Солитонная интерпретация квантовой теории

Борис Славин

Аннотация. В настоящей статье предлагается интерпретация квантовой физики на основе теории солитонов. Согласно такой интерпретации, элементарная частица (в частности, электрон) является солитонным решением системы нелинейных уравнений, при этом линейные уравнения квантовой механики для волновых функций представляют собой граничные условия наличия солитонных решений. Выдвигается гипотеза, что нелинейные уравнения для квантового электрона представляют собой обычные уравнения Максвелла, в которых плотность заряда и тока выражается через квадратичные комбинации величин напряженностей электромагнитного поля. Комплексная волновая функция, которая описывает движение электрона, в такой постановке является обычной электромагнитной волной, где реальная часть – напряженность электрического поля, а мнимая – напряженность магнитного поля. Солитонные уравнения, уравнения Максвелла и квантовые уравнения легко записываются с использованием 3+1 матриц Паули, что свидетельствует о том, что 3+1 система координат пространства и времени является естественной реализацией мира частиц – волновых солитонов. Предложенная интерпретация позволяет объединить как копенгагенскую интерпретацию, так и теорию «скрытых» переменных Бома.

Ключевые слова: квантовая теория, солитоны, нелинейные уравнения Максвелла, матрицы Паули, волновые функции, элементарные частицы

Введение

Квантовая теория имеет развитый и непротиворечивый математический аппарат, который абсолютно точно описывает все известные факты и следствия из них. Однако при этом основная, так называемая «копенгагенская» интерпретация квантовой теории, сформулированная в работах Нильса Бора и Вернера Гейзенберга, не является наглядной и интуитивно понятной. Проблема заключается в том, что уравнения квантовой механики записываются для волновой функции, а физические величины, характеризующиеся частицу (координата, импульс, энергия) являются усредненными по квадрату волновой функции. Именно это усреднение и привело создателей квантовой механики к вероятностной интерпретации квантовых явлений. В своей нобелевской лекции Гейзенберг говорил [1]: «Статистический характер законов квантовой механики, однако, становится очевидным в том, что точное изучение энергетических условий делает невозможным одновременное отслеживание конкретного события в пространстве и времени». Полемизируя с ним, Альберт Эйнштейн с соавторами [2] ссылался на то, что физическая реальность должна описываться предсказуемыми величинами. Поскольку волновая функция не позволяет однозначно определить импульс и координату частицу, она «не дает полного описания физической реальности», и необходима другая теория, которая даст такое описание.

Адепты же статистической интерпретации настаивали, что физика микромира, описываемая квантовыми уравнения, существенно отличается от макромира, в котором мы живем, и управляется своими, отличными от привычных нам законов. Бор писал [3]: «Решающим моментом, однако, является то, что в этой связи не может быть и речи о возвращении к способу описания, который в большей степени удовлетворяет привычным требованиям в отношении наглядного представления взаимосвязи между причиной и следствием». Гейзенберг в книге «Физика и философия. Часть и целое» [4] достаточно подробно излагает формулировки противников копенгагенской интерпретации, но свой критический анализ заканчивает фразой: «Онтология материализма основывалась на иллюзии, что в атомную область можно экстраполировать способ существования, непосредственную действительность окружающего нас мира. Но эта экстраполяция невозможна».

Впоследствии многие ученые пытались статистической природе квантовой теории дать объяснение. Самое популярная трактовка невозможности одновременного измерения импульса и координаты частицы обычно строится на невозможности исключить влияние измерения. Определение точной координаты частицы вносит такое искажение, что величина импульса становится уже непредсказуемой. Макс Борн в своей философской работе [5], посвященной объяснению статистической природы квантового мира писал: «Наблюдение атомных явлений требует приборов такой чувствительности, что их реакция при проведении измерений должна приниматься во внимание, и, поскольку эта реакция подчиняется тем же квантовым законам, что и наблюдаемые частицы, вводится определенная степень неопределенности, которая запрещает детерминированное предсказание». Однако соотношение неопределенности является следствием волнового характера уравнений, а не квантовой теории: чем меньше область, в которой локализована волна, тем шире ее частотный спектр. И следовательно проблема опять же в интерпретации волновой функции – является ли она физическим явлением или функцией для расчета вероятности.

Помимо объяснения статистической природы квантового мира через влияние измерений стоит отметить еще несколько интерпретаций. Одна из таких интерпретаций, основанная на квантовых ансамблях, была предложена российским ученым Дмитрием Блохинцев (Гейзенберг также упоминал эту идею). Согласно этой интерпретации, необходимо рассматривать не отдельные квантовые частицы, а их совокупность – ансамбли, и тогда статистическое поведение будет касаться большого множества частиц, что является вполне наблюдаемым и объяснимым поведением: «волновая функция не есть величина, определяющая статистику какого-либо специального измерения; она является величиной, определяющей статистику квантового ансамбля» [6]. Ансамблевый подход использовал Питер Холланд, пытаясь «примерить» копенгагенскую интерпретацию с интерпретацией Луи де Бройля и Бома [7]. Аналогичная, но более экзотичная интерпретация была предложена Хью Эвереттом [8], который вместо влияния процесса измерения предложил рассматривать реальную систему как суперпозицию бесконечного числа квантовых волновых систем, где «все элементы суперпозиции существуют одновременно, и весь процесс является совершенно непрерывным». Позднее эта идея легла в основу так называемой много-мировой концепции [9].

Гейзенберг разделил [4] всех ученых, которые не соглашались с основной (копенгагенской) интерпретацией квантовой теории на три группы. В первую группу он отнес тех, кто предлагает различные трактовки, которые не затрагивают физическую сущность квантовой теории, а лишь касаются ее философского осмысления. Во вторую группу он отнес тех ученых, которые не спорят с экспериментальными подтверждениями копенгагенской школы, но пытаются найти критические моменты в самой квантовой теории. И наконец к третьей группе Гейзенберг отнес тех, кто как он пишет «выражает скорее свое общее недовольство результатами копенгагенской интерпретации и особенно ее философскими выводами, не выдвигая определенных контрпредложений». К этой группе он отнес в том числе и Эйнштейна, который, выступая против статистического характера квантовой физики, восклицал в одном из своих писем, что «Бог не играет в кости со вселенной» [10].

По мнению Гейзенберга ни одна из этих групп противников копенгагенской школы не имеет шансов на успех, и надо просто смириться с тем, что природа на микроуровне устроена совершенно по-другому, и ее невозможно свести к тем представлениям о природе, которые человек имеет на макроуровне. А следовательно, и не стоит искать каких-либо интерпретацией помимо копенгагенской. Гейзенберг оказался прав – после бурных дебатов первых десятилетий развития квантовой теории число активных противников копенгагенской школы сильно поубавилось. В последнее время появляются либо новые методологии и фреймворки статистической теории [11], своего рода нео-копенгагенская интерпретация, либо исследуются различные философские аспекты интерпретации квантовой теории [12]. И все же новая интерпретация квантовой теории возможна, чему и посвящена данная статья.

1. «Скрытые» переменные и роль волновой функции

Наверное, самой известной гипотезой, которая стала альтернативой копенгагенской, является гипотеза Давида Бома о «скрытых» переменных. Согласно этой гипотезе, на микроуровне движение частиц и полей описывается «скрытыми» переменными так, что можно одновременно определить и ее координату, и ее импульс, как в классической физике. Но в силу того, что на макроуровне мы вмешиваемся в систему и усредняем часть «скрытых переменных», описание мира становится неполным, и в частности получаются соотношения неопределенности. Хотя полностью учесть все переменные атомной структуры нельзя, но всегда есть возможность более детально описать структуру микромира. Бом пишет [13]: «Нам никогда не следует ожидать получения полной теории этой структуры, потому что почти наверняка существует больше элементов, чем мы, возможно, можем знать на любой конкретной стадии научного развития. Однако в принципе в конечном счете может быть обнаружен любой указанный элемент, но никогда не все из них».

Гипотеза «скрытых» переменных должна была решить проблему нарушения локального реализма в квантовой механике, которая известна как парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена [14]. Взаимодействие двух волновых функций, описывающих квантовые частицы (например, при рассеянии), носит нелокальный характер, поскольку волновые функции не имеют физического смысла, и не ограничены скоростью распространения, как это имеет место в случае взаимодействия самих частиц, включая фотоны.

Именно поэтому сторонники гипотезы «скрытых» переменных считали, что проблема с отсутствия локальности при взаимодействии квантовых частиц связана лишь с тем, что нам неизвестны дополнительные переменные, от которых зависит волновая функция.

Проблема локального реализма для квантовой теории долгое время не могла быть решена экспериментально, пока в 1964 году Джон Стюарт Белл не предложил механизм проверки. Он вывел численные условия, названные неравенствами Белла, которые должны выполняться в случае, если у взаимодействующих волновых функций есть дополнительные переменные [15]. Эксперименты, которые проводились на основе методики Белла показали, что локальный реализм не выполняется при взаимодействии квантовых частиц (в частности, фотонов). Эти эксперименты улучшались и проверялись вплоть до последнего времени (в 2022 году экспериментаторы Ален Аспект, Джон Клаузер и Антон Цайлингер получили за это даже Нобелевскую премию [16]), и все результаты были однозначны – «скрытых» переменных не существует, копенгагенская интерпретация является единственно верной.

Однако, результаты экспериментов по проверке неравенства Белла свидетельствуют лишь о том, что «скрытых» переменных нет в волновой функции, и именно линейные уравнения квантовой механики не удовлетворяют принципам локального реализма. Но это не означает, что не существует другого описания динамики элементарных частиц, без линейного уравнения для волновых функций. Просто такого описания пока не найдено. Одно из предположений, альтернативных «скрытым» переменным, является предположение о том, что имеется иное измерение пространства-времени, в котором волновая функция имеет реалистичную природу. Алисса Ней в своей книге [17] пишет: «…квантовые теории говорят нам о том, что кажущиеся пространственно разделенными объекты, соединенные несводимыми отношениями квантовой запутанности и способные мгновенно влиять друг на друга на пространственных расстояниях, на самом деле являются проявлениями более глубокой, многомерной реальности, в которой пространственная неразделимость и нелокальное влияние исчезают».

Надо сказать, что поиски физиками возможностей отказа от уравнений для волновых функций, нарушающих локальный реализм, ведутся давно, хотя и тщетно. Так Дмитрий Блохинцев описывал свои поиски таких решений следующим образом [6]. Уравнение Шредингера для одного электрона записывается через волновые функции ψ:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + V\psi ,$$

которые можно представить в виде произведения квадратного корня плотности заряда ρ и экспоненты от вещественной функции действия θ таким образом: $\psi = \sqrt{\rho}\cdot e^{i\frac{\theta}{\hbar}}$. Такой вид автоматически приводит к соотношению $\psi\cdot\psi^* = \rho$. Подставляя такой вид волновой функции в уравнение Шредингера и разделяя действительную и мнимую составляющие, можно получить два уравнения:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\frac{1}{m}\vec{\nabla}\theta\right) = 0$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}\theta)^2 + V + \frac{\hbar^2}{m}\left[\frac{\vec{\nabla}^2\rho}{\rho} + \frac{(\vec{\nabla}\rho)^2}{\rho^2}\right] = 0$$

Первое уравнение описывает закон сохранения заряда, где величина $\vec{j} = \rho\frac{1}{m}\vec{\nabla}\theta$ является плотностью тока, а второе уравнение для функции действия θ является нелинейным. Именно нелинейность второго уравнения по мнению Блохинцева не позволяет использовать его для описания динамики электрона. При такой записи нельзя объяснить эффект суперпозиции волн, который следует из линейности квантовых уравнений. Вместе с тем, стоит отметить, что появление нелинейных уравнений при переходе к реальным физическим величинам само по себе имеет важное значение. Далее мы покажем, что нелинейность не только не является проблемой, а наоборот – может порождать решения, в которых волновые функции и их суперпозиция будут частью решения нелинейных уравнений.

2. Волновой дуализм и теория солитонов

Предлагая гипотезу «скрытых» переменных, Д. Бом считал, что элементарная частица представляет собой именно частицу, на которую действует волновая функция. Другой точки зрения придерживался Луи де Бройль, который еще в 20-х годах прошлого века считал, что частица должна иметь волновую природу [18]. Не случайно его идеи легли и в основу волновых уравнений, выведенных Шредингером. Луи де Бройль искал волновую интерпретацию квантовой теории. Принцип дополнительности координаты и импульса является следствием волнового уравнения, и, если бы волновые уравнения описывали частицу, проблем с интерпретацией соотношений неопределенности бы не было. Однако найти решения, которые бы реализовывали дуализм волны-частицы, не получалось. Один из вариантов его поиска был связан с описанием волны-пилота, в которой распространяется частица, что больше соответствовала теории Бома.

Интересно, что тот самый Белл, который вывел условия проверки локального реализма, и неявно помог торжеству копенгагенской школе, высоко оценивал работы Луи де Бройля. В своей статье [19] Белл восклицает: «Почему изображение пилотной волны игнорируется в учебниках? Не следует ли учить этому не как единственному способу, а как противоядию от преобладающего самодовольства? Чтобы показать, что неопределенность, субъективность и индетерминизм навязаны нам не экспериментальными фактами, а преднамеренным теоретическим выбором?». Надо отдать должное Луи де Бройлю, в конце своей жизни он вернулся к изначальной трактовке частицы именно как волны, имеющей свойства частицы. Но найти решение так и не смог.

В то же время дуализм волны и частицы хорошо известен в теории солитонов. Единственное отличие от квантовой механики заключается в том, что в теории солитонов волновые уравнения обязательно должны быть нелинейны, именно нелинейность является условием формирования устойчивого пакета волн, распространяющегося подобно частицы. Вообще говоря, нелинейность в распределенной среде часто может служить условием формирования устойчивых волн или фронтов (например, при распространении разрядов в низкотемпературной плазме [20]), однако уединенные волны солитонов обладают не просто свойствами прямолинейного устойчивого распространения, но и удовлетворяют законам сохранения импульса, энергии и т.п., в том числе и при взаимодействии друг с другом. Такие уникальные свойства связаны с особенностью солитонов рассеивать волны таким образом, чтобы быть для них «прозрачными». Именно эта особенность и будет ниже использована для солитонной интерпретации квантовой теории.

Теория солитонов имеет давнюю историю, начавшуюся еще с конца 19 века [21]. Однако только в 1967 году Клиффордом Гарднером с коллегами [22] был найден метод получения аналитических решений солитонных решений, который положил начало огромному числу исследований как в области математики, так и в прикладных областях [23]. В настоящее время сфера применения солитонов широка, на основе солитонных решений моделируют нелинейные процессы как в гидродинамике (где, собственно, солитон и был впервые описан Джоном Скоттом Расселом), так и в оптике [24]. Солитонные решения используются в медицине для моделирования нервных импульсов [25], в физике плазмы [26] и даже для описания нелинейных процессов в электрических линиях передач [27].

Метод, которым удалось получить большое число аналитических решений, основан на решении обратной задачи рассеяния. Предполагаемое решение нелинейного уравнения рассматривается как потенциальный барьер, на котором рассеиваются волны, и вычисляются собственные значения связанных состояний. Наличие связанных состояний как раз и свидетельствует о возможности существования солитонного решения. А уже по собственным значениям восстанавливается само решение нелинейного уравнения. Удивительно, но, как и в квантовой теории, очень мало, кто из исследователей солитонов осмысливает сам метод обратной задачи рассеяния (МОЗР). Наверное, дальше всех в понимании смысла МОЗР продвинулись Абловиц и Сигур в своей книге «Солитоны и метод обратной задачи» [28], проведя аналогию между методом преобразования Фурье для линейных дифференциальных уравнений и МОЗР для нелинейных уравнений.

Рассмотрим эту аналогию на примере одномерных солитонов, распространяющихся вдоль оси x в течение времени t. Метод прямого преобразования Фурье предполагает поиск решений дифференциальных уравнений в виде суперпозиций собственных функций $\tilde{\varphi}$, удовлетворяющих соотношениям: $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\varphi} = i \cdot k \cdot \tilde{\varphi}$ и $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi} = i \cdot \omega \cdot \tilde{\varphi}$, где k – волновое число, ω – частота, а i – мнимая единица. Подставляя собственные функции $\tilde{\varphi} = \mathrm{C}(\omega, k) \cdot e^{i\omega t + ikx}$ в линейные дифференциальные уравнения, множители, зависящие от координаты и времени, сокращаются, и можно определить связь волновых чисел с частотой, называемую дисперсионным соотношением: $\omega\,(k)$. В общем случае (например, для двумерных или трехмерных уравнений) вместо тригонометрических функций используются другие специальные функции. Дисперсионное соотношение позволяет восстановить искомое решение как интеграл по собственным функциям, а такая операция называется обратным преобразованием Фурье.

Нетрудно понять, что в случае нелинейных уравнений метод преобразования Фурье не будет работать, поскольку собственные функции из решений линейных уравнений в квадратичных или иных нелинейных членах в общем случае не будут сокращаться при подстановке. Однако можно попробовать найти такие собственные функции, которые бы удовлетворяли если не всем, то хотя бы определенному типу нелинейных уравнений. Для этого используются аналогичные уравнения для собственных функций, но вместо волнового числа и частоты берутся величины (K и Ω), являющиеся операторами (например, представимые в матричном в формате), коммутатор которых $[K\ ,\Omega] =\ (K \cdot \Omega - \Omega \cdot K)$ не равен нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\varphi} = i \cdot K(\zeta, x, t) \cdot \tilde{\varphi} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi} = i \cdot \Omega(\zeta, x, t) \cdot \tilde{\varphi}, \tag{3}$$

где ζ – комплексное волновое число. Для того, чтобы эти соотношения были совместны, необходимо, чтобы удовлетворялось равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t}K\ -\ \frac{\partial}{\partial x}\Omega\ + i \cdot [K\ ,\Omega] = 0, \tag{4}$$

которое получается путем дифференцирования уравнения (2) по t и уравнения (3) по x, и приравнивания правых частей.

Из вида уравнения (4) становится понятно, почему величины K и Ω не должны коммутировать между собой. Если они коммутируют, т. е. $[K\ ,\Omega] = 0$, мы получим, что K и Ω должны быть либо постоянными, что соответствует преобразованию Фурье, либо иметь слишком простые зависимости от x и t. Если же матрицы K и Ω не коммутируют ($[K\ ,\Omega] \neq 0$) в общем случае уравнение (4) является нелинейным и в зависимости от вида матриц описывает большой класс уравнений, в том числе и солитонных. Именно для нелинейных уравнений типа (4) и можно построить аналог преобразования Фурье, где уравнения (2) и (3) будут играть роль собственных функций.

Особенностью собственных функций МОЗР является то, что они обязательно представляют собой вектора (столбцы), поскольку величины K и Ω – операторы (матрицы), т.е. такие собственные функции состоят минимум из двух значений, как представлено ниже:

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Если матрицу $K(\zeta, x, t)$ представить в виде:

$$K(\zeta, x, t) = \begin{pmatrix} -\zeta & -iq(x,t) \\ -ir(x,t) & \zeta \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где $r(x,t)$ и $q(x,t)$ - функции, составляющие нелинейное уравнение, то при $r(x,t) = -1$, можно, в частности, получить солитонное уравнение Кортевега - де Фриза, а при $r(x,t) = -\, q^*(x,t)$ нелинейное уравнение Шредингера [28].

Уравнения (2), (3) линейны по $\tilde{\varphi}$ и хорошо известны (как раз благодаря квантовой теории). Величина в правой части обычно представляет собой потенциал, и решение таких уравнений можно свести к задаче рассеяния волновой функции на потенциале. Из теории таких уравнений известно, что при рассеянии на потенциале могут образовываться такие связанные состояния, в результате которых волна проходит через потенциал без искажения формы (может быть, с изменением фазы). Это возможно как раз благодаря с одной стороны нелинейности, которая «деформирует» волны, а с другой – тому, что собственная функция описывается не одной, а двумя волнами $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$, деформации которых компенсируют друг друга. Понятно, что такой эффект может происходить только на определенных потенциалах.

Именно эта аналогия и была использована в МОЗР. Если можно найти такие решения для $r(x,t)$ и $q(x,t)$, которые с одной стороны локализованы в пространстве (быстро уменьшаются на бесконечности), а с другой стороны «прозрачны» для волновых функций $\tilde{\varphi}$, то из суперпозиции этих функций и можно получить решение, которое будет описывать солитонное решение. Таким образом в рамках МОЗР сначала решается задача рассеяния (ищутся функции, для которых переменная часть уравнений (2) «прозрачна»), а затем с учетом дисперсионных соотношений решается обратная задача для нахождения полного решения. Можно сказать, что МОЗР находит солитонное решение, которое состоит из собственных функций, «прозрачных» самому решению. Именно поэтому солитон имеет такую уникальную устойчивость: распространяется с одинаковой скоростью, не меняя формы (с точностью до фазы), и даже при «столкновении» с другим солитоном после интерференции восстанавливает скорость и форму.

Отметим важный момент теории солитонов. Связанные состояния появляются при наличии дискретного спектра волновых чисел, имеющего мнимую компоненту. Так в случае нелинейного уравнения Шредингера это соответствует наличию мнимой части волнового числа $\eta = Im(\zeta)$ [28]. При этом наличие связанного состояния не зависит от положения солитона, поскольку МОЗР описывает рассеяние волновых функций, асимптотики которых берутся вдали от солитона, а сам солитон локализован в небольшой области. Если проинтегрировать уравнения (2), (3) только по сплошному спектру $\xi = Re(\zeta)$ таким образом:

$$\varphi_{1,2}(x;t) = \int e^{\pm i\xi x} \cdot \tilde{\varphi}_{1,2}(\xi;x;t) d\,\xi\,,$$

оставив значения дискретного спектра в качестве параметра, то для таких интегральных волновых функций $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ (которые мы будем писать без тильды сверху), по всей видимости можно будет получить линейное уравнение, зависящее только от волновых чисел связанных состояний солитона η:

$$\hat{P}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \varphi = F(\eta) \cdot \varphi, \qquad (7)$$

где $\hat{P}$ – оператор, представляющий собой функцию от производных и соответствующий дисперсионному соотношению для сплошного спектра волновых чисел, а $F(\eta)$– функция, зависящая от волновых чисел связанных состояний. Это линейное уравнение описывает волновые функции, для которых солитоны будут «прозрачны», а дискретный спектр представлен значением η. Именно это уравнение может претендовать на аналог уравнений квантовой теории.

Особым свойством солитонов, помимо того, что они описывают уединенные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью, является то, что солитонные уравнения имеют бесконечное число законов сохранения [29]: закон сохранения плотности, энергии, импульса и т.п. Т.е. они полностью обладают той самой дуальностью волны и частицы, о которой говорил Луи де Бройль. Однако несмотря на то, что математический аппарат решения солитонных уравнений развит сегодня очень хорошо, уникальные аналитические решения найдены лишь для одномерных уравнений. В работе Бориса Маломеда [30] проводится сравнительный анализ исследуемых в литературе двух- и трехмерных решений, и показано, что в отличие от одномерных уравнений для них пока не найдено стабильных решений. В случае трехмерных солитонов возникает вихревая составляющая, которая еще больше увеличивает нестабильность.

В то же время отсутствие решений для трехмерных солитонов может как раз свидетельствовать о том, что в отличие от одномерного случая в трехмерном пространстве таких решений очень мало, может быть и вообще оно единственно. И его еще предстоит найти. Однако уже сейчас можно сказать, что частицы вполне могут быть описаны нелинейными уравнениями, при этом классические квантовые уравнения, которые линейны, скорее всего являются условием существования солитонного решения, т.е. описывают собственные функции вдали от самого солитона. Аналогия между квантовыми волновыми функциями и собственными функциями солитонных решений становится еще более очевидной, учитывая тот факт, что решение солитонных уравнений может быть выражено через квадраты его собственных функций [31].

3. Матрицы Паули и 3+1 пространство-время

В теории солитонов естественным образом появляются комплексные матрицы 2x2, которые могут быть выражены через матрицы Паули:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Любая комплексная матрица 2x2 может быть записана следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2} \cdot \sigma_0 + \frac{b+c}{2} \cdot \sigma_1 + i\,\frac{b-c}{2} \cdot \sigma_2 + \frac{a-d}{2} \cdot \sigma_3$$

В частности солитонное уравнение (2) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi = -i\zeta\sigma_3 \cdot \varphi + \left[\frac{q+r}{2} \cdot \sigma_1 + i\,\frac{q-r}{2} \cdot \sigma_2\right] \cdot \varphi \qquad (2a)$$

В этом уравнении неслучайно нелинейные члены, зависящие от q и r, выражаются через одни матрицы Паули, а член с волновым числом ζ через другую. Хотя уравнение и одномерное, но оно имитирует распространение волны с тремя перпендикулярными поляризациями, которым соответствуют матрицы Паули. Вообще говоря, матрицы Паули описывают 3+1 мерное пространство, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – пространственные координаты, а σ_0 – координата времени. Четырехмерный вектор $\hat{A} = (A_0; A_1; A_2; A_3)$ может быть записан как двумерная матрица:

$$\hat{A} = A_0 \cdot \sigma_0 + A_1 \cdot \sigma_1 + A_2 \cdot \sigma_2 + A_3 \cdot \sigma_3 \qquad (8)$$

Поскольку матрицы Паули эрмитово сопряженные $\sigma_\mu = \sigma_\mu{}^+$ (где μ = 0, 1, 2, 3), в случае действительных значений A_μ матрица $\hat{A}$ – тоже эрмитова сопряжена.

По всей видимости для уравнения трехмерного солитона выражение через матрицы Паули будет более естественным, чем для одномерного. Волны, которые отражаются от солитона будут рассеиваться в трех направлениях, но за счет интерференции результирующая волновая функция окажется такой, что солитон для нее будет «прозрачным». Скорее всего вихревая составляющая также будет играть значимую роль в интерференции волновых функций.

Однако матрицы Паули играют роль не только в теории солитонов, но и в квантовой механике, в том числе релятивистской. Квантовые уравнения столь же естественным образом записываются через матрицы Паули. Если мы возьмем четырехкомпонентную волновую функцию электрона, описываемую комплексными функциями $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ и составим из нее два двухкомпонентных вектора:

$$\psi^+ \equiv \binom{\psi_1}{\psi_2} = \binom{\varphi_1 + \varphi_3}{\varphi_2 + \varphi_4} \text{ и } \psi^- \equiv \binom{\psi_3}{\psi_4} = \binom{\varphi_1 - \varphi_3}{\varphi_2 - \varphi_4}, \qquad (9)$$

можно записать квантовые уравнения для релятивистского электрона массой m следующим компактным образом:

$$\widehat{D}_+ \psi^+ = -i\frac{mc}{\hbar}\psi^- \qquad (10)$$

$$\widehat{D}_- \psi^- = -i\frac{mc}{\hbar}\psi^+ \qquad (11)$$

где c – скорость света, ħ – постоянная Планка, и введено обозначение:

$$\widehat{D}_\pm = \frac{\partial}{\partial x_0} \pm \sum_{k=1}^{3} \sigma_k \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (12)$$

Здесь $x_0 = ct$, x_1, x_2, x_3 – временная и пространственные координаты.

Для описания релятивистского электрона обычно используют матрицы Дирака размерностью 4х4, что позволяет объединить (10) и (11) в одно уравнение. Однако, это излишне, и лишь снижает универсальность, поскольку матрицы Дирака в большей степени состоят из нулей. Для того, чтобы релятивистское уравнение сделать компактным, достаточно составить из волновых функций матрицу 2х2, например так:

$$F = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_4^* \\ \psi_2 & \psi_3^* \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где * - обозначает комплексное сопряжение. И тогда уравнение Дирака можно также записать в виде одного уравнения только с использованием матриц Паули:

$$\widehat{D}_+ F = -i\frac{mc}{\hbar}\tilde{F}^\dagger \sigma_3 \qquad (13)$$

Здесь знак † - обозначает эрмитово сопряжение, а знак тильда означает изменение знака пространственных координат, причем $F\tilde{F} = detF$. В случае, когда F определяется по формуле (12), $\tilde{F}^\dagger$ будет равно:

$$\tilde{F}^{\dagger} = \begin{pmatrix} \psi_3 & -\psi_2^* \\ \psi_4 & \psi_1^* \end{pmatrix}$$

Матрица σ_3 свидетельствует о том, что спин электрона направлен вдоль оси z. В общем случае вместо σ_3 может быть любая эрмитово сопряженная матрица Паули, определитель которой равен 1, соотвествующая единичному вектору направления спина. Можно показать, что величина $tr\left\{\widehat{D}_+\left(F \cdot F^{\dagger}\right)\right\} = 0$, и, следовательно, величину $F \cdot F^{\dagger}$ можно интерпретировать как 4-х вектор плотности заряда-тока. При этом мы полностью остаемся в алгебре матриц Паули.

Уравнение (13) можно записать в близкой по форме к уравнениям Дирака, если ввести дополнительную матрицу G:

$$G = \tilde{F}^{\dagger}\sigma_3 \tag{14}$$

Тогда квантовые уравнения для электрона будут иметь вид:

$$\begin{cases} \widehat{D}_+ F = -i\frac{mc}{\hbar}G \\ \widehat{D}_- G = -i\frac{mc}{\hbar}F \end{cases} \tag{15}$$

Правда, в этом случае F и G в отличие от векторов не независимы, а связаны формулой (14)

И, наконец, последнее удивительное свойство матриц Паули. Они являются также естественным инструментом и для описания уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Для этого запишем сумму величин напряженностей электрического E_k и магнитного H_k полей, а также величины заряда ρ и тока j_k через матрицы Паули:

$$\widehat{M} = \sum_{k=1}^{3}(E_k - iH_k) \cdot \sigma_k;\ \widehat{Q} = \rho + \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{3} j_k \cdot \sigma_k \tag{16}$$

Тогда уравнения Максвелла запишутся в такой же компактной форме, как и квантовые уравнения:

$$\widehat{D}_-\widehat{M} = 4\pi\widehat{Q} \tag{17}$$

При этом величины напряженностей электромагнитного поля также легко выразить через потенциал $\hat{A} = A_0 + \sum_{k=1}^{3} A_k \cdot \sigma_k$:

$$\widehat{M} = \widehat{D}_+ \hat{A} \tag{18}$$

Поскольку величина $\widehat{M}$ выражается только через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, выполняется соотношение $Tr\widehat{M} = 0$, что автоматически приводит к калибровочному соотношению: $\frac{\partial}{\partial x_0} A_0 + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} A_k = 0$. Аналогично из условия $Sp\left(\widehat{D}_+ \widehat{D}_- \widehat{M}\right) = 0$ следует равенство $\frac{\partial}{\partial x_0}\rho + \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} j_k = 0$, что соответствует закону сохранения заряда. Заметим также, что уравнения Максвелла, несмотря на то, что они были открыты задолго до квантовой теории, не претерпели изменения в квантовой физике. Более того, они органично вписываются в квантовые уравнения поля, путем добавления к производным потенциала: $\frac{\partial}{\partial x_\mu} + eA_\mu$.

Таким образом алгебра, построенная на матрицах Паули, оказывается естественной и для теории солитонов, и для квантовой теории, и также для теории электромагнитного поля. Такое совпадение можно считать просто удивительным фактом, а можно наоборот – воспринимать как следствие чего-то важного. Этим «важным» скорее всего является возможность существования устойчивых солитонов. Можно сказать, что наличие устойчивых и одинаковых частиц является условием существования всего нашего мира. А значит и 3+1 мерное пространство, в котором мы живем, является следствием того, что именно в такой размерности появляются устойчивые частицы. При этом электромагнитное поле и квантовые уравнения должны описывать динамику этих устойчивых частиц – солитонов.

4. Интерпретация квантовых уравнений

С учетом сказанного выше можно предложить следующую интерпретацию квантовой теории, которая позволит объединить теорию солитонов, теорию квантовых частиц и теорию электромагнитного поля, и при этом наполнить их физическим и понятным смыслом. В квантовой теории плотности заряда и тока представляют собой квадратичную форму волновых функций. Поэтому роль нелинейного уравнения, порождающего солитоны (в частности, электроны) аналогичного (4) скорее всего играют уравнения Максвелла (17), правая часть которых равна квадрату собственных волновых функций солитонного решения. Эти собственные волновые функции аналогичны функциям (5). У этих волновых функций есть физический смысл. Поскольку они описывают волновые функции, удовлетворяющие уравнению Максвелла, они скорее всего представляют собой электромагнитные волны, которые вдали от частицы (где заряд и ток равны нулю) описываются плоскими волнами, в которых вектора напряженностей электрического и магнитного поля перпендикулярны, совпадают по величине и сдвинуты по фазе. Например: $\tilde{\varphi} \sim E_1 + iH_2$, где $E_1 = B \cdot \cos(\omega t - k_3 x_3)$ и $H_2 = B \cdot \sin(\omega t - k_3 x_3)$.

Нетрудно видеть, что произведение волновых функций $\tilde{\varphi} \cdot \tilde{\varphi}^*$ не только является вещественным, как и должно быть для заряда, но и не зависит от волновых чисел. Можно возразить, что число комбинаций из векторов напряженностей электрического и магнитного полей равно 6 (столько можно составить пар из перпендикулярных векторов электромагнитного поля), а волновые функции имеют четыре величины. По всей видимости, две комбинации электрических и магнитных полей связаны с вихревой составляющей, которая возможно отвечает за описание спина электрона, в результате чего одно из направлений становится выделенным.

Заметим, что волновые функции $\tilde{\varphi}$ – это не те волновые функции, которые участвуют в квантовых уравнениях. Квантовые уравнения для электрона целесообразно интерпретировать как уравнения условий существования частиц, а не их описание. Такие волновые функции несут информацию о связанных состояниях (которые для них «прозрачны»), как в уравнении (7), а не о конкретных параметрах солитона, отвечающих, например, за его положение. При этом роль волнового числа, отвечающего за связанное состояние, для электрона скорее всего играет величина: $\eta = \frac{mc}{\hbar}$, значение которой может быть получено только при решении нелинейных уравнений. При этом интегралы по объему (V) квадратов волновых функций нелинейных уравнений и усредненных волновых функций должны быть равны:

$$\int dV\, \tilde{\varphi}\tilde{\varphi}^* = \int dV\, \varphi\varphi^*$$

Это объясняет, почему квантовые уравнения имеет статистическое обоснование. Волновые функции квантовых уравнений описывают условия существования частиц – солитонов, но не сами солитоны. Если эти волновые функции нормировать на единицу (одна частица), то их квадрат будет описывать среднюю вероятность нахождения частицы в той или иной точке. Но поскольку квантовые уравнения линейны, нормировка не меняет сами решения, именно поэтому возможна суперпозиция решений квантовых уравнений, что с точки зрения статистической интерпретации никак не объясняется.

Рассмотрим вариант, как можно получить нелинейные уравнения для электрона. Для этого перепишем уравнения (15), но добавим в них электромагнитный потенциал:

$$\begin{cases} \widehat{D}_+ F = \hat{A}_+ - i\frac{mc}{\hbar} G \\ \widehat{D}_- G = \hat{A}_- - i\frac{mc}{\hbar} F \end{cases} \qquad (19)$$

Здесь введены обозначения:

$$\hat{A}_+ \equiv \hat{A};\ \text{и}\ \hat{A}_- \equiv \tilde{\hat{A}} = \frac{\partial}{\partial x_0} A_0 - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} A_k$$

Потенциалы вещественные, и, следовательно, эрмитовы сопряженные. Уравнение (15) по-прежнему будет удовлетворять равенству (14), при этом потенциалы будут описывать внешнее электромагнитное поле. Однако предположим, что в некоторой небольшой области неравенство (14) не выполняется, а потенциалы тоже не равны нулю только в этой области. Это предположение можно сделать, введя еще одну матричную функцию U, которая равна:

$$U = G - \tilde{F}^{\dagger}\sigma_3 \qquad (20)$$

Тогда, подставляя его в (19) можно получить уравнение для функции, локализованной в небольшой окрестности:

$$\widehat{D}_-\, U = \hat{A}_- - i\frac{mc}{\hbar}\widetilde{U}^{\dagger}\sigma_3 \qquad (21),$$

и если предположить, что величина U – это с точностью до скалярного поля (V) равно электромагнитному полю, т.е.

$$U = \widehat{D}_+\, \hat{A} + V \qquad ,$$

можно получить уравнения электромагнитного поля, в которых правая часть нелинейна:

$$\Box\, \hat{A} = \hat{A}_-\widehat{D}_+\, \hat{A} + \hat{A}_- V - i\frac{mc}{\hbar}(\widehat{D}_-\, \hat{A}_- + V^*)\sigma_3$$

Поскольку электромагнитный потенциал в этом уравнении локализован в пространстве, интеграл правой части по объему, включающему солитон, должен быть равен нулю, а сами поля, по всей видимости, должны быть вихревыми. Именно поэтому добавка U не нарушает квантовые уравнения, а квантовые уравнения в свою очередь не нарушают устойчивость солитона.

На рисунке 1 показано схематично, где выполняются те или иные уравнения (уравнения Максвелла для свободного заряда, нелинейные солитонные уравнения или квантовые уравнения, определяющие условия возникновения солитонов). В заштрихованной области, где в данный момент не присутствует квантовая частица (электрон), выполняются уравнения электромагнитного поля движущейся заряженной частицы. В области, где присутствует электрон, уравнения Максвелла становятся нелинейными и описывают солитон. Квантовые уравнения для усредненных волновых функций справедливы на границе областей, и определяют асимптотику нелинейных уравнений, свидетельствующую о наличии частицы в принципе в какой-либо момент времени. Квантовые уравнения не описывают динамику солитонов, а только условия их формирования (наличие связанных состояний). Такая интерпретация объясняет, почему квантовые уравнения хорошо описывают все квантовые явления, включая рассеяние частиц друг на друге, рождение электрон-позитронных пар и т.д. Все эти явления связаны с различными связанными состояниями волновых функций, и проще всего их описывать линейными уравнениями, которые позволяют рассчитать условия тех или иных процессов.

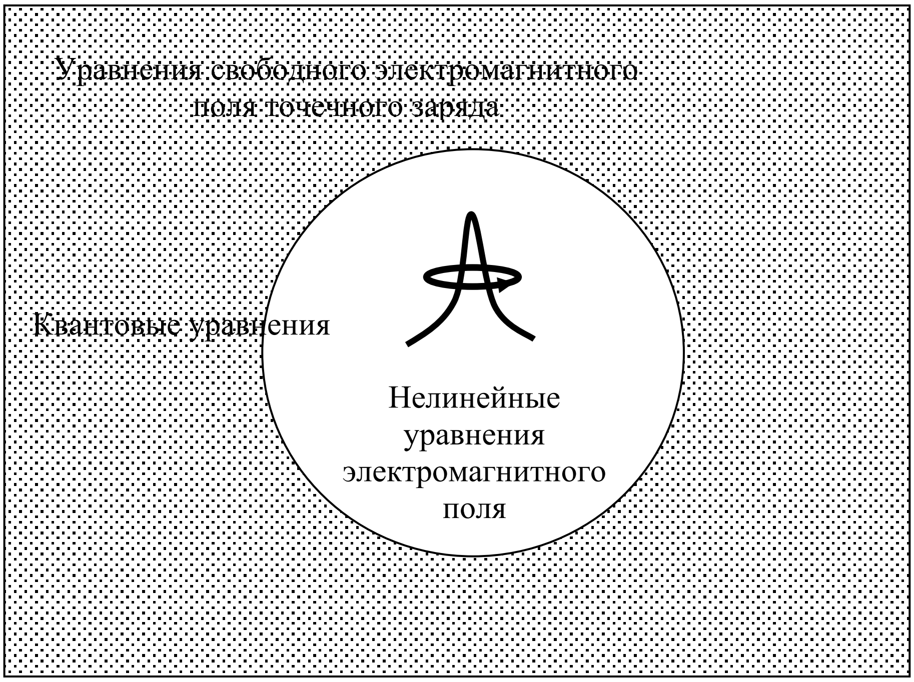

Рис. 1 Области применения различных уравнений

Заметим, что предложенная интерпретация в чем-то похожа на теорию «скрытых» переменных, но у нее есть существенное отличие. Квантовые уравнения описывают волновые функции усредненные только по тем параметрам, которые не влияют на рассеивание реальных электромагнитных волн на частице. Они лишь описывают обязательные условия возникновения солитонных решений. Именно поэтому эксперименты по выявлению «скрытых» переменных при помощи рассеяния не могут выявить ограниченность копенгагенской интерпретации, она будет абсолютно верной. Квантовые уравнения описывают состояние частиц лишь на границе, и поэтому они не могут описать локальное взаимодействие. Отсюда и нарушение локального реализма.

Поскольку динамику самого электрона квантовые уравнения описать не могут, возникает и соотношение неопределенности между координатой и импульсом частицы. Это можно продемонстрировать с помощью того же рисунка 1. Если незаштрихованную область уменьшать, то условие для солитонного решения будет выполняться для все большего спектра импульса (поскольку квантовые уравнения – волновые). Но это соотношение неопределенности касается всего лишь условий существования солитона, а не его динамики. Реальный электрон, описываемый нелинейными уравнениями, имеет конкретный вид (уединенной волны), из которого можно определить как его положение, так и его скорость (импульс).

Надо отметить, что проблема измерения не исчезает в рамках данной интерпретации. Любая попытка «взглянуть» на электрон (т.е. осветить его фотонами или другими частицами), или зафиксировать координату при прохождении узкого отверстия, безусловно повлияет на него, в результате чего волновые функции изменятся. Вместе с тем, если будут найдены нелинейные уравнения, можно найти решения и в условиях влияния измерительного прибора, как классического, так и квантового, что позволит исследовать частицы ничуть не хуже, чем это происходит с классическими телами. Однако описание рассеяния, рождения и поглощения частиц все-равно будет гораздо удобнее стандартными методами на основе волновых функций или операторов. Именно поэтому настоящая интерпретация не отменяет квантовую теорию, а лишь показывает ее место.

5. Заключение

Предложенная интерпретация безусловно является гипотезой до тех пор, пока либо не будут найдены 3+1 мерные нелинейные уравнения для солитонов, либо не будет доказано, что таких уравнений принципиально нет. Однако, если решение описанных выше нелинейных уравнений существует, предложенная интерпретация гармонично объясняет многое из того, что сегодня является загадкой. Первое – становится понятным, почему мы живем в 3+1 мерном, именно в этом мире естественным образом возникают устойчивые образования (частицы), и мир становится таким, каким мы его видим. Второе – становится понятным, почему уравнения Максвелла, которые вроде бы не имеют никакого отношения к квантам, так хорошо вписываются в квантовую теорию поля: они описывают нелинейную динамику тех самых квантовых частицы. Различные элементарные частицы соответствуют различным волновым числам дискретного спектра.

Третье – становится понятным, почему волновые функции записываются в комплексном виде, это естественная запись пар перпендикулярных друг другу векторов напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитных волн, которые не рассеиваются на солитоне (элементарной частице). Именно поэтому имеет место суперпозиция волн, это нормальное условие для электромагнитных волн в свободном пространстве. И наконец четвертое – становится понятной роль квантовых уравнений. Они представляют собой граничные условия существования квантовых частиц, но не описывают их динамику. Если квадраты функций волнового уравнения нормировать на единицу, мы безусловно получим распределение вероятности, но это не значит, что больше ничего мы о квантовой частице сказать не можем. Мы можем полностью описать ее движение с использованием нелинейного уравнения, хотя проблемы, связанные с измерением, остаются.

Предложенная интерпретация не отменяет статистический подход, но говорит о том, что он относится не к самим элементарным частицам, а именно к условиям их существования, а также к условиям, связанны с рассеянием, рождением и поглощением. Это существенно отличается от интерпретации Бома о «скрытых» переменных, поскольку линейные уравнения квантовой теории – не приблизительные, а точные, в них самих нет никаких скрытых переменных. Но они описывают лишь граничные условия для динамики частиц, а реальные частицы представляют собой реальные уединенные волны (солитоны) электромагнитного поля.

Литература

1. Heisenberg W. The development of quantum mechanics // https://www.nobelprize.org/. 1933. URL: https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/heisenberg-lecture.pdf (дата обращения: 09.07.2002).
2. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // Physiacl Review. May 1935. Vol. 47. No. 777-780.
3. Bohr N. Essays 1958-1962 on Atomic Physics And Human Knowledge. New York - London: Interscience Publishers, 1963. 100 pp.
4. Heisenberg W. Physics and Philosophy. The Revolution in Modern Science. New York: Harper & Brothers Publishers, 1958. 206 pp.
5. Born M. Physical Reality // The Philosophical Quarterly. Apr. 1953. Vol. 3. No. 11. pp. 139-149.
6. Блохинцев Д. Принципиальные вопросы квантовой механики. Москва: Наука, 1966. 160 с.
7. Holland P.R. The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics. Cambridge University Press, 1995. 598 pp.
8. Everett H. "Relative State" Formulation of Quantum Mechanics // Reviews of Modern Physics, Vol. 29, No. 3, July 1957. pp. 454-462.
9. DeWitt B.S. Quantum mechanics and reality // Physics Today, Vol. 23, No. 9, 1970. pp. 30-35.
10. Weisberger M. 'God Plays Dice with the Universe,' Einstein Writes in Letter

About His Qualms with Quantum Theory // Space.com. 2019. URL: https:// www.space.com/einstein-letters-quantum-physics.html (дата обращения: 30.08.2022).

11. Omnes R. The interpretation of quantum mechanics. Princeton University Press, 1994. 550 pp.
12. Adlam E. Does science need intersubjectivity? The problem of confirmation in orthodox interpretations of quantum mechanics // Synthese, Vol. 200, No. 522, 2022.
13. Bohm D. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II // Physical Review, Vol. 85, No. 2, January 1952. pp. 180-193.
14. Selleri F, editor. Quantum Mechanics Versus Local Realism. The Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. Springer Science+Business Media, LLC, 1988. 461 pp.
15. Aspect A. Bell’s inequality test: more ideal than ever // Nature, Vol. 398, 18 March 1999. pp. 189-190.
16. Pioneering quantum information science // Nature Computational Science, Vol. 2, November 2022. pp. 687–688.
17. Ney A. The world in the wave function: a metaphysics for quantum physics. New York, NY: Oxford University Press, 2021. 269 pp.
18. Broglie L.D. An introduction to the study of wave mechanics. Phillips Press, 2007. 264 pp.
19. Bell J.S. On the impossible pilot wave // Foundations of Physics, Vol. 12, No. 10, 1982. pp. 989–999.
20. Slavin B., Sopin P. Neutral gas breakdown by gradient ionized waves of negative polarity potential // Teplofizika Vysokikh Temperatur, Vol. 30, No. 1, 1992. pp. 1-11.
21. Allen J.E. The Early History of Solitons (Solitary Waves) // Physica Scripta,

Vol. 57, No. 3, 1998. pp. 436–441.

22. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for Solving the Korteweg-deVries Equation // Physical Review Letters, Vol. 19, No. 19, November 1967. pp. 1095–1097.
23. Manukure S., Booker T. A short overview of solitons and applications // Partial Differential Equations in Applied Mathematics, Vol. 4, No. 100140, December 2021.
24. Dudley J.M., Genty G., Mussot A., Chabchoub A., Dias F. Rogue waves and analogies in optics and oceanography // Nature Reviews Physics, Vol. 1, 2019. pp. 675–689.
25. Heimburg T. The thermodynamic soliton theory of the nervous impulse and possible medical implications // Progress in Biophysics and Molecular Biology, Vol. 173, September 2022. pp. 24-35.
26. Bandyopadhyay P., Sen A. Driven nonlinear structures in fowing dusty plasmas // Reviews of Modern Plasma Physics, No. 28, September 2022.
27. Kengne E., Liu W.M., English L.Q., Malomed B.A. Ginzburg–Landau models of nonlinear electric transmission networks // Physics Reports, Vol. 982, October 2022. pp. 1-124.
28. Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM, 1981. 424 pp.
29. Xu B. (1+1)-dimensional integrable Hamiltonian systems reduced from symmetry constraints of the KP hierarchy // Inverse Problems, Vol. 9, No. 2, 1993. pp. 355–363.
30. Malomed B. Vortex solitons: Old results and new perspectives // Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 399, December 2019. pp. 108-137.
31. Tian H.J., Feng X.J., Liu W.M. Extended KdV equations generated by squared eigenfunction symmetry // Applied Mathematics Letters, Vol. 128, No. 107852, June 2022.