Note Sur La Résolution De L'Equation $\beta(\varphi) = A$ Rencontrée En Géodésie

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Résumé

Dans cette note, on donne une méthode pour résoudre l'équation $\beta(\varphi) = A$ rencontrée en géodésie, où $\beta(\varphi)$ est la longueur de la méridienne de l'ellipse ou de l'ellipsoïde de l'équateur au point de latitude géodésique φ.

Abstract : In this note, we give a method to resolve the equation $\beta(\varphi) = A$ used in geodesy, where $\beta(\varphi)$ is the length of the arc of the meridian of an ellipse or an ellipsoid from the equator to the point of geodetic latitude φ.

Décembre 2023

Version 1.

Abdelmajid BEN HADJ SALEM,
e-mail : abenhadjsalem@gmail.com

To the Memory of my Colleague and Friend Noureddine HOURRIGUE, *Ingénieur Général Géographe* who passed away in November 2023

Table des matières

Note Sur La Résolution De L'Equation $\beta(\varphi) = A$ En Géodésie

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

1 Introduction

En géodésie, il arrive qu'on rencontre la résolution de l'équation du type :

$$\beta(\varphi) = A \tag{1}$$

où $\beta(\varphi)$ représente la longueur de la méridienne d'une ellipse ou d'un ellipsoïde, φ la latitude géodésique et A une valeur donnée. Pour les deux cas précédents, $\beta(\varphi)$ s'exprime par une même formule, soit :

$$\beta(\varphi) = \rho.d\varphi \Longrightarrow \beta(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho(u)du \tag{2}$$

avec $\rho(\varphi)$ le rayon de courbure de la méridienne donné par la formule suivante :

$$\rho(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}} \tag{3}$$

a, e sont respectivement le demi-grand axe et la première excentricité de l'ellipse ou de l'ellipsoïde.

2 Calcul de $\beta(\varphi)$

Posons :

$$I(\varphi) = \int_0^{\varphi} (1-e^2sin^2u)^{-\frac{3}{2}}du \tag{4}$$

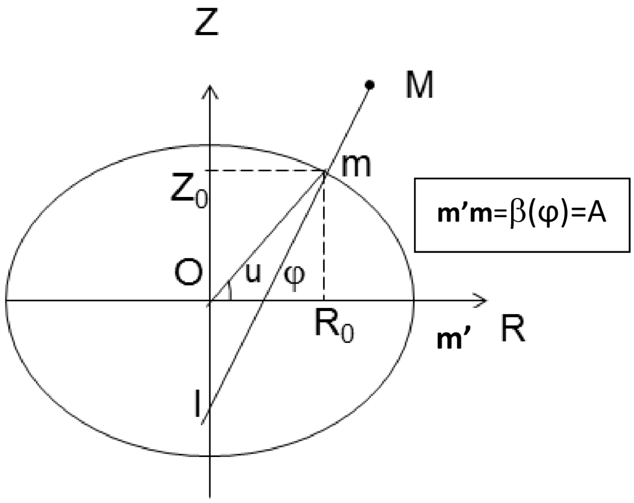

FIG. 1: Arc de la méridienne de longueur $\beta(\varphi)$

L'équation (2) s'écrit :

$$\beta(\varphi) = a(1-e^2)I(\varphi) \tag{5}$$

L'intégrale (4) est une intégrale, dite elliptique, n'est pas exprimée par une formule finie. Pour la calculer, on fait l'usage d'un développement limité de l'expression $(1-e^2sin^2u)^{-\frac{3}{2}}$.

On utilise la formule :

$$(1+x)^q = 1+qx+\frac{q(q-1)}{2!}x^2+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3+...+\frac{q(q-1)...(q-1+p)}{p!}x^p+o(x^{p+1})$$

avec $|x|<1$, q est un rationnel et $p!$ désigne factoriel p soit $p(p-1)..3.2.1$. Comme $|e^2sin^2u|<1$, on a donc à l'ordre 12 :

$$\frac{1}{(1-e^2sin^2u)^{\frac{3}{2}}} = (1-e^2sin^2u)^{-\frac{3}{2}} = 1+\frac{3}{2}e^2sin^2u+\frac{15}{8}e^4sin^4u+ \\ \frac{35}{16}e^6sin^6u+\frac{315}{128}e^8sin^8u+\frac{693}{256}e^{10}sin^{10}u+\frac{3003}{1024}e^{12}sin^{12}u \tag{6}$$

Pour pouvoir calculer les intégrales du type :

$$\int_0^{\varphi} sin^{2p}udu$$

on va exprimer les termes $sin^p u$ en fonction des lignes trigonométriques multiples de l'argument u. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
sin^2u &= \frac{1}{2} - \frac{cos2u}{2}\\
sin^4u &= \frac{3}{8} - \frac{cos2u}{2} + \frac{cos4u}{8}\\
sin^6u &= \frac{5}{16} - \frac{15cos2u}{32} + \frac{13cos4u}{16} - \frac{cos6u}{32}\\
sin^8u &= \frac{35}{128} - \frac{17cos2u}{16} + \frac{7cos4u}{32} - \frac{cos6u}{16} + \frac{cos8u}{128}\\
sin^{10}u &= \frac{63}{256} - \frac{105cos2u}{256} + \frac{15cos4u}{64} - \frac{45cos6u}{512} + \frac{5cos8u}{256} - \frac{cos10u}{512}\\
sin^{12}u &= \frac{231}{1024} - \frac{99cos2u}{256} + \frac{495cos4u}{2048} - \frac{55cos6u}{512} + \frac{33cos8u}{1024} - \frac{3cos10u}{512} + \frac{cos12u}{2048}
\end{aligned} \tag{7}$$

L'équation (6) s'écrit en utilisant les expressions de droite de (7) :

$$(1-e^2sin^2u)^{-\frac{3}{2}} = A_0 + A_2cos2u + A_4cos4u + A_8cos8u + A_{10}cos10u + A_{12}cos12u \tag{8}$$

En intégrant (8) entre 0 et φ et après multiplication par le coefficient $a(1-e^2)$, on trouve l'expression ci-dessous de la longueur de la méridienne :

$$\begin{aligned}
\beta(\varphi) = a(1-e^2).(&C_0\varphi + C_2sin2\varphi + C_4sin4\varphi + C_6sin6\varphi\\
&+C_8sin8\varphi + C_{10}sin10\varphi + C_{12}sin12\varphi)
\end{aligned} \tag{9}$$

où les coefficient A_k vérifient :

$$\begin{aligned}
C_0 = A_0 \quad C_2 = \frac{A_2}{2} \quad C_4 = \frac{A_4}{4} \quad C_6 = \frac{A_6}{6}\\
C_8 = \frac{A_8}{8} \quad C_{10} = \frac{A_{10}}{10} \quad C_{12} = \frac{A_{12}}{12}
\end{aligned} \tag{10}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \frac{693693}{1048576}e^{12} \\
C_2 &= -\frac{3}{8}e^2 - \frac{15}{32}e^4 - \frac{525}{1024}e^6 - \frac{2205}{4096}e^8 - \frac{72765}{131072}e^{10} - \frac{297297}{524288}e^{12} \\
C_4 &= \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{16384}e^8 + \frac{10395}{65536}e^{10} + \frac{1486485}{8388608}e^{12} \\
C_6 &= -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{315}{12288}e^8 - \frac{31185}{786432}e^{10} - \frac{165165}{3145728}e^{12} \\
C_8 &= \frac{315}{131072}e^8 + \frac{3465}{524288}e^{10} + \frac{99099}{8388608}e^{12} \\
C_{10} &= -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{9009}{5242880}e^{12} \\
C_{12} &= \frac{1001}{8388608}e^{12}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Posons :

$$J(\varphi) = a(1-e^2)\sum_{n=1}^{n=6} C_{2n} sin 2n\varphi \tag{12}$$

Alors, on obtient :

$$\beta(\varphi) = a(1-e^2)C_0\varphi + J(\varphi) \tag{13}$$

2.0.1 Résolution de l'équation $\beta(\varphi) = A$

On peut écrire l'équation $\beta(\varphi) = A$ comme suit :

$$\varphi = \frac{L_1}{a(1-e^2)C_0} - \frac{J(\varphi)}{a(1-e^2)C_0} \tag{14}$$

Posons :

$$F(\varphi) = \frac{A}{a(1-e^2)C_0} - \frac{J(\varphi)}{a(1-e^2)C_0} \tag{15}$$

Alors, on a à résoudre :

$$\varphi = F(\varphi) \tag{16}$$

La résolution de (16) se fait par itérations comme suit :

$$\varphi_1 = \frac{A}{a(1-e^2)C_0} \tag{17}$$

Puis :

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{J(\varphi_1)}{a(1-e^2)C_0}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{j+1} = \varphi_1 - \frac{J(\varphi_j)}{a(1-e^2)C_0}$$

On fixe un nombre $\epsilon \ll 1$. Si $|\varphi_{j+1} - \varphi_j| < \epsilon$, alors $\varphi = \varphi_{j+1} = \varphi_j$, sinon on itère le processus. En prenant $\epsilon = 1,57 \times 10^{-10}$, on obtient la précision du mm. La résolution de (16) par itérations est convergente car on montre que $|F'(\varphi)| < 1$.

2.0.2 Calculs d'erreurs

Jusqu'à quel ordre faut-il s'arrêter dans le développement limité de l'expression de la longueur de la méridienne ? Ecrivons (5) sous la forme :

$$\beta(\varphi) = a(1-e^2)I(\varphi) = a(1-e^2)\sum_{i=0}^{i=6}\int_0^{\varphi} a_i sin^{2i}tdt \tag{18}$$

On s'arrête à l'ordre i tel que :

$$|a(1-e^2)a_i\int_0^{\varphi} sin^{2i}tdt| < 10^{-4}\, m \tag{19}$$

soit :

$$|a(1-e^2)a_i\int_0^{\varphi} sin^{2i}tdt| \leq |a(1-e^2)a_i\int_0^{\varphi} dt| \leq a(1-e^2)a_i\frac{\pi}{2} < 10^{-4}\, m$$
$$\Longrightarrow a_i < \frac{2\times 10^{-4}}{\pi a(1-e^2)} \tag{20}$$

Numériquement pour $i = 10$, on trouve que $a_5 = \dfrac{693}{256}e^{10} > \dfrac{2\times 10^{-4}}{\pi a(1-e^2)}$. Par contre pour $i = 6$, on obtient que $a_6 = \dfrac{3003}{1024}e^{12} < \dfrac{2\times 10^{-4}}{\pi a(1-e^2)}$. Donc on garde que les coefficients de e^2, e^4, e^6, e^8 et e^{10} de (6).

Exercice 2.1. *Soit la fonction $F(\varphi)$:*

$$F(\varphi) = \frac{A}{a(1-e^2)C_0} - \frac{J(\varphi)}{a(1-e^2)C_0}$$

donnée ci-dessus.

1. Montrer que $|F'(\varphi)| < 1$.

2.En déduire que la suite $\varphi_n = F(\varphi_{n-1})$ est convergente.