Au delà de Fibonacci, la suite des puissances entières des nombres

Jean-Philippe Vassan

1er janvier 2024

Résumé

Triangles voisins du triangle de Pascal - Généralisation de la suite de Fibonacci - Nombres cousins du nombre d'or - Une égalité inspirée du nombre d'or - Formule simplifiée de la solution générale de l'équation caractéristique associée - Série génératrice ordinaire associée - Équation de la fonction *tente*(théorie du chaos).

Jusqu'à présent, le nombre d'or est le seul nombre dont on connaît la suite des puissances entières. En effet, il y a une relation entre la récurrence de Fibonacci et les puissances entières du nombre d'or.

Nombre d'or "phi", noté : $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ on a : $\phi(\phi - 1) = 1$

La récurrence de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55...
(Chaque terme est la somme des deux termes précédents)

Suite des puissances entières de ϕ :

$\phi^1 = \phi$
$\phi^2 = \phi + 1$
$\phi^3 = 2\phi + 1$
$\phi^4 = 3\phi + 2$
$\phi^5 = 5\phi + 3$
$\phi^6 = 8\phi + 5$
$\phi^7 = 13\phi + 8$
$\phi^8 = 21\phi + 13$
$\ldots$ (On trouve la suite de Fibonacci de chaque coté du signe $+$)

Dans cet article, on verra que tous les nombres réels suivent une suite des puissances entières qui vaut aussi pour le nombre d'or. Il semble impossible de pouvoir trouver cette suite à partir de la suite des puissances entières du nombre d'or, car l'information est noyée dans une apparente simplicité où les possibilités sont multiples. *La récurrence de Fibonacci est l'arbre qui cache la forêt des nombres.*

Or, il existe pour chaque nombre, un triangle de nombres - suivant le principe du triangle de Pascal[1] - dont la "résolution" donne la suite des puissances pour ce nombre. Grâce à ces triangles, on détermine la suite des puissances pour d'autres nombres que le nombre d'or ; alors son mécanisme apparaît clairement. Ce qui nous permet d'énoncer cette suite récurrente, qu'on étudiera.

Première partie
Les triangles des puissances

Soient deux nombres réels x et β, avec : $x = \beta$, on construit un triangle de nombres à partir de l'équation polynomiale de départ :

$$\boxed{\Upsilon_{1;\beta} = (x-\beta)(x+\beta-1) = x^2 - x - \beta(\beta-1) = 0}$$ [2]

1 La suite des puissances entières du nombre 2 :

On a :$\Upsilon_{1;2} = (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 = 0$

Triangle associé au nombre 2 :

$$\begin{array}{ccccccc}
+1 & -1 & -2 & & & & \\
+1 & 0 & -3 & -2 & & & \\
+1 & +1 & -3 & -5 & -2 & & \\
+1 & +2 & -2 & -8 & -7 & -2 & \\
+1 & +3 & 0 & -10 & -15 & -9 & -2
\end{array}$$

Exemple de lecture du triangle :
la troisième ligne se lit :$\Upsilon_{3;2} = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$

Le passage d'une équation polynomiale $\Upsilon_{n;\beta}$ à l'équation polinomiale de degré supérieur $\Upsilon_{n+1;\beta}$ revient à multiplier $\Upsilon_{n;\beta}$ par $(x+1)$

On a : $\boxed{\Upsilon_{n;\beta} = (x+1)^{n-1}\Upsilon_{1;\beta} = (x-\beta)(x+\beta-1)(x+1)^{n-1} = 0}$

On résoud par récurrence les équations polynomiales $\Upsilon_{n;\beta} = 0$ à partir du triangle associé au nombre β, donnant les coefficients de ces équations, pour établir la suite des puissances entières du nombre β.

1. Comme pour le triangle de Pascal, le terme de la ligne du dessous est la somme des deux termes de gauche et de droite de la ligne du dessus.
2. En effet, que vaut la constante c dans l'équation : $x^2 - x - c = 0$?
$c = x^2 - x = x(x-1) = \beta(\beta-1)$, β étant la valeur numérique de x.

Pour $x = 2$ on a :
$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 2$

$x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x^3 = 3x + 2$

Ensuite, on remplace x^2 et x^3 par leur expression en fonction de x pour déterminer x^4 en fonction de x, et ainsi de suite :

$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x^4 + 3x + 2 - 3(x+2) - 5x - 2 = 0$
$\Rightarrow x^4 + 3x + 2 - 3x - 6 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x^4 = 5x + 6$

$x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 7x - 2 = 0 \Rightarrow x^5 + 2(5x+6) - 2(3x+2) - 8(x+2)$
$-7x-2 = 0 \Rightarrow x^5+10x+12-6x-4-8x-16-7x-2 = 0 \Rightarrow x^5-11x-10 = 0$
$\Rightarrow x^5 = 11x + 10$

$x^6 + 3x^5 - 10x^3 - 15x^2 - 9x - 2 = 0 \Rightarrow x^6 + 3(11x+10) - 10((3x+2)-$
$15(x+2) - 9x - 2 = 0 \Rightarrow x^6 + 33x + 30 - 30x - 20 - 15x - 30 - 9x - 2 = 0$
$\Rightarrow x^6 - 21x - 22 = 0 \Rightarrow x^6 = 21x + 22$

La suite des puissances entières du nombre $x = 2$:

$x^1 = x$
$x^2 = x + 2$
$x^3 = 3x + 2$
$x^4 = 5x + 6$
$x^5 = 11x + 10$
$x^6 = 21x + 22$

On peut voir que : $11 = 5 + 6 \quad et \quad 10 = \dfrac{5*6}{3}$ (Fonctionne aussi pour les autres rangs.)

2 La suite des puissances entières du nombre 3

Triangle associé au nombre 3 :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & +1 & & -1 & & -6 & & & & \\
 & & & +1 & & 0 & & -7 & & -6 & & & \\
 & & +1 & & +1 & & -7 & & -13 & & -6 & & \\
 & +1 & & +2 & & -6 & & -20 & & -19 & & -6 & \\
+1 & & +3 & & -4 & & -26 & & -39 & & -25 & & -6
\end{array}$$

Pour $x = 3$ on a :
$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 6$

$x^3 - 7x - 6 = 0 \Rightarrow x^3 = 7x + 6$

Ensuite, on remplace x^2 et x^3 par leur expression en fonction de x pour déterminer x^4 en fonction de x, et ainsi de suite :

$x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6 = 0 \Rightarrow x^4 + 7x + 6 - 7(x+6) - 13x - 6 = 0$
$\Rightarrow x^4 + 7x + 6 - 7x - 42 - 13x - 6 = 0 \Rightarrow x4 = 13x + 42$

$x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 19x - 6 = 0 \Rightarrow x^5 + 2(13x+42) - 6(7x+6)$
$-20(x+6) - 19x - 6 = 0 \Rightarrow x^5 + 26x + 84 - 42x - 36 - 20x - 120 - 19x - 6 = 0 \Rightarrow$
$x^5 - 55x - 78 = 0 \Rightarrow x^5 = 55x + 78$

$x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 26x^3 - 39x^2 - 25x - 6 = 0 \Rightarrow x^6 + 3(55x+78)$
$-4(13x+42) - 26(7x+6) - 39(x+6) - 25x - 6 = 0 \Rightarrow x^6 + 165x + 234$
$-52x - 168 - 182x - 156 - 39x - 234 - 25x - 6 = 0 \Rightarrow x^6 - 133x - 330 = 0$
$\Rightarrow x^6 = 133x + 330$

La suite des puissances entières du nombre $x = 3$:

$x^1 = x$
$x^2 = x + 6$
$x^3 = 7x + 6$
$x^4 = 13x + 42$
$x^5 = 55x + 78$
$x^6 = 133x + 330$

On peut voir que : $55 = 13 + 42 \quad et \quad 78 = \frac{13 * 42}{7}$ (Fonctionne aussi pour les autres rangs.)

3 La suite des puissances entières du nombre 2,8

Triangle associé au nombre 2,8 :

$$\begin{array}{ccccccc}
+1 & -1 & -5,04 & & & & \\
+1 & 0 & -6,04 & -5,04 & & & \\
+1 & +1 & -6,04 & -11,08 & -5,04 & & \\
+1 & +2 & -5,04 & -17,12 & -16,12 & -5,04 & \\
+1 & +3 & -3,04 & -22,16 & -33,24 & -21,16 & -5,04
\end{array}$$

Pour $x = 2,8$ on a :
$x^2 - x - 5,04 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 5,04$

$x^3 - 6,04x - 5,04 = 0 \Rightarrow x^3 = 6,04x + 5,04$

Ensuite, on remplace x^2 et x^3 par leur expression en fonction de x pour déterminer x^4 en fonction de x, et ainsi de suite :

$x^4+x^3-6,04x^2-11,08x-5,04=0 \Rightarrow x^4+6,04x+5,04-6,04(x+5,04)$
$-11,08x-5,04=0 \Rightarrow x^4+6,04x+5,04-6,04x-30,4416-11,08x-5,04=0$
$\Rightarrow x4=11,08x+30,4416$

$x^5+2x^4-5,04x^3-17,12x^2-16,12x-5,04=0 \Rightarrow x^5+2(11,08x+30,4416)$
$-5,04(6,04x+5,04)-17,12(x+5,04)-16,12x-5,04=0 \Rightarrow x^5+22,16x$
$+60,8832-30,4416x-25,4016-17,12x-86,2848-16,12x-5,04=0 \Rightarrow$
$x^5-41,5216x-55,8432=0 \Rightarrow x^5=41,5216x+55,8432$

$x^6+3x^5-3,04x^4-22,16x^3-33,24x^2-21,16x-5,04=0 \Rightarrow$
$x^6+3(41,5216x+55,8432)-3,04(11,08x+30,4416)-22,16(6,04x+5,04)$
$-33,24(x+5,04)-21,16x-5,04=0 \Rightarrow x^6+124,5648x+167,5296$
$-33,6832x-92,542464-133,8464x-111,6864-33,24x-167,5296$
$-21,16x-5,04=0 \Rightarrow x^6-97,3648x-209,268864=0 \Rightarrow$
$x^6=97,3648x+209,268864$

La suite des puissances entières du nombre $x=2{,}8$:

$x^1=x$
$x^2=x+5,04$
$x^3=6,04x+5,04$
$x^4=11,08x+30,4416$
$x^5=41,5216x+55,8432$
$x^6=97,3648x+209,268864$

On peut voir que : $41,5216=11,08+30,4416 \quad et \quad 55,8432=\dfrac{11,08*30,4416}{6,04}$
(Fonctionne aussi pour les autres rangs.)

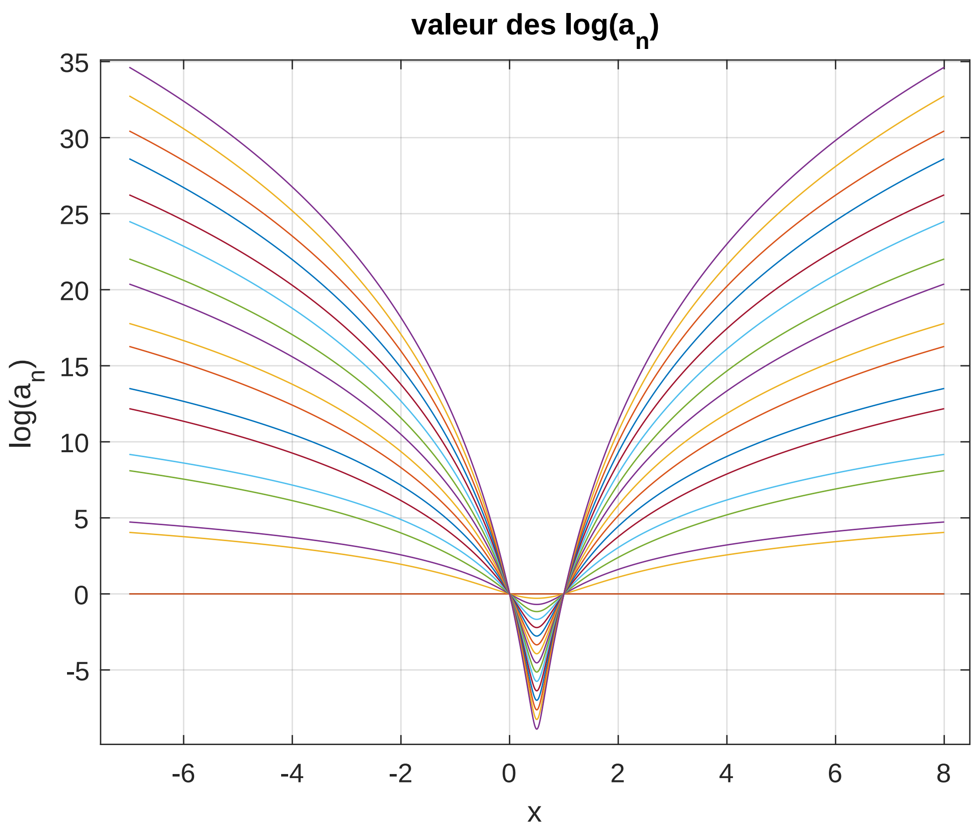
Deuxième partie

La suite des puissances entières des nombres

Des suites établies auparavant, à partir de trois exemples, on peut voir le mécanisme de la suite des puissances entières, sous la forme d'une suite croisée.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a une suite des puissances entières de x de la forme :

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
U_n = x^n = a_n x + b_n \\
avec\ U_0 = 1 \Rightarrow a_0 = 0 \quad le\ terme\ b_0\ n'intervient\ pas\ dans\ la\ formule \\
\qquad U_1 = x \Rightarrow a_1 = 1; b_1 = 0 \\
et \\
\qquad\qquad \left\{ \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\ \\ b_n = \dfrac{a_{n-1} * b_{n-1}}{a_{n-2}} \end{array} \right.
\end{array}
}
$$



Notons que les termes a_n sont symétriques par rapport à la droite $x = 1/2$
C'est à dire que les coefficients a_n sont égaux pour les nombres x et $(1 - x)$.

4 Egalité amenant à une simplification

On remarque que : $\dfrac{b_n}{a_{n-1}} = x(x - 1)$

La suite(U_n) définie précédemment peut s'écrire en éliminant le terme b_n :

$$\boxed{(U_n) = x^n = a_n x + x(x-1)a_{n-1} \quad avec \quad a_n = a_{n-1} + x(x-1)a_{n-2} \quad et \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1}$$

Hérédité 1 :
Supposons $P_1(n)$ la propriété $x^n = a_n x + x(x-1)a_{n-1}$

En divisant par x, on obtiend : $x^{n-1} = a_n + (x-1)a_{n-1}$
Supposons donc que x^n est aussi égal à : $x^n = a_{n+1} + (x-1)a_n$
Multiplions de chaque coté du signe $=$ par x, on obtiend :
$x^{n+1} = a_{n+1}x + x(x-1)a_n$

C'est à dire $P_1(n+1)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hérédité 2 :
Supposons $P_2(n)$ la propriété $a_n = a_{n-1} + x(x-1)a_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$a_n + x(x-1)a_{n-1} = a_{n-1} + x(x-1)a_{n-2} + x(x-1)a_{n-1}$

$a_{n+1} = a_n + x(x-1)a_{n-1}$

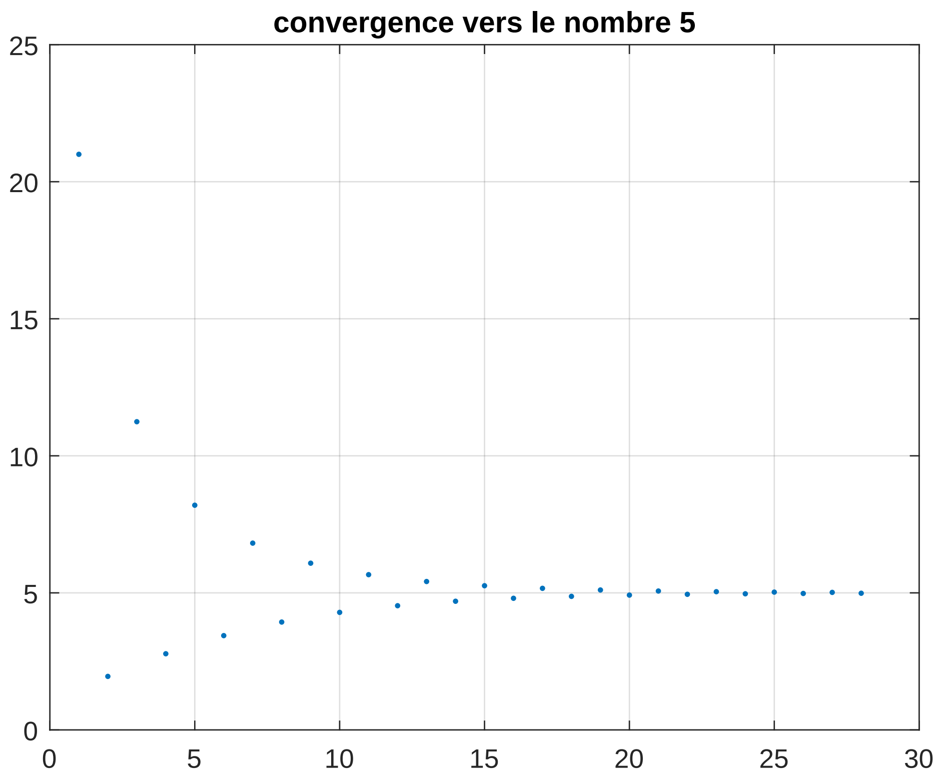
C'est à dire $P_2(n+1)$ est vraie $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas du nombre d'or, on retrouve la récurrence de Fibonacci, car $\phi(\phi-1) = 1$.

Notre recherche porte sur l'étude des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5 Convergence de $\frac{a_n}{a_{n-1}}$

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liée au nombre 5, on a : $a_n = a_{n-1} + 5 * 4 * a_{n-2}$
$a_0 = 0$ et $a_1 = 1$



Une particularité connue de la suite de Fibonacci veut que les rapports de ses termes successifs tendent vers le nombre d'or. On n'est pas surpris de constater qu'avec les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, les rapports des termes successifs tendent vers le nombre x correspondant. Ainsi, il en va de même pour tous les nombres, par alternance de valeurs supérieures et inférieures.

Troisième partie

Nombres cousins du nombre d'or

On s'intéresse ici aux nombres réels x_i pour lesquels les termes a_n des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des nombres entiers.

$$x_i = \frac{1+\sqrt{1+4i}}{2} \quad \text{avec} \quad i \in \mathbb{N}$$

i	x_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
0	$(1+\sqrt{1})/2 = 1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	$(1+\sqrt{5})/2 = \phi$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
2	$(1+\sqrt{9})/2 = 2$	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	1365
3	$(1+\sqrt{13})/2$	1	1	4	7	19	40	97	217	508	1159	2683	6160
4	$(1+\sqrt{17})/2$	1	1	5	9	29	65	181	441	1165	2929	7589	19305
5	$(1+\sqrt{21})/2$	1	1	6	11	41	96	301	781	2286	6191	17621	48576
6	$(1+\sqrt{25})/2 = 3$	1	1	7	13	55	133	463	1261	4039	11605	35839	105469
7	$(1+\sqrt{29})/2$	1	1	8	15	71	176	673	1905	6616	19951	66263	205920
8	$(1+\sqrt{33})/2$	1	1	9	17	89	225	937	2737	10233	32129	113993	371025
9	$(1+\sqrt{37})/2$	1	1	10	19	109	280	1261	3781	15130	49159	195329	627760
10	$(1+\sqrt{41})/2$	1	1	11	21	131	341	1651	5061	21571	72181	287891	1009701
11	$(1+\sqrt{45})/2$	1	1	12	23	155	408	2113	6601	29844	102455	430739	1557744
12	$(1+\sqrt{49})/2 = 4$	1	1	13	25	181	481	2653	8425	40261	141361	624493	2320825
13	$(1+\sqrt{53})/2$	1	1	14	27	209	560	3277	10557	53158	190399	881453	3356640
14	$(1+\sqrt{57})/2$	1	1	15	29	239	645	3991	13021	68895	251189	1215719	4732576
15	$(1+\sqrt{61})/2$	1	1	16	31	271	736	4801	15841	87856	325471	1643311	6525376
16	$(1+\sqrt{65})/2$	1	1	17	33	305	833	5713	19041	110449	415105	2182289	8823969
17	$(1+\sqrt{69})/2$	1	1	18	35	341	936	6733	22645	137106	522071	2852873	11728080
18	$(1+\sqrt{73})/2$	1	1	19	37	379	1045	7867	26677	168283	648469	3677563	15350005
19	$(1+\sqrt{77})/2$	1	1	20	39	419	1160	9121	31161	204460	796519	4681259	19815120
20	$(1+\sqrt{81})/2 = 5$	1	1	21	41	461	1281	10501	36121	246141	968561	5891381	25262601
21	$(1+\sqrt{85})/2$	1	1	22	43	505	1408	12013	41581	293854	1167055	7337989	31846144
22	$(1+\sqrt{89})/2$	1	1	23	45	551	1541	13663	47565	348151	1394581	9053903	39734685
23	$(1+\sqrt{93})/2$	1	1	24	47	599	1680	15457	54097	409608	1653839	11074823	49113120
24	$(1+\sqrt{97})/2$	1	1	25	49	649	1825	17401	61201	478825	1947649	13439449	60183025
25	$(1+\sqrt{101})/2$	1	1	26	51	701	1976	19501	68901	556426	2278951	16189601	73163376
26	$(1+\sqrt{105})/2$	1	1	27	53	755	2133	21763	77221	643059	2650805	19370339	88291269
27	$(1+\sqrt{109})/2$	1	1	28	55	811	2296	24193	86185	739396	3066391	23030083	105822640
28	$(1+\sqrt{113})/2$	1	1	29	57	869	2465	26797	95817	846133	5529009	27220733	126032985
29	$(1+\sqrt{117})/2$	1	1	30	59	929	2640	29581	106141	963990	4042079	31997789	149218080
30	$(1+\sqrt{121})/2 = 6$	1	1	31	61	991	2821	32551	117181	1093711	4609141	37420471	175694701

Pour i=1, la suite des $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci, pour i=2, c'est la suite de Jacobsthal ou de Bêta-nacci, d'après Shari Lynn LEVINE, pour i=3 à 11, ce sont les suites Gamma-nacci, Delta-nacci, Epsi-nacci, Zeta-nacci, Eta-nacci, Theta-nacci, Iota-nacci, Kappa-nacci, Lambda-nacci.

Comme pour la démarche de Fibonacci, toutes ces suites modélisent l'accroissement d'une population de lapins, en partant de l'hypothèse que chaque couple donne naissance à i nouveau(x) couple(s) chaque mois [3], et qu'il commence à engendrer à partir du deuxième mois suivant sa naissance, avec des valeurs de départ 0 et 1.

De plus, à chaque suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond un nombre x_i qu'on qualifie ici de cousin du nombre d'or (le nombre d'or pour la suite de Fibonacci, le nombre 2 pour la suite de Jacobsthal, le nombre $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ pour la suite Gamma-nacci, etc.).

6 Une égalité rappelant le nombre d'or

De la lecture du taleau précédent découle l'égalité suivante :

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{\frac{1+\sqrt{1+4x(x-1)}}{2} = \begin{cases} x & si \quad x \geq 1/2 \\ 1-x & si \quad x < 1/2 \end{cases}}$$

Cette formulation rappelle le nombre d'or.
Ce résultat est facilement démontrable en utilisant $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Pour $x \geq 1/2$

$$\frac{1+\sqrt{1+4x(x-1)}}{2} = \frac{1+\sqrt{(2x-1)^2}}{2} = \frac{1+2x-1}{2} = x$$

Pour $x < 1/2$

$$\frac{1+\sqrt{1+4x(x-1)}}{2} = \frac{1+\sqrt{(1-2x)^2}}{2} = \frac{1-2x+1}{2} = 1-x$$

Cette égalité va nous être utile par la suite, pour simplifier la formule générale de la suite (a_n) qui donne le nombre de lapins au mois n, ici, non pas en fonction du nombre de couples engendrés i, mais en fonction du nombre x_i correspondant à cette suite, grâce à l'égalité : $i = x_i(x_i - 1)$, dont la réciproque est : $\dfrac{1+\sqrt{1+4i}}{2} = x_i$ pour $x_i \geq 1/2$.

3. Il s'agit bien du même $i \in \mathbb{N}$ que celui défini précédemment, sachant qu'à la lecture du tableau, on remarque que : $i = x_i(x_i - 1)$

Quatrième partie

Des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 symétriques

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n = a_{n-1}+x(x-1)a_{n-2}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique : $r^2 - r - x(x-1) = 0$

En exprimant la constante en fonction de la variable x, on aura une solution en fonction de x.

$a = 1; \quad b = -1; \quad c = -x(x-1)$ pour l'équation : $ar^2 + br + c = 0$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4x(x-1) = (2x-1)^2$

Le discriminant est forcement positif ou nul, il ne peut pas être négatif.

7 Le discriminant est strictement positif

$\Delta > 0 \quad si \quad x \neq 1/2$ On a deux racines réelles r_1 et r_2

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} \quad et \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{1+4x(x-1)}}{2} = x \ ; \ \ r_2 = \frac{1-\sqrt{1+4x(x-1)}}{2} = 1-x$$

(vu à la section 6)

$\forall\ \lambda$ et μ réels, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $A_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \lambda x^n + \mu(1-x)^n$

$A_0 = 0 \Rightarrow \lambda x^0 + \mu(1-x)^0 = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -\lambda$
$A_1 = 1 \Rightarrow \lambda x^1 + \mu(1-x)^1 = 1 \Rightarrow \lambda x + \mu(1-x) = 1$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2x-1} \ et \ \mu = \frac{-1}{2x-1}$$

$$A_n = \frac{1}{2x-1}x^n - \frac{1}{2x-1}(1-x)^n$$

$$\boxed{A_n = \frac{x^n - (1-x)^n}{2x-1}}$$ [4]

4. Cette formule est beaucoup moins compliquée que la formule connue qui est la suivante : $F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{1+4i}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{1+4i}}{2}\right)^n}{\sqrt{1+4i}}$, pour $i = x(x-1)$ on retrouve la formule A_n.

Application numérique :

Pour $x = 4 \quad et \quad n = 7$

$A_7 = \dfrac{4^7 - (-3)^7}{7} = 2653$ (voir tableau de la page 9)

8 Un cas lié au nombre d'or : la formule de Binet

Si $x = \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > \dfrac{1}{2}$; $\Delta > 0$

$$A_n = \frac{1}{2x-1}(x^n - (1 - x^n))$$

$$A_n = \frac{1}{2 * \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$A_n = \frac{1}{\dfrac{2+2\sqrt{5}-2}{2}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{2-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$\boxed{A_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$ Formule de Binet

9 Le discriminant est nul

Le discriminant $\Delta = 1 + 4x(x-1)$
$\Delta = 0 \quad si \quad x = 1/2$ On a une racine double $r_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$

Il existe deux réels λ et μ tels que quelque soit n entier
$A_n = \lambda(\frac{1}{2})^n + n\mu(\frac{1}{2})^n$

$A_0 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$
$A_1 = 1 \Rightarrow \lambda x^1 + \mu x^1 = 1 \Rightarrow \mu\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \mu = 2$

$A_n = 2n(\frac{1}{2})^n \Rightarrow \boxed{A_n = n(\frac{1}{2})^{n-1}}$

Cinquième partie

Série génératrice

Une série génératrice est une autre manière de formuler une suite. Elle fournit une expression explicite de certaines suites définies par une relation de récurrence.

La série génératrice ordinaire associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de puissances :

$$A(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ...$$

"s" est une variable formelle sans aucune signification, qui ne prend pas de valeurs réelles.

$$A(s) = a_0 + a_1 s + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n s^n$$

$$A(s) = 0 + s + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} s^{n+2}$$

$$A(s) = s + \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} + x(x-1)a_n) s^{n+2}$$

$$A(s) = s + s\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} s^{n+1} + x(x-1)s^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$$

Cela fournit une équation algébrique satisfaite par $A(s)$:

$$A(s) = s + sA(s) + x(x-1)s^2 A(s)$$

qui a pour solution :

$$A(s) = \frac{s}{1 - s - x(x-1)s^2}$$

Décomposons cette dernière en fractions simples :

$$A(s) = \frac{1}{2x-1}\left(\frac{1}{1-xs} - \frac{1}{1-(1-x)s}\right)$$

En utilisant la série géométrique :

$$A(s) = \frac{1}{2x-1}\sum_{n=0}^{+\infty} (x^n - (1-x)^n) s^n$$

$$A(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n - (1-x)^n}{2x-1} s^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$$

Par identification des coefficients on retrouve la formule de A_n établie précédemment à la section 7.

Sixième partie

Fonction logistique et théorie du chaos

Le modèle logistique remonte aux travaux démographiques de Pierre François Verhulst (1804-1849), qui contredisent le modèle maltusien. Le modèle logistique de Verhulst est encore utilisé de nos jours dans plusieurs domaines scientifiques. On peut citer le biologiste Robert May (1974), le physicien, Mitchell Feigenbaum (1975). C'est un modèle en temps discret qui peut mener pour certaines valeurs des paramètres, à des comportements compliqués, voire chaotiques.

On pose $I = [0,1]$ La suite logistique (U_n), définie par récurrence par une valeur initiale U_0 appartenant à l'intervalle I et par la formule

$U_{n+1} = \mu U_n(1 - U_n)$ avec 0<µ<=4.

De manière plus savante on parle de l'étude de système dynamique défini par la fonction $f(x)$ =µ$x(x-1)$, c'est à dire, l'étude de la suite des itérés $x, f(x), f(f(x)), f^n(x)$ pour x appartient à l'intervalle I.

Or, cette fonction logistique apparait dans l'égalité définie au paragraphe 7 pour µ=4.

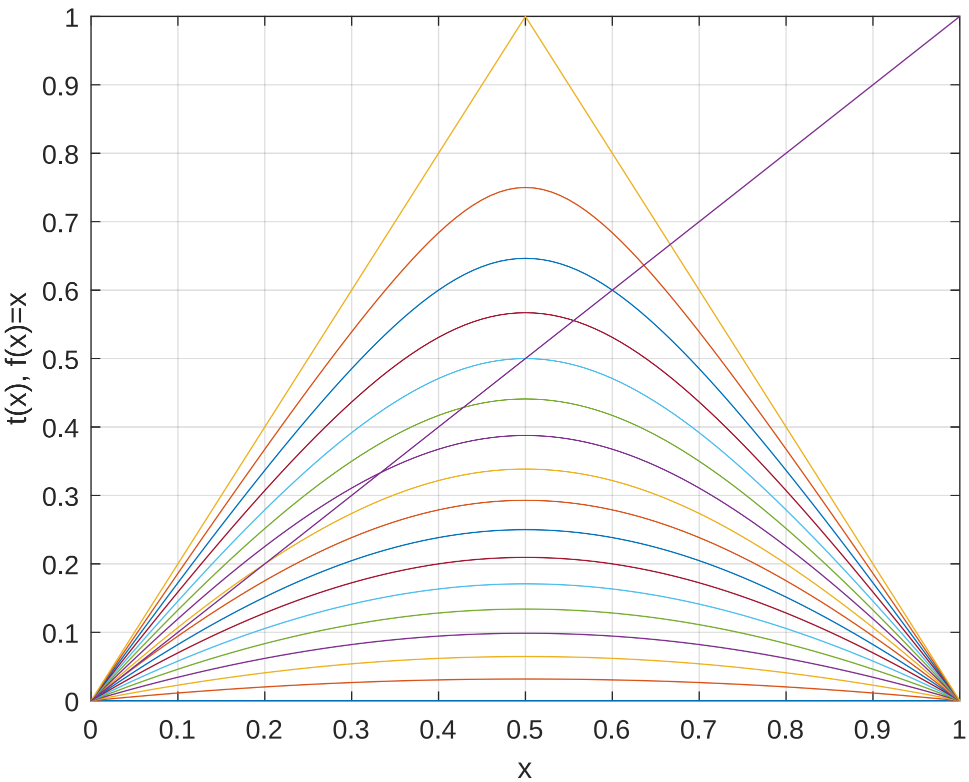
Cette égalité présente un autre intéret, celui d'en déduire l'équation de la fonction *tente* traitant des mesures invariantes.

10 Equation de la fonction *tente*

De l'égalité vue à la section 7, on déduit l'équation de la fonction *tente* :

$t(x) = 1 - \sqrt{1 + 4x(x-1)}$

Ici µ=4, mais on peut faire varier µ de 0 à 4, comme pour le graphique suivant :



Calcul de la dérivée de la fonction tente (µ = 4) :

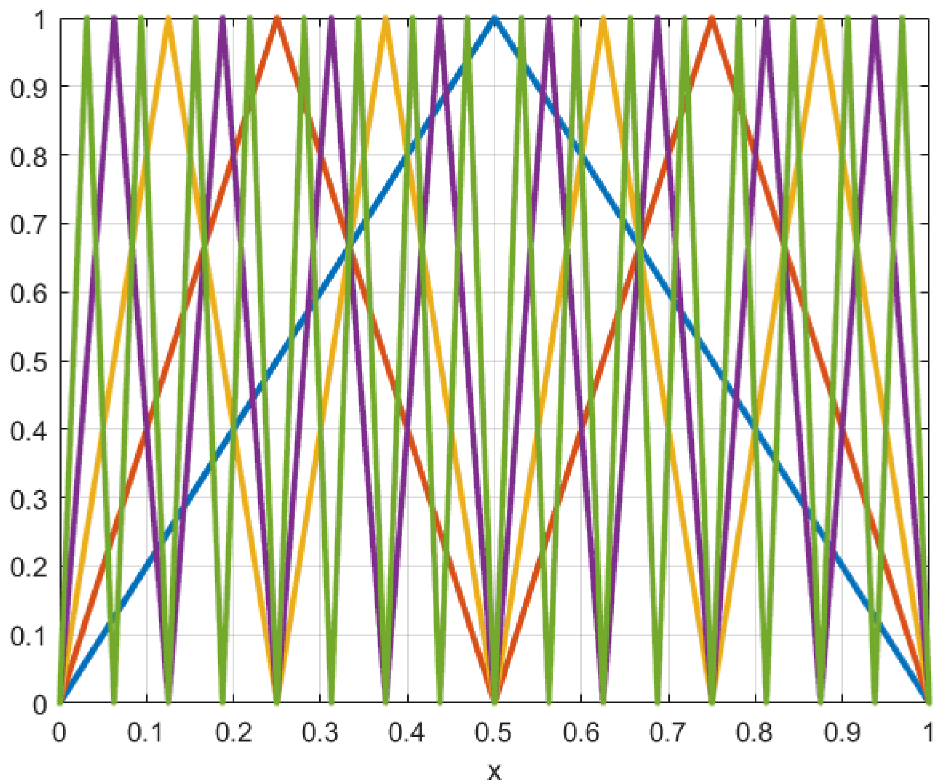
$$t'(x) = \frac{-1}{2 * \sqrt{1 + 4x(x-1)}} * (8x - 4)$$

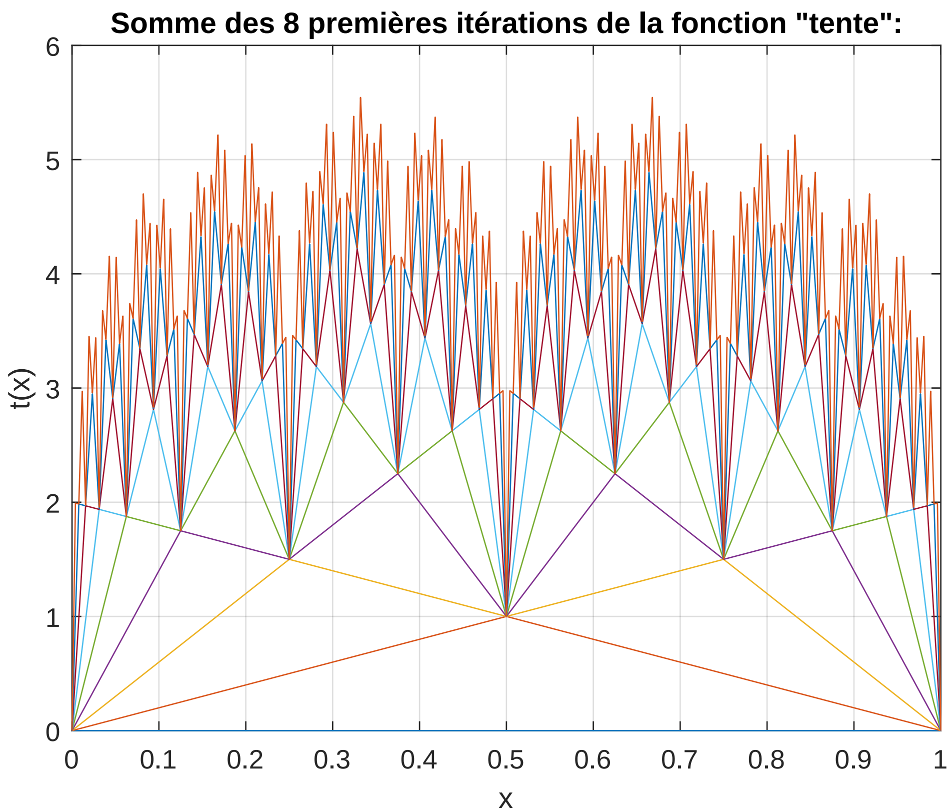
$$t'(x) = \frac{-4x+2}{\sqrt{1+4x(x-1)}} = \begin{cases} -2 & si \quad x > 1/2 \\ 2 & si \quad x < 1/2 \\ \text{non défini} & si \quad x = 1/2 \end{cases}$$

La fonction "tente" a une dynamique chaotique qu'on met en évidence en représentant les itérations de la fonction t(x) :Très vite on observe un grand nombre de tentes côte à côte, si bien qu'il suffit d'une différence infime dans la condition initiale pour changer de tente.

y=t(x) (courbe bleue),
y=t[t(x)] (courbe rouge),
y=t[t[t(x)]] (courbe jaune),
y=t[t[t[t(x)]]] (courbe violette),
y=t[t[t[t[t(x)]]]] (courbe verte), et ainsi de suite.

A chaque itération, il y un doublement du nombre de tentes.




Somme des 8 premières itérations de la fonction "tente":
t(x)
x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
1
2
3
4
5
6