

磁场应该用能量流重新来定义而不是矢量势的旋度

赵双任

2024年2月27日

摘要

本文从两个载流线圈之间的能量的纽曼公式推导了准静态电磁场方程，然后讨论了3种方法从准静态方程过度到辐射电磁场方程。1) Maxwell提出的位移电流方法，2) 洛伦兹的滞后势方法，3) 作者提出的基于能量守恒的包含超前波的方法。作者分析了磁场的不同定义，按照安培力，洛伦兹力，矢量势的旋度，滞后矢量势的旋度，法拉第电磁感应，坡印廷矢量，互能流定义的磁场。磁场定义还分在环路上和在直线上求平均值两种不同类型定义方法。在这些不同方法中，作者认为用互能流定义的磁场是正确的。按照这个磁场定义电磁波的磁场和电场保持90度相位差。不是像麦克斯韦电磁理论那样磁场和电场保持同相位。这样电磁波的确是无功功率的波。这种波的能量是不会溢出宇宙的。单独靠电磁波并不能传递能量。传递能量得靠互能流。互能流由同步的滞后波和超前波构成。互能流具有光子的性质，作者认为互能流就是光子。本文的重点是由互能流定义了磁场。由于互能流不管是在准静态条件下，按照麦克斯韦电磁理论，还是按照作者的电磁理论都成立。因此这样定义的磁场是合理的。这个定义和麦克斯韦按照磁矢量势定义磁场是不相同的。

1 简介

今天我们的辐射电磁理论是从准静态电磁理论发展得到的。大家知道麦克斯韦的辐射电磁理论是从磁准静态电磁理论通过增加位移电流得到的。作者发现麦克斯韦电磁理论从准静态到辐射电磁场理论没有保证能量守恒定律始终成立。由此引起了一个严重的漏洞。

本文试图从纽曼的两个线圈的互能量[9]出发推导整个电磁理论。在这个过程中特别强调这个能量守恒定律。我们这里提到的能量守恒定律公式

是由Welch 于1960作为“时域互易定理”提出来的[33]。与Welch时域互易定理相近的公式陆续发表，其中包括Rumsey 1963年的“新互易定理”[29]，de Hoop 1987年底的“相交相关的互易定理”[5]，Petrusenko 2009年发表的“第二洛伦兹互易定理”[11]。作者1987年也独立的提出了“互能定理”[12, 36, 35]。作者现在认为这些互易定理和互能定理其实是能量守恒定律。作者论文发表后引起了所在研究生学习的大学内教员们的争论。教员大都认为这个定理不是能量定理，只能称为互易定理。作者希望从坡印廷定理证明这个互能定理。大家普遍接受坡印廷定理是能量定理，如果互能定理是坡印廷定理的子定理，那么互能定理当然也就当之无愧的是能量定理了。但是当时（1987）作者的证明失败了。

后来作者从事其他工作，三十年过后作者重返“互能定理”的这个课题。这次作者发现了de Hoop的相交相关互易定理，由此也发现了Welch的时域互易定理，这些定理是作者互能定理的傅里叶逆变换。可以看成是相同的物理公式。从坡印廷定理可以容易的证明Welch的时域互易定理。因此Welch的时域互易定理是能量定理，这也说明作者的互能定理是能量定理了。作者当年企图由复数坡印廷定理证明互能定理失败了。其实复数坡印廷定理和坡印廷定理不是由傅里叶变换连接的一对定理，而是两个独立的定理。那么为什么Welch, Rumsey, de Hoop, Petrusenko 都不把他们得到的定理称为能量定理呢？作者发现这是因为这个定理牵扯到超前波。超前波在工程领域和科学领域都没有被广泛承认。在这个定理中两个量里有一个是滞后波，一个是超前波，如果大家不承认这个超前波是物理的客观存在，这些定理也只能被称为互易定理了。从那时起，作者开始如饥似渴地研究超前波。首先发现了惠勒和费曼的吸收体理论[1, 2]。由此发现了更早狄拉克的自力理论[6]。还有action-at-a-distance作用和反作用的理论[30, 32, 7]。Stephenson 的超前波理论[31]。Cramer的量子力学交易诠释[3, 4]。研究过这些有关超前波理论后作者得出结论：超前波是物理的客观存在。

2017年作者把互能定理扩展为互能流定理。并且把这个互能流定理发展为局部化的能量守恒定律[13]。作者认为自能流不传递能量，自能流也就是由坡印廷矢量描写的能量流，它是不传递能量的。或者说它传递能量，但是传递能量的能量流又反向坍塌了。因此还是不传递能量。

自此以后作者开始建立互能流的应用例子，这些例子包括计算从变压器初级到变压器次级的互能流。计算从无限大平板电流到无限大平板电流的互能流。计算两个偶极子天线之间的互能流。在这些过程中作者发现自

能流其实是无功功率的。无功功率的自能流就不必反向坍缩。自能流和它的反向坍缩的能量流合在一起可以由一个无功功率波代替。作者在一系列文章中重复使用了这一观点[15, 14, 16][20, 21, 18, 19, 17][26, 22, 27, 24, 25, 23]。由麦克斯韦辐射电磁场理论得到的天线的辐射的自能流是有功功率的。这和作者得到的结论，即电磁波是无功功率的相冲突。作者认为，麦克斯韦电磁波理论一定是什么地方出了错误或者有漏洞。

作者发现出错的地方是麦克斯韦关于磁场的定义。麦克斯韦磁场的定义是矢量势的旋度。这个定义在准静态条件下是没有问题的。但是到了辐射电磁场，这时磁场是由滞后势的旋度来定义，这就出了问题。作者认为这样计算出来的磁场并不是正确的磁场。和麦克斯韦同期的主要电磁理论的学者都没有定义电场和磁场。只定义矢量势和标量势。只有麦克斯韦这样定义了电场和磁场，因此这样定义的电场和磁场是值得怀疑的。

其实对于电磁波，正确的磁场的定义应该按照坡印廷矢量来定义。假如我们知道辐射功率密度。我们也知道电场强度。那么我们就用 \mathbf{E} 和 \mathbf{S} 来定义 \mathbf{H} ,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{S} \quad (1)$$

这样定义的磁场我们不妨给它标注一个下标*Poynting*, 即 $\mathbf{H}_{Poynting}$ 。 $\mathbf{H}_{Poynting}$ 是按照坡印廷矢量定义的磁场。上式可以改写为,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H}_{Poynting}^* = \mathbf{S} \quad (2)$$

由于辐射不应溢出宇宙（这是作者提出的电磁理论的一条公理，本文在后面还要详细论述），

$$\Re\left(\oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_{Poynting}^*) \cdot \hat{n} d\Gamma\right) = 0 \quad (3)$$

这个公理作者在正文中还要进一步论述。这里大家先接受下来，这个公式要求，

$$\Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}_{Poynting}^*)|_{\Gamma} = 0 \quad (4)$$

其中 Γ 是半径无穷大的球面。这个公式告诉我们电磁波的远场必须是无功功率波。这种波电场和磁场保持90度的相位差。当然读者如果接受了作者提出的这条公理，很自然会得到结论电场和磁场保持90度的相位差。但是接受这条定律并不是一件容易的事情。几乎没有人相信这一点。其实作

者主要任务就是要说服读者。经典电磁理论有漏洞。磁场的定义错了，需要纠正。

本文进一步解释经典电磁理论为什么产生了这样的漏洞。作者重新推导了电磁理论，特别研究从准静态到辐射电磁场理论的过度。作者列出了三个不同的过度方法，麦克斯韦的方法，洛伦兹（Lorenz）的滞后势方法，最后是作者的方法。作者的方法是由能量守恒定律得到滞后波和超前波。得到辐射不溢出宇宙的公理。建立包括互能流定理的能量守恒定律。由此建立一个能够把光子包括在内的电磁理论。

另外作者也对自己的理论做了重新地论述。这次论述从两个线圈的纽曼能量公式出发，首先证明了能量守恒定律，法拉第电磁感应定律。证明安培环路定律。由此得到磁准静态电磁场理论。进一步由准静态电磁理论向辐射电磁场过度。

作者从磁场的定义开始研究。发现磁场可以有很多不同的定义。作者对这些不同定义进行了分析。找到可能出现错误的地方。提出了按照互能流来定义磁场的新方法。

2 准静态电磁理论回顾

我们主要强调从纽曼的电磁能量公式出发可以推导整个准静态的电磁理论。纽曼的电磁公式是准静态电磁理论的核心[9]。

2.1 磁场和磁场能量

今天我们的课本磁场的定义是按照安培力公式定义的。安培力公式为

$$d^2 \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = I d\mathbf{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mathbf{r}_{1 \rightarrow 2}}{r^3} \right) \quad (5)$$

由此我们定义了磁场

$$d\mathbf{B} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mathbf{r}_{1 \rightarrow 2}}{r^3} \quad (6)$$

$$\mathbf{B} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mathbf{r}_{1 \rightarrow 2}}{r^3} \quad (7)$$

但是这个磁场其实并不是唯一的。这个磁场只是在

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \triangleq \oint_{C_1} \oint_{C_2} d^2 \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \quad (8)$$

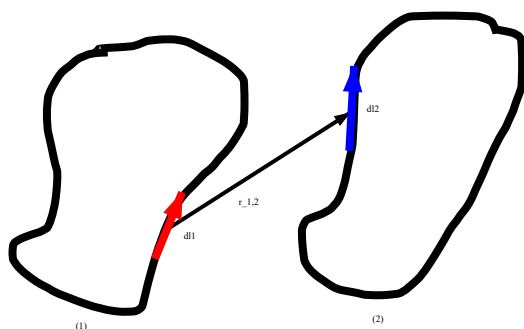


图 1: 两个线圈带电流的线圈。两个电流元之间有作用力。两个线圈之间构成了能量。

$$= \oint_{C_1} \oint_{C_2} I dl_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 dl_1 \times \frac{\mathbf{r}_{1 \rightarrow 2}}{r^3} \right) \quad (9)$$

对两个完整的环状线圈是有效的。更进一步，Neumann 通过安培力公式得到两个线圈之间的互能量的公式[9]，见图1，

$$U_{mutual} = k \frac{I_1 I_2}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (10)$$

其实Weber也给出了一个能量公式[34]，

$$U_{mutual} = k \frac{I_1 I_2}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{(\mathbf{r} \cdot dl_1)(\mathbf{r} \cdot dl_2)}{r^3} \quad (11)$$

据说赫姆赫兹证明了上面两个能量公式对于 C_2, C_1 闭合的情况是等价的。因此我们只讨论公式(10)。由此进一步得到一个线圈的自能量为，见图2，

$$U_{self} = k \frac{II}{2} \oint_C \oint_C \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (12)$$

作者认为公式(6)只是一个辅助概念。而能量的概念才是本质的。因此整个电磁理论必须从能量公式(10, 12)出发。

2.2 推导法拉第电磁感应定律

我们从一个线圈的自能量为

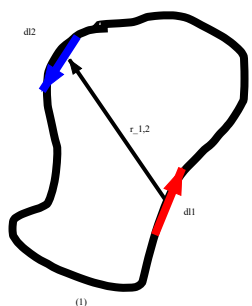


图 2: 只有一个线圈带电流的线圈，它们之间构成了能量。两个电流元之间有作用力。不同的线圈形状有不同的能量。

$$U_{self} = k \frac{I}{2} \oint_C \oint_C \frac{Idl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (13)$$

出发，由此可以定义矢量势，

$$\mathbf{A} \triangleq k \oint_C \frac{Idl_1}{r} \quad (14)$$

我们今天这个常数 k 为，

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (15)$$

μ_0 为磁导率。这个矢量势可以称为是纽曼矢量势。定义，

$$\Phi \triangleq \oint_C \mathbf{A} \cdot dl_2 \quad (16)$$

Φ 是磁通量。公式(13)改写为，

$$U_{self} = \frac{I}{2} \Phi \quad (17)$$

由此可知磁通量乘上电流是线圈储存的能量。计算能量的变化律，这个变化律是功率，这个功率需要由线圈外部提供功率，由此得到，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U_{self} &= \frac{\partial I}{\partial t} \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{A} \cdot dl_2 \\ &= \frac{\partial I}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \iint_{\Gamma} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{n} d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (18)$$

上式应用了斯托克斯定理。 Γ 是以 C 为边界的任意曲面。由此可以定义，

$$\mathbf{B} \triangleq \nabla \times \mathbf{A} \quad (19)$$

不妨把 \mathbf{B} 称为磁场，但是注意，这里必须十分小心，因为矢量势的旋度不是自然成为磁场的，这是有条件的！本文后面要详细谈这个问题。所以有，

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (20)$$

我们得到了麦克斯韦方程中的磁场的高斯定律。计算两个线圈系统的能量的时间导数，

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{self} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{I}{2} \iint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (21)$$

考虑磁场 \mathbf{B} 应该和电流成正比，即，

$$\mathbf{B} = I \mathbf{b} \quad (22)$$

\mathbf{b} 是不含时间的任意函数 $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x})$ 。这样，

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{self} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{I^2}{2} \iint_{\Gamma} \mathbf{b} \cdot \hat{n} d\Gamma = I \frac{\partial}{\partial t} I \iint_{\Gamma} \mathbf{b} \cdot \hat{n} d\Gamma = I \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (23)$$

定义磁通量，

$$\Phi \triangleq \iint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \hat{n} d\Gamma = \iint_{\Gamma} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{n} d\Gamma = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (24)$$

得到，

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{self} = I \frac{\partial}{\partial t} \Phi \quad (25)$$

线圈的功率由输入电压提供，属于电压为 V 。输入功率为，

$$VI = \frac{\partial}{\partial t} U_{self} \quad (26)$$

我们知道输入电压和感应电动势 \mathcal{E} 的关系为，见图3。在图3中的网孔中考虑基尔霍夫电压定律，得到，

$$V = -\mathcal{E} \quad (27)$$

其中 \mathcal{E} 是线圈产生的电动势 $\mathcal{E} = emf$ 。公式(26)可以改写为，

$$-\mathcal{E}I = I \frac{\partial}{\partial t} \Phi \quad (28)$$

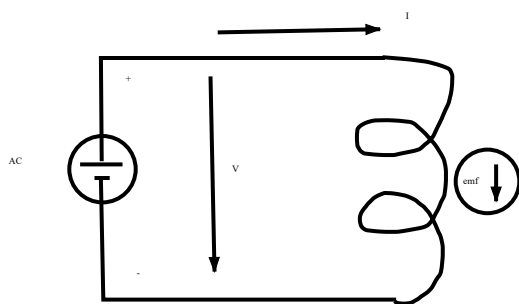


图 3: 只有一个线圈带电流的线圈，它们之间构成了能量。两个电流元之间有作用力。

上面公式是线圈的能量守恒定律，左面是电源提供的功率，右面是线圈能量的增加律。由此得到，

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi \quad (29)$$

感应电动势定义为，

$$\mathcal{E} \triangleq \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (30)$$

(29) 可以改写为，

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \cdot \hat{n}d\Gamma = -\oint_C \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (31)$$

或者，

$$\oint (\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (32)$$

考虑，

$$-\oint \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (33)$$

上两式的被积函数相等，

$$\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} = -\nabla\phi \quad (34)$$

或者，

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \nabla\phi \quad (35)$$

或者，

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A} \quad (36)$$

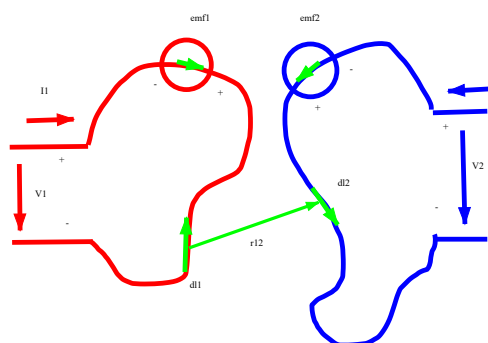


图 4: 两个线圈的系统。两个线圈的输入功率是 $V_1 I_1$ 和 $V_2 I_2$ 。

考虑 (19) 得到,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (37)$$

(35) 是麦克斯韦自己的麦克斯韦方程中的法拉第定律, 公式 (37) 是我们今天常用的法拉第定律。(37) 由麦克斯韦的后人给出。这样我们就由纽曼能量定律推导出法拉第电磁感应定律。公式 (35) 不牵扯到磁场 \mathbf{B} , 似乎比公式 (37) 更不容易出错。另外公式 (29, 24, 14) 得到,

$$\mathcal{E} = -L \frac{\partial}{\partial t} I = -\frac{\partial}{\partial t} k \oint_C \oint_C \frac{I dl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (38)$$

L 是线圈的电感,

$$L = k \oint_C \oint_C \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (39)$$

2.3 由两个线圈之间的能量推导法拉第定律

考虑两个线圈的系统图4。输入功率为 $V_1 I_1$ 和 $V_2 I_2$ 。这些功率用于增加线圈的互能量。

$$U_{mutual} = k \frac{I_1 I_2}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (40)$$

$$\frac{d}{dt} U_{mutual} = \frac{I_1 I_2}{2} M = I_1 \left(M \frac{\partial}{\partial t} I_2 \right) + \left(M \frac{\partial}{\partial t} I_1 \right) I_2 \quad (41)$$

$$M \triangleq k \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (42)$$

两个线圈增加的功率应该和外部输入的功率相同，外部输入的功率是线圈1和线圈2输入的功率。它们分别是

$$P_1 = V_1 I_1, \quad P_2 = V_2 I_2$$

所以有，

$$\frac{d}{dt} U_{mutual} = P = P_1 + P_2 = V_1 I_1 + V_2 I_2 \quad (43)$$

比较 (43) 和 (41) 得到，

$$V_1 = M \frac{\partial}{\partial t} I_2 \quad (44)$$

$$V_2 = M \frac{\partial}{\partial t} I_1 \quad (45)$$

在每个线圈内部考虑基尔霍夫电压定律得到，

$$V_1 = -\mathcal{E}_{2 \rightarrow 1} \quad (46)$$

$$V_2 = -\mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} \quad (47)$$

我们得到

$$\mathcal{E}_{2 \rightarrow 1} = -M \frac{\partial}{\partial t} I_2 = -\frac{\partial}{\partial t} k \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{I_2 dl_2 \cdot dl_1}{r} \quad (48)$$

$$\mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} = -M \frac{\partial}{\partial t} I_1 = -\frac{\partial}{\partial t} k \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_1 dl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (49)$$

这两个公式和公式 (38) 类似。

$$M = k \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (50)$$

2.4 由两个线圈之间的能量推导能量守恒定律

由上一小节得知两个线圈的互能量为，

$$U_{mutual} = k \frac{I_1 I_2}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (51)$$

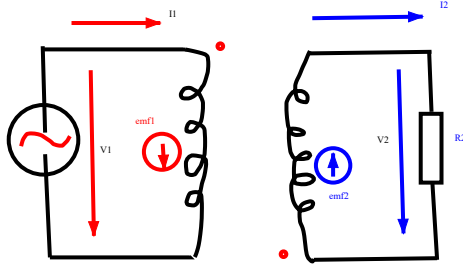


图 5: 两个线圈构成一个变压器系统。红色是初级线圈，接着交流电源。蓝色是次级线圈，接着电阻。两个红点是变压器的同名端。

对这个能量公式两边求导数得到，

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{mutual} = \frac{k}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial t} I_1 \right) I_2 + \frac{k}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} I_1 \frac{\partial}{\partial t} I_2 \quad (52)$$

对左面求时间积分得到，

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} U_{mutual} = U_{mutual}(\infty) - U_{mutual}(-\infty) = 0 \quad (53)$$

这是因为系统开始的能量 $U_{mutual}(-\infty)$ 和结束时的能量 $U_{mutual}(\infty)$ 都是 0。这样公式 (52) 右面的时间积分为零，

$$- \int_{t=-\infty}^{\infty} dt k \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial t} I_1 \right) I_2 - \int_{t=-\infty}^{\infty} dt k \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r} I_1 \frac{\partial}{\partial t} I_2 = 0 \quad (54)$$

参考 (38) 定义，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} &\triangleq -k \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\frac{\partial}{\partial t} I_1}{r} d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \\ &= - \oint_{C_2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \end{aligned} \quad (55)$$

考虑定义

$$\mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} \triangleq \oint_{C_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (56)$$

有

$$\oint_{C_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = - \oint_{C_2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (57)$$

或者

$$\mathbf{E}_1 = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_1 - \nabla \phi_1 \quad (58)$$

同理,

$$\mathcal{E}_{2 \rightarrow 1} \triangleq -k \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\frac{\partial}{\partial t} I_2}{r} d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 \quad (59)$$

考虑定义,

$$\mathcal{E}_{2 \rightarrow 1} \triangleq \oint_{C_1} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 \quad (60)$$

有,

$$\oint_{C_1} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 = - \oint_{C_1} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 \quad (61)$$

或者,

$$\mathbf{E}_2 = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_2 - \nabla \phi_2 \quad (62)$$

公式 (54) 改写为,

$$- \int_{t=-\infty}^{\infty} dt k \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{(\frac{\partial}{\partial t} I_1) d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} I_2 - \int_{t=-\infty}^{\infty} dt k \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\frac{\partial}{\partial t} I_2 d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r} I_1 = 0 \quad (63)$$

或者

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} dt (\mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} I_2 + \mathcal{E}_{2 \rightarrow 1} I_1) = 0 \quad (64)$$

变换到频域有,

$$\mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} I_2^* + \mathcal{E}_{2 \rightarrow 1}^* I_1 = 0 \quad (65)$$

“*” 是复数共轭, 或者

$$-\mathcal{E}_{2 \rightarrow 1}^* I_1 = \mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} I_2^* \quad (66)$$

看图figure 5考虑

$$V_1 = -\mathcal{E}_{2 \rightarrow 1} \quad (67)$$

$$V_2 = \mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} \quad (68)$$

我们得到,

$$V_1^* I_1 = V_2 I_2^* \quad (69)$$

这说明变压器的输入功率和输出功率相等。这是理想变压器的能量守恒定律。由此可见不管从线圈的自能量还是从互能量都可以推导出法拉第电磁感应定律, 即公式 (58, 62)。由此进一步得到,

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}_1 \quad (70)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_1 \quad (71)$$

同理

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_2 \quad (72)$$

也可以得到能量守恒定律 (69)。公式 (69) 是自明的, 进一步验证了我们的方法是正确的。总之从纽曼的能量公式我们可以推导出电磁感应定律和能量守恒定律。

2.5 推导安培环路定律

公式 (14) 定义了矢量势函数, 考虑线电流到体电流的变换 $I dl_1 \rightarrow \mathbf{J} dV$, 矢量势函数可以进一步改写为,

$$\mathbf{A} \triangleq k \oint_C \frac{I dl_1}{r} \rightarrow \mathbf{A} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV \quad (73)$$

矢量势的旋度的又一次旋度的数学公式为,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (74)$$

计算矢量势的散度,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{1}{r} \cdot \mathbf{J} dV \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \frac{1}{r} \cdot \mathbf{J} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{J} dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \rho\right) dV = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} (\rho) dV \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi \end{aligned} \quad (75)$$

其中考虑了,

$$\nabla \cdot \frac{1}{r} = -\nabla' \cdot \frac{1}{r} \quad (76)$$

也考虑了,

$$\int_V \nabla' \cdot \left(\frac{1}{r} \mathbf{J}\right) dV = \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \mathbf{J} dV + \int_V \left(\frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{J}\right) dV \quad (77)$$

也考虑了,

$$\int_V \nabla' \cdot \left(\frac{1}{r} \mathbf{J}\right) dV = \oiint_{\Gamma} \left(\frac{1}{r} \mathbf{J}\right) \cdot \hat{n} d\Gamma = 0 \quad (78)$$

这是因为 Γ 很大时电流 \mathbf{J} 为零了。因此有

$$-\int_V \nabla' \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \mathbf{J} dV = \int_V \left(\frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{J}\right) dV \quad (79)$$

另外也考虑了电流连续方程, 注意电流连续方程可以看成是自明的, 这个公式由基尔霍夫1857年给出[10],

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho \quad (80)$$

还在公式(75)中考虑了标量势的定义,

$$\phi \triangleq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \rho dV \quad (81)$$

所以(75)给出洛伦兹规范,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi \quad (82)$$

计算矢量势的拉普拉斯,

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \mathbf{A} &= \mu_0 \int_V \left(-\nabla^2 \frac{1}{4\pi r}\right) \mathbf{J} dV \\ &= \mu_0 \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{J} dV \\ &= \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \quad (83)$$

考虑(82, 83), 所以(74)成为,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \left(-\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi\right) + \mu_0 \mathbf{J} \quad (84)$$

Maxwell 把矢量势的旋度定义为磁场, 据说麦克斯韦是从开尔文伯爵那里学到这一点的。我们不妨定义,

$$\mathbf{B}_{Maxwell} \triangleq \nabla \times \mathbf{A}$$

我们给磁场加了一个长长的下标, 是为了提醒读者注意, 这个磁场是麦克斯韦定义的, 它在后面可能会出错。这里我们不妨就认为 $\mathbf{B}_{Maxwell}$ 是矢量势的旋度, 不要想它是磁场。或者,

$$\nabla \times \mathbf{B}_{Maxwell} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\epsilon_0 \nabla \phi) \quad (85)$$

$$\mathbf{E}_s = -\nabla\phi \quad (86)$$

\mathbf{E}_s 是静电场。这个公式是由库伦定律总结得到，我们这里之间应用它。由此公式（85）改写为，

$$\nabla \times \mathbf{B}_{Maxwell} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E}_s) \quad (87)$$

这就是安培环路定律。注意这个公式中已经包含了位移电流的静态场部分 $\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E}_s)$ 。直到这里我们还没有引入麦克斯韦的贡献。因此位移电流中对应于静电场的部分不是麦克斯韦的贡献。后面提到的位移电流中对应于感应电场的部分才是麦克斯韦的贡献，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E}_i) = \frac{\partial}{\partial t}(-\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}) \quad (88)$$

2.6 准静态麦克斯韦方程

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_s &= -\nabla \cdot \nabla\phi = -\nabla^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \rho dV \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (-\nabla^2 \frac{1}{4\pi r}) \rho dV \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \rho dV \end{aligned} \quad (89)$$

所以有高斯定律

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (90)$$

(20)磁场的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{Maxwell} = 0 \quad (91)$$

(36, 37) 法拉第定律，

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_{Maxwell}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla\phi \quad (92)$$

(87) 安培环路定律改写为，

$$\nabla \times \mathbf{H}_{Maxwell} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E}_s) \quad (93)$$

这里 $\mathbf{H}_{Maxwell} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{Maxwell}$ 。考虑 (73)

$$\mathbf{B}_{Maxwell} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times \mathbf{J} dV \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV
\end{aligned} \tag{94}$$

我们知道按照比奥沙发定律有,

$$\mathbf{B}_{BS} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV \tag{95}$$

$$\mathbf{B}_{Maxwell} = \mathbf{B}_{BS} \tag{96}$$

这样麦克斯韦定义的磁场和按照比奥沙发定律定义的磁场一样, 不过上式是在准静态条件下定义的, 在准静态条件下才有公式 (73)。这样在准静态条件下, 我们可以把 $\mathbf{B}_{Maxwell}$ 写成 \mathbf{B}_{BS} 或者干脆写为 \mathbf{B} 。

2.7 坡印廷定理

考虑数学公式,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}_s)
\end{aligned} \tag{97}$$

上式考虑了 (92, 93) 和 $\mathbf{B}_{Maxwell} = \mathbf{B}$, 或者,

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}_s) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \tag{98}$$

或者

$$-\oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{n} d\Gamma = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}_s)) dV \tag{99}$$

考虑电场定义 (92)。考虑感应电场

$$\mathbf{E}_i \triangleq -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \tag{100}$$

电场是感应电场和静态电场的和,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s \tag{101}$$

考虑,

$$\int_V \mathbf{E}_i \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}_s) dV = 0 \quad (102)$$

这个公式我们没有严格证明, 不过考虑 \mathbf{E}_i 是涡旋电场, \mathbf{E}_s 是有源电场, 因此两种电场是不同的场, 他们不应该构成互能量, 因此上面积分应该为零。这样坡印廷定理改写为,

$$-\oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{n} d\Gamma = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} + \epsilon_0 \mathbf{E}_s \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_s) dV \quad (103)$$

对上式做时间积分, 得到,

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dt \oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{n} d\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} + \epsilon_0 \mathbf{E}_s \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_s) dV \quad (104)$$

注意上面公式中的电场和磁场都是在准静态条件下得到的, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{Maxwell}$ 。之所以可以把下标 “Maxwell” 去掉是因为我们是在准静态条件下讨论问题。另外我们会发现坡印廷定理即使到了后面辐射电磁场, 仍然成立。

2.8 辐射不溢出宇宙

在准静态条件下, 是假定没有辐射的, 即,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{n} d\Gamma = 0 \quad (105)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (106)$$

是坡印廷矢量, 这个矢量代表向外辐射的电磁能量流密度。 Γ 是半径无穷大的球面。这是因为准静态条件下电场和磁场有,

$$|\mathbf{E}| < \frac{1}{r}, \quad |\mathbf{H}| < \frac{1}{r^2} \quad (107)$$

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{n} d\Gamma \sim \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} r^2 \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0 \quad (108)$$

公式 (105) 置换到频域为,

$$\Re \oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{n} d\Gamma = 0 \quad (109)$$

\Re 是取实部。其中，

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (110)$$

是平均坡印廷矢量。在准静态条件下上面两个公式的证明公式（105, 109）很容易，准静态本身就是没有辐射的电磁场，因此上面两个公式（105, 109）是自明的。

2.9 能量守恒定律

考虑，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V (\mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \epsilon_0 \mathbf{E}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial t}) dV &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= U(\infty) - U(-\infty) = 0 \end{aligned} \quad (111)$$

$U(-\infty)$ 是系统开始时的电磁能量， $U(\infty)$ 是系统结束时的能量，这两个能量应该为零。其中，

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} + \epsilon_0 \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{E}_s) dV \quad (112)$$

在公式（104）考虑（105, 111）我们得到，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) = 0 \quad (113)$$

由此可以得到，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_i) = 0 \quad (114)$$

考虑迭加原理， \mathbf{J} 由 N 个电流元构成，

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i, \quad \mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{H} = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i \quad (115)$$

将迭加原理代入（113）得到，

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_j) dV = 0 \quad (116)$$

在上式中考虑（114）得到，

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_j) dV = 0 \quad (117)$$

这是 N 个电流元的能量守恒定律，这个能量守恒定律说明能量只在电流元中互相交流，没有能量流向媒质，这个媒质比如以太。如果系统只有两个电流元，得到，

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1, j \neq i}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_j) dV = 0 \quad (118)$$

这是系统只有两个电流元的系统的能量守恒定律。或者，

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{V_1} (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1) dV = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{V_2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2) dV \quad (119)$$

值得一提的是这个公式是Welch1960年给出的时域互易定理[33]。上式可以变换到频域，

$$-\int_{V_1} (\mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1) dV = \int_{V_2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^*) dV \quad (120)$$

上式是作者1987年给出的互能定理[12]，如果把体电流 $\mathbf{J}dV$ 换成线电流 $I d\mathbf{l}$ 得到，

$$-\oint_{C_1} \mathbf{E}_2^* \cdot d\mathbf{l}_1 I_1 = \int_{C_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 J_2^* \quad (121)$$

考虑感应电动势的定义有，

$$-\mathcal{E}_{2 \rightarrow 1}^* I_1 = \mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} I_2^* \quad (122)$$

这个公式我们之前得到过，见（66）可见从准静态方程出发也可以得到这个能量守恒定律。这和从纽曼线圈能量公式出发的结果是一样的。再考虑，

$$\mathcal{E}_{2 \rightarrow 1} = -M_{2 \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial t} I_2 = -j\omega M_{2 \rightarrow 1} I_2 \quad (123)$$

$$\mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} = -M_{1 \rightarrow 2} \frac{\partial}{\partial t} I_1 = -j\omega M_{1 \rightarrow 2} I_1 \quad (124)$$

其中 $M_{2 \rightarrow 1}$ 是线圈2对线圈1的互感，它的定义为，

$$M_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r} \quad (125)$$

同理有，

$$M_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \quad (126)$$

把（123，124）代入公式（122）得到，

$$-(-j\omega M_{2\rightarrow 1} I_2)^* I_1 = (-j\omega M_{1\rightarrow 2} I_1) I_2^* \quad (127)$$

或者

$$M_{2\rightarrow 1}^* = M_{1\rightarrow 2} \quad (128)$$

这个公式似乎是平庸的。因为从公式(125,126)很容易证明这个公式。其实这个公式并不平庸。在这里其实它进一步验证了公式(120, 122)的确是能量守恒定律。作者在辐射电磁场时还要利用这个公式得到自己的电磁理论。在准静态条件下, 公式(117-122, 128)都是能量守恒定律。这些能量守恒定律我们是从准静态条件下得到, 但是我们也从另外两个方面验证了它是能量守恒定律。一是从理想变压器初级提供的能量和次级输出的能量应该相等; 二是变压器的互感是实数, 所以能量守恒定律(128)显然成立。也就是说在准静态条件下, Welch 的时域互易定理, 作者提出的互能定理都是能量守恒定律。

2.10 能量流定律

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{V_1} (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1) dV = (\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{V_2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2) dV \quad (129)$$

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (130)$$

在频域,

$$-\int_{V_1} (\mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1) dV = (\xi_1, \xi_2) = \int_{V_2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^*) dV \quad (131)$$

$$(\xi_1, \xi_2) = \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (132)$$

上面是互能流公式, 它在麦克斯韦电磁理论中是一个能量定理, 在作者的电磁理论中是局部化的能量守恒定律, 由于篇幅的原因, 作者不再证明这个公式, 证明详见[13]。这个公式告诉我们互能定理, 或者能量守恒定律的能量是通过互能流传递的。因此这个能量守恒定律是局部化的能量守恒定律。

3 从准静态过度到辐射电磁场

我们已经得到了准静态方程，我们也知道作用传播需要时间。因此电磁场应该按照速度 c 传播。因此准静态的电磁场理论要过度到滞后的辐射电磁场理论。但是怎样从准静态过度到的辐射电磁场理论呢。不同的方法有不同的考虑。这里有麦克斯韦的方法，基尔霍夫-Lorenz的方法和作者的方法共3种。

3.1 麦克斯韦的方法

对于麦克斯韦，他在从准静态到辐射电磁场时考虑了如下置换。麦克斯韦是在1861-2年完成他的位移电流方法[8]，这种方法意味着对准静态方程做了如下的变换

$$\mathbf{E}_s \rightarrow \mathbf{E} \quad (133)$$

其中

$$\mathbf{E}_s = -\nabla\phi \quad (134)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \nabla\phi \quad (135)$$

这样高斯定律就有，

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (136)$$

安培环路定律就有

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E}_s) \rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E}) \quad (137)$$

法拉第公式保持不变

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \nabla\phi \rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}^{(r)} - \nabla\phi^{(r)} \quad (138)$$

或者

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \quad (139)$$

磁场的定义保持不变，由是矢量势的旋度变为是滞后的矢量势的旋度，

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}^{(r)} \quad (140)$$

由此得到麦克斯韦方程,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (141)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}) \quad (142)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}^{(r)}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (143)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(r)} - \nabla \phi^{(r)}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (144)$$

考虑洛伦兹规范后由此解得, 滞后势的解,

$$\phi^{(r)} \triangleq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} [\rho] dV \quad (145)$$

$$\mathbf{A}^{(r)} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{J}]}{r} dV \quad (146)$$

滞后括号的定义为,

$$[\rho] = \rho(\mathbf{x}, t - r/c) \quad (147)$$

$$[\mathbf{J}] = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t - r/c) \quad (148)$$

由此我们看到麦克斯韦电磁理论方法的关键是在准静态方程中做了变换 (133)。许多教科书认为麦克斯韦的贡献是位移电流。这样的说法不够准确。因为准静态方程(137)前半部分其实已经可以包含位移电流的中静态电场的那部分,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}_s) \quad (149)$$

这部分不属于麦克斯韦的贡献。准确的说麦克斯韦的贡献是位移电流中的一部分, 即感应电场对应的那部分位移电流是麦克斯韦的贡献。麦克斯韦把这个静态的位移电流换成,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}) \quad (150)$$

注意, 对应静态电场的这部分位移电流 $\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}_s)$ 不能算作麦克斯韦的贡献! 另一方面在公式 (136)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (151)$$

意味着,

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(r)} - \nabla \phi^{(r)} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (152)$$

这表明在高斯定律中也插入了感应电场 $-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}^{(r)}$ 。值得一提的是，麦克斯韦本人并没有在高斯定律(151)中加入 $-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}^{(r)}$ 。麦克斯韦在解方程时锁定使用库伦规范。当采用库伦规范时，公式(151)中的电场 \mathbf{E} 就是按照静电场求解的。其实这也是麦克斯韦坚持使用库伦规范的原因。只有使用库伦规范公式(151)的电场 \mathbf{E} 是静电场 \mathbf{E}_s 。如果使用洛伦兹规范，公式(151)中电场自动考虑了感应电场分量 $\mathbf{E}_i = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}^{(r)}$ 。在公式(151)加入感应电场是后人通过允许使用洛伦兹规范而增加进去的。麦克斯韦的方法在于对准静态方程两处(136, 137)做了修改。这两处修改很难找到理论根据。有人打趣的说，这(指公式(133))是麦克斯韦最伟大的错误(great mistake)。最后我们把麦克斯韦方程完整的抄写一遍，由(136)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (153)$$

由(140)得，

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{Maxwell} = 0 \quad (154)$$

由(139)得，

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_{Maxwell} \quad (155)$$

由(142)得，

$$\nabla \times \mathbf{B}_{Maxwell} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E}) \quad (156)$$

注意我们在磁场底下恢复了下标“Maxwell”，这一点十分重要，这是因为

$$\mathbf{B}_{Maxwell} \triangleq \nabla \times \mathbf{A}^{(r)} \quad (157)$$

虽然我们知道，磁矢量势的旋度是磁场，但是滞后势的旋度也是磁场这一点并没有得到证明！甚至什么是磁场，磁场的定义应该是什么我们都不清楚。同理，

$$\mathbf{E}_{Maxwell} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}^{(r)} - \nabla\phi^{(r)} \quad (158)$$

$\mathbf{B}_{Maxwell}, \mathbf{E}_{Maxwell}$ 不一定是磁场和电场，只是某个辅助函数。

3.2 洛伦兹方法

洛伦兹 (Lorenz) 在1866年给出了他的方法, 他认为滞后解和非滞后解对于他那个时代的实验是不可区分的。因此如果得到非滞后解, 就可以直接考虑一个滞后的解,

$$\phi \triangleq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \rho dV \rightarrow \phi^{(r)} \triangleq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} [\rho] dV \quad (159)$$

$$\mathbf{A} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV \rightarrow \mathbf{A}^{(r)} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{J}]}{r} dV \quad (160)$$

其中

$$[\rho] \triangleq \rho(\mathbf{x}, t - r/c) \quad (161)$$

$$[\mathbf{J}] \triangleq \mathbf{J}(\mathbf{x}, t - r/c) \quad (162)$$

洛伦兹认为在他们那个时代, 频率很低因此,

$$[\mathbf{J}] = \mathbf{J} + \epsilon \quad (163)$$

其中 ϵ 是一个高阶无穷小。这一点今天当然说不过去。但是在洛伦兹那个时代, 他是无法发现滞后的电流 $[\mathbf{J}]$ 和非滞后的电流 \mathbf{J} 的差别。这就意味着所有实验虽然得到了和 \mathbf{J} 相关的公式, 但同时意味着 $[\mathbf{J}]$, 这样也是不违背已经做过的所有实验。洛伦兹没有定义 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 。不过我们可以像麦克斯韦一样定义一个电场和磁场,

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla\phi \rightarrow \mathbf{E}_{Maxwell} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(r)} - \nabla\phi^{(r)} \quad (164)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}_{Maxwell} = \nabla \times \mathbf{A}^{(r)} \quad (165)$$

洛伦兹的方法是在基尔霍夫1857年的工作之上完成的[10]。基尔霍夫是从Weber电磁矢量势出发的, 所以他得到了基尔霍夫规范,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_W = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi \quad (166)$$

$$\mathbf{A}_W \triangleq \iiint_V \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r} \quad (167)$$

由此洛伦兹很容易得到洛伦兹规范,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi \quad (168)$$

这里 \mathbf{A} 是纽曼的矢量势 (160)。基尔霍夫得到关于在导体中标量势的虚波动方程, 洛伦兹在此基础上得到了滞后势和波动方程,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (169)$$

$$\nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\rho / \epsilon_0 \quad (170)$$

这样洛伦兹的方法和麦克斯韦的方法完全等价。不过洛伦兹的方法比麦克斯韦方法, 即通过位移电流或者 (133) 变换的方法更容易理解。做 (136, 137) 变换比 (159, 160) 的变换更让人费解。既然洛伦兹的方法和麦克斯韦的方法完全等价。我们可以放弃麦克斯韦的方法, 只用洛伦兹的方法来理解麦克斯韦电磁理论。

不过有一点值得注意, 洛伦兹没有定义磁场和电场 (164, 165)。那么给他的方法补充上磁场和电场的定义这一点是否合理就值得考虑了。

作者从准静态电磁场理论猜测辐射电磁场的方法放在更后面的章节里讲8。

4 不同的磁场定义

作者把磁场的定义分成很多不同的种类, 这样便于研究。磁场并不是可以唯一定义的量。

4.1 比奥沙发的磁场,

$$\mathbf{B}_{BS} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV \quad (171)$$

符号“ \triangleq ”是定义的意思。这个磁场定义在准静态条件下。这个磁场在已知稳恒的电流的条件下得到。电流应该是直流或者是非常低频的。假定辐射电磁场可以忽略。这个磁场的频率上下线不清楚。

4.2 安培力定义磁场

假定我们知道磁场的方向, 选择 $I d\mathbf{l}$ 的方向满足,

$$I d\mathbf{l} \perp \mathbf{B} \quad (172)$$

安培力和磁场的关系是，

$$\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (173)$$

所以

$$\begin{aligned} I d\mathbf{l} \times \mathbf{F} &= I d\mathbf{l} \times (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \\ &= I d\mathbf{l} (I d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (I d\mathbf{l} \cdot I d\mathbf{l}) \\ &= -\mathbf{B} (I d\mathbf{l} \cdot I d\mathbf{l}) \end{aligned} \quad (174)$$

其中考虑了

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \quad (175)$$

所以有

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{(I d\mathbf{l} \cdot I d\mathbf{l})} I d\mathbf{l} \times \mathbf{F} \quad (176)$$

或者

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{|I d\mathbf{l}|} \frac{I d\mathbf{l}}{|I d\mathbf{l}|} \times \mathbf{F} \quad (177)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{|I d\mathbf{l}|} \mathbf{F} \times \hat{l} \quad (178)$$

\hat{l} 是 $I d\mathbf{l}$ 的单位矢量。

$$\mathbf{B}_{ampere} \triangleq \frac{1}{|I d\mathbf{l}|} \mathbf{F} \times \hat{l} \quad (179)$$

我们可以在一个环上测量平均值所以有，

$$\overline{\mathbf{B}}_{ampere} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{|I d\mathbf{l}_i|} \mathbf{F}_i \times \hat{l} \quad (180)$$

\mathbf{F}_i 是每一个 $I d\mathbf{l}_i$ 受的力。这两个磁场 \mathbf{B}_{ampere} ， $\overline{\mathbf{B}}_{ampere}$ 应该也是在准静态条件下定义的。或者低频，频率上线不清楚。

4.3 霍尔效应定义磁场

我们可以用霍尔效应原件测量磁场。假设磁场的方向是已知的，我们把霍尔原件平面正好和磁场垂直。这样我们可以测量得到磁场。我们不去分析霍尔效应的细节。这样测量得到磁场为，

$$\mathbf{B}_{Hall} \quad (181)$$

当然我们也可以考虑在环上求得平均磁场，

$$\overline{\mathbf{B}}_{Hall} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{B}_{Hall})_i \quad (182)$$

\mathbf{B}_{Hall} , $\overline{\mathbf{B}}_{Hall}$ 在准静态条件下肯定成立，不过这个磁场也可能在电磁波条件下成立，作者还没有得到证实。根据作者所知，霍尔效应原件可以工作到10M的频率。但是不知道在这个频率下霍尔效应测量的磁场相位是否正确。

4.4 用磁矢量势的旋度定义磁场

我们把磁矢量势的旋度定义的磁场称为麦克斯韦磁场。因为和麦克斯韦同期研究电磁问题的人比如基尔霍夫，洛伦兹（Lorenz）都不定义磁场，其实他们也不定义电场，遇到电场时用，

$$\mathbf{J} = \sigma \left(-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \phi \right)$$

代替，遇到磁场用 $\nabla \times \mathbf{A}$ 。只有麦克斯韦把矢量势的旋度定义为磁场，

$$\mathbf{B}_{Maxwell} \triangleq \nabla \times \mathbf{A} \quad (183)$$

这个磁场的定义是在考虑了，

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV \quad (184)$$

这个公式是准静态条件的解。因此这个磁场的定义也是在准静态条件下成立的。这里在准静态下成立是指，

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{Maxwell} &= \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV = \mathbf{B}_{BS} \end{aligned} \quad (185)$$

当然我们可以定义滞后的磁场，先定义滞后的滞后的矢量势，在频域这个矢量势可以写为，

$$\mathbf{A}^{(r)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} \exp(-jkr) dV \quad (186)$$

$$\mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} \triangleq \nabla \times \mathbf{A}^{(r)} \quad (187)$$

但是值得注意的是,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} &= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} \exp(-jkr) dV \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \left(\frac{1}{r} \exp(-jkr) \right) \times \mathbf{J} dV \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} - jk\hat{r} \right) \exp(-jkr) \times \mathbf{J} dV \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + jk\hat{r} \right) \exp(-jkr) dV \quad (188)
 \end{aligned}$$

这个磁场退化到准静态得到,

$$\begin{aligned}
 \lim_{kr \rightarrow 0} \mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + jk\hat{r} \right) dV \\
 &= \mathbf{B}_{BS} + j \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times (k\hat{r}) dV \quad (189)
 \end{aligned}$$

因此我们有,

$$\lim_{kr \rightarrow 0} \mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} \neq \mathbf{B}_{Maxwell} = \mathbf{B}_{BS} \quad (190)$$

$$kr \rightarrow 0$$

意味着,

$$kr \ll 1$$

或者

$$\frac{2\pi}{\lambda} r \ll 1$$

或者

$$r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$$

或者

$$r \ll \lambda$$

说明滞后的麦克斯韦磁场 $\mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)}$ 在 $r \ll \lambda$ 时不能退化为 $\mathbf{B}_{Maxwell}$ 。这说明 $\mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)}$ 不是磁场 \mathbf{B}_{BS} 在通常意义上的推广!作者想这可能是基尔霍夫, 洛伦兹不把矢量势的旋度定义为磁场的真正原因。

4.5 直线上测量的磁场的定义

作者把由法拉第定理引起的磁场定义为 $\overline{\mathbf{B}}$ ，即，

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \overline{\mathbf{B}} \quad (191)$$

换到频域，

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \overline{\mathbf{B}} \quad (192)$$

或

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{H}} &= \frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{jk\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{jk\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{jk\eta_0} \nabla \times \mathbf{E} \end{aligned} \quad (193)$$

即

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{jk\eta_0} \nabla \times \mathbf{E} \quad (194)$$

$$\overline{H} \triangleq \overline{\mathbf{H}} \cdot \hat{n} = \frac{1}{jk\eta_0} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{n} \quad (195)$$

考虑旋度的定义

$$\nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{n} \triangleq \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (196)$$

(195) 可以改写为，

$$\overline{H} \triangleq \frac{1}{jk\eta_0} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (197)$$

从上式看出 \overline{H} 是在环路上做了平均值。因此我们给磁场上增加一横，表示是在小环上的平均值。

考虑磁场在局部范围内时恒定的，这种情况我们可以把环状电动势改为直导线上的电动势，

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (198)$$

这里由于磁场在测量区域是恒定的，可以假定 L 和 C 的场是一样的，

$$\overline{H} \rightarrow H \quad (199)$$

所以有,

$$H \triangleq \frac{1}{jk\eta_0} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (200)$$

考虑,

$$\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 2\pi R E \quad (201)$$

$\hat{\mathbf{i}}$ 是 $d\mathbf{l}$ 的单位矢量。

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \rightarrow \frac{2\pi R E}{\pi R^2} = \frac{2E}{R} \quad (202)$$

$$H = \frac{1}{jk\eta_0} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \frac{1}{jk\eta_0} \frac{2E}{R} = \frac{\lambda}{j2\pi\eta_0} \frac{2E}{R} = \frac{\lambda}{\pi R} \left(-j \frac{E}{\eta_0}\right) \quad (203)$$

假定

$$\frac{\lambda}{\pi R} = 1 \quad (204)$$

$$H = -j \frac{E}{\eta_0} \quad (205)$$

这样我们可以用上式计算磁场 H 。这个磁场 H 可能只对磁场为常数, 或者平面波的情况有效。

4.6 电磁波

举一个例子我们已经知道有一个电磁波,

$$\mathbf{E} = jE_0 \exp(-jkx)(-\hat{\mathbf{z}}) \quad (206)$$

我们取电场 \mathbf{E} 的初相位为 j 是因为如果,

$$\mathbf{A} = A_0 \exp(-jkx)\hat{\mathbf{z}} \quad (207)$$

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} = j\omega A_0 \exp(-jkx)(-\hat{\mathbf{z}}) \quad (208)$$

假设

$$E_0 = \omega A_0 \quad (209)$$

我们就得到 (206)。我们知道这个电磁波是向 \hat{x} 方向传播的。因此磁场的方向在 \hat{y} 。我们已经知道这个电磁波是如下形式,

$$\mathbf{H} = H_0 \exp(-jkx)(\hat{\mathbf{y}}) \quad (210)$$

H_0 是任意复数量。这样可以使得,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* &= (E_0 \exp(-jkx)(-\hat{z})) \times (H_0 \exp(-jkx)(\hat{y}))^* \\ &= (E_0(-\hat{z})) \times (H_0(\hat{y}))^* \\ &= E_0 \times H_0^* \hat{x}\end{aligned}\quad (211)$$

这样电磁波的确是向 \hat{x} 方向传播。因为坡印廷矢量的方向是 \hat{x} 方向。所以, 我们只需要定出 H_0 即可。由公式(205)得知,

$$H = -j \frac{E}{\eta_0} \quad (212)$$

由(206)得知

$$E = jE_0 \exp(-jkx) \quad (213)$$

$$H = -j \frac{E}{\eta_0} = -j \frac{jE_0 \exp(-jkx)}{\eta_0} = \frac{E_0 \exp(-jkx)}{\eta_0} \quad (214)$$

所以有,

$$\mathbf{H} = \frac{E_0 \exp(-jkx)}{\eta_0} \hat{y} \quad (215)$$

所以,

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta_0} \quad (216)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* &= (jE_0 \exp(-jkx)(-\hat{z})) \times \left(\frac{E_0 \exp(-jkx)}{\eta_0} \hat{y}\right)^* \\ &= (jE_0) \left(\frac{E_0}{\eta_0}\right)^* \hat{x} = j \frac{|E_0|^2}{\eta_0} \hat{x}\end{aligned}\quad (217)$$

这个坡印廷矢量是虚数。电磁波的功率是无功功率。

4.7 用感应电场定义磁场

公式(212)定义出由感应电场定义的磁场, 假设磁场的方向已经知道, 用下式定义磁场,

$$H_{Faraday} = -j \frac{E}{\eta_0} \quad (218)$$

这个磁场和法拉第电磁感应有关系，因此不妨记作 $H_{Faraday}$ 。当然我们也可以在环路上平均的测量磁场，即（197）

$$\overline{H}_{Faraday} = \frac{1}{jk\eta_0} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (219)$$

$$\overline{\mathbf{H}}_{Faraday} = \frac{1}{jk\eta_0} \nabla \times \mathbf{E} \quad (220)$$

$$\overline{\mathbf{B}}_{Faraday} = \frac{1}{-j\omega} \nabla \times \mathbf{E} \quad (221)$$

考虑

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} \quad (222)$$

这样有

$$\overline{\mathbf{B}}_{Faraday} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (223)$$

和（173）比较，因此有

$$\overline{\mathbf{B}}_{Faraday} = \mathbf{B}_{Maxwell} \quad (224)$$

同理，

$$\overline{\mathbf{B}}_{Faraday}^{(r)} = \mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} \quad (225)$$

由于 $\overline{\mathbf{B}}_{Faraday}$ 可以用 $\mathbf{B}_{Maxwell}$ 代替， $\overline{\mathbf{B}}_{Faraday}^{(r)}$ 可以用 $\mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)}$ 代替。后面我们就尽量不再提 $\overline{\mathbf{B}}_{Faraday}$ ， $\overline{\mathbf{B}}_{Faraday}^{(r)}$ 。

5 作者用互能流定义的磁场

5.1 互能流是普适的

我们知道互能流定理，和互能流

$$- \int_{V_1} (\mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1) dV = (\xi_1, \xi_2) = \int_{V_2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^*) dV \quad (226)$$

$$(\xi_1, \xi_2) = \oiint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (227)$$

这个公式不仅仅在作者的电磁理论中成立，即使在麦克斯韦电磁理论中这个公式也仍然成立，只不过降格为能量定理。在作者的电磁理论这个公式是局部化的能量守恒定律。另外这个公式在准静态条件下也是局部化

的能量守恒定律。因此用互能流密度来定义磁场非常好。上面的公式是普适成立的。互能流密度的定义为，

$$\mathbf{S}_m \triangleq \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1 \quad (228)$$

如果考虑到一半滞后，一半超前的原则，

$$(\xi_1, \xi_2) \triangleq \frac{1}{2} \oiint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (229)$$

上式中的因子 $\frac{1}{2}$ 是考虑了一半滞后，一半超前的原则多出来的因子。

$$\mathbf{S}_m \triangleq \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \quad (230)$$

作者认为互能流定律描述的是作为和反作用原理，这个原理首先在洛伦兹互易定理中应用[28]。作者把这个原理应用到互能流定理上。作者认为，电场 \mathbf{E}_1 给电流 \mathbf{J}_2 的作用是通过，

$$\langle 1|2 \rangle \triangleq \int_{V_2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^*) dV = \oiint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^*) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (231)$$

$\langle 1|2 \rangle$ 是场 \mathbf{E}_1 给电流 \mathbf{J}_2 的作用，这个作用是通过互能流 $\oiint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^*) \cdot \hat{n} d\Gamma$ 传递的。另外，

$$\langle 2|1 \rangle = \int_{V_1} (\mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1) dV = - \oiint_{\Gamma} (\mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (232)$$

$\langle 2|1 \rangle$ 是场 \mathbf{E}_2 给电流 \mathbf{J}_1 的作用，这个作用是通过互能流 $-\oiint_{\Gamma} (\mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} d\Gamma$ 传递的。这样能量守恒定律，可以写为，

$$-\langle 2|1 \rangle = \langle 1|2 \rangle \quad (233)$$

这表明作用和反作用大小相等方向相反。同时这也表明（229）定义的互能流可以写为，

$$(\xi_1, \xi_2) = \oiint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^*) \cdot \hat{n} d\Gamma = \oiint_{\Gamma} (\mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (234)$$

$$\mathbf{S}_m \triangleq \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* = \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1 \quad (235)$$

这样如果我们知道 \mathbf{S}_m 也知道 \mathbf{E}_2 ，我们可以定义磁场， \mathbf{H}_1 。特别是当场 ξ_1 和 ξ_2 同步时， \mathbf{S}_m 是实数，这要求， \mathbf{H}_1 ， \mathbf{E}_2 必须有相同的相位。因此

我们可以用 \mathbf{E}_2 的相位来定义或者测量 \mathbf{H}_1 的相位。这样定义的磁场记为, \mathbf{H}_{MEF1} 。下标 MEF 是“mutual energy flow”的意思。 \mathbf{H}_{MEF1} 是用互能流定义的磁场。即按照下式定义的磁场,

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_{MEF1} \quad (236)$$

\mathbf{H}_{MEF} 是由互能流密度定义的磁场。值得一提的是互能流定理(226)在准静态条件下和辐射电磁场满足麦克斯韦方程条件下都成立。不过在准静态条件下是作为能量守恒定律成立的。在满足辐射电磁场的麦克斯韦方程条件下它是一个能量定理。在辐射电磁场条件下按照作者的电磁理论,(226)也是能量守恒定律。作者认为这一点是自明的。它基于如下的考虑,电场 \mathbf{E}_1 对电流 \mathbf{J}_2^* 做的功率是 $\int_{V_2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^*) dV$ 。这种功率一定是通过某种能量流传递过去的,假定能量密度为 $\mathbf{S}_m = \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_{MEF1}$ 。电场为, \mathbf{E}_2 , \mathbf{S}_m 是已知是能量密度,我们是由 $\mathbf{S}_m, \mathbf{E}_2$ 一起来构建的磁场 \mathbf{H}_1 ,然后把这样的磁场定义成为, \mathbf{H}_{MEF1} 。作者这样定义磁场总是合理的。因此,

$$\mathbf{S}_m \triangleq \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_{MEF2}^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_{MEF1}) \quad (237)$$

上式中的 \mathbf{H}_{MEF2} 和 \mathbf{H}_{MEF1} 的定义类似。值得一提的是我们这样定义的磁场是完全可以保证互能流正确的传递能量流。用,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{Maxwell} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (238)$$

定义的磁场在准静态下可以保证能量流230,但是到了按照麦克斯韦方程求得的磁场,即滞后的磁场,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{Maxwell} = \nabla \times \mathbf{A}^{(r)} \quad (239)$$

使得能量守恒定律(117)得不到满足,这就表明什么地方出了错。其实就是上式出了错。出错的主要表现是用 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{Maxwell}$ 计算坡印廷矢量

$$\mathbf{S}_{11} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_{1maxwell} \quad (240)$$

$$\mathbf{S}_m = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_{2Maxwell}^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_{1Maxwell}) \quad (241)$$

都会出错。

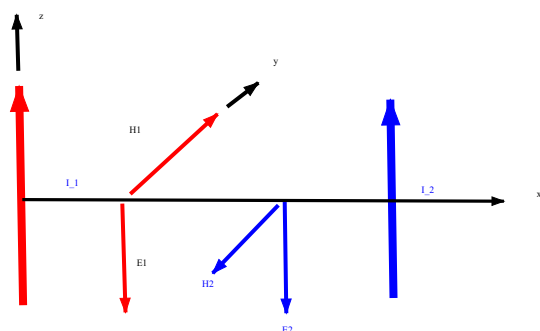


图 6: 用互能流来定义磁场。红色电流元产生磁场，蓝色电流元测量磁场。

5.2 准静态条件下由互能流定义磁场

考虑一个电流元（图中红色的），我们用另一个电流元来测量磁场。

\mathbf{H}_{MEF1} 是由mutual-energy-flow定义的磁场的意思。我们选择使得 $\xi_1 = [\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_{MEF1}]^T$ 和 $\xi_2 = [\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_{MEF2}]^T$ 同步，上一节告诉我们对于这个同步，应该有，

$$E_1 \sim H_{MEF2} \quad (242)$$

即电场 E_1 和磁场 H_2 有相同的相位，

$$E_2 \sim H_{MEF1} \quad (243)$$

电场 E_2 和磁场 H_{MEF1} 有相同的相位。我们假设 ξ_2 由电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 产生。电流 I_2 由下式计算，

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_{1 \rightarrow 2}}{R_2 + j\omega L_2} \quad (244)$$

R_2 是次级线圈（蓝色的直导线）的电阻， L_2 是次级线圈的感抗。选择，

$$R_2 \gg \omega L_2 \quad (245)$$

这样有，

$$\mathbf{E}_1 \sim j\omega I_1 (-\hat{z}) \sim jI_1 (-\hat{z})$$

在图6中， \mathbf{E}_1 的方向是在 $(-\hat{z})$ 方向。所以有，

$$E_1 \sim jI_1 \quad (246)$$

$$I_2 \simeq \frac{\mathcal{E}_{1 \rightarrow 2}}{R_2} \sim \mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} \sim -E_1 \sim -jI_1 \quad (247)$$

$$H_{MEF1} \sim \mathbf{E}_2 \sim j\omega I_2 \sim jI_2 \quad (248)$$

磁场的相位可以由电流 I_2 来定出。

$$H_{MEF1} \sim jI_2 \quad (249)$$

磁场 H_{MEF1} 的相位由上式定出。注意磁场的大小即使按照 $H = \nabla \times \mathbf{A}$ 即算也是没有错误的。所以关键是要得到相位信息。

$$H_{MEF1} \sim j(-jI_1) = I_1 \quad (250)$$

这样定出的磁场的相位和电流 I_1 的相位相同。按照作者定义磁场则有，

$$\mathbf{S}_{11} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_{MEF1}^* = (jI_1(-\hat{z})) \times (I_1\hat{y})^* = jI_1I_1^*\hat{x} \quad (251)$$

这样自能流（坡印廷矢量 \mathbf{S}_{11} ）是无功功率，即，

$$S_{11} \sim j\hat{x} \quad (252)$$

5.3 对应于电磁波

假设我们有平面波的电场为，

$$\mathbf{E}_1 = jE_{10} \exp(-jkx)(-\hat{z}) \quad (253)$$

我们给电场增加了一个相位 j 只是为了方便。这样电场的方向为 $(-\hat{z})$ 大小为 E_1 ，即，

$$E_1 = jE_{10} \exp(-jkx) \quad (254)$$

电流 I_2 的方向是 \hat{z} ，在位置 $x = L$ 。所以电流 I_2 为，

$$I_2 \sim -E_1 = -jE_{10} \exp(-jkL) \quad (255)$$

由于 ξ_1 和 ξ_2 同步，因此 H_{MEF1} 和 \mathbf{E}_2 相位相同，即，

$$H_{MEF1} \sim \mathbf{E}_2 \sim j\omega I_2 \sim jI_2$$

的相位可以由电流 I_2 定出。进一步，

$$H_{MEF1} \sim j(-jE_{10} \exp(-jkL)) = E_{10} \exp(-jkL) \quad (256)$$

考虑我们知道磁场的方向是在 \hat{y} 方向，磁场的大小为 $\frac{E_{10}}{\eta}$

$$\mathbf{H}_{MEF1} = \frac{E_{10}}{\eta} \exp(-jkL) \hat{y} \quad (257)$$

这说明计算磁场应该按照磁场滞后的方法考虑一个相位 $\exp(-jkL)$ 差即可。我们测量当然可以有 $L = x$ ，所以，

$$\mathbf{E}_1 = jE_{10} \exp(-jkx) (-\hat{z}) \quad (258)$$

$$\mathbf{H}_{MEF1} = \frac{E_{10}}{\eta} E_{10} \exp(-jkx) \hat{y} \quad (259)$$

由此可见对应于平面电磁波，按照互能流（mutual energy flow MEF）定义的磁场和电场保持90度相位差。这一结论和按照麦克斯韦方法定义的磁场是不同的。麦克斯韦定义磁场是按照矢量势，或者滞后的矢量势的旋度，作者定义磁场是按照互能流定理。互能流定理是普适的公式，在麦克斯韦电磁理论中也是成立的，只是降格为能量定理。但是互能流定理完全可以从麦克斯韦方程推导得到。因此我们用互能流来定义磁场是正确的。而且由于这样定义的磁场也是可以测量的，这个测量是通过测量感应电流 I_2 完成。其实我们前面用坡印廷矢量来定义磁场 $H_{Poynting}$ 也很好，但是这个Poynting矢量是不容易测量的。因此这样定义磁场 $H_{Poynting}$ 就意义不大了。

5.4 任意的电磁场

假定我们知道电场 \mathbf{E} ，也知道了坡印廷能量流密度 \mathbf{S} ，上式可以让我们得到磁场 $\mathbf{H}_{Poynting}$ ，或者 $\mathbf{B}_{Poynting}$ 。这个定义似乎是无用的，因为往往我们需要用电场 \mathbf{E} ，磁场 \mathbf{H} 来计算坡印廷能量流密度 \mathbf{S} ，而不是相反。但是根据作者的电磁理论，电磁波的远场是无功功率的。因此由此可以定出远场磁场的相位，磁场和电场的相位必须保持90度相位差。具体的说，作者如下来定义磁场，

$$\mathbf{B}_{MEF}^{(r)} = \mathbf{B}_{Maxwell,n}^{(r)} + (-j)\mathbf{B}_{Maxwell,f}^{(r)} \quad (260)$$

$$\mathbf{B}_{MEF}^{(a)} = \mathbf{B}_{Maxwell,n}^{(a)} + (j)\mathbf{B}_{Maxwell,f}^{(a)} \quad (261)$$

作者定义的磁场为一半滞后，一半超前的磁场，上式中下标 n 是近场的意思， f 是远场的意思，

$$\mathbf{B}_{MEF} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_{MEF}^{(r)} + \mathbf{B}_{MEF}^{(a)}) \quad (262)$$

作者这样定义的磁场的滞后波和超前波在电流表面是干涉增强的。而不是干涉相消的。作者认为电流是要同时产生滞后波和超前波的。因此滞后波和超前波不应该在电流表面互相抵消。上面方法定义的磁场可以保证这一点。

6 不同情况定义磁场的讨论

经过作者的研究，磁场的定义变得异常复杂。这里我们讨论不同定义的磁场的具体应用。

6.1 恒定磁场，直流电产生的磁场

在恒定磁场条件下，即磁场是一个常数，这时应该有，

$$\mathbf{B} = const \quad (263)$$

这时应该有，

$$\mathbf{B}_{BS} = \mathbf{B}_{ampere} = \overline{\mathbf{B}}_{ampere} = \mathbf{B}_{Hall} = \overline{\mathbf{B}}_{Hall} = \mathbf{B}_{Maxwell} = \mathbf{B}_{MEF} \quad (264)$$

这种情况无法定义法拉第电磁感应的磁场 $\mathbf{B}_{Faraday}, \overline{\mathbf{B}}_{Faraday}$ 。

6.2 恒定交流磁场

这意味着我们已经知道

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}_0 \exp(j\omega t)\hat{y} \quad (265)$$

这种情况下 \mathbf{B}_{BS} 是没有定义的。所以

$$\mathbf{B}_{Maxwell} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} = \mathbf{B}_0 \exp(j\omega t)\hat{y} \quad (266)$$

另外因为磁场是恒定的，我们用直导线测量的磁场也应该正确，因此应该有，

$$\mathbf{B}_{Faraday} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} \quad (267)$$

所以有

$$\mathbf{B}_{Maxwell} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} = \mathbf{B}_{Faraday} \quad (268)$$

这时估计下式成立，

$$\mathbf{B}_{ampere} = \overline{\mathbf{B}}_{ampere} = \mathbf{B}_{Hall} = \overline{\mathbf{B}}_{Hall}$$

我们还必须验证，

$$\mathbf{B}_{Faraday} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} =? \mathbf{B}_{Hall} \quad (269)$$

符号“=?”表示不清楚需要验证。作者相信在交变磁场条件下，应该有，

$$\mathbf{B}_{MEF} = \mathbf{B}_{Maxwell} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} = \mathbf{B}_{Hall} \quad (270)$$

6.3 准静态磁场

这种情况下磁矢量势可以定义为，

$$\mathbf{A} \sim \int \frac{\mathbf{J} \exp(j\omega t)}{r} dV \quad (271)$$

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} \quad (272)$$

$$H_{Faraday} = -j \frac{E}{\eta_0} \quad (273)$$

$$B_{Faraday} = \mu_0 \left(-j \frac{-j\omega A}{\eta_0} \right) \sim -A \quad (274)$$

$$\mathbf{B}_{Maxwell} = \nabla \times \mathbf{A} \sim \int \nabla \frac{1}{r} \times \mathbf{J} dV = \int \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV \quad (275)$$

$$\mathbf{B}_{BS} \sim \int \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV \quad (276)$$

所以有

$$\mathbf{B}_{BS} = \mathbf{B}_{Maxwell} \quad (277)$$

其实更多的应该有

$$\mathbf{B}_{BS} = \mathbf{H}_{ampere} = \overline{\mathbf{H}}_{ampere} = \mathbf{B}_{Hall} = \overline{\mathbf{B}}_{Hall} = \mathbf{B}_{Maxwell} \quad (278)$$

我们又知道

$$\mathbf{B}_{Maxwell} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} \quad (279)$$

因此应该有,

$$\mathbf{B}_{BS} = \mathbf{H}_{ampere} = \overline{\mathbf{H}}_{ampere} = \mathbf{B}_{Hall} = \overline{\mathbf{B}}_{Hall} = \mathbf{B}_{Maxwell} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} \quad (280)$$

由公式 (274) 得知,

$$\mathbf{B}_{Maxwell} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} \neq \mathbf{B}_{Faraday} \quad (281)$$

$\mathbf{B}_{Faraday}$ 和 $\overline{\mathbf{B}}_{Faraday}$ 发生了分歧。但是,

$$\overline{\mathbf{B}}_{Faraday} \sim \mathbf{B}_{Faraday} \quad (282)$$

这意味着 $\overline{\mathbf{B}}_{Faraday}$ 和 $\mathbf{B}_{Faraday}$ 的相位是相同的。作者相信在磁准静态条件下, 应该有,

$$\mathbf{B}_{MEF} = \mathbf{B}_{Maxwell} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} = \mathbf{B}_{Hall} \quad (283)$$

6.4 平面电磁波

平面电磁波, 例如

$$\mathbf{A} = A_0 \exp(-jkx) \hat{z} \quad (284)$$

$$\mathbf{E} = j\omega A_0 \exp(-jkx) (-\hat{z}) \quad (285)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{Maxwell} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times A_0 \exp(-jkx) \hat{z} \\ &= A_0 \nabla \exp(-jkx) \times \hat{z} = A_0 (-jk \hat{x}) \exp(-jkx) \times \hat{z} \\ &= A_0 (jk) \exp(-jkx) \hat{y} \end{aligned} \quad (286)$$

$$H_{Faraday} = -j \frac{E}{\eta_0} \quad (287)$$

$$\begin{aligned} B_{Faraday} &= -j\mu_0 \frac{E}{\eta_0} = -j\mu_0 \frac{1}{\eta_0} (j\omega A_0 \exp(-jkx)) \\ &= \frac{\omega\mu_0}{\eta_0} (A_0 \exp(-jkx)) = \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} (A_0 \exp(-jkx)) \\ &= kA_0 \exp(-jkx) \end{aligned} \quad (288)$$

$$\mathbf{B}_{Maxwell} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} \neq \mathbf{B}_{Faraday} \quad (289)$$

$$\mathbf{B}_{Faraday} = (-j)\overline{\mathbf{B}}_{Faraday} = (-j)\mathbf{B}_{Maxwell} \quad (290)$$

$$\mathbf{B}_{BS} = ? \quad (291)$$

\mathbf{B}_{BS} 显然没有定义，“?”表示没有定义。另外我估计有，

$$\mathbf{B}_{ampere} = \mathbf{B}_{Hall} = \mathbf{B}_{Faraday} \quad (292)$$

$$\mathbf{B}_{Maxwell} = \overline{\mathbf{B}}_{ampere} = \overline{\mathbf{B}}_{Hall} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} \quad (293)$$

上面两个公式是需要测量进行断定的。我现在并不清楚。之所以我估计是如此是出于这样的考虑，直导线测量和直导线测量相当，环形测量和环形测量相当。由于 $\overline{\mathbf{B}}_{ampere}$ ，和 \mathbf{B}_{ampere} 没有测量手段，实验中不考虑，我们只用霍尔效应原件做实验，

$$\mathbf{B}_{Hall} = ? \begin{cases} \mathbf{B}_{Faraday} \\ \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} \end{cases} \quad (294)$$

上两式表示我们需要用实验确定到底 $\mathbf{B}_{Hall} = \mathbf{B}_{Faraday}$ 还是 $\mathbf{B}_{Hall} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday}$ 。同理我们也可以问下列问题，

$$\overline{\mathbf{B}}_{Hall} = ? \begin{cases} \mathbf{B}_{Faraday} \\ \overline{\mathbf{B}}_{Faraday} \end{cases} \quad (295)$$

这一节说明磁场的定义是有分歧意见的，这些我们应该用实验来测量来决定。这些测量应该不是很难作。这些应该是作者未来的一项工作。另外作者估计有，

$$\mathbf{B}_{MEF} \sim \mathbf{B}_{Faraday} \quad (296)$$

也就是说，由互能流定义的磁场 \mathbf{B}_{MEF} 的相位和 $\mathbf{B}_{Faraday}$ 的相位一致。而 \mathbf{B}_{MEF} 的相位和 $\mathbf{B}_{Maxwell}$ 或者 $\overline{\mathbf{B}}_{Faraday}$ 的相位不一致。

6.5 任意电磁波

这时磁矢量势为，

$$\mathbf{A}^{(r)} \sim \int \frac{\mathbf{J}}{r} \exp(-jkr) dV \quad (297)$$

其中电流是交流电，

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 \exp(-j\omega t) \quad (298)$$

滞后的电场为，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(r)} &\sim -j\omega \mathbf{A}^{(r)} = -j\omega \int \frac{\mathbf{J}}{r} \exp(-jkr) dV \\ &= j\omega \int \frac{\mathbf{J}}{r} \exp(-jkr) dV (-\hat{z}) \end{aligned} \quad (299)$$

按照麦克斯韦电磁理论计算磁场，

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} &\triangleq \nabla \times \mathbf{A}^{(r)} = \int \nabla \frac{1}{r} \exp(-jkr) \times \mathbf{J} dV \\ &= \int \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{jk\hat{r}}{r} \right) \exp(-jkr) \times \mathbf{J} dV \\ &= \int \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{jk\hat{r}}{r} \right) \exp(-jkr) dV \end{aligned} \quad (300)$$

考虑一个例子，

$$\mathbf{J} = J\hat{z} \quad (301)$$

$$\hat{z} \times \hat{r} = \sin\theta \hat{\phi} \quad (302)$$

$$\mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} = \int J \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) \exp(-jkr) dV \sin\theta \hat{\phi} \quad (303)$$

$$\mathbf{A}^{(r)} \sim \int \frac{\mathbf{J}}{r} \exp(-jkr) dV \hat{z} \quad (304)$$

$$\mathbf{E}^{(r)} = -j\omega\mathbf{A}^{(r)} \sim j \int \frac{\mathbf{J}}{r} \exp(-jkr)dV(-\hat{z}) \quad (305)$$

$$E \sim j \int \frac{J}{r} \exp(-jkr)dV \quad (306)$$

$$H_{Faraday}^{(r)} = -j \frac{E}{\eta_0} \sim -jE = -j \left(j \int \frac{J}{r} \exp(-jkr)dV \right) \quad (307)$$

$$H_{Faraday}^{(r)} \sim \int \frac{J}{r} \exp(-jkr)dV \quad (308)$$

$$\mathbf{B}_{Faraday}^{(r)} \sim \int \frac{\mathbf{J}}{r} \exp(-jkr)dV \hat{\phi} \quad (309)$$

$$\mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} \neq \mathbf{B}_{Faraday}^{(r)} \quad (310)$$

由上面的讨论可以看出磁场的定义是有分歧的。因此我们遇到磁场时要考虑它的定义。到底是什么磁场，磁场是怎样定义的。

7 麦克斯韦电磁理论的漏洞

7.1 两个原子和一个光子的模型

作者考虑两个原子A和B交换一个光子的情况。假设光子A辐射了一个光子，A中的一个电子从高能级跳跃到低能级。这个光被原子B接收到了，B原子中的一个电子从低能级跳跃到高能级。见下图7。在这个过程中两个原子构成了一个系统。这个系统的总能量是守恒的。

这是我们对光子的了解，可以看作是一个实验事实。在这个过程中系统只包含了光源A，光汇B。光源和光汇之间有一个光子交换。在这个系统中没有能量从系统的边界曲面 Γ 辐射出去。所以我们用绿色虚线箭头画出了向外辐射的电磁波。没有能量从大曲面 Γ 溢出。

7.2 麦克斯韦电磁理论模型

可是在麦克斯韦电磁理论中对于一个两个或者多个电流元的系统，其中电流元A是辐射源，B是接收电磁波光汇。电磁波工作原理示意图见图8。从这个系统可以看出如果电流元B距离辐射电流元A很远，比如1000光年。电磁波达到电流元B已经非常弱。电流元B收到电流元A提供的能量也会十分微弱，或者几乎收不到任何能量。绝大多数能量都通过以太辐射到整个宇宙中去了。所以我们说麦克斯韦电磁理论导致电磁辐射能量溢出宇宙。

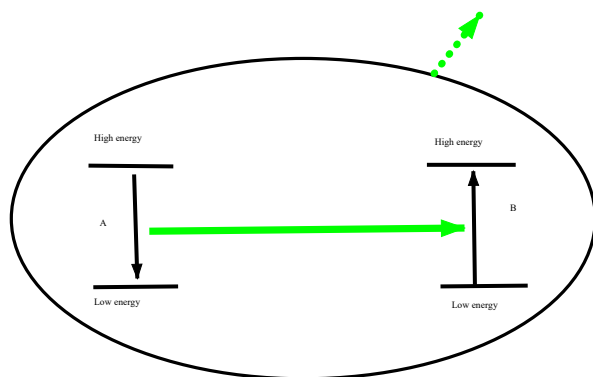


图 7: 光子的系统由两个原子构成。原子A辐射了一个光子，原子B接收了一个光子。

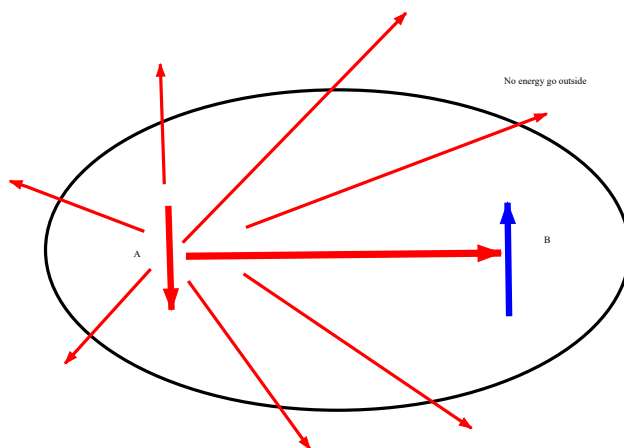


图 8: 在麦克斯韦电磁理论中光子的系统由两个电流元的系统构成的。电流元A辐射了电磁波，电流元B接收了其中一部分电磁波能量。

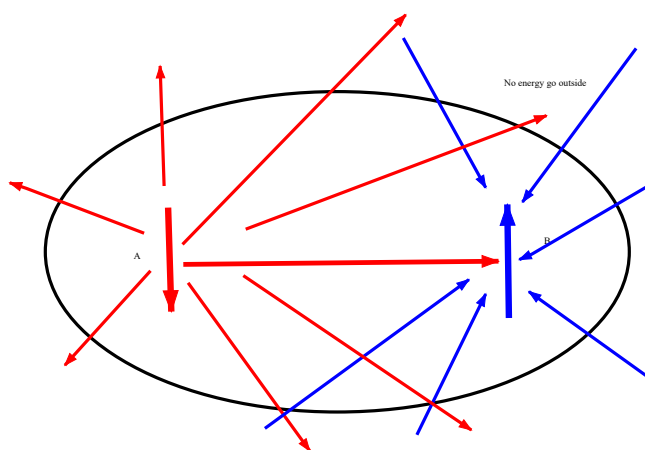


图 9: 惠勒费曼吸收体理论, 光源辐射滞后波, 光汇辐射超前波。

7.3 吸收体理论

惠勒费曼提出吸收体理论, 因此汇阱也辐射超前波。图中绿色箭头。红色箭头是电流元A辐射的滞后电磁波。蓝色箭头表示光汇B辐射的超前电磁波。蓝色箭头指向光汇B,说明超前波的能量是向着光汇传递的。见下图9。这个模型比麦克斯韦电磁理论模型图8能够传递的能量多一些, 因为有了超前波, 超前波有聚能作用。但是仍然有大量的能量从曲面 Γ 释放出去。还有大量的负能量从曲面 Γ 溢出。负能量溢出, 意味着汇阱凭空得到能量。

惠勒费曼其实一节意识到这可能有问题。它们的解释是电流源同时辐射了滞后波和超前波, 滞后波和超前波一个辐射正能量, 一个辐射负能量, 最终抵消掉了。它们的这个解释是一个进步, 但是作者仍然对此不满意。凭什么电流辐射的滞后波和超前波的能量会抵消? 这两个能量各自走自己的路, 并没有抵消!

7.4 量子理论

量子力学, 这里指哥本哈根学派的诠释。采取了波坍缩的方法, 按照这种说服波可以从宇宙所有的地方瞬间坍缩的一个地方。即吸收光子的吸收体位置。见图10。

可是量子力学的波的坍缩至今只是一种诠释, 构不成理论, 因为坍缩作为一个物理过程本身至今没有数学公式表达。

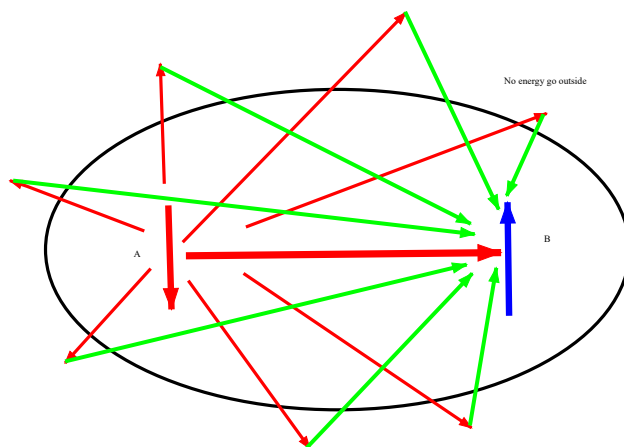


图 10: 在量子力学, 波可以从四面八方瞬间坍缩的吸收体电荷的一个点上, 这样这个点就收到光源发出的所有能量。

7.5 作者的互能流+反向坍缩理论

惠勒费曼的模型9比麦克斯韦的模型8有进步, 但是我们比较图7和图9两者还是有所不同。图9有能量从边界 Γ 溢出。 Γ 是图中的大圆球。在图7中没有能量从曲面 Γ 溢出。这说明麦克斯韦电磁理论存在漏洞。这个漏洞也是麦克斯韦电磁理论不能描述光子的系统的原因。惠勒费曼虽然增加了超前波, 缓和了矛盾。但是仍然没有彻底解决问题。解决问题的关键是不能允许辐射能量从大曲面 Γ 辐射出去。另外能量守恒定律(129)应该严格遵守。就是原子A损失的能量于原子B得到的能量完全相同。由此作者总结出下列电磁理论的新公理。

为了缓和矛盾, 作者增加了反向坍缩。这意味着滞后波会反向坍缩到源, 超前波会反向坍缩到汇。滞后波和超前波共同构成互能流把能量从A传递到B[13]。

7.6 作者的互能流理论+无功功率波

最近两年作者把辐射电磁波和反向坍缩的电磁波合并在一起成为无功功率波。在图12里无功功率波用虚线表示。红色的是滞后的无功功率波, 蓝色的是超前的无功功率波。由于这些波是无功功率的。这些波在一个时间周期内看它是不传递能量的。也就是说平均地看没有能量从曲面 Γ 溢出。

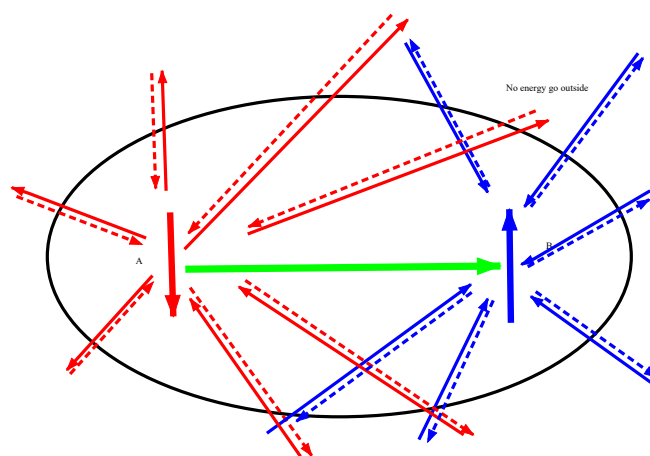


图 11: 作者已经对麦克斯韦电磁理论做了一些修正, 增加了超前波。因此光汇发出了超前波来吸收电磁能量。由于超前波的存在, 光源和光汇之间构成了互能流。互能流把能量从光源运输到光汇。这样即使光汇距离光源比较远, 光汇也可以收到较大一部分光源发出的辐射电磁波能量。

这就符合作者提出的能量不溢出宇宙的公理。在光源和光汇之间可以构成互能流。这种互能流使得滞后波和超前波在沿着光源和光汇之间的连线干涉增强。形成光子波导, 这样就构成了绿色箭头所示的能量流。这个图形就和光子模型7一致了。

8 作者的方法

这里作者简单陈述一下自己对麦克斯韦电磁理论做出的修正。讲一下作者这一理论的出发点和具体操作。

8.1 作者的电磁理论的出发点

作者的电磁理论的出发点是纽曼的电磁能量公式。

$$U_{mutual} = k \frac{I_1 I_2}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (311)$$

在考虑辐射的情况下这个公式可以化为,

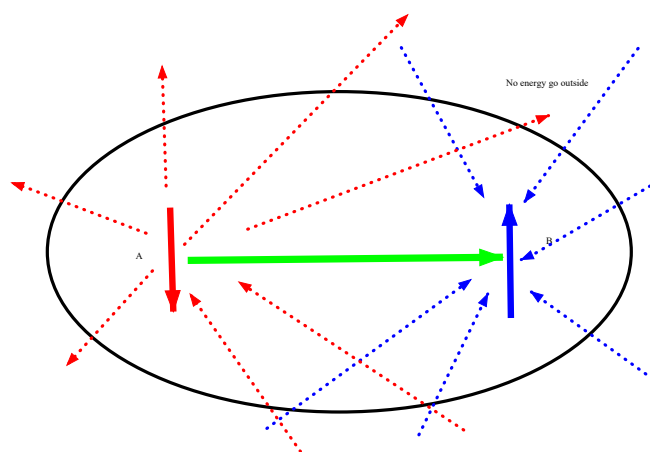


图 12: 。

$$\begin{aligned}
 U_{mutual} &= k \frac{I_1 I_2}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} \frac{1}{2} (\exp(-jkr) + \exp(+jkr)) \\
 &= k \frac{I_1 I_2}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2 \cos(kr)}{r} \quad (312)
 \end{aligned}$$

这个能量是考虑的滞后波和超前波以后的能量，由它产生一半滞后一半超前的电磁波。这个能量仍然是能量的偶函数。

对应于光子这个能量有可能为，

$$U_{mutual} = k \frac{I_1 I_2}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} dl_1 \cdot dl_2 \cos(kr) \quad (313)$$

这个公式中 $\frac{1}{r}$ 的因子被去掉。这是因为光子显然对应于平面波。平面波是不衰减的。

$$U_{mutual} = k \frac{I_1 I_2}{2} \oint_{C_2} \oint_{C_1} dl_1 \cdot dl_2 f(r) \quad (314)$$

$$\frac{d}{dt} U_{mutual} = k \frac{I_2}{2} \frac{\partial I_1}{\partial t} \oint_{C_2} \oint_{C_1} dl_1 \cdot dl_2 f(r) + k \frac{I_1}{2} \frac{\partial I_2}{\partial t} \oint_{C_1} \oint_{C_2} dl_2 \cdot dl_1 f(r) \quad (315)$$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} dt \frac{d}{dt} U_{mutual} = U(\infty) - U(-\infty) = 0 \quad (316)$$

$$\mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} \triangleq -\frac{\partial I_1}{\partial t} \oint_{C_2} \oint_{C_1} d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 f(r) \quad (317)$$

$$\mathcal{E}_{2 \rightarrow 1} \triangleq -\frac{\partial I_2}{\partial t} \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 f(r) \quad (318)$$

由公式 (315) 考虑 (316, 317, 318) 得到,

$$-\int_{t=-\infty}^{\infty} dt \mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} I_2 = \int_{t=-\infty}^{\infty} dt \mathcal{E}_{2 \rightarrow 1} I_1 \quad (319)$$

考虑感应电动势的定义, 上式改写为,

$$-\int_{t=-\infty}^{\infty} dt \oint_{C_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 I_2 = \int_{t=-\infty}^{\infty} dt \oint_{C_1} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 I_1 \quad (320)$$

把线电流改写为体积电流,

$$-\int_{t=-\infty}^{\infty} dt \int_{V_2} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 dV = \int_{t=-\infty}^{\infty} dt \int_{V_1} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 dV \quad (321)$$

或者,

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1, j \neq i}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_j) dV = 0 \quad (322)$$

其中 $f(r)$ 的定义为,

$$f(r) = \frac{\cos kr}{r} = \frac{1}{2r} (\exp(-jkr) + \exp(+jkr)) \quad (323)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} &\triangleq -\frac{\partial I_1}{\partial t} \oint_{C_2} \oint_{C_1} d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 f(r) \\ &= -\oint_{C_2} \frac{\partial}{\partial t} \oint_{C_1} I_1 \frac{1}{2r} (\exp(-jkr) + \exp(+jkr)) d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{C_2} \frac{\partial}{\partial t} \oint_{C_1} I_1 \frac{1}{r} (\exp(-jkr)) d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \end{aligned} \quad (324)$$

$$\mathbf{A}^{(r)} = k \oint_{C_1} I_1 \frac{1}{r} (\exp(-jkr)) d\mathbf{l}_1 \quad (325)$$

$$\mathcal{E}_{1 \rightarrow 2} = -\oint_{C_2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(r)} \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (326)$$

$$\oint_{C_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = -\oint_{C_2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(r)} \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (327)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1^{(r)} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{1}{r} (\exp(-jkr)) \mathbf{J}_1 dV \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_1^{(r)}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_1^{(r)}) - \nabla^2 \cdot \mathbf{A}_1^{(r)}\end{aligned}\quad (328)$$

按照洛伦兹规范,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_1^{(r)} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi^{(r)} \quad (329)$$

$\mathbf{A}_1^{(r)}$ 满足波动方程, 即,

$$-(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \mathbf{A}_1^{(r)} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (330)$$

或者,

$$-\nabla^2 \mathbf{A}_1^{(r)} = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_1^{(r)} \quad (331)$$

(328) 可以改写为,

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_1^{(r)}) &= \nabla(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi^{(r)}) + \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_1^{(r)} \\ &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 (-\nabla \phi^{(r)} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_1^{(r)})\end{aligned}\quad (332)$$

考虑,

$$\mathbf{E}_{1Maxwell} \triangleq -\nabla \phi_1^{(r)} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_1^{(r)} \quad (333)$$

这样 (332) 可以写为,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_1^{(r)}) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \mathbf{E}_{Maxwell}$$

我们得到安培环路定律,

$$\nabla \times (\mathbf{B}_{1Maxwell}) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \mathbf{E}_{Maxwell}$$

其中

$$\mathbf{B}_{1Maxwell} \triangleq \nabla \times \mathbf{A}_1^{(r)} \quad (334)$$

公式 (327) 为,

$$\oint_{C_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = - \oint_{C_2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(r)} \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (335)$$

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_1^{(r)} - \nabla\phi_1^{(r)} \quad (336)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A}_1^{(r)} \quad (337)$$

考虑 (334) 得到,

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_{1Maxwell}$$

上式是法拉第定律,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_{Maxwell} &= \nabla \cdot \left(-\nabla\phi_1^{(r)} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_1^{(r)} \right) \\ &= -\nabla \cdot \nabla\phi_1^{(r)} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A}_1^{(r)} \\ &= -\nabla^2\phi_1^{(r)} - \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi_1^{(r)}\right) \\ &= -\left(\nabla^2\phi_1^{(r)} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_1^{(r)}\right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho_1 \end{aligned} \quad (338)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{Maxwell} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad (339)$$

上式是高斯定律。由此我们得到麦克斯韦方程,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_{1Maxwell} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \nabla \times \mathbf{B}_{1Maxwell} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_{1Maxwell} \\ \nabla \times (\mathbf{B}_{1Maxwell}) = \mu_0\mathbf{J}_1 + \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\epsilon_0\mathbf{E}_{1Maxwell} \end{cases} \quad (340)$$

注意: $\mathbf{E}_{1Maxwell}$, $\mathbf{B}_{1Maxwell}$ 只是 $\mathbf{A}_1^{(r)}$ 和 $\phi_1^{(r)}$ 定义的一套辅助函数, 并不是真正的电场和磁场!

8.2 公理

作者的方法和麦克斯韦洛伦兹的方法不同。作者认为能量守恒定律 (117) 在准静态过度到辐射电磁场时应该保持不变。即,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}_j) dV = 0 \quad (341)$$

这样当然意味着由此而来的所以准静态能量守恒定律都可以直接过度到辐射电磁场，特别是能量守恒定律，

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{V_1} (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1) dV = (\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{V_2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2) dV \quad (342)$$

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (343)$$

上两式在频域为，

$$-\int_{V_1} (\mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1) dV = (\xi_1, \xi_2) = \int_{V_2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^*) dV \quad (344)$$

$$(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (345)$$

作者认为从准静态电磁场过度到辐射电磁场时，能量守恒定律（342，344）是不变的。因为它们是能流守恒定律。上式中 $\frac{1}{2}$ 是一半滞后，一半超前的思想要求的。上述能量守恒定律可以写成，

$$M_{2 \rightarrow 1}^* = M_{1 \rightarrow 2} \quad (346)$$

这样到了辐射电磁场能量守恒定律（341，346）仍然保持成立。这个公式意味着，能量只在电流 \mathbf{J}_j 之间交换，能量不会传给以太，并由以太把能量带离宇宙。不会有能量永久的交给以太。这个公式和辐射不溢出宇宙定律等价，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{n} d\Gamma = 0 \quad (347)$$

或着，

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{n} d\Gamma = 0 \quad (348)$$

作者认为电磁波是在电荷本身的场中运动的。每一个电荷都有质量，这个质量是由分布在整个空间中的静电场的能量构成的。这个静电场就构成了传递电磁波的以太。这个以太和麦克斯韦认为的以太有着本质的不同，

这个以太属于电荷本身。当电磁波在这样的以太中运动时它是不能离开电荷的（或者电流元）。麦克斯韦的以太属于空间，当辐射源把能量传递给以太以后，这些能量就脱离辐射源而去。但是电磁波在电荷本身的以太中传播它就不能脱离电荷而去。这就像甩一下马鞭一样，有波从鞭柄传递到鞭梢。但是波的能量并不能脱离马鞭而去。在这里电磁波能量也是不能脱离电荷而去，当然这些能量也不能溢出宇宙。这就有了公式（347，348）

惠勒费曼在吸收体理论中就认为，电磁场（波）没有自己的自由度。电磁场（波）和它的辐射源是不独立的。电磁场（波）是相互作用的记录。这些思想都和作者的观点一致。惠勒费曼的这些观点后来也被Cramer的量子力线交易诠释继承。不过他们只是在哲学层次上讨论这个问题，没有由此得到物理公式。辐射不溢出宇宙的公理就是作者从这一思想总结出来的电磁公式。有了这个公理，能量守恒定律（341，346）都成立了。对此的证明完全和准静态（见小节2.9）一样这里不在重复。值得一提的是麦克斯韦电磁理论不满足公式（347）或（348）。例如对任何一个天线，比如偶极子天线的坡印廷能量流都有，

$$\Re \oint_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{n} d\Gamma > 0 \quad (349)$$

\Re 是取实数的意思。

8.3 滞后势超前势

能量守恒定律意味着，

$$\left(\oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \right)^* = \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r} \quad (350)$$

如果 $M_{1 \rightarrow 2}$ 是滞后的，能量守恒定律（346）即

$$\left(\oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \exp(+jkr) \right)^* = \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r} \exp(-jkr) \quad (351)$$

这样有，

$$M_{1 \rightarrow 2} I_1 = \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \exp(-jkr) \quad (352)$$

$$M_{2 \rightarrow 1} I_2 = \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r} \exp(+jkr) \quad (353)$$

考虑

$$\mathbf{A}_1^{(r)} \triangleq k \oint_{C_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1}{r} \exp(-jkr) \quad (354)$$

$$\mathbf{A}_2^{(a)} \triangleq k \oint_{C_2} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2}{r} \exp(+jkr) \quad (355)$$

这样有,

$$\mathbf{A}_1^{(r)} \triangleq k \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}_1}{r} \exp(-jkr) dV \quad (356)$$

$$\mathbf{A}_2^{(a)} \triangleq k \int_{V_2} \frac{\mathbf{J}_2}{r} \exp(+jkr) dV \quad (357)$$

同理有,

$$\mathbf{A}_1^{(a)} \triangleq k \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}_1}{r} \exp(+jkr) dV \quad (358)$$

$$\mathbf{A}_2^{(r)} \triangleq k \int_{V_2} \frac{\mathbf{J}_2}{r} \exp(-jkr) dV \quad (359)$$

由于在作者的电磁理论中有能量守恒定律 (346) 如果初级线圈产生滞后波, 次级线圈必须是超前波。如果初级是超前波, 次级必须是滞后波。只有这样能量守恒定律 (346) 才能满足。

8.4 两个距离很远的线圈之间的能量

从我们前面意见得知, 两个线圈之间的能量为,

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \quad (360)$$

$$\mathbf{A} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{r} \quad (361)$$

我们由这个矢量势推广到滞后势,

$$\mathbf{A}^{(r)} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \exp(-jkr) \frac{d\mathbf{l}_1}{r} \quad (362)$$

那么似乎当两个线圈很远时两个线圈之间的能量应该为,

$$U_f = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \exp(-jkr) \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \quad (363)$$

U_f 是 r 很大时的能量。这个公式对不对, 显然不对, 因为能量不能是复数。能量应该是一个实数值, 这样我们应考虑超前势,

$$U_f = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{1}{2} (\exp(-jkr) + \exp(+jkr)) \frac{d\mathbf{l}_1}{r} \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (364)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\cos(kr)}{r} d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (365)$$

由此得到,

$$\lim_{kr \rightarrow 0} U_f = U \quad (366)$$

这个公式是合理的。当两个线圈很近时, 远处的能量可以退化成近处的能量。如果能量是上面式子, 可见滞后势, 超前势总是一起存在的。也就是电流总是辐射一半滞后波, 一半超前波。

8.5 磁场由一半滞后一半超前来定

首先是狄拉克首先于1939年提出一半滞后一半超前的概念[6]。后来惠勒费曼在1945年的吸收体理论中继承了这个概念[1, 2]。Cramer 在1986年的量子力线交易诠释中也继承了这个概念。不过他们都只是提出了这个思想, 并没有把这个思想应用于电磁理论。作者认为这个思想是正确的, 而且可以应用于电磁理论。作者认为既然电流可以同时产生滞后波和超前, 滞后波和超前就不能在电流表明互相抵消, 这意味着在

$$kr \rightarrow 0 \quad (367)$$

时滞后波和超前波的电场和磁场不能抵消。按照麦克斯韦电磁理论,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i^{(r)} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(r)} = -j\omega \mathbf{A}^{(r)} \\ &= -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} \exp(-jkr) dV \\ &\rightarrow -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} \exp dV \end{aligned} \quad (368)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i^{(a)} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(a)} = -j\omega \mathbf{A}^{(a)} \\ &= -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} \exp(-jkr) dV \\ &\rightarrow -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV \end{aligned} \quad (369)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_i &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{(r)} + \mathbf{E}^{(a)}) \\
&\rightarrow \frac{1}{2}(-j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV - j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV) \\
&= -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV
\end{aligned} \tag{370}$$

这说明电场不抵消，但是我们继续按照麦克斯韦电磁理论计算磁场，考虑

$$\mathbf{B}^{(r)} = \nabla \times \mathbf{A}^{(r)} \tag{371}$$

有

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{(r)} &= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} \exp(-jkr) dV \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \exp(-jkr) \times \mathbf{J} dV \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} - jk \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \exp(-jkr) \times \mathbf{J} dV
\end{aligned} \tag{372}$$

即，

$$\mathbf{B}^{(r)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + jk \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \exp(-jkr) dV \tag{373}$$

同理，

$$\mathbf{B}^{(a)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - jk \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \exp(+jkr) dV \tag{374}$$

所以有

$$\lim_{kr \rightarrow 0} \mathbf{B}^{(r)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + jk \frac{\mathbf{r}}{r} \right) dV \tag{375}$$

$$\lim_{kr \rightarrow 0} \mathbf{B}^{(a)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - jk \frac{\mathbf{r}}{r} \right) dV \tag{376}$$

考虑

$$\begin{aligned}
&\lim_{kr \rightarrow 0} \mathbf{B}^{(r)} + \lim_{kr \rightarrow 0} \mathbf{B}^{(a)} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + jk \frac{\mathbf{r}}{r} \right) dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - jk \frac{\mathbf{r}}{r} \right) dV \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV
\end{aligned} \tag{377}$$

我们发现磁场中

$$jk \int_V (\mathbf{J} \times jk \frac{\mathbf{r}}{r}) dV \tag{378}$$

和

$$-jk \int_V (\mathbf{J} \times jk \frac{\mathbf{r}}{r}) dV \quad (379)$$

抵消了。因此这样的磁场不可能构成一半滞后，一半超前的磁场。这一条件不满足。为了使得电磁场理论满足这一条件，我们对磁场做了如下修正，首先按照麦克斯电磁理论定义，

$$\mathbf{B}_{n,Maxwell}^{(r)} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \exp(-jkr) dV \quad (380)$$

$$\mathbf{B}_{f,Maxwell}^{(r)} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(jk \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \exp(-jkr) dV \quad (381)$$

$$\mathbf{B}_{n,Maxwell}^{(a)} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \exp(+jkr) dV \quad (382)$$

$$\mathbf{B}_{f,Maxwell}^{(a)} \triangleq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(-jk \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \exp(+jkr) dV \quad (383)$$

然后对麦克斯韦电磁理论做如下修正，

$$\mathbf{B}^{(r)} \triangleq \mathbf{B}_{n,Maxwell}^{(r)} + (-j) \mathbf{B}_{f,Maxwell}^{(r)} \quad (384)$$

$$\mathbf{B}^{(a)} \triangleq \mathbf{B}_{n,Maxwell}^{(a)} + (j) \mathbf{B}_{f,Maxwell}^{(a)} \quad (385)$$

这样作者定义的磁场为，

$$\mathbf{B}^{(r)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + k \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \exp(-jkr) dV \quad (386)$$

$$\mathbf{B}^{(a)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + k \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \exp(+jkr) dV \quad (387)$$

这个作者的磁场在电流附近为，

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^{(r)} + \mathbf{B}^{(a)}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + k \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\exp(-jkr) + \exp(+jkr)}{2} dV \quad (388)$$

$$\lim_{kr \rightarrow 0} \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + k \frac{\mathbf{r}}{r} \right) dV \quad (389)$$

这个磁场在电流附近不抵消，而是迭加的。并且这个磁场在电流附近和滞后的磁场，超前的磁场都相同。这才是正确的磁场。

8.6 按照作者的方法求解电磁场

按照作者的方法求解电磁场时电磁场应该满足（1）辐射不溢出宇宙。这一条要求，

$$\oiint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^*) \cdot \hat{n} d\Gamma = 0 \quad (390)$$

这一条意味着

$$\Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = 0 \quad (391)$$

“ \Re ”是取实部。

$$\Re \mathbf{S}_{11} = \Re \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* = 0 \quad (392)$$

$$\Re \mathbf{S}_{22} = \Re \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^* = 0 \quad (393)$$

S_{11} 和 S_{22} 在 Γ 上，或者无穷远处时是纯虚数才行。（2）互能流传递能量，因此在光源到光汇的连线上应该有，

$$\oiint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} d\Gamma = \text{Real Value} \quad (394)$$

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1 = \text{Real Value} \quad (395)$$

8.7 按照麦克斯韦电磁理论偶极子天线的电磁场

在任何一本电磁教材上都可以找到按照麦克斯电磁理论计算的偶极子发射天线的磁场，

$$H_{\phi \text{Maxwell}} = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} k \left(j + \frac{1}{kr} \right) \frac{\exp(-jkr)}{r} \sin \theta \quad (396)$$

按照麦克斯韦电磁理论计算得到的电场，

$$E_{\theta \text{Maxwell}} = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} \omega \mu_0 \left(j + \frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} \right) \frac{\exp(-jkr)}{r} \sin \theta \quad (397)$$

上两式是按照麦克斯韦电磁理论计算得到的电场和磁场，作者按照（384）对上式磁场进行修正，

$$H_{\phi} = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} k \left((-j)j + \frac{1}{kr} \right) \frac{\exp(-jkr)}{r} \sin \theta$$

$$\sim (1 + \frac{1}{kr}) \quad (398)$$

作者可能也得修正电场，对电场中间一项进行修正，

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} \omega \mu_0 (j + (j) \frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2}) \frac{\exp(-jkr)}{r} \sin \theta \\ &\sim (j + (j) \frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2}) = j(1 + \frac{1}{kr} - \frac{1}{(kr)^2}) \end{aligned} \quad (399)$$

当然按照这种方法的修正也不是唯一的，可能的修正值还可能取别的值，例如，

$$E_\theta \sim j(1 + \frac{1}{kr}) \quad (400)$$

这样修正是甩掉最后一项，使得电场和磁场具有完全的对称性。这样修正以后，电场和磁场的所有项都是同相位的。因此保证，

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = EH^* \hat{r} \sim j(1 + \frac{1}{kr} - \frac{1}{(kr)^2})(1 + \frac{1}{kr}) \quad (401)$$

上式是存虚数，这样有，

$$\Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = 0 \quad (402)$$

值得一提的是电场和磁场关于 $\frac{1}{kr}$ 的高次项目实际上是不重要的。因为光子过程是一个动态过程。这个过程开始时，电磁场处于广播模式，因此沿着光源到光汇连线上的电磁场非常弱。由于滞后波和超前波的干涉作用，沿着光源到光汇连线上的电磁场不断加强。最终滞后波构成超前波的波导，超前波构成滞后波的波导。电磁场波好像以准平面波的形式在光子的波导中传播。这就构成了光子模式。光子是在波导中的滞后波和超前波都几乎是平面波，这个波是不衰减的。因此我们也可以忽略所以高阶项目。

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} k((-j)j + \frac{1}{kr}) \frac{\exp(-jkr)}{r} \sin \theta \\ &\simeq \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} k \frac{\exp(-jkr)}{r} \sin \theta \end{aligned} \quad (403)$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} \omega \mu_0 (j + (j) \frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2}) \frac{\exp(-jkr)}{r} \sin \theta \\ &\simeq j \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} \omega \mu_0 \frac{\exp(-jkr)}{r} \sin \theta \end{aligned} \quad (404)$$

在上面的公式中仍然有 $\frac{1}{r}$ 的距离衰减因子。由于滞后波和超前波的干涉作用最终这个衰减因子也会消失。这就是我们看到的光是光线的原因，光线中的光是准平面波。光线就是光波导中的光。这种光波导是滞后波和超前波共同形成的。是由于滞后和超前波同步以后的干涉作用产生的。这种干涉使得只有光源和光汇之间的连线上滞后波和超前波得到加强，其他路径都干涉减弱了。

8.8 光子中的电磁波

根据前面我们讲的，我们知道光子是由互能流构成的。互能流是由滞后波和超前波构成的，由于滞后波和超前波发生了同步，这个同步产生干涉加强。加强以后滞后波成为超前波的波导，超前波称为滞后波的波导。这样就形成了光子波导。光子就是在光子波导中传播的。在光子波导中滞后波和超前波可以看成是平面波或者准平面波。这种波不随距离衰减。

举一个例子，在 $x = 0$ 处有光源，在 $x = L$ 处有光汇。假设光源的电流元为

$$\mathbf{J}_1 = J_{10}\hat{z} \quad (405)$$

电流中包含 $\exp(j\omega t)$ 的因子，这个因子被省去。磁场为，

$$\mathbf{H}_1 = H_{10} \exp(-jkx)\hat{y} \quad (406)$$

$$H_1 = H_{10} \exp(-jkx)$$

由安培环路定律得知，

$$H_{10} = \frac{\mathbf{J}_{10}}{2} \quad (407)$$

电场由

$$\mathbf{E}_1 \sim -j\omega\mathbf{A}_1 \quad (408)$$

得到，

$$\mathbf{E}_1 = jE_{10} \exp(-jkx)(-\hat{z}) \quad (409)$$

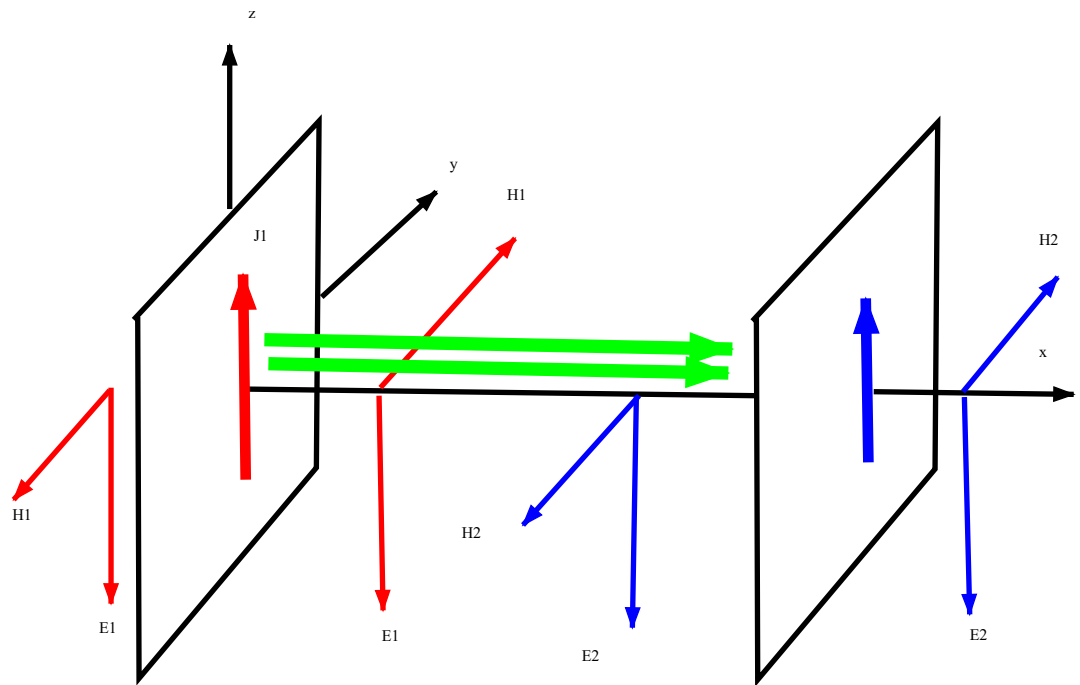


图 13: 两个金属板构成的光子系统。两个金属板距离为 L ,金属板宽为 w 高为 h 。

$$E_1 = jE_{10} \exp(-jkx)$$

磁场和电场的阻抗因子为 $\frac{1}{\eta}$

$$H_{10} = E_{10} \frac{1}{\eta} \quad (410)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* &= (jE_{10} \exp(-jkx)(-\hat{z})) \times (H_{10} \exp(-jkx)\hat{y})^* \\ &= (jE_{10} \exp(-jkx)(H_{10} \exp(-jkx))^* \hat{x} \\ &= (jE_{10})(H_{10})^* \hat{x} = jE_{10}H_{10} \hat{x} = j \frac{E_{10}^2}{\eta} \hat{x} \end{aligned} \quad (411)$$

$$S_{11} = j \frac{E_{10}^2}{\eta} \hat{x} = j\eta H_{10}^2 \hat{x} = j\eta \frac{J_{10}^2}{4} \hat{x} \quad (412)$$

对于次级线圈电流 I_2

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_2 + j\omega L_2} \quad (413)$$

假设,

$$R_2 \gg \omega L_2 \quad (414)$$

$$\mathcal{E}_1 = E_1 h \quad (415)$$

h 是平板的高。 w 是平板的宽。

$$I_2 = \frac{E_1 h}{R_2} \quad (416)$$

$$J_2 = \frac{I_2}{w} = \frac{E_1 h}{wR_2} \quad (417)$$

由公式(409)得到,

$$\mathbf{E}_1(x=L) = jE_{10} \exp(-jkL)(-\hat{z}) \quad (418)$$

由(417)得到,

$$\mathbf{J}_2 = \frac{h}{wR_2} jE_{10} \exp(-jkL)(-\hat{z}) \quad (419)$$

$$E_{10} = \eta \frac{J_{10}}{2} \quad (420)$$

$$J_2 = -\frac{h}{wR_2} j E_{10} \exp(-jkL) \quad (421)$$

或者,

$$J_2 = -j \frac{h\eta}{wR_2} \frac{J_{10}}{2} \exp(-jkL) \quad (422)$$

选择电阻 R_2 使得,

$$|\mathbf{J}_2| = |\mathbf{J}_1| \quad (423)$$

这一点是基于对于一个光子它的源和汇的强度应该是相同的, 因此有,

$$J_2 = -j J_{10} \exp(-jkL) \quad (424)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{J_2}{2} \exp(+jk(L-x)) \hat{y} \quad (425)$$

$$H_2 = -\frac{J_2}{2} \exp(+jk(L-x))$$

$$\mathbf{E}_2 = j\eta \frac{J_2}{2} \exp(+jk(L-x)) (-\hat{z}) \quad (426)$$

$$E_2 = j\eta \frac{J_2}{2} \exp(+jk(L-x)) \quad (427)$$

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1$$

$$= (E_1 H_2^* + E_2^* H_1) \hat{x}$$

$$= ((jE_{10} \exp(-jkx)) (-\frac{J_2}{2} \exp(+jk(L-x)))^* + (j\eta \frac{J_2}{2} \exp(+jk(L-x)))^* (H_{10} \exp(-jkx))) \hat{x}$$

$$= ((jE_{10}) (-\frac{J_2}{2} \exp(+jkL))^* + (j\eta \frac{J_2}{2} \exp(+jkL))^* (H_{10})) \hat{x}$$

$$= ((jE_{10}) (-\frac{1}{2} (-jJ_{10} \exp(-jkL)) \exp(+jkL))^* + (j\eta \frac{1}{2} (-jJ_{10} \exp(-jkL)) \exp(+jkL))^* (H_{10})) \hat{x}$$

$$= ((jE_{10}) (-\frac{1}{2} (-jJ_{10}))^* + (j\eta \frac{1}{2} (-jJ_{10}))^* (H_{10})) \hat{x}$$

$$= (j\eta \frac{J_{10}}{2}) (-\frac{1}{2} (-jJ_{10}))^* + (j\eta \frac{1}{2} (-jJ_{10}))^* \frac{J_{10}}{2} \hat{x}$$

$$= \frac{1}{4} \eta J_{10} J_{10}^* (jj^* + (-jj)^*) \hat{x} \quad (428)$$

$$\mathbf{S}_m = \frac{1}{2} \eta J_{10} J_{10}^* \hat{x} \quad (429)$$

前面 (412) 如果按照麦克斯韦电磁理论计算

$$\mathbf{S}_{11} = \eta \frac{J_{10}^2}{4} \hat{x} \quad (430)$$

我们发现互能流

$$|S_m| = 2|S_{11}| \quad (431)$$

这是我们没有采用一半滞后，一半超前的原则，如果采用一半滞后一半超前的原则，

$$\mathbf{S}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) = \eta \frac{J_{10}^2}{4} \hat{x} \quad (432)$$

这就和按照麦克斯韦电磁理论，的坡印廷矢量计算的结果 S_{11} 一样了。那么即然坡印廷矢量也可以来计算光子的能量流，为啥要要用互能流来计算呢。那是因为互能流才可以保证光子是一个过程，开始时光源发出的光是球面波不是平面波，光汇发出的电磁波也是球面波。两个波成功同步以后，经过一个过程才能在光源和光汇之间建立平面波。这个同步过程在Cramer的粒子模型中被称为握手[3, 4]。在光源和光汇发出的滞后波和超前波握手以后，滞后波和超前波才逐渐变成沿着光源和光汇的平面电磁波。因此如果只用坡印廷矢量 \mathbf{S}_{11} 是不能解释光源和光汇之间光子的建立过程的。

另外我们也要说明滞后波和超前波的自能流都是无功功率波。无功功率波不需要反向坍塌。能量可以自动返回到发出这个波的源(射源或者汇阱)。由无功功率的滞后波和超前波刚好可以构成一个有功功率的互能流。这简直妙极了。因为最初当我考虑电磁波是有功功率的，但是考虑电磁波的能量是由互能流传递。这时自能流就得通过时间反转波返回[13]。可是返回的时间反转波也可能产生时间反转波的互能流，这个时间反转波的互能流肯定可以抵消原来的互能流。这样电磁场的解就成了0解了。因此仍然解释不通。但是无功功率的滞后波和无功功率的超前刚好可以构成有功功率的互能流。这真的是太奇妙了！

另外考虑在 $x = 0$ 两边磁场 \mathbf{H}_1 反向，在 $x = L$ 处磁场 \mathbf{H}_2 反向。磁场反向后两个互能流 $\mathbf{S}_{12}, \mathbf{S}_{21}$ 刚好抵消。所以有，

$$\mathbf{S}_m = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \eta \frac{J_{10}^2}{4} \hat{x} & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases} \quad (433)$$

这表明光子在 $x = 0$ 处产生，在 $x = L$ 处湮灭。注意这里我们讲的产生和湮灭比量子力学中谈到的产生和湮灭意义更大。我们这里产生的确是由光源的电流源产生了能流。我们这里说的湮灭的确是由光汇的电流源吸收了电磁波的所有能量。在量子力学中因为没有产生波的源，所以它只保证系统在变化前的能量（动量）和变化后的能量（动量）保持不变即可。公式（433）的性质也是坡印廷矢量 \mathbf{S}_{11} 不具有的。 \mathbf{S}_{11} 只是产生，但不会湮灭。 \mathbf{S}_m 是可以产生，也可以湮灭的。我们的这个模型和光子还是有点区别。我们这个模型实际上从光源向两边同时发出了两个光子。我们只计算了向 \hat{x} 方向的光子的能量流。其实还向 $-\hat{x}$ 方向辐射了相同的能量流。值得一提的是在作者的电磁理论中光源辐射是一个随机过程，一般情况总是要么光源和左面的一个光汇同步，要么光源和右面的一个光汇同步。如果向左发出的波没有找到和它同步的超前波。辐射的能量会自动返回光源。因此向左发出的光子不能实现。如果这时正好右面有一个光汇发出的超前波和光源发出的滞后波同步，向右面的光子得到实现。这样我们就只得到一个向右面的光子。

8.9 大量光子构成的宏观电磁波

我们假定有一个辐射电流元 \mathbf{J}_1 ，它的电磁场为 $\xi_1 = [\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1]^T$ 。我们假定宇宙的边缘有大量的吸收体，这些吸收体的电流元为 \mathbf{J}_2 。见图14。这里在作者的电磁理论中，原来麦克斯韦方程要求满足的sliver Muller条件被布置在半径无穷大的球面上的吸收体来仿真。

我们进一步假设这些吸收体产生的超前波为 $\xi_2 = [\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2]^T$ 和 ξ_1 完全同步。这个同步意味着，

$$\mathbf{E}_1 \sim \mathbf{H}_2 \quad (434)$$

即 \mathbf{E}_1 和 \mathbf{H}_2 有相同的相位，

$$\mathbf{E}_2 \sim \mathbf{H}_1 \quad (435)$$

即 \mathbf{E}_2 和 \mathbf{H}_1 有相同的相位，且，

$$\|\mathbf{E}_1\| = \|\mathbf{E}_2\| \quad (436)$$

$$\|\mathbf{H}_1\| = \|\mathbf{H}_2\| \quad (437)$$

这样有，

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* = \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1 \quad (438)$$

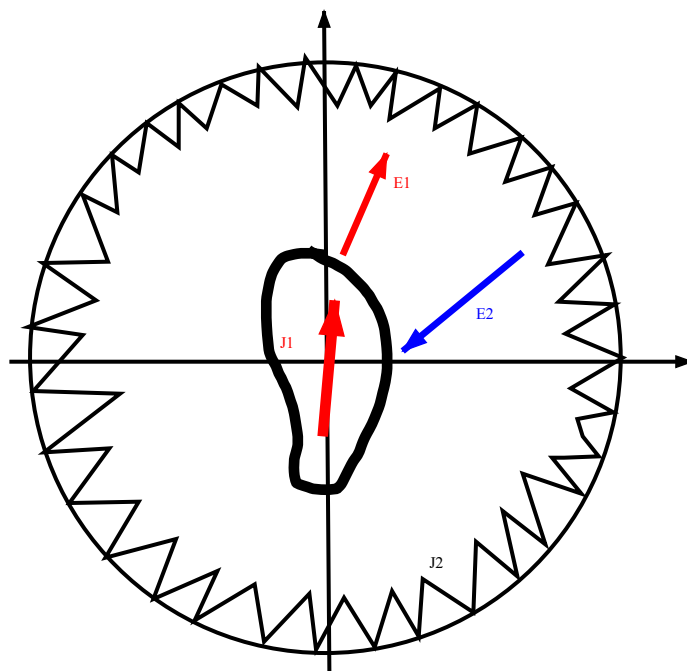


图 14: 在作者的电磁理论中, Silver-Muller条件可以用宇宙边缘的吸收体来仿真,

另外我们知道,

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{1Maxwell} \quad (439)$$

所以有,

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_{1Maxwell}^* \quad (440)$$

互能定律的前半部分,

$$\begin{aligned} - \int_{V_1} \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1 dV &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} d\Gamma \\ &= \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^*) \cdot \hat{n} d\Gamma \\ &= \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_{1Maxwell}^*) \cdot \hat{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (441)$$

这里 Γ 是半径无穷大的球面。 V_1 在 Γ 内。上式即,

$$- \int_{V_1} \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1 dV = \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_{1Maxwell}^*) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (442)$$

这个公式和坡印廷定理,

$$- \int_{V_1} \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_1 dV = \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_{1Maxwell}^*) \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (443)$$

可以比较。假设 Γ 是包围电流 \mathbf{J}_1 的大球面, 我们知道对于任何天线,

$$\Re \left(\oint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_{1Maxwell}^*) \cdot \hat{n} d\Gamma \right) > 0 \quad (444)$$

上式, 表明有向外的辐射。但是,

$$\mathbf{E}_1 \sim -j\omega \mathbf{A}^{(r)} \quad (445)$$

在 V_1 内

$$kr \rightarrow 0 \quad (446)$$

$$\mathbf{A}^{(r)} \rightarrow \mathbf{A} \quad (447)$$

$$\mathbf{E}_1 \sim -j\omega \mathbf{A} \sim -jI \hat{I} \quad (448)$$

\hat{I} 是电流的方向。

$$-\int_{V_1} \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_1 dV = -(-jI\hat{I})^* \cdot I\hat{I} = -jII^* \quad (449)$$

$$\Re\left(-\int_{V_1} \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_1 dV\right) = 0 \quad (450)$$

所以坡印廷定理（443）是一定不能满足的。但是，

$$\mathbf{E}_2 \sim \mathbf{H}_1 \quad (451)$$

\mathbf{E}_2 的方向是在 $-\hat{I}_1$ 的方向，即 \mathbf{J}_1 的方向，所以，

$$\Re\left(-\int_{V_1} \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1 dV\right) > 0 \quad (452)$$

这和，

$$\Re \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_{1Maxwell}^*) \cdot \hat{n} d\Gamma > 0 \quad (453)$$

一致。这说明作者的电磁场理论是可以实现的，但是麦克斯韦的电磁场理论公式（443）是无法实现的。

如果我们用图15测量的相位完全和天线的输入电流的相位一致，就说明坡印廷定理失败。因为按照麦克斯韦电磁理论， $\mathbf{H}_{1Maxwell}$ 不和电流相位完全一致，而是应该有一个虚数成分。按照作者的电磁理论， \mathbf{H}_{1MEF} 是和电流 I_1 相位完全一致。图15是按照磁场来测量电流的大小的，因此测量的相位其实是按照霍尔效应原件测量的磁场。

9 必要的实验

\mathbf{B}_{BS} , \mathbf{B}_{Ampere} , $\overline{\mathbf{B}}_{Ampere}$, $\mathbf{B}_{Maxwell}$ 没有很好的测量手段。因此在作实验时不予以考虑。我们主要比较 \mathbf{B}_{hall} , $\overline{\mathbf{B}}_{hall}$, $\mathbf{B}_{Faraday}$, $\overline{\mathbf{B}}_{Faraday}$, \mathbf{B}_{MEF} 。另外我们有测量电流相位的设备，例如图15。这个设备其实是按照霍尔效应测量了电流的磁场。

我们必须自制测量 \mathbf{B}_{hall} 的设备如图16。在霍尔效应器件两侧增加软磁性磁棒，用以增加霍尔效应的灵敏度。

我们也必须自制测量 $\overline{\mathbf{B}}_{hall}$ 的设备如图17。用一个磁环中间的缝隙里放在霍尔效应磁场测量原件。当然如果灵敏度够的话，也可以不加磁芯。或者使用若干个图16中的元件。

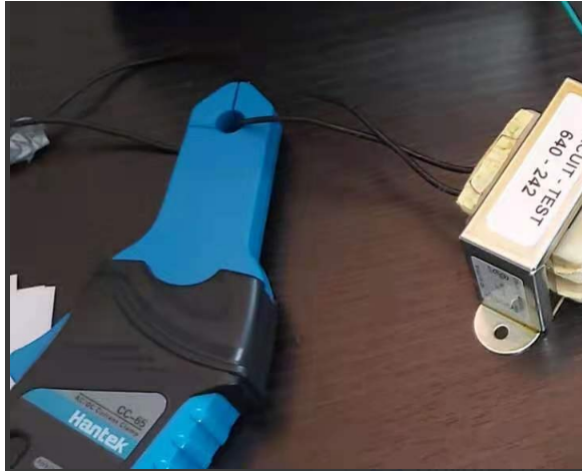


图 15: 电流测量装置, 可以测量电流的大小和相位。这个测量仪器测量的实际上是霍尔效应。

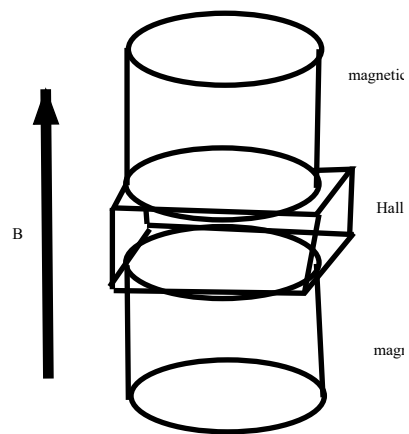


图 16: 增加软磁性磁棒的磁场霍尔效应测量仪器。

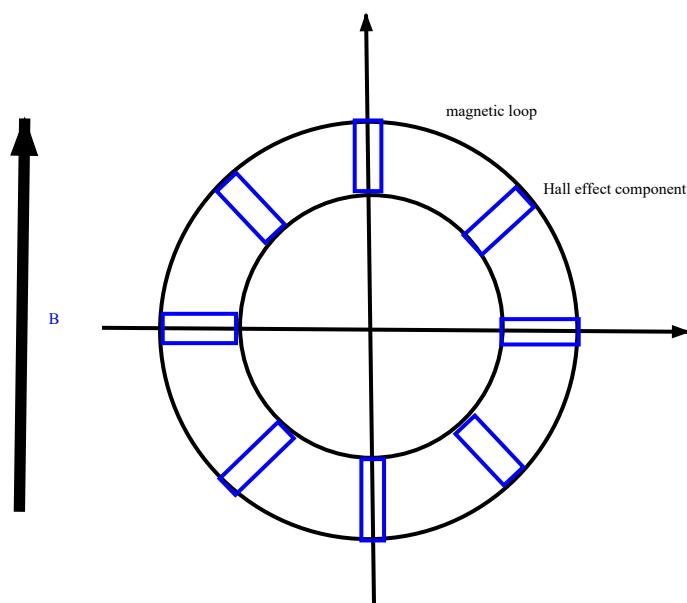


图 17: 磁环中镶嵌霍尔效应器件, 测量环形平均磁场。

	$B_{Faraday}$	$\overline{B}_{Faraday}$
电流相位	=	=
B_{hall}	=	=
\overline{B}_{hall}	=	=

表 1: 测量不同磁场的对应关系。

9.1 设计实验1, 恒定交变磁场

选择一个线圈, 在大线圈内进行测量, 大线圈内的磁场基本是恒定的。频率可以选择在1000Hz。测量 B_{hall} , \overline{B}_{hall} , $B_{Faraday}$, $\overline{B}_{Faraday}$ 。见表3。作者事先估计一下测量结果,

验证下列两个公式哪一个正确,

$$B_{EMF} = B_{Faraday} = B_{hall}$$

or

	$B_{Faraday}$	$\overline{B}_{Faraday}$
电流相位	=	≠
B_{hall}	=	≠
\overline{B}_{hall}	≠	=

表 2: 测量不同磁场的对应关系。

$$B_{EMF} = \overline{B}_{Faraday} = \overline{B}_{hall}$$

9.2 设计实验2, 长直导线电流

在一个长直导线周围测量磁场。导线中通有高频电流, 电流的频率在1M-10M, 这个范围霍尔效应的测量仍然可行, 对于测量 B_{Hall} , 为了提高灵敏度, 需要在霍尔效应器件两侧增加磁棒。作者事先估计一下测量结果,

验证下列两个公式哪一个正确,

$$H_{EMF} = B_{Faraday} = B_{hall}$$

or

$$H_{EMF} = \overline{B}_{Faraday} = \overline{B}_{hall}$$

9.3 设计实验4, 测量平面电磁波的磁场

这个实验检验平面电磁波的磁场。这一实验要求是天线的远场。因此选择一个中波(MW)的电台, 比如频率1000kHz。或者调频电台10MHz, 或者100MHz。测量 $B_{hall}, \overline{B}_{hall}, B_{Faraday}, \overline{B}_{Faraday}$ 。检验下列表格是否正确。见表3。

我们需要在不同情况下检验下列磁场的定义。作者事先估计一下测量结果。

验证下列两个公式哪一个正确,

$$H_{EMF} = B_{Faraday} = B_{hall}$$

	$B_{Faraday}$	$\overline{B}_{Faraday}$
B_{hall}	=	≠
\overline{B}_{hall}	≠	=

表 3: 测量不同磁场的对应关系。

or

$$H_{EMF} = \overline{B}_{Faraday} = \overline{B}_{hall}$$

9.4 讨论

假如表3得到的结果是正确的。这意味着 $B_{Maxwell} = \overline{B}_{Faraday}$ 和 \overline{B}_{Hall} 一致。但是 $B_{Maxwell} = \overline{B}_{Faraday}$ 和 B_{Hall} 不一致。我们通常定义的磁场是

$$B_{Maxwell}, \overline{B}_{Faraday}, B_{Hall}$$

这就已经说明我们通常的磁场定义是有问题的。但是即便我们得到的结果是，

$$\overline{B}_{Faraday} = B_{Hall}$$

仍然不能说明作者的电磁理论是错误的，麦克斯韦电磁理论是正确的。因为作者的磁场的定义和Maxwell磁场的定义本身就是不同的。作者磁场的定义是建立在远场的坡印廷矢量必须是无功功率的基础之上的。或者是建立在互能流传递能量的基础之上的，麦克斯韦磁场的定义是磁矢量的旋度。这两个磁场的定义是完全不同的。

很可能出现的结果是按照麦克斯韦磁场的定义测量的磁场是正确的，按照作者定义的磁场也是正确。但是按照麦克斯韦磁场的定义计算出来的坡印廷矢量是有功功率，按照作者的磁场定义计算所得坡印廷矢量是无功功率。最终需要确定的是坡印廷矢量的功率到底是有功功率还是无功功率。这个问题似乎是一个理论问题，如果大家从逻辑上接受了作者提出的能量守恒定律（344），辐射不溢出宇宙的公理（109）。那么自然接受作者提出的磁场定义。到那时当然也可以同时接受原来麦克斯韦磁场的定义和作者提出的磁场的定义。因此 B_{MEF} 用来计算坡印廷矢量能流密度 S ，或者计算

互能流密度 S_m 。用 $\mathbf{B}_{Maxwell}$ 就作为 $\nabla \times \mathbf{A}$ 或 $\nabla \times \mathbf{A}^{(r)}$ 等价的简写符号。两个磁场各自有不同的应用。

10 结论

作者系统的讨论了磁场的不同可能性。磁场的概念是不断发展的。不同的场合其实定义是不同的。作者对此做了详细说明。作者按照电场坡印廷能流矢量密度，或者互能流密度定义了磁场。这个磁场首先保证天线的远场辐射是无功功率的。麦克斯韦定义的磁场，即矢量势的旋度 $\mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} = \nabla \times \mathbf{A}^{(r)}$ 。麦克斯韦定义的磁场和环路上的感应电动势 $\overline{\mathbf{B}}_{Faraday}$ 定义的磁场一致，即，

$$\mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} = \overline{\mathbf{B}}_{Faraday}^{(r)} \quad (454)$$

但是

$$\mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} = \overline{\mathbf{B}}_{Hall} \neq \mathbf{B}_{Hall} \quad (455)$$

如果是这样已经说明麦克斯韦电磁理论是存在问题的。但是即便，

$$\mathbf{B}_{Maxwell}^{(r)} = \mathbf{B}_{Hall} \quad (456)$$

仍然不能说明作者的电磁理论是错误的。关于这个问题最终需要确定平面电磁波的辐射能流到底是无功功率还是有功功率。作者认为经典电磁理论的问题是把下面两个不同定义的磁场概念搞混了。

$$\mathbf{B} \neq \mathbf{B}_{Maxwell} \triangleq \nabla \times \mathbf{A}^{(r)}$$

这里 \mathbf{B} 是正确定义的磁场。作者认为，

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{MEF}$$

\mathbf{B}_{MEF} 是作者按照互能流定义的磁场。另外按照作者的电磁场理论，电场也不是，

$$\mathbf{E} \neq -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(r)} - \nabla \phi^{(r)} \quad (457)$$

因为这个电场不可能满足辐射不溢出宇宙的公理，这个电场也必须修正。麦克斯韦理论中仍然可以保留的是，

$$\mathbf{E}_i = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(r)} \quad (458)$$

即感应电场仍然是可以按照麦克斯韦电磁理论计算的。这就使得麦克斯韦电磁理论中最主要的部分得到了保留。由麦克斯韦电磁理论可以正确计算感应电场 \mathbf{E}_i 。至于磁场 \mathbf{B} 和静态电场 \mathbf{E}_s 都必须进行修正。

参考文献

- [1] Wheeler. J. A. and Feynman. R. P. *Rev. Mod. Phys.*, 17:157, 1945.
- [2] Wheeler. J. A. and Feynman. R. P. *Rev. Mod. Phys.*, 21:425, 1949.
- [3] John Cramer. The transactional interpretation of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 58:647–688, 1986.
- [4] John Cramer. An overview of the transactional interpretation. *International Journal of Theoretical Physics*, 27:227, 1988.
- [5] Adrianus T. de Hoop. Time-domain reciprocity theorems for electromagnetic fields in dispersive media. *Radio Science*, 22(7):1171–1178, December 1987.
- [6] P. A. M. Dirac. *Proc. Roy. Soc. London A*, 148, 1938.
- [7] A. D. Fokker. *Zeitschrift fuer Physik*, 58:386, 1929.
- [8] James Clerk Maxwell. *On Physical Lines of Force*. Philosophical Magazine, 1861.
- [9] F. E. Neumann. Allgemeine gesetze der inducirten elektrischen stroeme. *Annalen der Physik und Chemie (in German)*. Wiley. doi:10.1002/andp.18461430103. ISSN 0003-3804, 143(1):31–44, 1846.
- [10] A. K. T. Assis P. Graneau. Kirchhoff on the motion of electricity in conductors. *Apeiron*, 19:19–25, 1994.
- [11] I.V. Petrusenko and Yu. K. Sirenko. The lost second lorentz theorem in the phasor domain. *Telecommunications and Radio Engineering*, 68(7):555–560, 2009.

- [12] Shuang ren Zhao. The application of mutual energy theorem in expansion of radiation fields in spherical waves. *ACTA Electronica Sinica, P.R. of China*, 15(3):88–93, 1987.
- [13] Shuang ren Zhao. A new interpretation of quantum physics: Mutual energy flow interpretation. *American Journal of Modern Physics and Application*, 4(3):12–23, 2017.
- [14] Shuang ren Zhao. Photon can be described as the normalized mutual energy flow. *Journal of Modern Physics*, doi: 10.4236/jmp.2020.115043, 11(5):668–682, 2020.
- [15] Shuang ren Zhao. A solution for wave-particle duality using the mutual energy principle corresponding to schroedinger equation. *Physics Tomorrow Letters*, DOI - 10.1490/ptl.dxdoi.com/08-02tpl-sci, 2020.
- [16] Shuang ren Zhao. Huygens principle based on mutual energy flow theorem and the comparison to the path integral. *Physics Tomorrow Letters*, pages 09–06, JANUARY 2021.
- [17] Shuang ren Zhao. The contradictions in poynting theorem and classical electromagnetic field theory. *International Journal of Physics*, 10(5):242–251, 2022.
- [18] Shuang ren Zhao. Mutual stress flow theorem of electromagnetic field and extension of newton’s third law. *Theoretical Physics Letters*, 10(7), 2022.
- [19] Shuang ren Zhao. The paradox that induced electric field has energy in maxwell theory of classical electromagnetic field is shown and solved. *International Journal of Physics*, 10(4):204–217, 2022.
- [20] Shuang ren Zhao. Solve the maxwell’s equations and schrodinger’s equation but avoiding the sommerfeld radiation condition. *Theoretical Physics Letters*, 10(5), 2022.
- [21] Shuang ren Zhao. The theory of mutual energy flow proves that macroscopic electromagnetic waves are composed of photons. *International Journal of Physics*, 10(5), 2022.

- [22] Shuang ren Zhao. Calculate the energy flow of transformers, antenna systems, and photons by redefining the radiated electromagnetic field of plane-sheet current. *International Journal of Physics*, 11(3):136–152, 2023.
- [23] Shuang ren Zhao. Calculate the energy flow of transformers, antenna systems, and photons through a new interpretation of the classical electromagnetic fields. *International Journal of Physics*, 11(5):261–273, 2023.
- [24] Shuang ren Zhao. Definition, measurement and calibration of magnetic field of electromagnetic wave - correct the defects of maxwell's classical electromagnetic field theory. *International Journal of Physics*, 11(3):106–135, 2023.
- [25] Shuang ren Zhao. Energy conservation law and energy flow theorem for transformer, antenna and photon. *International Journal of Physics*, 11(2):56–66, 2023.
- [26] Shuang ren Zhao. Energy flow and photons from primary coil to secondary coil of transformer. *International Journal of Physics*, 11(1):24–39, 2023.
- [27] Shuang ren Zhao. Experiment to prove the existence of the advanced wave and experiment to prove the wrong definition of magnetic field in maxwell's theory. *International Journal of Physics*, 11(2):73–80, 2023.
- [28] V.H. Rumsey. Reaction concept in electromagnetic theory. *Phys. Rev.*, 94(6):1483–1491, June 1954.
- [29] V.H. Rumsey. A short way of solving advanced problems in electromagnetic fields and other linear systems. *IEEE Transactions on antennas and Propagation*, 11(1):73–86, January 1963.
- [30] K. Schwarzschild. *Nachr. ges. Wiss. Gottingen*, pages 128,132, 1903.
- [31] Lawrence M. Stephenson. The relevance of advanced potential solutions of maxwell's equations for special and general relativity. *Physics Essays*, 13(1), 2000.

- [32] H. Tetrode. *Zeitschrift fuer Physik*, 10:137, 1922.
- [33] W. J. Welch. Reciprocity theorems for electromagnetic fields whose time dependence is arbitrary. *IRE trans. On Antennas and Propagation*, 8(1):68–73, January 1960.
- [34] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, part i. general theory, steady current effects. *Foundations of Physics Letters*, 3:443–469, 1990.
- [35] Shuangren Zhao. The application of mutual energy formula in expansion of plane waves. *Journal of Electronics, P. R. China*, 11(2):204–208, March 1989.
- [36] Shuangren Zhao. The simplification of formulas of electromagnetic fields by using mutual energy formula. *Journal of Electronics, P.R. of China*, 11(1):73–77, January 1989.