_2 iW &= 0 \\
 +\frac{\partial}{\partial z}\psi_1 + \frac{\partial}{\partial \tau}\psi_3 - \psi_3 iW &= 0 \\
 -\frac{\partial}{\partial z}\psi_2 + \frac{\partial}{\partial \tau}\psi_4 + \psi_4 iW &= 0
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

ossia giustappunto quelle di un TE "right" in una guida con taglio a $\omega_0 = W$, con soluzione:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= e^{-i\alpha z + ik_z z} & \psi_2 &= e^{+i\alpha z - ik_z z} \\
 \psi_3 &= B e^{-i\alpha z + ik_z z} & \psi_4 &= -B e^{+i\alpha z - ik_z z}
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

$$B = \frac{\sqrt{\omega - \omega_0}}{\sqrt{\omega + \omega_0}} \quad k_z^2 = \omega^2 - \omega_0^2 \quad \omega_0 = W$$

Risultano a posteriori verificate le (23), quindi questa è la soluzione cercata.
 La conclusione è che la trasformazione di gauge $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-ijWt}$ nelle equazioni (27) dei TEM equivale alla azione di una "horn antenna" in ricezione, chiusa su una guida con taglio a $\omega_0 = W$.

Interpretazioni: la analogia con la particella W

Abbiamo visto che il TEM (28) a pulsazione ω viene riportato in una guida con $\omega_0 = W$, trasformandosi nel campo TE (31).

Per ragioni di continuità dobbiamo ritenere che il TE mantenga la pulsazione ω . Con facili ma lunghi calcoli (Appendice 3) e con la normalizzazione:

$$(32) \quad \psi\psi^* = \frac{\omega_0}{\omega}$$

la quadrivelocità risulta:

$$(33) \quad \psi(-\hat{T})\psi^* = -\hat{T} + \frac{k_z}{\omega} \hat{k}$$

Essa varia fra $(-\hat{T})$ nel caso estremo a riposo e $(-\hat{T} + \hat{k})$ nel caso estremo di TEM a velocità c (nota. $c=1$ nelle unità di misura usate).

Appare in modo esplicito la velocità di gruppo dell'onda lungo l'asse z :

$$(34) \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \frac{k_z}{\omega}$$

Ma esiste qualche ulteriore interessante interpretazione che vale la pena di evidenziare.

Calcoliamo $\psi\hat{k}\psi^*$ che risulta:

$$(35) \quad \psi\hat{k}\psi^* = \frac{\omega_0}{\omega} e^{-2i\alpha x + 2ik_z z} \hat{i}$$

Possiamo raggruppare (33) e (35) in un'unica espressione ottenendo:

$$(36) \quad \psi(-\hat{T} + \hat{k})\psi^* = -\hat{T} + \frac{k_z}{\omega} \hat{k} + \frac{\omega_0}{\omega} e^{-2i\alpha x + 2ik_z z} \hat{i} = -\hat{T} + \hat{\ell}$$

dove $\hat{\ell}$ è un vettore di tipo spazio, unitario a seguito delle (31) :

$$(37) \quad \hat{\ell} = \frac{k_z}{\omega} \hat{k} + \frac{\omega_0}{\omega} e^{-2i\alpha x + 2ik_z z} \hat{i} \rightarrow \hat{\ell}\hat{\ell} = 1$$

$\hat{\ell}$ descrive parametricamente un'elica, e $(-\hat{T} + \hat{\ell})$ è una quadrivelocità che descrive una propagazione alla velocità della luce lungo l'elica.

Siamo quindi di fronte a un fatto e ad una interpretazione possibile.

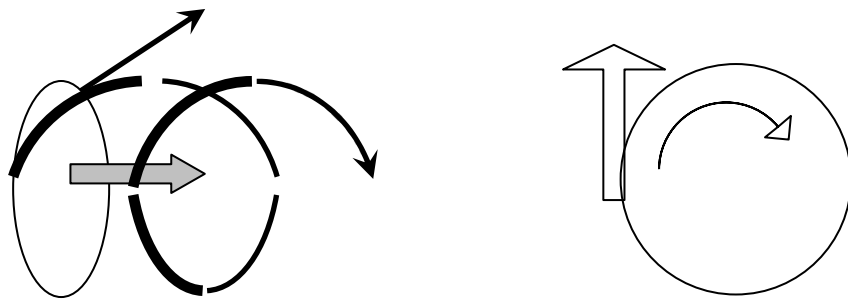
Il fatto è il seguente:

la trasformazione (36) trasforma la quadrivelocità di un campo e.m. in moto lungo z alla velocità della luce, mutandola nella quadrivelocità di un campo e.m. alla velocità della luce in moto su un'elica.

La possibile interpretazione è questa:

la trasformazione di gauge $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{+ijWt}$ simula l'azione di un'antenna in ricezione con la quale un TEM viene riportato in una guida sotto forma di TE, viaggiando istante per istante su un'elica alla velocità della luce.

Graficamente il campo che percorre un'elica alla velocità della luce è indicato con la freccia nera nelle figure, la freccia rappresenta la velocità sull'elica.

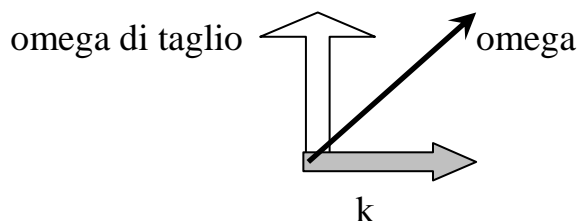


La velocità effettiva di traslazione secondo l'asse della guida è la freccia grigia. La velocità di rotazione in circolo è la freccia bianca.

Fra le tre velocità vale in ogni istante la relazione $v_g^2 + (\frac{\omega_0}{\omega})^2 = 1$ (nota: $c=1$ è la velocità della luce nelle unità usate).

Fra le omega, omega di taglio e k (“vettore d’onda”) vale una relazione analoga e cioè $\omega^2 = \omega_0^2 + k_z^2$.

Le relazioni sono coerenti con la propagazione in guida.



Ciò premesso, vediamo di interpretare l'effetto di W che compare nelle (25). Parlerò per brevità e più o meno impropriamente di “interazione debole”.

Esamino la missione di un TEM (da TE a TEM), ovvero come liberare luce intrappolata, ovvero cosa fa una "horn antenna" in trasmissione.

Parto dalle equazioni (22) che hanno come soluzione un campo TE che si propaga in una guida con taglio a $\omega_{0,2} = m - W$ e/o un TM che si propaga nella stessa guida sempre con taglio a $\omega_{0,2} = m - W$.

Valgono pertanto le (26) e anche

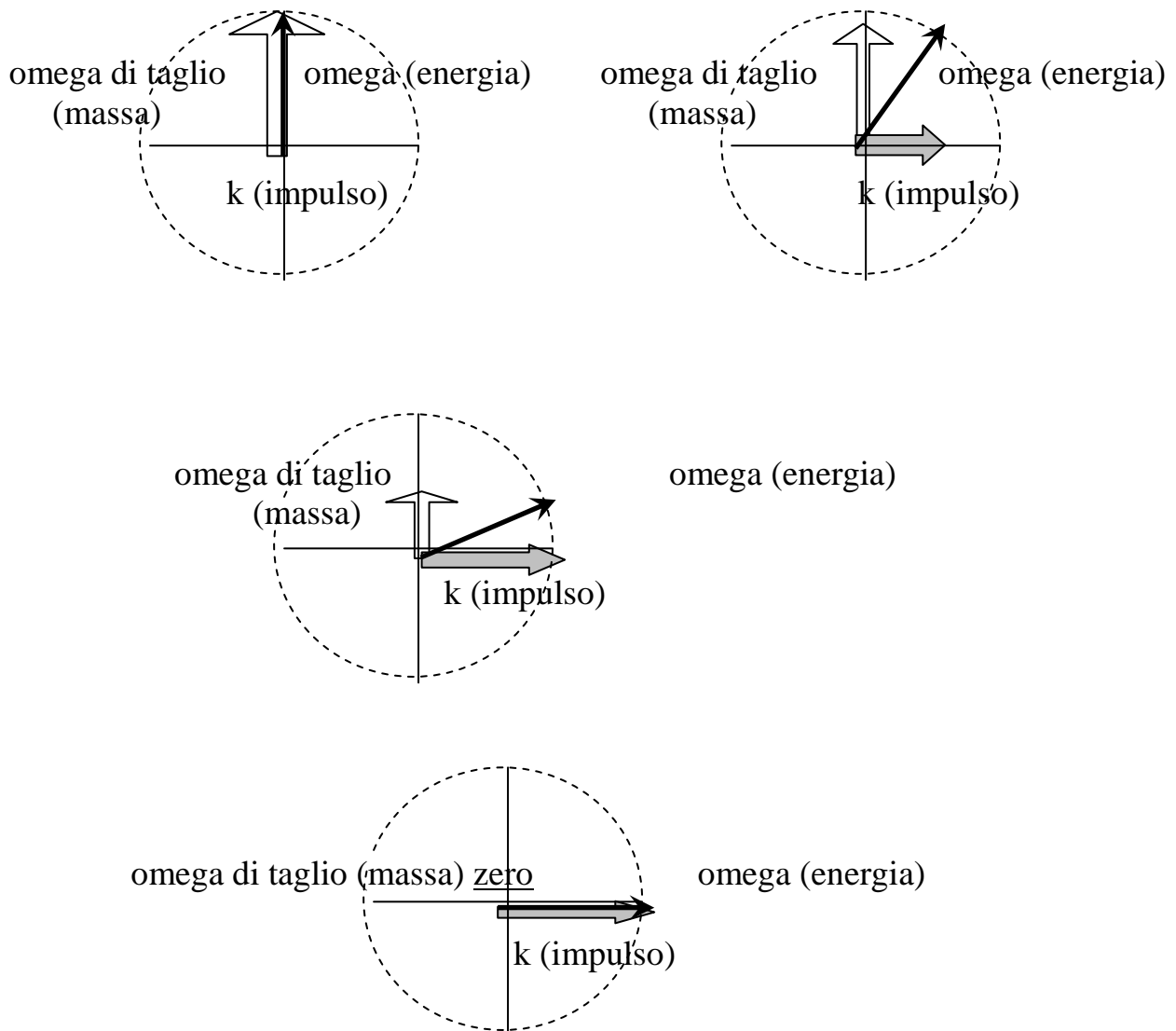
$$\omega^2 = (m - W)^2 + k_z^2$$

Uso questa come chiave di lettura.

Prima della applicazione di W il campo era in una guida con omega di taglio pari a m (in particolare se $\omega = m$ il campo era al taglio).

Sia $\omega = Cost.$, come avviene per un TE in guida d'onda.

I disegni che rappresentano l'effetto della interazione debole per valori crescenti di W sono quindi questi:



Se $W = m$ il campo diventa un TEM.

Si nota che l'interazione debole non cede e non assorbe energia, ma redistribuisce l'energia che da energia in circolo diventa energia viaggiante.

Esamino ora la trasformazione da TEM a TE ovvero “come dare massa” a un TEM, ovvero cosa fa un’antenna a tromba in ricezione.

Parto sempre dalle equazioni (22) con $m = 0$ che hanno come soluzione “prima della cura” ($W = 0$) un campo TEM.

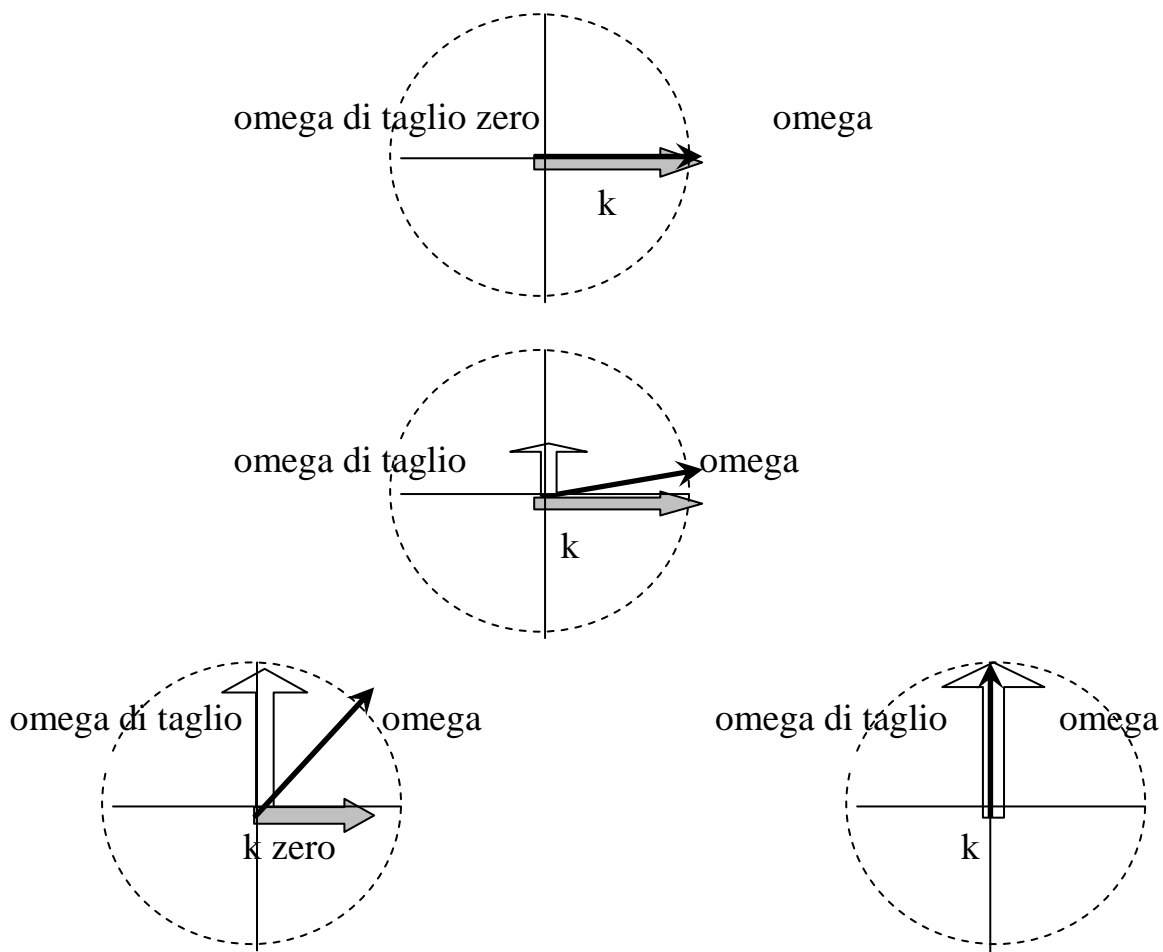
“Dopo la cura”, ossia dopo la applicazione di W si passa a un TE con “massa” W (nota: per agire in questo modo si deve intendere che l’antenna a tromba in ricezione agisca con segno opposto alla trasmissione).

La chiave di lettura questa volta è $\omega^2 = W^2 + k_z^2$ con omega costante.

W compare nella formula come “omega di taglio” ed è zero per $W = 0$.

I disegni che seguono rappresentano l’effetto della interazione debole per valori crescenti di W , da $W = 0$ a $W = \omega$:

Si parte da un TEM e si arriva a un TE con omega di taglio eguale a W .



Se come caso estremo $W = \omega$ si forma un TE fermo, alla frequenza di taglio.

Anche in questo caso l’interazione debole non cede e non assorbe energia, ma redistribuisce l’energia, da energia viaggiante a energia in circolo.

Altra analogia: la particella γ

Mostriamo che il TE (20) può essere rallentato o accelerato in guida tramite la “forza elettromagnetica”, rappresentata dal campo di gauge creato dalla trasformazione di $SU(2)$ $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-iU\tau}$.

Poiché il campo (20) soddisfa la (13) e questa accetta $SU(2)$ e in particolare accetta la trasformazione $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-iU\tau}$, posso introdurre questa come campo di gauge.

La introduzione di una apposita “derivata covariante” conduce a:

$$(38) \quad \partial^* \psi + \hat{im}i\psi\hat{T} + T\psi iU = 0$$

e per esteso:

$$(39) \quad \begin{aligned} & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_1 + \psi_1 iU = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_2 + \psi_2 iU = 0 \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_3 + \psi_3 iU = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_4 + \psi_4 iU = 0 \end{aligned}$$

Come si vedrà con una giustificazione a posteriori occorre supporre che l'accoppiamento delle componenti ψ_2, ψ_4 col campo creato da $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-iU\tau}$ sia tramite una “carica di accoppiamento” di segno opposto. In queste condizioni nelle (38) $\psi_2 iU$ e $\psi_4 iU$ cambiano di segno e si trovano così le equazioni “giuste”:

$$(39) \quad \begin{aligned} & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_1 + \psi_1 iU = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_2 - \psi_2 iU = 0 \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_3 + \psi_3 iU = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_4 - \psi_4 iU = 0 \end{aligned}$$

Cerchiamo una soluzione nella forma:

$$(40) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= e^{-i\alpha x + ik_z z} & \psi_2 &= e^{+i\alpha x - ik_z z} \\ \psi_3 &= B e^{-i\alpha x + ik_z z} & \psi_4 &= -B e^{+i\alpha x - ik_z z} \end{aligned}$$

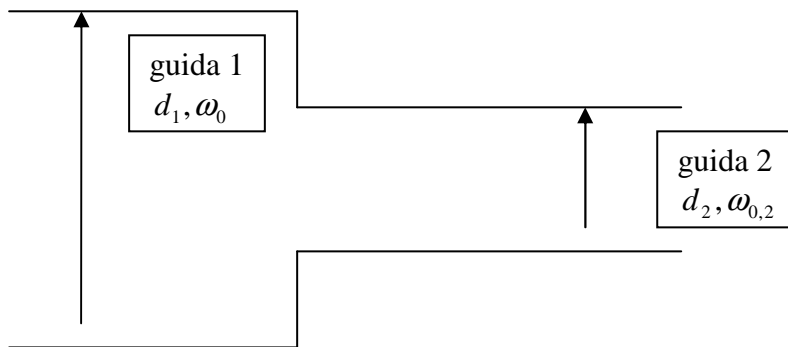
con B indeterminato.

Sostituendo e con qualche passaggio si trova che la soluzione esiste ed ha:

$$(41) \quad B = \frac{\sqrt{(\omega - U) - \omega_0}}{\sqrt{(\omega + U) + \omega_0}} \quad k_z^2 = (\omega - U)^2 - \omega_0^2$$

In definitiva il campo procede in guida con una ω diminuita.

Ho interpretato in [15] questo fatto con la propagazione del TE in una guida 2, “guida equivalente” con una diversa frequenza di taglio $\omega_{0,2}$ (ovvero dimensione d_2)



Per questo si usi la $v_g = \frac{d\omega}{dk_z}$, formula per la velocità di gruppo in guida d’onda.

Dalla (41) si ricava

$$(42) \quad k_z = \sqrt{(\omega - U)^2 - \omega_0^2} \quad \text{e quindi}$$

$$(43) \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \sqrt{1 - \frac{\omega_{0,2}^2}{\omega^2}} \quad \text{dove}$$

$$(44) \quad \omega_{0,2} = \frac{\omega_0}{1 - \frac{U}{\omega}}$$

Piuttosto che considerare una “guida equivalente” con frequenza di taglio $\omega_{0,2}$, limitiamoci invece a constatare in base alle (41) che il campo procede nella stessa guida, che ha frequenza di taglio ω_0 , ma qualcuno o qualcosa ha mutato la sua ω in $(\omega - U)$.

Questo qualcosa è individuabile dal punto di vista matematico nella operazione $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-iU\tau}$, che ha agito su ψ diminuendone la ω .

Dal punto di vista elettromagnetico una azione del genere è prodotta dalla interazione con un oggetto in guida che comunica al campo una frequenza doppler (qui negativa).

E' certamente questa una interpretazione più semplice ed immediata della precedente. Ad ogni modo la azione risultante è quella della “forza elettromagnetica” esercitata dalla particella γ .

Torniamo alle equazioni (39) e cerchiamo di quete una soluzione TM.

Dal punto di vista elettromagnetico a parità di parametri ω, ω_0 non fa differenza che si tratti di un TM o di un TE, nel senso che la ω finale a seguito della interazione con un oggetto in guida che comunica al campo una frequenza doppler producendo $(\omega - U)$, deve essere la stessa per un TE o per un TM. Tuttavia per ottenere questo è necessario assumere al posto delle (39) altre equazioni nelle quali U va cambiato di segno, come avviene con il cambio di segno della carica elettrica ($U = \pm eV$) nelle equazioni di Dirac.

Precisamente le equazioni debbono diventare:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_1 - \psi_1 iU = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_2 + \psi_2 iU = 0 \\
 (45) \quad & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_3 - \psi_3 iU = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_4 + \psi_4 iU = 0
 \end{aligned}$$

Esse in effetti hanno soluzione TM ancora con:

$$(46) \quad B = \frac{\sqrt{(\omega - U) - \omega_0}}{\sqrt{(\omega - U) + \omega_0}} \quad k_z^2 = (\omega - U)^2 - \omega_0^2$$

Da queste discende la stessa velocità nella guida che avrebbe avuto un TE.

Una interpretazione visiva

Come possiamo “visualizzare” gli effetti di W e γ testé esaminati? Come possiamo più in generale raffigurarci l’effetto dei vari campi di gauge?

Facciamo qualche passo indietro.

Da un punto di vista matematico la parentela fra le interazioni elettromagnetiche e le interazioni deboli è espressa dal fatto che tutte nascono da campi di gauge generati dalle trasformazioni di $SU(2) \otimes U(1)$

Ad ogni trasformazione corrisponde un campo.

Le trasformazioni coinvolte sono quelle del tipo:

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-iU t}$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-jW t}$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-ijW t}$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-TjiZ t}$$

quindi con esponenziali generatori delle rotazioni $\hat{i}\hat{j} = i$, oppure $\hat{i}\hat{k} = j$, oppure $ij = \hat{k}\hat{j}$ e ove occorra $\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{T} = Tji$.

Ora come dice Hestenes [12] nella teoria di Weinberg Salam delle interazioni elettrodeboli $SU(2) \otimes U(1)$ appare come una simmetria interna in uno spazio astratto.

Invece, dice sempre Hestenes (traduco liberamente il suo pensiero) deve essere possibile darne una interpretazione geometrica nello spazio vero.

Io mi sono proposto questo e qualcosa di più: deve essere possibile darne una interpretazione geometrica anche sui TE; TM e TEM.

Visualizzare cioè l’effetto delle forze elettrodeboli non solo sulle particelle elementari (elettrone, neutrino ecc.) ma anche sui normali campi TE; TM e TEM.

Riferiamoci ora esplicitamente alla azione dei generatori delle rotazioni $\hat{i}\hat{j} = i$, oppure $\hat{i}\hat{k} = j$, oppure $ij = \hat{k}\hat{j}$ e ove occorra $\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{T} = Tji$.

Perché intervengono i generatori elettrone, $\hat{i}\hat{j} = i$, $\hat{i}\hat{k} = j$, $ij = \hat{k}\hat{j}$ e $\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{T} = Tji$?

Facciamo anche qui un passo indietro che parte da $\psi\hat{T}\psi^*$.

La espressione

$$(47) \quad \psi\hat{T}\psi^*$$

fornisce il quadrivettore energia e impulso del corpo in esame (qui del modo in esame, TE, TM, TEM) descritto dallo spinore ψ .

Possiamo interpretare la azione di ψ nella (47) come quella di “mettere in moto” il corpo, descrivendone contemporaneamente i corretti valori di energia e impulso.

Operiamo una delle trasformazioni di $SU(2) \otimes U(1)$, ad esempio $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i\Phi}$.

La (47) diventerà:

$$(48) \quad \psi' \hat{T} \psi'^* = \psi (e^{-i\Phi} \hat{T} e^{+i\Phi}) \psi^*$$

Da questa si capisce che se la trasformazione è tale per cui:

$$(49) \quad (e^{-i\Phi} \hat{T} e^{+i\Phi}) = \hat{T}$$

ossia “lascia invariato \hat{T} ”, nulla cambia nella (47) perché:

$$(50) \quad \psi' \hat{T} \psi'^* = \psi (e^{-i\Phi} \hat{T} e^{+i\Phi}) \psi^* = \psi \hat{T} \psi^*$$

$SU(2) \otimes U(1)$ è per l'appunto “il gruppo di tutte le trasformazioni che lasciano invariato \hat{T} ”. In particolare $SU(2)$ che comprende i generatori $\hat{i}\hat{j} = i$, $\hat{i}\hat{k} = j$, $\hat{i}\hat{j} = \hat{k}\hat{j}$ è il gruppo di tutte le rotazioni spaziali che lasciano invariato \hat{T} .

Come conseguenza esse non cambiano nulla nella energia e nell' impulso del corpo, per qualunque condizione di moto.

Allora, si potrebbe pensare, non servono a niente?

Il fatto è che non cambiano energia e impulso del corpo se sono trasformazioni globali, come in (47), ossia con angoli costanti indipendenti dalle coordinate.

Interpretiamo graficamente questo fatto.

I versori \hat{i} \hat{j} \hat{k} \hat{T} sono i versori degli assi x, y, z e dell'asse tempo ma, seguendo Hestenes, consideriamoli anche come assi “appiccicati” al corpo. Così essi sono anche una terna di versori \hat{i} \hat{j} \hat{k} che ne indica l'assetto, mentre \hat{T} ne indica il “tempo proprio”. Un qualunque spinore ψ determina su di essi delle rotazioni. In particolare se ψ è unitario le grandezze

$$\psi \hat{i} \psi^* = \hat{e}_1$$

$$\psi \hat{j} \psi^* = \hat{e}_2$$

(51)

$$\psi \hat{k} \psi^* = \hat{e}_3$$

$$\psi \hat{T} \psi^* = \hat{e}_0 = \hat{u}$$

formano un sistema di assi ruotato rispetto a \hat{i} \hat{j} \hat{k} \hat{T} .

(Nota: se la ψ è una rotazione di Lorentz, “mette in moto” il corpo. Se viceversa è una delle rotazioni di $SU(2) \otimes U(1)$, che è per l'appunto “il gruppo di tutte le trasformazioni che lasciano invariato \hat{T} ”, non succede niente, almeno per quanto riguarda \hat{T}).

Con riferimento alla (47) e alla (48) un attimo di riflessione ci fa capire che una qualunque delle trasformazioni di $SU(2) \otimes U(1)$, ad esempio $e^{-i\Phi}$, può essere interpretata come una rotazione applicata prima che agisca ψ , e prima che ψ abbia messo in moto il corpo.

Questo aspetto è molto importante.

Limitiamoci alle rotazioni spaziali di $SU(2)$, con generatori $\hat{i}\hat{j} = i$, $\hat{i}\hat{k} = j$, $\hat{j}\hat{k} = \hat{k}$:

possiamo identificare una qualunque delle rotazioni di $SU(2)$ che lasciano invariato \hat{T} come una **variazione di assetto** del corpo **a riposo**.

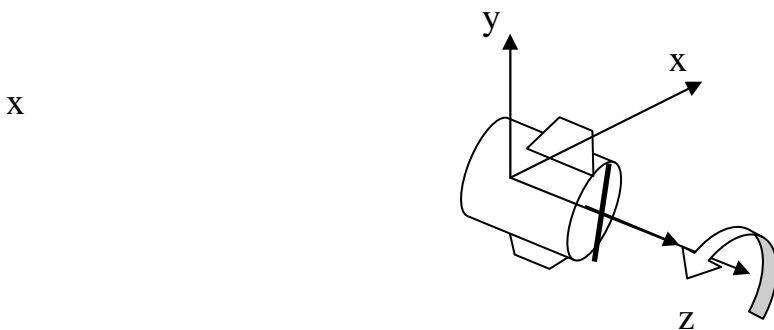
Procediamo da qui, per una spiegazione certamente approssimata, ma che ha il pregio di fornirci una immagine visiva della azione dei campi di gauge e di come essi determinano la forza elettromagnetica e la forza debole.

Ragioniamo su un campo elettromagnetico in polarizzazione circolare.

Adottiamo anzitutto una immagine del campo come un corpo al quale è appiccicato un sistema d'assi $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$ e in particolare \hat{k} ne rappresenti l'asse di rotazione.

Ammetto implicitamente che il corpo o il campo "frullino" intorno all'asse \hat{k} . Nella interpretazione di Hestenes \hat{k} è l'asse di spin.

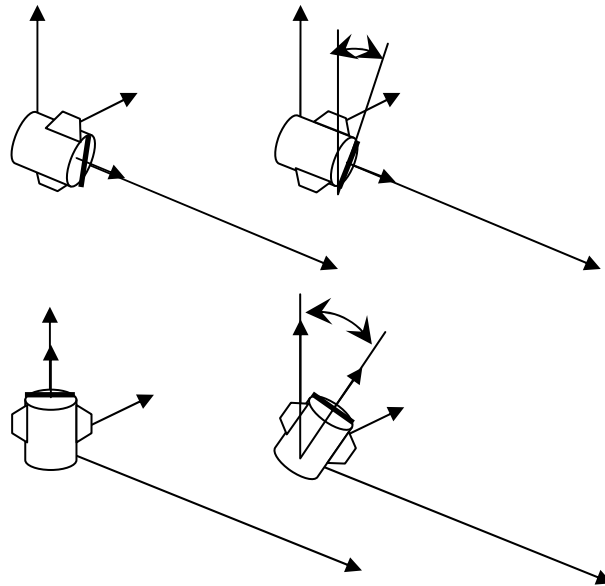
Con una figura rappresento il corpo come un piccolo satellite "spinning" intorno al proprio asse.



Prendiamo in considerazione le rotazioni ad angolo fisso, trasformazioni globali di $SU(2)$.

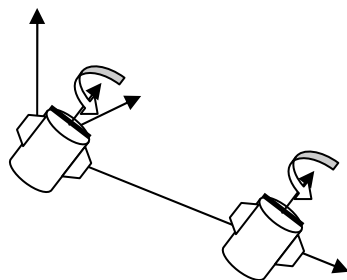
Abbiamo ipotizzato di poter assimilare queste rotazioni di $SU(2)$ che lasciano \hat{T} inalterato (e quindi poi non interagiscono con l'andamento del quadrivettore energia e impulso) a una "variazione di assetto" del corpo a riposo.

Risulta abbastanza ragionevole (oppure del tutto rigoroso) pensare che, allorché il corpo “spinning” abbia cambiato comunque di assetto



ciò non muti la sua energia complessiva, quando è fermo, né il suo impulso, quando è in moto.

In pratica proseguirà il suo moto con la conservazione di impulso, energia e momento angolare.



Ma la situazione cambia (e cambia in modo interpretabile) quando gli angoli sono per esempio funzione del tempo.

Cominciamo dalla situazione più semplice che è...la forza elettromagnetica, in contrasto con la successiva che vedremo che è la forza debole.

Essa è generata da una trasformazione $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i\varphi(t)}$ ovvero più esplicitamente $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-iU t}$.

Questa inserita nella equazione di Dirac produce una diminuzione di ω a $(\omega - U)$.

Tralasciando di ripercorrere tutti i particolari tecnici già esaminati altrove, alla fine U compare come una energia additiva o una ω additiva (o come qui sottrattiva) che qualcuno ha comunicato al campo (al corpo).

(nota bene: non dobbiamo pensare semplicisticamente che al termine $e^{-i\omega x}$ già presente in ψ si aggiunga un $e^{-iU t}$ perché così sta scritto nella formula $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-iU t}$).

In effetti succede proprio questo, ma ce lo dice solo la matematica risolvendo la equazione di Dirac).

Abbiamo dunque qui una interpretazione immediata che nemmeno ha bisogno di essere fatta perché.....è già pronta.

Una rotazione aggiuntiva, portando la rotazione a essere più veloce o più lenta, cambia l'energia del corpo.

E' precisamente questo l'effetto di un potenziale su una particella carica, in meccanica quantistica l'effetto del fotone γ sull'elettrone.

Passiamo ai generatori $\hat{i}\hat{k} = j$ e $ij = \hat{k}\hat{j}$.

Questi, come dice Hestenes (traduco) "non lasciano invariato \hat{k} ".

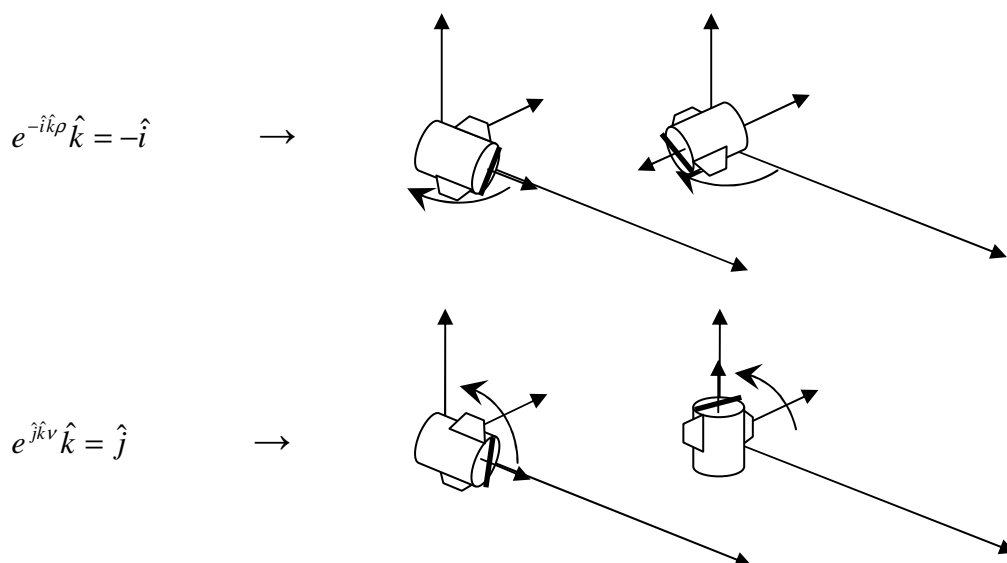
Possiamo chiaramente visualizzare gli effetti di una trasformazione di gauge con $\hat{i}\hat{k} = j$ e $ij = \hat{k}\hat{j}$.

Rammentiamo preliminarmente che nella teoria delle interazioni deboli a questi due generatori viene attribuita la azione della particella W e quindi è questo fatto che dovremo spiegare. Rammentiamo inoltre che la azione della particella W è quella, fra le altre, di poter trasformare elettroni in neutrini, o viceversa.

In una analogia con TE, TM, TEM diremmo brevemente e sinteticamente "dotare di massa i TEM" oppure viceversa "portare TE, TM alla velocità della luce. Da un punto di vista puramente elettromagnetico si tratta di dotare un TEM di una "frequenza di taglio" (che esso non ha) oppure invece "liberare TE e TM" dalla propria frequenza di taglio trasformandoli così in TEM.

Ebbene ciò premesso vediamo di interpretare geometricamente la azione di $e^{-i\hat{k}\rho} = e^{-j\rho}$ e di $e^{\hat{j}k\rho} = e^{-ij\rho}$ (i segni sono di comodo) su \hat{k} , considerato ancora come asse di rotazione del corpo.

Per $\rho = \nu = \frac{\pi}{2}$ si vede immediatamente che $e^{-i\hat{k}\rho}$ porta \hat{k} su $(-\hat{i})$ e $e^{\hat{j}k\rho}$ porta \hat{k} su \hat{j} .



Possiamo considerare la azione dei due generatori equivalente nel senso che entrambi portano \hat{k} sul piano trasverso (come pure farebbe una loro combinazione).

Ovviamente per $\rho, \nu \leq \frac{\pi}{2}$ valgono posizioni intermedie.

Per ρ, ν costanti queste sono variazioni di assetto e ciò non muta la energia complessiva del corpo, quando è fermo, né il suo impulso, quando è in moto.

Il corpo prosegue il suo moto con la conservazione di impulso, energia e momento angolare.

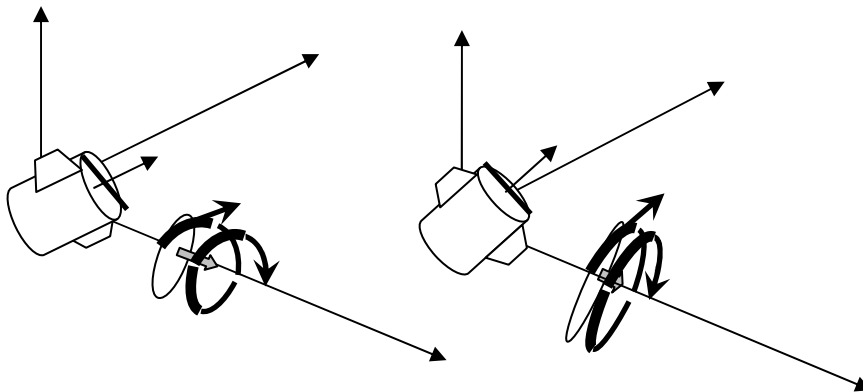
Sia invece per esempio $e^{\hat{j}\hat{k}\nu} = e^{-ij\nu} = e^{-ijWt}$ ossia l'angolo di rotazione intorno all'asse x divenga funzione del tempo $\nu = Wt$.

Possiamo intuire che succederà qualcosa di più complicato.

La matematica ci fornisce la risposta, che ragionevolmente ci viene suggerita anche dall'intuizione:

il satellite rallenta il suo moto lungo z e acquista un moto di precessione di \hat{k} intorno all'asse z.

In sostanza parte della sua energia di moto va in energia di rotazione.



E' quello che succede per un campo in guida d'onda: il campo ha acquistato massa o energia a riposo.

Per $W = \omega$ il moto di avanzamento si ferma completamente e l'energia è tutta posta in rotazione (in guida d'onda il campo è alla frequenza di taglio).

Resta così spiegato, pur se in forma indubbiamente primitiva, come la azione della particella W (in elettromagnetismo trasformazione da TEM a TE, TM e viceversa, attribuibile a una "horn antenna") sia prodotta dalla trasformazione di gauge

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-ijWt}.$$

Altra analogia: la particella Z°

Nella teoria delle interazioni deboli la azione della particella Z° si esplica attraverso la azione congiunta dei campi di gauge prodotti dalle trasformazioni con generatori i e T_{ji} . Mi propongo di vedere se esiste una situazione analoga sui TEM.

Prendiamo in considerazione su un TEM la azione di una trasformazione

$$(47) \quad \psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-T_{ji}Zt - iUt}$$

Questa comporta la introduzione di una appropriata derivata covariante che conduce alla equazione:

$$(48) \quad \partial^* \psi + j_i \psi Z + T \psi i U = 0$$

Sviluppando per esteso si ottengono gli stessi termini in U già calcolati nella (39), a cui si aggiungono nuovi termini in Z . Fatti gli opportuni calcoli si ottiene::

$$(49) \quad \begin{aligned} & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_1 + i \psi_3 Z + \psi_1 i U = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_2 + i \psi_4 Z - \psi_2 i U = 0 \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_3 + i \psi_1 Z + \psi_3 i U = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_4 + i \psi_2 Z - \psi_4 i U = 0 \end{aligned}$$

Queste equazioni forniscono, in assenza dei campi di gauge, una soluzione TEM che può essere sia destro che sinistro.

Vediamo quali possibili soluzioni esistono in presenza dei campi di gauge.

Cerco dapprima una soluzione nella forma (21) (TEM “right”).

Sostituendo le (21) in (49) con k_z e ω indeterminati si trovano effettivamente soluzioni nella forma (21) con la condizione:

$$(50) \quad (k_z + Z)^2 = (\omega - U)^2$$

Dunque a partire da una condizione iniziale in assenza di campi con $k_z = \omega$ deve succedere che k_z e ω subiscano una modificazione tale da soddisfare la (50).

Da un punto di vista fisico la ω di un TEM può aumentare o diminuire tramite la interazione con un oggetto (o un “bersaglio”).

Ad esempio consideriamo la seguente situazione: un TEM che si propaga secondo z interagisce con un bersaglio in movimento che gli comunica una doppler ω_d e prosegue in “forward scattering” con un aumento di frequenza da ω a $\omega + \omega_d$.

Tuttavia se consideriamo il problema da un punto di vista fisico la ω di un TEM può aumentare o diminuire, ma k_z deve farlo di conserva, sempre mantenendo la condizione di uguaglianza fra ω e k (che significa propagazione a velocità $c=1$). Ne segue dalla (50) che la azione di U e Z non è ammissibile con i segni che li compaiono, vale a dire (per U e Z positivi) con un aumento di k_z e una diminuzione di ω .

Pertanto l'unica ipotesi possibile è che sotto la trasformazione (47):

- a) U e Z compaiano entrambi e non separatamente, solo l'uno o solo l'altro;
- b) U e Z abbiano valore uguale e segno opposto e quindi
- c) esistano “cariche di accoppiamento” verso U e Z di segno opposto.

Facciamo comparire nelle (49) la presenza di “cariche di accoppiamento” verso U e Z indicandole in parentesi quadra.

In modo del tutto subdolo e tendenzioso adopero i seguenti arbitrari nomi:

chiamo $[Y/2]$ la carica di accoppiamento verso Z;

chiamo $[T3]$ la carica di accoppiamento verso U.

Le (49) diventano così:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_1 + [Y/2] i \psi_3 Z + [T3] \psi_1 i U = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_2 + [Y/2] i \psi_4 Z - [T3] \psi_2 i U = 0 \\
 (51) \quad & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_3 + [Y/2] i \psi_1 Z + [T3] \psi_3 i U = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_4 + [Y/2] i \psi_2 Z - [T3] \psi_4 i U = 0
 \end{aligned}$$

Risolviamo con:

$$(52) \quad \left[\frac{Y}{2} = +\frac{1}{2} \right]$$

e con:

$$(53) \quad [T3] = -\frac{1}{2}$$

Si trova così la soluzione lo stesso bersaglio TEM “right”:

$$(54) \quad \left(k_z + \frac{1}{2}Z\right)^2 = \left(\omega + \frac{1}{2}U\right)^2$$

Questa soluzione è fisicamente compatibile e rappresenta la azione un bersaglio in movimento che comunica una doppler ω_d con un aumento di frequenza del TEM da ω a $\omega + \omega_d$. La azione di questo oggetto resta così identificata con il campo di gauge prodotto dalla trasformazione (47).

Considero ora la soluzione TEM “left” in assenza di campi:

$$(55) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= e^{+i\alpha x - ik_z z} & \psi_2 &= e^{-i\alpha x + ik_z z} \\ \psi_3 &= e^{+i\alpha x - ik_z z} & \psi_4 &= -e^{-i\alpha x + ik_z z} \\ k_z &= \omega \end{aligned}$$

Interagendo con lo stesso bersaglio di prima e quindi sotto la azione del campo di gauge prodotto dalla trasformazione (47) si troverebbe con le ipotesi (52) (53) la seguente soluzione delle (51):

$$(56) \quad \left(k_z - \frac{1}{2}Z\right)^2 = \left(\omega - \frac{1}{2}U\right)^2$$

Questo conduce alla situazione assurda per la quale lo stesso bersaglio comunicherebbe una doppler positiva ai TEM “right” e una doppler negativa ai TEM “left”, il che non è fisicamente ragionevole.

Dobbiamo quindi supporre “cariche di accoppiamento” dei TEM “left” verso U e Z eguali a:

$$(57) \quad \left[\frac{Y}{2} = -\frac{1}{2}\right]$$

e con:

$$(58) \quad [T3] = +\frac{1}{2}$$

quindi opposte a quelle dei TEM “right”.

Così facendo si trova la soluzione corretta (54).

Le equazioni (51) unite alle specificazioni (52) (53) oppure (57) (58) consentono una classificazione dei modi TEM “right” e TEM “left”, in relazione alle loro cariche di accoppiamento rispetto ai campi di gauge.

Risulta la seguente tabella di classificazione dei modi:

	$[\frac{Y}{2}]$	$[T_3]$
TEM “left”	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
TEM “right”	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

la quale ricorda evidentemente la classificazione dei neutrini nello Standard Model: (ovviamente senza poter assegnare nessun significato ai simboli, che ho scelto ad arte in modo subdolo):

	$[\frac{Y}{2}]$	$[T_3]$
ν_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\bar{\nu}_R$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

In conclusione, e distinguendo i fatti dalle interpretazioni, abbiamo visto come dato di fatto quale è la azione sui TEM della trasformazione di gauge (47) e abbiamo evidenziato una possibile interpretazione in termini di analogia con la azione di Z^0 sui neutrini.

Classificazione dei modi

Prendiamo in considerazione su un TEM la azione di una trasformazione generale:

$$(59) \quad \psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-TjiZt - iUt - ijWt}$$

Questa comporta la modifica di una appropriata derivata covariante che conduce alla equazione:

$$(60) \quad \partial^* \psi + ji\psi Z + T\psi iU + T\psi ijW = 0$$

Sviluppando per esteso si ottengono gli stessi termini in W e U già calcolati nelle (29) e (39), a cui si aggiungono i termini in Z. Fatti gli opportuni calcoli si ottiene::

$$(61) \quad \begin{aligned} & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_1 + i\psi_3 Z + \psi_1 iU + \psi_2^* iW = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_2 + i\psi_4 Z - \psi_2 iU - \psi_1^* iW = 0 \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_3 + i\psi_1 Z + \psi_3 iU + \psi_4^* iW = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_4 + i\psi_2 Z - \psi_4 iU - \psi_3^* iW = 0 \end{aligned}$$

Questa è a tutti gli effetti una unica equazione in grado di rappresentare tutti i possibili modi TEM “right”, TEM “left”, TM “right”, TM “left”, TE “right”, TE “left”.

Partendo infatti dalle (61) in assenza dei campi di gauge, che hanno come soluzione TEM “right” e/o TEM “left”, si può pervenire a tutti gli altri modi in funzione della presenza o meno dei campi di gauge e delle cariche di accoppiamento pertinenti a ciascun modo. Questo procedimento, oltre che lungo, contiene anche dei gradi di arbitrarietà per cui mi limito ad accennarne la possibilità.

Possiamo almeno mostrare che le (61) nonostante la loro apparenza ostica hanno soluzione.

Cerchiamo ad esempio una soluzione nella forma (20) ma con B e k_z indeterminati. Sostituendo in (61) le prime due danno la condizione comune:

$$(62) \quad B = \frac{(\omega - U) - W}{k_z + Z}$$

Le seconde due danno entrambe la condizione:

$$(63) \quad B = \frac{k_z + Z}{(\omega - U) + W}$$

Per la soluzione deve dunque essere:

$$(64) \quad (k_z + Z)^2 = (\omega - U)^2 - W^2$$

e si ha soluzione con:

$$(65) \quad B = \frac{\sqrt{(\omega - U) - W}}{\sqrt{(\omega - U) + W}}$$

Una ulteriore discussione è al di fuori di ciò che mi propongo in questo momento.

Conclusioni

Abbiamo interpretato la azione dei campi di gauge di $SU(2) \otimes U(1)$ sui modi TEM “right”, TEM “left”, TM “right”, TM “left”, TE “right”, TE “left”.

La interpretazione è stata fatta studiando i seguenti effetti:

effetto delle trasformazioni di $SU(2)$ sulle equazioni:

$$(13 a) \quad \partial^* \psi_R = -\hat{i} m_i \psi_R \hat{T} \rightarrow \text{per i TM “left”, TE “right”}$$

$$(13 b) \quad \partial^* \psi_L = +\hat{i} m_i \psi_L \hat{T} \rightarrow \text{per i TM “right”, TE “left”};$$

effetto delle trasformazioni di $SU(2) \otimes U(1)$ sulla equazione:

$$(13c) \quad \partial^* \psi = 0 \rightarrow \text{per i TEM “left”, TEM “right”}.$$

Sono stati individuati gli oggetti fisici che implementano queste azioni.

Sono state poi mostrate analogie, tutte ovviamente discutibili e da approfondire, con la azione di γ, W, Z^0 .

Appendice 1

Invarianza di $\psi\hat{T}\psi^*$ rispetto a $SU(2)\otimes U(1)$

Merita fare per esteso i passaggi che mostrano la invarianza di $\psi\hat{T}\psi^*$.

Con la:

$$(1) \quad \psi' \rightarrow \psi e^{T_{ji}\beta + ij\nu - i\Phi + j\rho}$$

risulta immediatamente con qualche passaggio:

$$(2) \quad (\psi')\hat{T}(\psi')^* = \psi e^{T_{ji}\beta} \hat{T} (e^{T_{ji}\beta})^* \psi^*$$

Per proseguire notiamo che l'elemento T_{ji} gode delle proprietà:

$$(3) \quad (T_{ji})^* = T_{ji}$$

$$(4) \quad (T_{ji})^2 = -1$$

e quindi per la (3):

$$(\psi')\hat{T}(\psi')^* = \psi e^{T_{ji}\beta} \hat{T} e^{T_{ji}\beta} \psi^*$$

Poiché T_{ji} anticommute con \hat{T} segue ancora:

$$(\psi')\hat{T}(\psi')^* = \psi e^{T_{ji}\beta} e^{-T_{ji}\beta} \hat{T} \psi^* = \psi\hat{T}\psi^*$$

che mostra infine l'invarianza di $\psi\hat{T}\psi^*$.

Appendice 2

Relazione fra spinori e campi

Sia

$$(1) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\alpha} + je^{-i\alpha}) = \psi_1 + j\psi_2$$

oppure invece

$$(2) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\alpha} + je^{i\alpha}) = \psi_1 + j\psi_2$$

Se ψ_1 e $j\psi_2$ rappresentano rotazioni opposte come in (1), è relativamente irrilevante associare a ψ il vettore

$$(3) \quad \vec{E} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j) \hat{i}$$

oppure invece il vettore

$$(4) \quad \vec{E} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j) \hat{j}$$

Infatti in (3) e (4) cambia solamente la posizione iniziale del contributo $\psi_-(-j)$ (secondo \hat{i} o secondo \hat{j}). Questa posizione iniziale viene rapidamente riassorbita perché i due vettori sia in (3) che in (4) sono controrotanti, e quindi le due differenti scelte equivalgono solamente a una diversa posizione iniziale o fase iniziale per \vec{E} .

Se invece ψ_1 e $j\psi_2$ rappresentano lo stesso senso di rotazione come in (2), allora la posizione iniziale dei due vettori viene mantenuta nel tempo e pertanto non è irrilevante la loro posizione: devono essere in quadratura.

La scelta da fare è pertanto la (4), che risulta adeguata ad entrambi i casi.

Appendice 3

Normalizzazione di ψ

Abbiamo visto che il TEM (28) a pulsazione ω viene riportato in una guida con $\omega_0 = W$, trasformandosi nel campo TE (31).

Per ragioni di continuità dobbiamo ritenere che il TE mantenga la pulsazione ω .
Lo riscrivo per esteso nella forma completa

$$(1) \quad \psi = \psi_1 + j\psi_2 + Tj\psi_3 + T\psi_4$$

e con la normalizzazione:

$$(2) \quad \psi\psi^* = 1$$

Risulta, con facili ma lunghi calcoli:

$$(3) \quad \psi = \frac{(1 + BTj)e^{-i\alpha x + ik_z z} + j(1 - BTj)e^{+i\alpha x - ik_z z}}{\sqrt{2}\sqrt{1 - B^2}} \quad \rightarrow \quad \psi\psi^* = 1$$

Il quadrivettore energia e impulso, o quadrivelocità con la normalizzazione (2), risulta con altrettanto lunghi calcoli (prendendo $(-\hat{T})$ come quadrivelocità a riposo):

$$(4) \quad \psi(-\hat{T})\psi^* = -\frac{1 + B^2}{1 - B^2}\hat{T} + \frac{2B}{1 - B^2}\hat{k} \quad \rightarrow \quad \psi\psi^* = 1$$

Questa si può ulteriormente esplicitare.

Da:

$$(5) \quad B = \frac{\sqrt{\omega - \omega_0}}{\sqrt{\omega + \omega_0}}$$

risulta

$$(6) \quad \psi(-\hat{T})\psi^* = -\frac{\omega}{\omega_0}\hat{T} + \frac{k_z}{\omega_0}\hat{k} \quad \rightarrow \quad \psi\psi^* = 1$$

Questa diverge per $\omega_0 = 0$.

Con una moltiplicazione per $\frac{\omega_0}{\omega}$ (vedi dopo) potremmo fare apparire in modo esplicito la velocità di gruppo dell'onda lungo l'asse z:

$$(7) \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \frac{k_z}{\omega}$$

Calcoliamo anche la posizione di:

$$(8) \quad \hat{e}_3 = \psi \hat{k} \psi^*$$

cioè quella che, nella interpretazione di Hestenes sul moto di un “piccolo corpo rigido”, dovrebbe essere la posizione di \hat{k} durante il moto oppure, nella interpretazione di Hestenes sull'elettrone, la posizione dello spin. Risulta, sempre con lunghi calcoli:

$$(9) \quad \hat{e}_3 = \psi \hat{k} \psi^* = e^{-2i\alpha x + 2ik_z z} \hat{i} \rightarrow \psi \psi^* = 1$$

difficilmente interpretabile come spin.

Questo è tutto ciò che si ottiene con una normalizzazione a $\psi \psi^* = 1$.

Questo tipo di normalizzazione, apparentemente intelligente, non è però la più adatta. Basti pensare che nella situazione limite di campo TEM è $\psi \psi^* = 0$ e quindi la divisione per $\psi \psi^*$ che occorre per normalizzare non è più possibile.

È più conveniente la normalizzazione:

$$(10) \quad \psi \psi^* = \frac{\omega_0}{\omega}$$

col che la quadrivelocità risulta:

$$(11) \quad \psi(-\hat{T})\psi^* = -\hat{T} + \frac{k_z}{\omega} \hat{k}$$

Essa varia fra $(-\hat{T})$ nel caso estremo a riposo e $(-\hat{T} + \hat{k})$ nel caso estremo di TEM a velocità c (nota. c=1 nelle unità di misura usate).

Così pure tutto il resto delle formule è meglio interpretabile, come fatto nel testo.

Appendice 4

Algebra di Clifford

Introduciamo un' Algebra di Clifford così fatta: i versori degli assi x, y, z siano:

$$(1) \quad \hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}$$

In più, ove occorra, un versore per l'asse tempo:

$$(2) \quad \hat{T}$$

Nota: $\hat{i} \hat{j} \hat{k} \hat{T}$ sono a volte indicati secondo gli autori con e_1, e_2, e_3, e_0 . Per essi si assumono comunque le seguenti proprietà:

$$(3) \quad \hat{i}^2 = 1 \quad \hat{j}^2 = 1 \quad \hat{k}^2 = 1 \quad \hat{T}^2 = -1 \quad \hat{j}\hat{i} = -\hat{i}\hat{j} \quad \text{etc}$$

I versori $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$ sono come d'abitudine a modulo 1 (-1 per l'asse tempo). Tutti i prodotti fra i versori anticommutano.

Usiamo gli "immaginari" $i \ j \ T$ per generalizzare l'usuale unità immaginaria i del piano xy

$$(4) \quad i = \hat{i}\hat{j} \quad j = \hat{i}\hat{k} \quad T = \hat{i}\hat{T}$$

Nota: per il motivo di questa generalizzazione si vedano le successive (12) e (13). Il tutto, unito alla regola riguardante i coniugati

$$(5) \quad (AB)^* = B^* A^*$$

genera tutte le proprietà che interessano.

E' sufficiente difatti ammettere che $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$ non cambiano per coniugazione (come è intuitivo che debba essere) per ricavare per esempio, o ritrovare, la usuale regola per il coniugato i^* :

$$(6) \quad i^* = (\hat{i}\hat{j})^* = \hat{j}^* \hat{i}^* = \hat{j}\hat{i} = -\hat{i}\hat{j} = -i$$

e così pure si ricava

$$(7) \quad j^* = -j \quad T^* = -T$$

Valgono, conseguentemente a (3) e (4), le:

$$(8) \quad i^2 = -1 \quad j^2 = -1 \quad T^2 = 1$$

$$(9) \quad ij = -ji \quad iT = -Ti \quad jT = -Tj$$

L'algebra a 16 elementi

$1, \hat{i} \hat{j} \hat{k} \hat{T}$ (4 elementi), $\hat{i}\hat{j} \hat{i}\hat{T}$ etc. (6 elementi), $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ etc. (4 elementi), $\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{T}$

contiene una subalgebra pari a 8 elementi ("even subalgebra of a Clifford algebra", Hestenes)

$1, \hat{i}\hat{j} \hat{i}\hat{T}$ etc. (6 elementi), $\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{T}$

riscrivibile a piacimento come formata da tutti i possibili prodotti fra $i \ j \ T$

$1, i, j, T, ij, iT, jT, Tji$

L'elemento Tji conseguentemente alle precedenti proprietà gode delle:

$$(10) \quad (Tji)^* = Tji$$

$$(11) \quad (Tji)^2 = -1$$

Il complesso

$$(12) \quad z = x + iy \quad (\bar{x} = \hat{i}z = x\hat{i} + y\hat{j})$$

si generalizza nello spaziotempo con

$$(13) \quad z = x + iy + jz + T\tau \quad (\bar{x} = \hat{i}z = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} + \tau\hat{T})$$

(senza confondere gli z a primo e secondo membro, sorry).

Vale la proprietà

$$(14) \quad zz^* = x^2 + y^2 + z^2 - \tau^2 \quad (\bar{x}^2 = \bar{x}\bar{x} = zz^*)$$

Sul piano xy i simboli o operatori

$$(15) \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\partial^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

servono rispettivamente a esprimere la derivata e le condizioni di Cauchy Riemann.

Questi si generalizzano in

$$(16) \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} - j \frac{\partial}{\partial z} - T \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\partial^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial \tau}$$

e vale la proprietà

$$(17) \quad \partial \partial^* = \partial^* \partial = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

Alternativamente al simbolo o operatore ∂^* che serve a esprimere la analiticità si può adoperare l'operatore che si ottiene moltiplicando per \hat{i} da sinistra (nota: se $\partial^* f = 0$ anche $\hat{i} \partial^* f = 0$ e viceversa).

L'operatore così ottenuto

$$(18) \quad \hat{i} \partial^* = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} + \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{T} = \bar{\partial}_v$$

è formalmente come si vede un quadrivettore, come \bar{x} .

Eccetera eccetera.

Questa algebra differisce dalla STA per la scelta della base con le proprietà (3). La scelta della STA è una base di vettori "spacelike" $\gamma_k (k = 1,2,3)$ a modulo -1, e un vettore "timelike" a modulo 1. Si ha così una base nello spaziotempo che in luogo delle (3) ha le proprietà:

$$(19) \quad \gamma_k^2 = -1, \gamma_0^2 = 1$$

Così facendo per ottenere una base di tre versori degli assi x, y, z a modulo 1 si devono definire i tre bivettori (Hestenes, [3]):

$$(20) \quad \sigma_k = \gamma_k \gamma_0$$

Hestenes nota esplicitamente le opportunità dell'una o dell'altra scelta ([3], pag.25): "If instead we had chosen $\gamma_k^2 = 1, \gamma_0^2 = -1$ we could entertain the solution $\sigma_k = \gamma_k$, which may seem more natural, because...", perché, dice Hestenes, i vettori nello spaziotempo sarebbero anche vettori dello spazio.

Preferisco mantenere questa scelta più adatta agli ingegneri (versori $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$ a modulo 1, unità immaginaria i , numero complesso $x + iy$, eccetera).

Oltretutto (Doran,[2]) per qualunque delle due scelte le algebre pari sono isomorfe, per cui lavorando nell'algebra pari non cambia niente.

Vorrei infine notare che tutte le dizioni che ho usato come vettore, numero complesso, immaginario, versore eccetera eccetera richiamano mnemonicamente concetti del passato e ci possono talvolta aiutare ma sono sostanzialmente fuorvianti. Tutti gli enti che abbiamo introdotto sono semplicemente numeri, e se vogliamo possiamo correttamente chiamarli "Clifford numbers", soggiacenti alle semplici regole, somma prodotto e divisione, dell'algebra di Clifford. Lo stesso discorso vale per i simboli quali l'asterisco $()^*$ oppure $(\bar{\quad})$ oppure $(\hat{\quad})$ che qui hanno la sola funzione di richiamo mnemonico. Ciò che conta sono solo le proprietà dell'algebra che ho brevemente riassunto.

Bibliografia

- [1] D. Hestenes “A unified language for Mathematics and Physics”, in “Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics”, NATO ASI Series, Reidel (1986)
- [2] C. Doran et al.,”States and Operators in the Spacetime Algebra”, Found. Phys. 23(9), 1239 (1993)
- [3] D. Hestenes, “Space time algebra”, Gordon and Breach (1966)
- [4] S. Gull et al., “Imaginary numbers are not real – the geometric algebra of spacetime”, Found. Phys. 23(9):1175, (1993)
- [5] W. Pauli, “Teoria della relatività”, Boringhieri (1958)
- [6] M.I. Skolnik, “Radar Handbook”, Mc Graw Hill (1970)
- [7] S. Ramo, J. R. Whinnery, T. van Duzer, “Fields and Waves in Communication Electronics”, John Wiley (1994)
- [8] D. Hestenes, “Quantum mechanics from self – interaction”, Found. Phys. 15, 63-87 (1985)
- [9] D. Hestenes, “Zitterbewegung modeling”, Found. Phys. 23, 365-387,(1993)
- [10] D Hestenes, “The zitterbewegung interpretation of quantum mechanics”, Found. Phys. 20, 1213-1232 (1990)
- [11] D. Hestenes, “Clifford Algebra and the interpretation of quantum mechanics”, in “Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics”, NATO ASI Series, Reidel (1986)
- [12] D. Hestenes, “Space-time structure of weak and electromagnetic interactions”, Found. Phys. 12, 153-168 (1982)
- [13] D. Hestenes, “Mysteries and Insights of Dirac Theory”, available on line at <http://modelingnts.la.asu.edu> .
- [14] D. Hestenes, “Spacetime calculus”, available on line at <http://modelingnts.la.asu.edu> .
- [15] G. Bettini, “Algebra di Clifford ed equazione di Dirac per i campi in guida”, available in vixra.