Théorie Ensembliste des Facteurs Premiers

Partie I : Introduction à l'Opérateur Union_p

C. Pokorski

déc. 2023

Abstract

Cet article présente un nouvel opérateur mathématique, l'Union_p, conçu pour explorer des relations entre les nombres à travers leurs facteurs premiers, qui peut également être vu comme une extension du PPCM [1].

1 Introduction

Les nombres premiers sont souvent considérés comme les "briques élémentaires" des nombres naturels. Selon le théorème fondamental de l'arithmétique, chaque nombre entier positif supérieur à 1 peut être décomposé de manière unique en un produit de nombres premiers [1].

L'importance des nombres premiers réside dans leur simplicité et leur universalité : ils correspondent aux nombres qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes. Cette définition simple engendre une complexité étonnante dans la manière dont les nombres premiers sont distribués parmi les entiers naturels.

Outre les opérations élémentaires classiques telles que l'addition et la multiplication, nous pourrions envisager d'autres manières de combiner les nombres pour tenter d'élargir notre compréhension des propriétés numériques. Inspirée par la théorie des ensembles, l'opérateur Union_p cherche à fusionner les nombres en une seule entité en considérant leurs composants les plus fondamentaux : les facteurs premiers.

2 Définition

2.1 Généralité

L'opérateur Union_p (ou "Union primaire"), noté $\cup_p$, calcule le produit des facteurs premiers, pris à leur plus grande puissance, de plusieurs nombres entiers. Cela revient à faire une union des facteurs premiers des nombres.

2.2 Union_p de deux nombres

$a \cup_p b$, est défini pour deux nombres entiers a et b comme suit :

Soit $P(a)$ l'ensemble des facteurs premiers de a avec leurs puissances respectives, et $P(b)$ celui de b.

L'Union_p de a et b, notée $a \cup_p b$, est le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans a ou b. Cette opération produit un résultat équivalent au Plus Petit Commun Multiple (PPCM) de a et b.

Si $P(a) = \{p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \ldots, p_k^{n_k}\}$ et $P(b) = \{q_1^{m_1}, q_2^{m_2}, \ldots, q_l^{m_l}\}$, alors :

$$a \cup_p b = \prod_{p \in P(a) \cup P(b)} p^{\max(n_p, m_p)}$$

où n_p est la puissance de p dans $P(a)$ et m_p est la puissance de p dans $P(b)$. Si p n'est présent que dans un des deux ensembles, l'autre puissance est considérée comme 0.

Pour illustrer l'opérateur Union_p, considérons les exemples suivants :

- **Exemple 1 :** $2 \cup_p 6 = 6$

  Soit $a = 2$ et $b = 6$. Les facteurs premiers de 2 sont simplement $\{2^1\}$, et ceux de 6 sont $\{2^1, 3^1\}$. En utilisant l'opérateur Union_p pour 2 et 6, soit $2 \cup_p 6$, nous prenons la plus grande puissance de chaque facteur premier présent dans 2 ou 6. Ainsi, l'Union_p de 2 et 6 est $\{2^1, 3^1\}$. Le résultat de cette opération est le produit de ces facteurs premiers, ce qui donne $2 \times 3 = 6$.

- **Exemple 2:** $12 \cup_p 18 = 36$

  Soit $a = 12$ et $b = 18$. Les facteurs premiers de 12 sont $\{2^2, 3^1\}$ et ceux de 18 sont $\{2^1, 3^2\}$. L'Union_p de 12 et 18, soit $12 \cup_p 18$, est calculée en prenant la plus grande puissance de chaque facteur premier présent dans 12 ou 18, donnant $\{2^2, 3^2\}$ soit $4 \times 9 = 36$.

- **Exemple 3:** $15 \cup_p 75 = 75$

  Considérons $a = 15$ et $b = 75$. Les facteurs premiers de 15 sont $\{3^1, 5^1\}$, et ceux de 75 sont $\{3^1, 5^2\}$. L'Union_p de 15 et 75, soit $15 \cup_p 75$, est calculée en prenant la plus grande puissance de chaque facteur premier présent dans 15 ou 75, donnant $\{3^1, 5^2\}$ soit $3 \times 25 = 75$.

2.3 Union_p d'un ensemble de nombres

Soit $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un ensemble de nombres entiers. L'Union_p de E, notée $\bigcup_p E$, est le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier qui apparaît dans les éléments de E.

Si chaque nombre e_i dans E est décomposé en ses facteurs premiers avec leurs puissances respectives, alors $\bigcup_p E$ est donné par :

$$\bigcup_p E = \prod_{p \in \mathcal{P}(E)} p^{\max(n_{p,e_1}, n_{p,e_2}, \ldots, n_{p,e_n})}$$

où $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble de tous les facteurs premiers apparaissant dans les éléments de E, et n_{p,e_i} est la puissance du facteur premier p dans la décomposition de e_i. Pour chaque p dans $\mathcal{P}(E)$, on prend la plus grande puissance n_{p,e_i} parmi tous les e_i dans E.

- **Exemple :** Considérons l'ensemble $E = \{12, 15, 20\}$.
  - Les facteurs premiers de 12 sont $\{2^2, 3^1\}$.
  - Les facteurs premiers de 15 sont $\{3^1, 5^1\}$.
  - Les facteurs premiers de 20 sont $\{2^2, 5^1\}$.
  - L'Union_p de l'ensemble E, soit $\bigcup_p E$, est le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans 12, 15 et 20.
  - Ainsi, nous prenons 2^2 (la plus grande puissance de 2), 3^1 (la plus grande puissance de 3) et 5^1 (la plus grande puissance de 5).
  - Par conséquent, $\bigcup_p E = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 4 \times 3 \times 5 = 60$.

2.4 Union_p de n ensembles

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles de nombres entiers. L'Union_p de ces n ensembles, notée $\bigcup_p(E_1, E_2, \ldots, E_n)$, est définie comme l'opération qui calcule le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans tous les ensembles.

Pour chaque ensemble E_i, décomposons ses éléments en leurs facteurs premiers avec leurs puissances respectives. Alors, l'Union_p des n ensembles est donnée par :

$$\bigcup_p (E_1, E_2, \ldots, E_n) = \prod_{p \in \mathcal{P}(E_1, E_2, \ldots, E_n)} p^{\max(n_{p,E_1}, n_{p,E_2}, \ldots, n_{p,E_n})}$$

où $\mathcal{P}(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ désigne l'ensemble de tous les facteurs premiers apparaissant dans les éléments de tous les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, et n_{p,E_i} est la plus grande puissance du facteur premier p dans la décomposition des éléments de l'ensemble E_i. Pour chaque p dans $\mathcal{P}(E_1, E_2, \ldots, E_n)$, la plus grande puissance n_{p,E_i} parmi tous les ensembles est retenue.

- **Exemple :** Considérons les ensembles $E_1 = \{12, 18\}$, $E_2 = \{15, 20\}$.
  - Pour E_1, les facteurs premiers sont $\{2^2, 3^2\}$.
  - Pour E_2, les facteurs premiers sont $\{2^2, 3^1, 5^1\}$.
  - L'Union_p de E_1 et E_2, soit $\bigcup_p(E_1, E_2)$, est le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans E_1 et E_2.

- Ainsi, nous prenons 2^2 (la plus grande puissance de 2), 3^2 (la plus grande puissance de 3) et 5^1 (la seule puissance de 5).
- Par conséquent, $\bigcup_p(E_1, E_2) = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 4 \times 9 \times 5 = 180$.

2.5 Union_p d'une séquence successive de nombres

Dans un souci de simplicité et pour éviter les confusions, l'opération d'Union habituellement notée $\cup_p$ est formalisée par $\bigcup$ lorsqu'appliquée à une séquence successive de nombres. Cette notation simplifiée permet une meilleure visibilité et compréhension.

Considérons l'opération d'Union appliquée à une séquence successive de nombres entiers de 1 à n. L'Union de cette séquence, notée $\bigcup_{i=1}^{n} i$, est définie comme le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans tous les nombres de la séquence. Formellement, cela s'exprime comme :

$$\bigcup_{i=1}^{n} i = \prod_{p \in \mathcal{P}(1,2,\ldots,n)} p^{\max(n_{p,1}, n_{p,2}, \ldots, n_{p,n})}$$

où $\mathcal{P}(1, 2, \ldots, n)$ désigne l'ensemble de tous les facteurs premiers apparaissant dans les nombres de 1 à n, et $n_{p,i}$ est la puissance du facteur premier p dans la décomposition de i. Pour chaque p dans $\mathcal{P}(1, 2, \ldots, n)$, la plus grande puissance $n_{p,i}$ est retenue.

- **Exemple :** Pour calculer $\bigcup_{i=1}^{n} i$ pour $n = 5$, considérons les nombres de 1 à 5.
  - Les facteurs premiers de ces nombres sont $\{2, 3, 5\}$ avec les plus grandes puissances de 2^2 (dans 4), 3^1 (dans 3) et 5^1 (dans 5).
  - Ainsi, $\bigcup_{i=1}^{5} i = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 4 \times 3 \times 5 = 60$.

2.6 Union_p pour un facteur premier donné

L'opérateur Union_p, noté $\cup_k$, permet de combiner des nombres, ou ensembles en ne tenant compte que du facteur premier k.

Le calcul consiste à ne retenir que le facteur premier k ayant la puissant maximale.

Si aucun des nombres dans l'ensemble ou les nombres individuels traités par l'opérateur $\cup_k$ ne contient le facteur premier k, alors le résultat de l'opération est 1, car un facteur premier absent est considéré comme présent à la puissance 0.

2.7 Différence entre PPCM et Union_p

La distinction fondamentale entre le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) et l'opérateur Union_p réside dans leur approche de la manipulation des facteurs premiers dans le contexte des ensembles de nombres.

Considérons les ensembles $E_1 = \{8, 9\}$ et $E_2 = \{5, 7\}$ pour illustrer cette différence. Le PPCM, appliqué traditionnellement à des nombres individuels, peut être étendu à ces ensembles, calculant le PPCM au sein de chaque ensemble : pour E_1, PPCM(8, 9) = 72 et pour E_2, PPCM(5, 7) = 35. Cependant, l'application du PPCM dans le contexte des ensembles n'a pas de sens significatif ou de définition précise. Le PPCM est conçu pour traiter des nombres individuels, et son objectif est de trouver le plus petit nombre qui est divisible par chacun des nombres donnés.

En revanche, l'Union_p adopte une perspective ensembliste, traitant chaque ensemble comme une collection de facteurs premiers. L'Union_p de E_1 donne 72 (car $8 = 2^3$ et $9 = 3^2$), et pour E_2, elle donne 35. L'étape suivante consiste à appliquer l'Union_p à 72 et 35, fusionnant leurs facteurs premiers pour obtenir $2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 2520$.

D'autre part, l'Union_p de deux ensembles est équivalente à l'Union_p de l'union de ces deux ensembles, démontrant ainsi la polyvalence et la cohérence de l'opérateur dans le traitement des structures ensemblistes.Cette approche met donc en évidence la capacité de l'Union_p à englober des ensembles de nombres dans une opération globale.

En somme, contrairement au PPCM, qui vise à trouver le plus petit multiple commun des nombres, l'objectif initial de l'Union_p n'est pas de déterminer un multiple, mais plutôt de fusionner des ensembles de nombres en considérant leurs facteurs premiers dans une perspective globale et unifiée, créant ainsi une représentation de leurs caractéristiques premières.

3 Propriétés fondamentales

3.1 Commutativité

L'Union_p est commutative, c'est-à-dire, $a \cup_p b = b \cup_p a$ pour tous entiers a et b.

3.1.1 Démonstration

Soient a et b deux nombres entiers. Pour prouver la commutativité de l'opérateur Union_p, c'est-à-dire $a \cup_p b = b \cup_p a$, nous considérons les ensembles des facteurs premiers de a et b avec leurs puissances respectives.

Soit $P(a) = \{p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \ldots, p_k^{n_k}\}$ l'ensemble des facteurs premiers de a avec leurs puissances, et $P(b) = \{q_1^{m_1}, q_2^{m_2}, \ldots, q_l^{m_l}\}$ celui de b.

L'Union_p de a et b, notée $a \cup_p b$, est le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans $P(a)$ ou $P(b)$. Formellement :

$$a \cup_p b = \prod_{p \in P(a) \cup P(b)} p^{\max(n_p, m_p)}$$

où n_p est la puissance de p dans $P(a)$, m_p est la puissance de p dans $P(b)$, et $\max(n_p, m_p)$ désigne la plus grande des deux puissances pour chaque facteur premier p.

De manière similaire, pour $b \cup_p a$:

$$b \cup_p a = \prod_{p \in P(b) \cup P(a)} p^{\max(m_p, n_p)}$$

Puisque l'union des ensembles de facteurs premiers est commutative (c'est-à-dire, $P(a) \cup P(b) = P(b) \cup P(a)$) et que la fonction max est également commutative ($\max(n_p, m_p) = \max(m_p, n_p)$), nous avons :

$$a \cup_p b = b \cup_p a$$

Cela prouve que l'opérateur Union_p est commutatif.

3.2 Associativité

L'Union_p est également associative. Pour tous entiers a, b, et c, nous avons $(a \cup_p b) \cup_p c = a \cup_p (b \cup_p c)$.

3.2.1 Démonstration

Soient a, b, et c trois nombres entiers. Pour démontrer l'associativité de l'opérateur Union_p, nous devons montrer que $(a \cup_p b) \cup_p c = a \cup_p (b \cup_p c)$.

Soient $P(a)$, $P(b)$, et $P(c)$ les ensembles des facteurs premiers de a, b, et c, respectivement, avec leurs puissances. Alors :

1. $a \cup_p b = \prod_{p \in P(a) \cup P(b)} p^{\max(n_p, m_p)}$, où n_p et m_p sont les puissances de p dans $P(a)$ et $P(b)$, respectivement.

2. $b \cup_p c = \prod_{p \in P(b) \cup P(c)} p^{\max(m_p, o_p)}$, où o_p est la puissance de p dans $P(c)$.

Considérons maintenant $(a \cup_p b) \cup_p c$:

$$(a \cup_p b) \cup_p c = \prod_{p \in P(a) \cup P(b) \cup P(c)} p^{\max(\max(n_p, m_p), o_p)}$$

Et de manière similaire pour $a \cup_p (b \cup_p c)$:

$$a \cup_p (b \cup_p c) = \prod_{p \in P(a) \cup P(b) \cup P(c)} p^{\max(n_p, \max(m_p, o_p))}$$

Puisque la fonction max est associative, c'est-à-dire $\max(\max(n_p, m_p), o_p) = \max(n_p, \max(m_p, o_p))$, nous avons :

$$(a \cup_p b) \cup_p c = a \cup_p (b \cup_p c)$$

Cela prouve que l'opérateur Union_p est associatif.

3.3 Distributivité

L'opérateur Union_p est distributif, c'est-à-dire que pour tous les entiers a, b, et c, il satisfait la propriété suivante :

$$a \cup_p (b \cdot c) = (a \cup_p b) \cdot (a \cup_p c)$$

Cette propriété signifie que l'opérateur Union_p peut être distribué sur la multiplication de telle manière que l'Union_p de a avec le produit de b et c est équivalente au produit de l'Union_p de a avec b et l'Union_p de a avec c.

3.3.1 Démonstration

Soient a, b, et c trois entiers.

Commençons par décomposer a, b, et c en leurs facteurs premiers respectifs avec leurs puissances. Nous avons :

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

$$b = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_l^{m_l}$$

$$c = r_1^{o_1} r_2^{o_2} \dots r_m^{o_m}$$

Où $p_1, p_2, \dots, p_k$, $q_1, q_2, \dots, q_l$, et $r_1, r_2, \dots, r_m$ sont les facteurs premiers distincts de a, b, et c respectivement, et $n_1, n_2, \dots, n_k$, $m_1, m_2, \dots, m_l$, $o_1, o_2, \dots, o_m$ sont les puissances correspondantes.

Nous appliquons l'opérateur Union_p à b et c :

$$b \cup_p c = \prod_{p \in P(b) \cup P(c)} p^{\max(m_p, o_p)}$$

Maintenant, nous appliquons l'opérateur Union_p à a et au résultat de $b \cup_p c$:

$$a \cup_p (b \cup_p c) = \prod_{p \in P(a) \cup P(b) \cup P(c)} p^{\max(n_p, \max(m_p, o_p))}$$

De même, nous calculons $a \cup_p b$ et $a \cup_p c$:

$$(a \cup_p b) = \prod_{p \in P(a) \cup P(b)} p^{\max(n_p, m_p)}$$

$$(a \cup_p c) = \prod_{p \in P(a) \cup P(c)} p^{\max(n_p, o_p)}$$

Ensuite, nous multiplions ces deux résultats :

$$(a \cup_p b) \cdot (a \cup_p c) = \prod_{p \in P(a) \cup P(b)} p^{\max(n_p, m_p)} \cdot \prod_{p \in P(a) \cup P(c)} p^{\max(n_p, o_p)}$$

En comparant $a \cup_p (b \cup_p c)$ et $(a \cup_p b) \cdot (a \cup_p c)$, nous remarquons que les deux expressions sont équivalentes, car elles impliquent le produit des mêmes facteurs premiers avec leurs puissances maximales

3.4 Élément Neutre

Le nombre 1 sert d'élément neutre pour l'Union_p, car $a \cup_p 1 = a$ pour tout entier a.

3.4.1 Démonstration

Soit a un nombre entier. Nous allons démontrer que 1 sert d'élément neutre pour l'opérateur Union_p, c'est-à-dire, $a \cup_p 1 = a$.

Considérons $P(a)$, l'ensemble des facteurs premiers de a avec leurs puissances. Le nombre 1 n'a pas de facteurs premiers, donc $P(1)$ est l'ensemble vide.

Lorsque nous appliquons l'opérateur Union_p à a et 1, nous obtenons :

$$a \cup_p 1 = \prod_{p \in P(a) \cup P(1)} p^{\max(n_p, 0)}$$

Puisque $P(1)$ est vide et $P(a) \cup P(1)$ se réduit à $P(a)$, la puissance de chaque facteur premier p dans $P(1)$ est 0. Par conséquent, pour chaque facteur premier p dans $P(a)$, $\max(n_p, 0) = n_p$. Ainsi, nous avons :

$$a \cup_p 1 = \prod_{p \in P(a)} p^{n_p} = a$$

Cela prouve que 1 est l'élément neutre pour l'opérateur Union_p, car l'union de tout entier a avec 1 selon l'opérateur Union_p donne a lui-même.

3.5 Idempotence

L'opérateur Union_p est idempotent.

3.5.1 Démonstration

Un opérateur est dit idempotent si, lorsqu'il est appliqué à un élément plusieurs fois, le résultat reste inchangé après la première application. Autrement dit, pour un opérateur idempotent $\circ$ et un élément x, nous avons $x \circ x = x$.

Considérons un entier a et son ensemble de facteurs premiers avec leurs puissances, noté $P(a)$. Par définition, l'opérateur Union_p, $x \cup_p y$, est le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans x et y.

Appliquons l'opérateur Union_p à a avec lui-même :

$$a \cup_p a = \prod_{p \in P(a) \cup P(a)} p^{\max(n_p, n_p)}$$

Puisque $P(a) \cup P(a)$ est simplement $P(a)$, et $\max(n_p, n_p) = n_p$ pour chaque facteur premier p dans $P(a)$, le résultat de $a \cup_p a$ est le produit de chaque facteur premier dans $P(a)$ élevé à sa puissance originale n_p. Cela équivaut exactement à a :

$$a \cup_p a = \prod_{p \in P(a)} p^{n_p} = a$$

Ceci prouve que l'opérateur Union_p est idempotent, car la combinaison d'un entier a avec lui-même par cet opérateur donne a lui-même, illustrant ainsi que le résultat de l'opération est inchangé peu importe le nombre de fois où elle est appliquée.

3.6 Préservation des facteurs premiers

L'opérateur Union_p préserve les facteurs premiers existants sans en introduire de nouveaux.

3.6.1 Démonstration

Soient a et b deux nombres entiers tels que $P(a)$ et $P(b)$ représentent respectivement l'ensemble de leurs facteurs premiers avec leurs puissances. L'opérateur Union_p (Up) est défini comme suit :

$$a \cup_p b = \prod_{p \in P(a) \cup P(b)} p^{\max(n_p, m_p)}$$

où n_p et m_p représentent les puissances du facteur premier p dans les ensembles $P(a)$ et $P(b)$, respectivement.

Nous voulons démontrer que l'opérateur Up ne génère pas de nouveaux facteurs premiers. Pour ce faire, nous devons montrer que tout facteur premier présent dans $a \cup_p b$ est déjà présent dans a et/ou b.

Les facteurs premiers sont des nombres premiers indivisibles, ce qui signifie qu'ils ne peuvent pas être générés par la multiplication d'autres facteurs premiers. Par conséquent, lorsqu'un facteur premier est présent dans $a \cup_p b$, il doit déjà exister en tant que facteur premier dans a et/ou b.

Ainsi, tout facteur premier q présent dans $a \cup_p b$ est déjà présent dans a et/ou b. Par conséquent, Up ne génère pas de nouveaux facteurs premiers.

3.7 Monotonie

L'opérateur Union_p a une propriété de monotonie. Si deux nombres entiers a et b satisfont $a \leq b$, alors pour tout entier c, l'opération $a \cup_p c$ est inférieure ou égale à $b \cup_p c$.

3.7.1 Démonstration

Considérons trois entiers a, b, et c avec $a \leq b$. Notre objectif est de démontrer que $a \cup_p c \leq b \cup_p c$.

Décomposons a, b, et c en leurs facteurs premiers avec leurs puissances respectives. Notons $P(a)$, $P(b)$, et $P(c)$ les ensembles de ces facteurs premiers. Ainsi, $a = \prod_{p \in P(a)} p^{n_p}$ et $b = \prod_{p \in P(b)} p^{m_p}$, où n_p et m_p représentent les puissances des facteurs premiers dans a et b.

La condition $a \leq b$ implique que pour chaque facteur premier p commun à a et b, la puissance n_p dans a est inférieure ou égale à m_p dans b. De plus, b peut contenir des facteurs premiers non présents dans a.

En appliquant l'opérateur Union_p à a et c, nous obtenons
$a \cup_p c = \prod_{p \in P(a) \cup P(c)} p^{\max(n_p, o_p)}$,
où o_p est la puissance de p dans $P(c)$. De même, $b \cup_p c = \prod_{p \in P(b) \cup P(c)} p^{\max(m_p, o_p)}$.

Puisque pour chaque facteur premier p commun, $n_p \leq m_p$, et que b peut inclure des facteurs premiers additionnels par rapport à a, il s'ensuit que $a \cup_p c$ est un produit de facteurs premiers dont les puissances sont inférieures ou égales à celles dans $b \cup_p c$. Par conséquent, $a \cup_p c \leq b \cup_p c$.

Cette propriété de monotonie garantit que l'opérateur Union_p préserve l'ordre relatif des nombres lors de son application.

3.8 Non Inversibilité

Un opérateur est dit inversible si, pour tout élément a, il existe un élément b tel que $a \cup_p b$ est égal à un élément neutre.

L'opérateur Union_p ne possède pas d'éléments inverses dans le contexte des entiers naturels, à l'exception de l'élément neutre 1.

3.8.1 Démonstration

Soit a un entier naturel quelconque. Supposons qu'il existe un entier b tel que $a \cup_p b = 1$. Par définition de l'opérateur Union_p, cela signifierait que le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans a et b est égal à 1. Cependant, pour tout entier naturel supérieur à 1, il y a au moins un facteur premier, et donc le produit de ces facteurs premiers est toujours supérieur à 1. Par conséquent, il n'existe aucun b tel que $a \cup_p b = 1$, sauf dans le cas trivial où $a = 1$. Ainsi, l'opérateur Union_p n'est pas inversible pour les entiers naturels autres que 1.

3.9 Inégalité de distribution de l'Union_p sur trois nombres

Cette inégalité postule que pour tous entiers a, b, et c, l'opération $a \cup_p (b \cup_p c)$ est inférieure ou égale à $(a \cup_p b) \cup_p (a \cup_p c)$.

3.9.1 Démonstration

Considérons trois entiers a, b, et c. Notre objectif est de montrer que $a \cup_p (b \cup_p c) \leq (a \cup_p b) \cup_p (a \cup_p c)$.

Débutons par la décomposition en facteurs premiers de a, b, et c. Soient $P(a)$, $P(b)$, et $P(c)$ les ensembles de ces facteurs premiers avec leurs puissances respectives.

L'opérateur Union_p pour b et c donne $b \cup_p c = \prod_{p \in P(b) \cup P(c)} p^{\max(m_p, o_p)}$, où m_p et o_p sont les puissances des facteurs premiers dans b et c respectivement. Lorsque nous appliquons l'Union_p à a et ce résultat, nous obtenons $a \cup_p (b \cup_p c) = \prod_{p \in P(a) \cup P(b) \cup P(c)} p^{\max(n_p, \max(m_p, o_p))}$.

D'autre part, $a \cup_p b$ est $\prod_{p \in P(a) \cup P(b)} p^{\max(n_p, m_p)}$ et $a \cup_p c$ est $\prod_{p \in P(a) \cup P(c)} p^{\max(n_p, o_p)}$. L'Union_p de ces deux résultats est $(a \cup_p b) \cup_p (a \cup_p c) = \prod_{p \in P(a) \cup P(b) \cup P(c)} p^{\max(\max(n_p, m_p), \max(n_p, o_p))}$.

En comparant les deux expressions, on observe que pour chaque facteur premier p, la puissance dans $a \cup_p (b \cup_p c)$ est inférieure ou égale à celle dans $(a \cup_p b) \cup_p (a \cup_p c)$. Par conséquent, $a \cup_p (b \cup_p c) \leq (a \cup_p b) \cup_p (a \cup_p c)$, confirmant ainsi l'Inégalité.

3.10 Union_p de deux Nombres Consécutifs

Considérons l'application de l'opérateur Union_p à deux nombres entiers consécutifs, n et $n + 1$.

Pour tout entier naturel n, l'opération $n \cup_p (n+1)$ est équivalente au produit de n et $n + 1$, soit $n \cup_p (n + 1) = n \times (n + 1)$.

3.10.1 Démonstration

Par définition, deux nombres consécutifs n et $n + 1$ ne partagent aucun facteur premier commun, sauf dans le cas particulier où $n = 2$. En effet, si un facteur premier était commun à n et $n + 1$, cela impliquerait que leur différence, qui est 1, serait divisible par ce facteur premier, ce qui est impossible.

Lorsqu'on applique l'Union_p à n et $n + 1$, l'ensemble des facteurs premiers à considérer est l'union disjointe des ensembles des facteurs premiers de n et $n + 1$. La plus grande puissance de chaque facteur premier dans cette union est simplement la puissance avec laquelle il apparaît dans l'un ou l'autre nombre.

Par conséquent, le résultat de $n \cup_p (n + 1)$ est le produit des ensembles de facteurs premiers de n et $n + 1$, c'est-à-dire le produit $n \times (n + 1)$.

3.11 Union_p de n nombres premiers distincts

Soit $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ un ensemble de n nombres premiers distincts. L'opération $\bigcup_p P$, qui représente l'Union_p de tous les éléments de P, est équivalente au produit de ces n nombres premiers :

$$\bigcup_p P = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n.$$

3.11.1 Démonstration

Chaque nombre premier p_i dans P est uniquement divisible par 1 et par lui-même. Par conséquent, le facteur premier de chaque p_i est p_i lui-même.

Comme P est un ensemble de nombres premiers distincts, aucun p_i ne partage de facteur premier avec un autre p_j pour $i \neq j$. Ainsi, l'ensemble des facteurs premiers de chaque p_i est disjoint de celui des autres nombres premiers.

Lors de l'application de l'Union_p à l'ensemble P, l'opérateur considère la plus grande puissance de chaque facteur premier présent dans l'ensemble. Pour des nombres premiers, cette puissance est toujours 1, car les nombres premiers sont dans leur forme irréductible.

Par conséquent, l'Union_p de l'ensemble P revient à multiplier chaque p_i dans l'ensemble. Cela résulte en $\bigcup_p P = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$.

3.12 Inclusion des Facteurs Premiers

Si un entier a est un facteur de b, alors l'Union_p de a et b est égale à b (si $a|b$, alors $a \cup_p b = b$).

3.12.1 Démonstration

Supposons que a soit un facteur de b, c'est-à-dire $a|b$. Cela implique qu'il existe un entier k tel que $b = a \cdot k$. Les facteurs premiers de b sont donc constitués des facteurs premiers de a ainsi que de ceux de k.

L'opérateur Union_p, $a \cup_p b$, prend le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans a ou b. Puisque a est un facteur de b, tous les facteurs premiers de a sont inclus dans b. Pour chaque facteur premier p commun à a et b, la plus grande puissance de p présente dans b sera égale ou supérieure

3.13 Homogénéité

L'opérateur Union_p est homogène par rapport à la multiplication par un entier. Pour tout entier positif k et pour tous entiers a et b, l'opération $k \cdot (a \cup_p b)$ est équivalente à $(k \cdot a) \cup_p (k \cdot b)$.

3.13.1 Démonstration

Soient k un entier positif et a, b deux entiers quelconques. Nous souhaitons démontrer que $k \cdot (a \cup_p b) = (k \cdot a) \cup_p (k \cdot b)$.

La décomposition en facteurs premiers de a et b donne respectivement $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$ et $b = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_s^{m_s}$, où p_i et q_j sont des facteurs premiers distincts.

L'Union_p $a \cup_p b$ est le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans a ou b, soit
$a \cup_p b = \prod_{p \in P(a) \cup P(b)} p^{\max(n_p, m_p)}$.

En multipliant $a \cup_p b$ par k, nous avons :
$k \cdot (a \cup_p b) = k \cdot \prod_{p \in P(a) \cup P(b)} p^{\max(n_p, m_p)}$.

D'autre part, la multiplication de a et b par k modifie leurs décompositions en facteurs premiers en ajoutant le facteur k. Ainsi, $k \cdot a = k \times p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$ et $k \cdot b = k \times q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_s^{m_s}$.

L'Union_p de $k \cdot a$ et $k \cdot b$ est alors :
$(k \cdot a) \cup_p (k \cdot b) = \prod_{p \in P(k \cdot a) \cup P(k \cdot b)} p^{\max(n'_p, m'_p)}$,
où n'_p et m'_p sont les puissances modifiées des facteurs premiers dans $k \cdot a$ et $k \cdot b$.

En tenant compte de l'inclusion de k comme facteur commun dans $k \cdot a$ et $k \cdot b$, on observe que les ensembles de facteurs premiers et leurs puissances maximales sont équivalents dans les deux expressions. Par conséquent, $k \cdot (a \cup_p b)$ et $(k \cdot a) \cup_p (k \cdot b)$ sont identiques.

3.14 Stabilité de résultat

Pour trois entiers a, b, et c, si $a \cup_p b = c$, alors $a \cup_p c = c$ et $b \cup_p c = c$.

3.14.1 Démonstration

Soit trois entiers a, b, et c tels que $a \cup_p b = c$. Par définition, c est constitué des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans a et b.

Puisque c est le résultat de $a \cup_p b$, c contient déjà les plus grandes puissances de tous les facteurs premiers de a et b. En conséquence, effectuer l'Union_p de c avec a ou b ne changera pas les puissances des facteurs premiers déjà présents dans c. Donc, $a \cup_p c$ et $b \cup_p c$ sont tous deux égaux à c.

3.15 Interaction entre $\cup_k$ et $\cup_l$

Soient $\cup_k$ et $\cup_l$ deux opérateurs Union_p, où k et l sont deux facteurs premiers distincts. Pour deux nombres entiers a et b, la propriété suivante est énoncée :

$$(\cup_k a) \times (\cup_l b) = \cup_{kl}(a \times b)$$

Cette propriété indique que la multiplication des résultats de l'opération Union_p sur a avec le facteur premier k et sur b avec le facteur premier l est équivalente à l'application de l'Union_p avec le produit des facteurs premiers k et l sur le produit des nombres a et b.

3.15.1 Démonstration

Considérons la décomposition en facteurs premiers de a et b. Soit $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$ et $b = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_s^{m_s}$, où p_i et q_j sont des facteurs premiers distincts de a et b respectivement.

L'opérateur $\cup_k a$ conserve le facteur premier k à sa plus grande puissance n_k dans a et élimine les autres, résultant en k^{n_k} ou 1 si k n'est pas un facteur de a. De même, $\cup_l b$ donne l^{m_l} ou 1.

La multiplication de ces résultats donne $k^{n_k} \times l^{m_l}$ ou des variantes incluant 1. Ensuite, considérons le produit $a \times b$, qui aura k et l parmi ses facteurs premiers avec certaines puissances. L'opérateur $\cup_{kl}$ appliqué à ce produit extraira k et l à leurs plus grandes puissances présentes.

Puisque k et l sont distincts et indépendants, la multiplication de k^{n_k} par l^{m_l} dans le produit $a \times b$ préservera leurs puissances respectives. Ainsi, $\cup_{kl}(a \times b)$ donne le même résultat que $(\cup_k a) \times (\cup_l b)$, confirmant la propriété énoncée.

3.16 Interaction avec la Fonction Totient de Euler

L'interaction de l'opérateur Union_p avec la fonction totient de Euler pour les nombres premiers peut être observée comme une conséquence directe de sa définition. Cette observation est formulée comme suit :

Soient k et l deux nombres premiers distincts. Puisque l'Union_p, $k \cup_p l$, est définie comme le produit $k \times l$ pour les nombres premiers, il en résulte directement que la fonction totient de Euler de $k \cup_p l$ est égale au produit des fonctions totient de k et l. En formule, cela s'écrit :

$$\varphi(k \cup_p l) = \varphi(k) \cdot \varphi(l)$$

3.17 Union_p de n nombres égale à 1

Pour tous entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$, si $a_1 \cup_p a_2 \cup_p \dots \cup_p a_n = 1$, alors $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

3.17.1 Démonstration

Considérons n entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$. Supposons que l'opération d'Union_p pour ces n nombres, $a_1 \cup_p a_2 \cup_p \dots \cup_p a_n$, donne 1. Par définition, cette Union_p est le produit des plus grandes puissances de chaque facteur premier présent dans chaque a_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Pour que le résultat de cette Union_p soit 1, il est nécessaire que le produit des facteurs premiers de tous les a_i soit égal à 1. La seule manière d'obtenir un tel résultat est que chaque a_i soit dépourvu de facteurs premiers, car la présence de tout facteur premier dans n'importe quel a_i impliquerait un produit supérieur à 1.

Le seul nombre dans l'ensemble des entiers naturels sans facteurs premiers est 1. Par conséquent, si $a_1 \cup_p a_2 \cup_p \dots \cup_p a_n = 1$, il est nécessaire que chaque a_i soit égal à 1.

Ainsi, cette propriété établit que si l'Union_p de n nombres est égale à l'élément neutre (1), alors tous ces nombres doivent être l'élément neutre eux-mêmes, confirmant que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

References

[1] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fundamental theorem of arithmetic / Least common multiple.

Informations

Version du document : v1.0 - déc. 2023
Contact : cpokorski.fr@gmail.com