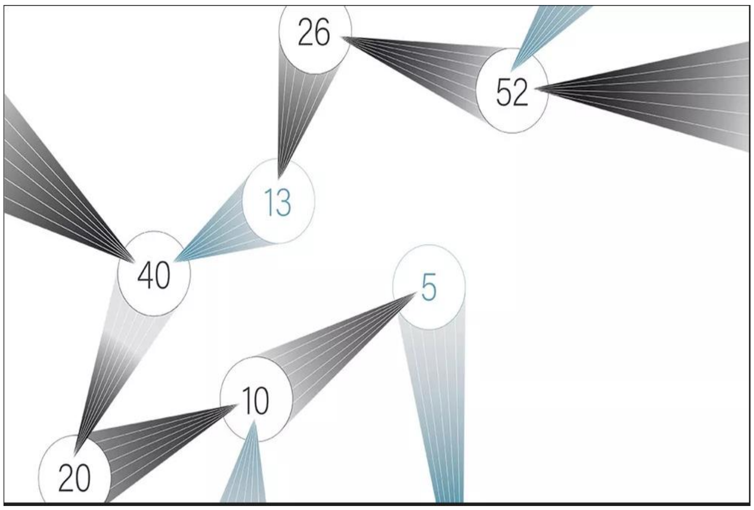


CONJECTURE SYRACUSE-COLLATZ

Exploration, Analyse et Démonstration d'une Énigme Mathématique

RESUME

« Dans l'univers infini des nombres, la conjecture de Syracuse émerge telle une énigme captivante, défiant les conventions mathématiques et suscitant la curiosité des esprits les plus audacieux. »

Auteur

MOSTAFA SENHAJI

I- Introduction

Plongez-vous dans l'univers fascinant de la conjecture de Syracuse, plus communément connue sous le nom de conjecture de Collatz. Depuis sa formulation en 1937 par le mathématicien Lothar Collatz, cette énigme captivante continue de défier les esprits les plus brillants de la communauté mathématique. Malgré sa simplicité apparente, cette conjecture expose des propriétés énigmatiques et des mystères profonds qui ont suscité l'intérêt et la curiosité des chercheurs pendant des décennies.

Dans cet article, nous plongerons dans les origines de cette conjecture, explorant les premières approches qui ont été tentées pour résoudre ce puzzle mathématique. Nous examinerons également les diverses stratégies et résultats obtenus jusqu'à présent, tout en sondant les extensions possibles de cette conjecture à d'autres domaines des mathématiques. Préparez-vous à être entraîné dans un voyage fascinant à travers les profondeurs de la conjecture de Syracuse - Collatz, où la simplicité rencontre la complexité et où les mystères abondent à chaque tournant.

II- Origines

La conjecture de Syracuse tire son nom de la ville de Syracuse, où elle a été formulée pour la première fois par le mathématicien allemand Lothar Collatz en 1937. Collatz a publié cette conjecture dans un article intitulé "Problème 3n + 1 et problèmes analogues", où il a posé la question suivante : "Commencez avec un entier positif n. Si n est pair, divisez-le par 2. Sinon, multipliez-le par 3 et ajoutez 1. Répétez ce processus avec le nouveau nombre obtenu. La conjecture affirme que quelle que soit la valeur initiale de n, cette séquence finira toujours par atteindre 1." Cette conjecture, bien que simple à énoncer, a résisté à toutes les tentatives de preuve ou de réfutation depuis sa formulation.

III- Première approche de la conjecture

- Suite de Syracuse

La suite de Syracuse d'un nombre entier N > 0 est définie par récurrence , de la manière suivante :

-$U_0 = N$

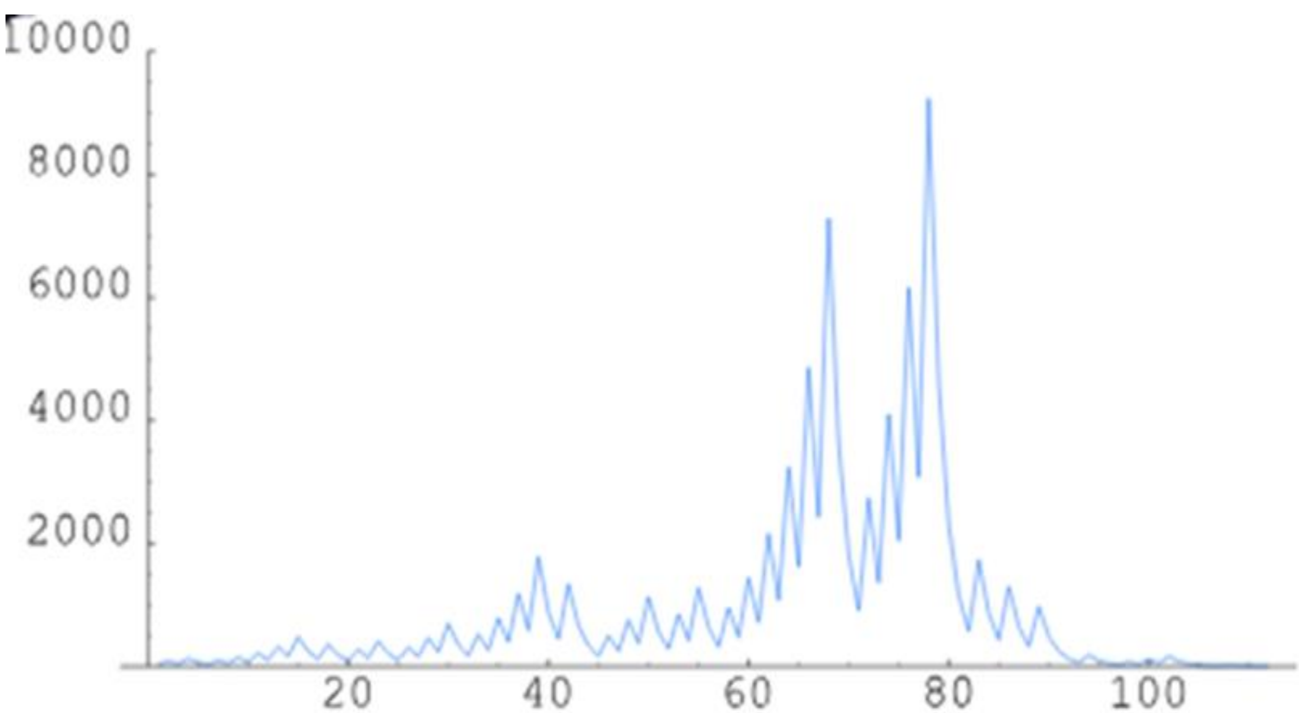
-et pour tout entier n, $U_{n+1} = U_n / 2$ si U_n est pair ou $U_n = 3U_n + 1$ si U_n est impair

- Énoncé de la conjecture

La conjecture affirme que pour tout entier N > 0, il existe un indice n tel que $U_n = 1$

Représentation graphique et Vocabulaire

- **Représentation graphique de la suite pour N = 27**



En examinant graphiquement l'évolution de la suite pour N=15 et N=27, on peut constater que la suite atteint des valeurs élevées avant de revenir à des niveaux plus bas. Les représentations graphiques évoquent l'image d'une chute irrégulière semblable à celle d'une grêle en descente ou à la trajectoire sinueuse d'une feuille emportée par le vent. Cette observation a inspiré l'utilisation d'un langage imagé, introduisant ainsi le concept poétique du 'vol' de la s

On introduit ensuite trois paramètres définis comme suit :

- Le temps de vol : représenté par le plus petit indice $U_n=1$. Il est de 17 pour la suite de Syracuse avec N=15 et de 111 pour la suite de Syracuse avec N=27.
- Le temps de vol en altitude : défini comme le plus petit indice n tel que $U_n<U_0$. Il est de 11 pour la suite de Syracuse avec N=15 et de 96 pour la suite de Syracuse avec N=27.
- L'altitude maximale : correspond à la valeur maximale atteinte par la suite. Elle est de 160 pour la suite de Syracuse avec N=15 et de 9 232 pour la suite de Syracuse avec N=27.

IV- Approches de la conjecture et résultats

Au fil des ans, diverses approches ont été explorées pour tenter de résoudre la conjecture de Syracuse-Collatz. Parmi les plus notables, on peut citer :

➢ Approche binaire

Imaginez une machine fascinante, une sorte de génie mathématique, qui opère selon des règles simples mais mystérieuses. Cette machine, appelée fonction de Syracuse, s'attaque à tout nombre impair avec une détermination implacable jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul chiffre : le mystique "1".

Le fonctionnement de cette machine est aussi élégant que complexe. Tout d'abord, elle prend un nombre impair et le transforme magiquement en un nouveau nombre, en le décalant d'un cran vers la gauche et en ajoutant un "1" à la fin. Ensuite, elle ajoute le nombre original à cette nouvelle création, aboutissant à un résultat trois fois plus grand, auquel elle retranche tout "0" inutile jusqu'à ce que le résultat soit impair.

C'est une danse délicate entre le binaire et l'arithmétique, où chaque itération de la machine révèle de nouveaux mystères et de nouveaux défis à surmonter. Représentée comme une cascade d'étapes mathématiques, cette machine de Syracuse nous emmène dans un voyage captivant à travers les profondeurs du nombre, révélant les secrets cachés de sa nature intrinsèque.

Exemple :

Le nombre de départ choisi est 7. Son écriture en binaire est 111 (car $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$) La séquence qui en résulte est la suivante :

111
1111
10110
10111
100010
100011
110100
11011
101000
1011
10000
11
100

- Approche probabiliste

D'autres ont abordé le problème de manière probabiliste, en utilisant des méthodes statistiques pour analyser le comportement de la suite de Syracuse sur de grands ensembles de nombres. La conjecture de Syracuse, fascine les mathématiciens depuis des décennies. Elle propose une suite itérative simple, mais ses propriétés demeurent en grande partie mystérieuses. Des arguments heuristiques et statistiques suggèrent que les termes de la suite ne peuvent pas croître indéfiniment, mais aucune preuve rigoureuse n'a encore été établie. Des travaux récents, tels que ceux de Terence Tao en 2019, offrent de nouveaux éclairages sur cette conjecture, mais son énigme continue de défier les chercheurs.

Approche calculatoire

Des chercheurs ont également entrepris des calculs informatiques intensifs pour explorer le comportement de la suite de Syracuse sur de vastes plages de nombres, cherchant des schémas ou des tendances qui pourraient fournir des indices sur la validité de la conjecture.

Un énoncé indécidable ?

Malgré les efforts considérables déployés par les mathématiciens pour résoudre la conjecture de Syracuse, les résultats restent limités. Cette situation a soulevé des questions sur la nature même du problème : est-il possible que la conjecture de Syracuse soit indécidable dans le cadre des axiomes mathématiques couramment acceptés, tels que ZFC ? En 1972, John Conway a apporté un éclairage intéressant sur cette question en établissant l'indécidabilité algorithmique pour une classe de problèmes qui inclut naturellement le problème de Syracuse. Bien que cette découverte ne résolve pas directement le problème de Syracuse, elle suggère que certains aspects de ce problème pourraient être intrinsèquement insolubles. Cela souligne l'énorme complexité de cette conjecture et la fascination qu'elle continue d'exercer sur la communauté mathématique.

Extension aux nombres négatifs, aux nombres réels et aux nombres complexes

Outre son application aux nombres entiers positifs, la conjecture de Syracuse-Collatz a également été étendue à d'autres ensembles de nombres tels que les nombres négatifs, les nombres réels et même les nombres complexes. Cependant, les résultats de ces extensions sont encore largement inconnus et font l'objet de recherches continues.

Variantes

Au fil du temps, de nombreuses variantes de la conjecture de Syracuse ont été proposées, introduisant des règles différentes pour la génération de la suite itérative. Certaines de ces variantes ont également été étudiées pour leurs propriétés et leur comportement, offrant ainsi de nouvelles perspectives sur le problème de base.

V- Démonstration

1- Observation

La suite de Syracuse est définie par une règle itérative simple où chaque terme est obtenu en appliquant une opération spécifique à partir du terme précédent. Cette opération dépend de la parité du terme précédent, conduisant à un comportement apparent chaotique malgré la simplicité de la règle

2- **Démontrons que la suite de Syracuse atteint une finitude de termes**

Puisque la suite de Syracuse commence avec un entier positif *N*, par Le théorème d'encadrement pour les entiers on démontre que qu'il existe un *m* tel que tous les termes de la suite seront dans l'intervalle [1, $\mathbf{2^{2m}}$], c'est à dire **pour qu'il que soit U_n terme de la suite de Syracuse, il existe un entier naturel m ≥ 2 / 1 ≤ U_n ≤** $\mathbf{2^{2m}}$.

En plus on sait par théorème qu'il il y a un nombre fini d'entiers naturels dans n'importe quel intervalle donné

Donc la suite de Syracuse est bornée et elle a un nombre fini de terme

3- Démontrant que la suite de Syracuse converge inévitablement vers un cycle

a) Montrons que :

∀ m ≥ 1, m ∈ N, ∃ I ∈ [1, 2^{2m}], I entier impair / 3I+1= 2^{2m}

- m=1 on ‘a intervalle $[1, 2^2]$ et $1 \in [1, 2^2]$ et 3x1 + 1 = 4 = 2^2 donc 1 versifier notre hypothèse

- m=2 on ‘a intervalle $[1, 2^4]$ et $5 \in [1, 2^4]$ ’a 3x5 + 1 = 16 = 2^4 donc 5 versifier notre hypothèse

On Suppose que (∀ m ≥ 1, m ∈ N), ∃ I ∈ $[1, \mathbf{2^{2m}}]$, I entier impair / 3I+1= $\mathbf{2^{2m}}$ et montrons que c’est vrai pour (m+1)

On ‘a ; 3I + 1 = = $\mathbf{2^{2m}}$ ⇒ (3I + 1) x$\mathbf{2^2}$ = = $\mathbf{2^{2m}}$ x $\mathbf{2^2}$ ⇒ 3x(4I) + 4 = = $\mathbf{2^{2m+2}}$

⇒ 3x(4I) + 3+1 = = $\mathbf{2^{2(m+1)}}$ ⇒ 3x(4I + 1)+1 = $\mathbf{2^{2(m+1)}}$ et I impair donc 4I est pair donc (4I+1) est impair

et **1 ≤ I ≤** $\mathbf{2^{2m}}$ ⇒ **1 ≤ 4I ≤** $\mathbf{2^{2m}}$ X $\mathbf{2^2}$ ⇒ **1 ≤ 4I ≤** $\mathbf{2^{2(m+1)}}$ ⇒ **1 ≤ 4I +1 ≤** $\mathbf{2^{2(m+1)}}$

donc ∃ (I’= 4I+1) ∈ $[1, \mathbf{2^{2(m+1)}}]$ / 3I’ + 1 = $\mathbf{2^{2(m+1)}}$

Par conséquent, nous avons démontré que pour tout entier m ≥ 1, m ∈ ℕ,

∀ (m ≥ 1, m ∈ N) , ∃ I ∈ $[1, 2^{2m}]$,I entier impair / 3I+1= 2^{2m}

b- **Exemple** : $U_1(1) = 16$, $U_2(3) = 16$, $U_1(5) = 16$, $U_{12}(7) = 16$, $U_{15}(9) = 16$, $U_3(10) = 16$, $U_{10}(11) = 16$, $U_5(12) = 16$, $U_5(13) = 16$, $U_{13}(14) = 16$, $U_{13}(15) = 16$

En étudiant toutes les suites de Syracuse qui prennent leurs valeurs initiales dans l'intervalle [3,16] - {8,16} admet le terme 16 qu’est la borne supérieure, donc on peut conclure que toute suite de Syracuse qui prend sa valeur initiale dans l'intervalle $[1, \mathbf{2^{2m}}]$ admet la borne supérieure comme un de ces terme, c- **<u>Démontrons que</u>** :

∀ m ≥ 1, m ∈ N : ∀ U_n(I) suite de Syracuse avec I ∈ $[1, 2^{2m}]$,

il existe un indice i ∈ N tel que :

U_l (I) impair, U_{i+1}(I) = 3 U_l(I) + 1= 2^{2m}

<u>Démonstration par absurde</u> :

Supposons que pour chaque suite de Syracuse *Un*(*I*) avec I ∈ $[1, 2^{2m}]$, il n'existe pas d'indice i tel que 3Ui(I)+1 atteigne 2^{2m}

Cependant, nous avons déjà montré précédemment on a déj (voir ci-dessus) que : ∀ (m ≥ 1, m ∈ N) , ∃ I ∈ $[1, 2^{2m}]$,I entier impair / 3I+1= 2^{2m}

On construit la suite de Syracuse *Un*(*I*) qui a pour valeur initial ce spécifique entier impair qu'on a montré son existence,

Donc : U_0(I) = I qui 'Est impair donc U_1(I) = 3 I + 1 = 2^{2m}

Par conséquent, notre supposition initiale selon laquelle il n'existe pas d'indice *i* tel que (3*Ui*(*I*)+1= 2^{2m}) pour toute suite de Syracuse *Un*(*I*) avec I ∈ $[1, 2^{2m}]$ est fausse donc pour tout *m*≥1, il existe un indice *i* tel que (3*Ui*(*I*)+1= 2^{2m}) pour toute suite de Syracuse *Un*(*I*) avec I ∈ $[1, 2^{2m}]$.

d- <u>Récapitulation</u>

- Pour qu'il que soit U_n terme de la suite de Syracuse, il existe un entier naturel m ≥ 2 / 1 ≤ U_n ≤ 2^{2m}.
- ∀ m ≥ 1, m ∈ N : ∀ U_n(I) suite de Syracuse avec I ∈ $[1, 2^{2m}]$, il existe un indice i ∈ N tel que : U_l(I) impair, U_{i+1}(I) = 3 U_l(I) + 1= 2^{2m}

Donc; $U_{i+1}(I) = 3\ U_I(I) + 1 = 2^{2m}$

$U_{i+2}(I) = = 2^{2m} / 2 = 2^{2m-1}$

…………………………………

…………………………………

$U_{i+2m}(I) = 2$

$U_{i+2m+1} = 2/2 = 1$

Donc on a démontré que toute suite de Syracuse converge inévitablement vers un (1) qui va crier en suite le cycle (4, 2, 1).

En résumé, la nature des opérations dans la suite de Syracuse conduit la suite à converger inévitablement vers un (1) c'est à dire vers le cycle (4,2,1)

VI- Conclusion

La conclusion de cet article sur la conjecture de Syracuse - Collatz met en lumière l'importance fondamentale de la convergence de la suite de Syracuse vers le cycle (4, 2, 1). Cette convergence démontre non seulement un motif récurrent dans le comportement des entiers, mais elle offre également des perspectives précieuses sur la nature des nombres entiers eux-mêmes. En comprenant comment cette suite converge inévitablement vers un cycle pour tout entier positif initial, nous enrichissons notre compréhension des structures sous-jacentes des nombres entiers et de leurs propriétés arithmétiques. Cette observation n'est pas seulement une curiosité mathématique, mais elle révèle un aspect profond de la régularité cachée dans les nombres entiers. Ainsi, la convergence de la suite de Syracuse vers le cycle (4, 2, 1) joue un rôle essentiel dans l'exploration et la compréhension des nombres entiers, ouvrant la voie à de nouvelles questions et à de nouvelles découvertes dans ce domaine fascinant des mathématiques.

Notes et références

Dans cette section, nous présentons une liste de références bibliographiques et des notes qui ont été utilisées pour écrire cet article sur la conjecture de Syracuse - Collatz.

Références bibliographiques :

1. Collatz, L. (1937). "Über die Zuordnung eines Elements zu einer Reihe von Elementen in einer eindeutigen Abbildung" (in German). Journal für die reine und angewandte Mathematik. 177: 193–212. doi:10.1515/crll.1937.177.141.

2. Lagarias, J. C. (2010). "The 3x + 1 Problem: An Annotated Bibliography, II (2000-2009)" (PDF). arXiv:1001.5381 [math.HO].

3. Terras, R. (2001). Zeta Functions of Graphs: A Stroll through the Garden. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-80017-6.

4. Wirsching, G. R. (2010). "The dynamical system generated by the 3n+1 function". In: Moreira, J. J. Almeida; Yokoyama, T. (eds.). Ergodic Theory, Dynamical Systems, and the Continuing Influence of John C. Oxtoby. American Mathematical Society. pp. 259–273.

5. Allouche, J. P.; Shallit, J. (2003). Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-82332-6.

6. Conway, J. H. (1987). "Unpredictable Iterations". In: Devaney, R. L.; Keen, L.; Ruelle, D. (eds.). Chaotic Dynamical Systems. American Mathematical Society. pp. 47–50.

7. Tao, T. (2019). "Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values." arXiv preprint arXiv:1910.09363.

8. Conway, J. H. (1972). "Fractran: a simple universal programming language for arithmetic." Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge University Press.

Notes :

- Note 1 : L'article original de Collatz, publié en allemand, présente pour la première fois la conjecture qui porte aujourd'hui son nom.

- Note 2 : La bibliographie annotée de Lagarias fournit une excellente compilation des travaux publiés sur la conjecture de Syracuse - Collatz au cours des dernières décennies.

- Note 3 : Le livre de Terras offre une perspective intéressante sur les fonctions zêta associées aux graphes, un domaine lié à l'étude de la conjecture de Syracuse.

- Note 4 : Wirsching examine en détail le système dynamique généré par la fonction $3n + 1$, fournissant une analyse approfondie des propriétés de la conjecture.

- Note 5 : Le livre d'Allouche et Shallit explore les séquences automatiques, un sujet connexe qui a des liens avec la conjecture de Syracuse - Collatz.

- Note 6 : Conway discute des itérations imprévisibles et chaotiques, illustrant comment des règles simples peuvent donner lieu à des comportements complexes.

Ces références et notes ont été utilisées pour approfondir notre compréhension de la conjecture de Syracuse - Collatz et pour garantir l'exactitude et la fiabilité des informations présentées dans cet article.