Corrections des Sujets d'Examens de Géodésie et de Cartographie Mathématique - Partie I -

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM,
Ingénieur Géographe Général

Abstract : This is the part I of the correction of the collection of exams of geodesy and mathematical cartography. These exams are from the German school, namely from the Institute of Geodesy of the University of Stuttgart where the eminent professor Erik W. Grafarend (1939-2020) taught geodesy courses and in particular mathematical cartography. This is an opportunity for French-speaking students to share the German methodology.

Résumé : Ce papier contient la première partie de la correction la collection choisie d'examens de géodésie et de cartographie mathématique. Ces examens sont de l'école allemande à savoir de l'Institut de Géodésie de l'Université de Stuttgart où l'éminant professeur Erik W. Grafarend (1939-2020) enseignait les cours de géodésie et notamment la cartographie mathématique. C'est l'occasion pour les étudiants francophones de partager la méthodologie allemande.

Version 1, Juillet 2023

Figure 1 – Prof. Erik Grafarend et son collègue Prof. Helmut Moritz écoutent attentivement les contributions d'une conférence [1]

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
Résidence Bousten 8, Bloc B, Avenue Mosquée Raoudha,
1181 Soukra Raoudha,
Tunisia.
e-mail : abenhadjsalem@gmail.com

A Tous Mes Professeurs et Enseignants

TABLE DES MATIÈRES

Préface 7
1 Sujets de Géodésie 9

PRÉFACE

Dans ce document, j'ai voulu présenter aux élèves ingénieurs géomètres et géomaticiens la première partie de la correction de quelques exemples de sujets de problèmes de géodésie et de cartographie mathématique de l'école allemande plus précisement de l'Institut de Géodésie de l'Université de Stuttgart où l'éminant professeur Erik W. Grafarend (1939-2020) enseignait les cours de géodésie et notamment la cartographie mathématique. Ce dernier était connu pour ses articles demandant une rigoureuse connaissance en particulier en mathématiques.

Je souhaite que la correction soit bien reçue par les différents lecteurs. J'ai gardé le même classement des sujets proposés.

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Dipl. Ing.
Ingénieur Géographe Général
Juillet 2023

1

SUJETS DE GÉODÉSIE

Problème 1.0.1. *La transformation de coordonnées planes est donnée par le modèle suivant :*

$$x = X.m_x.\cos\mu - Y.m_y.\sin\omega + c_1$$
$$y = Y.m_y.\cos\omega + X.m_x.\sin\mu + c_2$$

*Les coordonnées des points homologues sont selon le tableau ci-dessous (**Table** 1.1).*
1) - Pour définir les équations analytiques pour déterminer les paramètres inconnus, on va utiliser les nombres complexes comme suit :

$$z = x + iy = Xm_x e^{i\mu} + iYm_y e^{i\omega} + c_1 + ic_2$$

Notons :

$$A = m_x e^{i\mu} \Longrightarrow m_x = |A|, \mu = \arg(A)$$
$$B = m_y e^{i\omega} \Longrightarrow m_y = |B|, \omega = \arg(B)$$
$$C = c_1 + ic_2$$

Le nombre z *s'écrit :* $z = XA + iYB + C$ *où* A, B *et* C *sont des inconnues. On applique les données des trois points* P_1, P_2, P_3 *comme suit :*

$$\begin{cases} z_2 - z_1 = (X_2 - X_1)A + i(Y_2 - Y_1)B \\ z_3 - z_2 = (X_3 - X_2)A + i(Y_3 - Y_2)B \end{cases} \Longrightarrow \text{on obtient } A, \quad B$$
$$C = z_3 - X_3A - iY_3B \Longrightarrow c_1, \quad c_2$$

Finalement, on obtient les coordonnées manquantes $(X, Y)_4$ *du point* P_4 *en résolvant le système :*

$$x_4 - c_1 = X.m_x.\cos\mu - Y.m_y.\sin\omega$$
$$y_4 - c_2 = X.m_x.\sin\mu + Y.m_y.\cos\omega$$

connaissant $m_x, m_y, \mu, \omega, c_1$ *et* c_2.
2) - Calcul des paramètres $m_x, m_y, \mu, \omega, c_1$ *et* c_2 *à partir des données du tableau. On obtient les résultats suivants :*

$$z_1 = 5 + 7i = -A + 7iB + C$$
$$z_2 = 7 + 5i = A + 5iB + C$$
$$z_3 = 4 + 4i = -2i + 6iB + C$$
$$z_2 - z_1 = 2 - 2i = 2A - 2iB \Longrightarrow A - iB = 1 - i$$
$$z_3 - z_2 = -3 - i = -3A + iB \Longrightarrow -3A + iB = -3 - i$$

Par suite :

$$A = 1 + i \Longrightarrow m_x = |A| = \sqrt{2}, \mu = \frac{\pi}{4}; B = 3 \Longrightarrow m_y = |B| = 2, \omega = 0$$

Utilisant par exemple le point P_1*, on trouve :*

$$C = 5 + 7i + A - 7iB = 6 - 6i \Longrightarrow c_1 = 6, c_2 = -6$$

3) - Calcul des coordonnées (X_4, Y_4) *manquantes du point* P_4 *: on écrit* $z_4 = x_4 + iy_4$*, d'où :*

$$6 + 6i = X_4(1+i) + 2iY_4 + 6 - 6i \Longrightarrow X_4 + i(X_4 + 2Y_4) = 12i \Longrightarrow X_4 = 0, Y_4 = 6$$

Remarque : *Si on pose* $Z = X + iY$*, la transformation étudiée est telle que* $z = f(Z, \bar{Z})$ *avec* $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{Z}} \neq 0$*, alors la fonction* f *n'est pas holomorphe et par suite non conforme.*

nom du point	X	Y	x	y
P_1	-1	7	5	7
P_2	1	5	7	5
P_3	-2	6	4	4
P_4	?	?	6	6

TABLE 1.1 – Tableau des données

Problème 1.0.2. *Soit un cône circulaire de hauteur* h *et de rayon* $a < h$*, paramétré par* (u, v) *dans une base orthonormée* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ *comme suit :*

$$\boldsymbol{X}(u,v) = \boldsymbol{e}_1.\left(a - \frac{a}{h}.v\right)\cos u + \boldsymbol{e}_2.\left(a - \frac{a}{h}.v\right)\sin u + v.\boldsymbol{e}_3, \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, h] \quad (1.1)$$

1) - Le point M *du cône a ses coordonnées :*

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{X}\left\{\begin{array}{l} x = \left(a - \dfrac{a}{h}.v\right)\cos u \\ y = \left(a - \dfrac{a}{h}.v\right)\sin u \\ z = v \end{array}\right. \quad (1.2)$$

En utilisant les notations de la théorie des surfaces, on obtient les éléments suivants de la première forme fondamentale :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2\left(1 - \frac{v}{h}\right)^2 du^2 + \left(1 + \frac{a^2}{h^2}\right)dv^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

La matrice $g = (g_{ij})$ *est :*

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\left(1 - \dfrac{v}{h}\right)^2 & 0 \\ 0 & 1 + \dfrac{a^2}{h^2} \end{pmatrix} \Longrightarrow g_{11} = a^2\left(1 - \frac{v}{h}\right)^2, g_{22} = 1 + \frac{a^2}{h^2}, g_{12} = g_{21} = 0$$

et :

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{h^2}{a^2(v-h)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{h^2}{a^2+h^2} \end{pmatrix} \Longrightarrow g^{11} = \frac{h^2}{a^2(v-h)^2}, g^{22} = \frac{h^2}{a^2+h^2} \quad , g^{12} = g^{21} = 0$$

Ecriture des équations des lignes géodésiques : On utilise la première méthode décrite dans la correction du problème ci-dessous. Les équations des lignes géodésiques sont données dans notre cas par :

$$\frac{d^2x^j}{ds^2} + \sum_{i,k}^{n} \Gamma^j_{ki} \frac{dx^k}{ds}\frac{dx^i}{ds} = 0 \quad j = 1, 2$$

avec Γ^j_{ki} *les coefficients de Cristoffel de 1er espèce donnés par :*

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_l \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

D'où :

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma^1_{11}\frac{du}{ds}\frac{du}{ds} + 2\Gamma^1_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^1_{22}\frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma^2_{11}\frac{du}{ds}\frac{du}{ds} + 2\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^2_{22}\frac{dv}{ds}\frac{dv}{ds} = 0$$

Le calcul des coefficients de Cristoffel donne :

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}.g^{11}.\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = \frac{1}{v-h}, \quad \Gamma^1_{22} = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}.g^{22}.\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = -\frac{a^2(v-h)}{a^2+h^2}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \quad \Gamma^2_{22} = 0$$

Par la suite, on obtient les équations :

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{2}{v-h}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{a^2(v-h)}{a^2+h^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 0 \tag{1.4}$$

Pour $du/ds \neq 0$*, l'équation (1.3) s'écrit :*

$$\frac{d\left(\dfrac{du}{ds}\right)}{\dfrac{du}{ds}} = \frac{2}{h-v}dv, 0 < v < h \Longrightarrow$$

$$\text{Log}\left|\frac{du}{ds}\right| = 2\int \frac{dv}{h-v} = \text{Log}\frac{1}{(h-v)^2} + \text{cte}$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{ds} = \frac{h^2A}{a^2(h-v)^2}, \quad A = \text{constante} > 0 \tag{1.5}$$

Comme $r^2 = x^2+y^2 = \dfrac{a^2(h-v)^2}{h^2}$*, on obtient* $r^2\dfrac{du}{ds} = A = \mathrm{cte}$*, de la figure (1.2) en notant* θ *l'azimut de la géodésique au point* M*, on a alors la relation de Clairaut :*

$$r.\sin\theta = A = \mathrm{Cte}, \quad \sin\theta = r\frac{du}{ds}$$

2) - La question n°2 ne sera pas traitée.
3) - Soit P *un point du cône à hauteur* $h/2$ *c'est-à-dire* $v = h/2$ *et choisissons par exemple* $u = 0$*. L'azimut de la géodésique au point* P *est* $\theta_0 = \pi/4$*. Le rayon* r_P *vaut* $r_P = \dfrac{a}{2}$*, par suite on obtient la valeur de la constante* $A = r_P \sin\theta_0 = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Calcul de la coordonnée v ***du point final :***
On a $r^2\dfrac{du}{ds} = A \Longrightarrow du^2 = \dfrac{A^2ds^2}{r^4} = \dfrac{h^4A^2ds^2}{a^4(v-h)^4} = \dfrac{h^4ds^2}{8a^2(v-h)^4}$*. Comme :*

$$ds^2 = \frac{a^2(h-v)^2}{h^2}du^2 + \frac{a^2+h^2}{h^2}dv^2$$

On arrive à l'expression :

$$ds = +\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h}.\frac{2\sqrt{2}(h-v)dv}{\sqrt{8(h-v)^2-h^2}}$$

On passe à l'intégration :

$$\int_0^a ds = a = \int_{h/2}^{v} \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h}.\frac{2\sqrt{2}(h-t)dt}{\sqrt{8(h-t)^2-h^2}}$$

On fait le changement de variables $\alpha = 8(h-t)^2 \Longrightarrow d\alpha = -16(h-t)dt$*. Par suite on obtient au premier ordre en* $\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \ll 1$ *:*

$$a\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int_{2h^2}^{8(h-v)^2} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha-h^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}\left[\sqrt{\alpha-h^2}\right]_{2h^2}^{8(h-v)^2} \Longrightarrow$$
$$a\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(h-\sqrt{8(h-v)^2-h^2}) \Longrightarrow v = \frac{h}{2}\left(1+\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) < h$$

Calcul de la coordonnée u ***du point final :***
On part de $r^2\dfrac{du}{ds} = A$ *et de* $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$*, on arrive à :*

$$du = +\frac{h\sqrt{a^2+h^2}}{a}.\frac{dv}{(h-v)\sqrt{8(h-v)^2-h^2}} \Longrightarrow$$
$$u - 0 = \frac{h\sqrt{a^2+h^2}}{a}\int_{h/2}^{h(1+(a\sqrt{2})/\sqrt{a^2+h^2})} \frac{dv}{(h-v)\sqrt{8(h-v)^2-h^2}}$$

Utilisant le même changement de variables $\alpha = 8(h-\nu)^2$*, on trouve :*

$$u = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{4a}\left[\mathrm{Arctg}\left(\frac{\sqrt{\alpha - h^2}}{h}\right)\right]_{2h^2}^{8(h-\nu)^2}$$

Calculons $8(h-\nu)^2$ *avec* ν *donnée par* $\dfrac{h}{2}\left(1+\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)$ *:*

$$h-\nu = h - \frac{h}{2}\left(1+\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) = \frac{h}{2}\left(1-\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) \Longrightarrow$$

$$8(h-\nu)^2 = \alpha = 2h^2\left(1-\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)^2 = 2h^2\left(\frac{3a^2+h^2}{a^2+h^2} - \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{8(h-\nu)^2-h^2}}{h} = \frac{\sqrt{\alpha-h^2}}{h} = \sqrt{\frac{5a^2+h^2}{a^2+h^2}\left(1-\frac{2a\sqrt{2(a^2+h^2)}}{5a^2+h^2}\right)}$$

Par suite :

$$u = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{4a}\left[\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{5a^2+h^2}{a^2+h^2}.\left(1-\frac{2a\sqrt{2a^2+2h^2}}{5a^2+h^2}\right)} - \mathrm{Arctg}(1)\right]$$

avec $\mathrm{Arctg}(1) = \dfrac{\pi}{4}\,\mathrm{rd}$.

Calcul de l'azimut θ' ***au point final :***

Pour le calcul de θ'*, on applique la relation de Clairaut au point final, soit* $r'\sin\theta = A = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ *avec* $r' = \dfrac{(h-\nu)}{h}.a$*. On obtient :*

$$\sin\theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) \quad \textit{pourvu que } a \ll h$$

Problème 1.0.3. *On va utiliser les notations françaises, soient* $\mathrm{ch}x = \cosh x, \mathrm{sh}x = \sinh x$*.*

1) - Le calcul de la première forme fondamentale donne :

$$\boldsymbol{OM}\begin{cases} X = \mathrm{ch}V.\cos U \Rightarrow dX = \mathrm{sh}V\cos U dV - \mathrm{ch}V\sin U dU, \\ Y = \mathrm{ch}V.\sin U \Rightarrow dY = \mathrm{sh}V\sin U dV + \mathrm{ch}V\cos U dU, \\ Z = V \Rightarrow dZ = dV \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{dS^2 = dX^2+dY^2+dZ^2 = \mathrm{ch}^2V(dU^2+dV^2)} \tag{1.6}$$

La matrice $g = (g_{ij})$*est :*

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}^2V & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}^2V \end{pmatrix} \Longrightarrow g_{11} = g_{22} = \mathrm{ch}^2V, g_{12} = g_{21} = 0$$

et :

$$g^{-1} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2V}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow g^{11} = g^{22} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2V} \quad g^{12} = g^{21} = 0$$

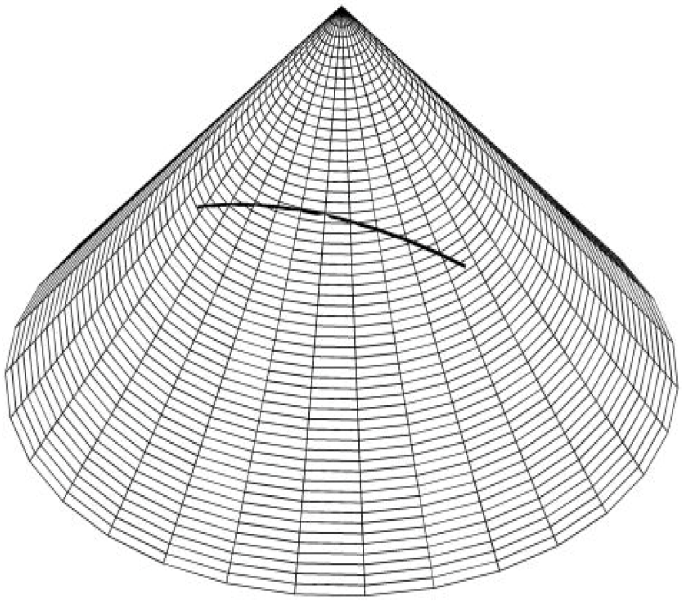

Figure 1.1 – Le Cône

2) Ecriture des des équations des lignes géodésiques :

i) ***Première méthode***

Les équations des lignes géodésiques sont données par :

$$\frac{d^2x^j}{dS^2}+\sum_{i,k}^{n}\Gamma^j_{ki}\frac{dx^k}{dS}\frac{dx^i}{dS}=0 \quad j=1,\ldots,n$$

avec Γ^j_{ki} *les coefficients de Cristoffel de 1er espèce donnés par :*

$$\Gamma^k_{ij}=\sum_l \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)$$

D'où :

$$\frac{d^2U}{dS^2}+\Gamma^1_{11}\frac{dU}{dS}\frac{dU}{dS}+2\Gamma^1_{12}\frac{dU}{dS}\frac{dV}{dS}+\Gamma^1_{22}\frac{dV}{dS}\frac{dV}{dS}=0$$

$$\frac{d^2V}{dS^2}+\Gamma^2_{11}\frac{dU}{dS}\frac{dU}{dS}+2\Gamma^2_{12}\frac{dU}{dS}\frac{dV}{dS}+\Gamma^2_{22}\frac{dV}{dS}\frac{dV}{dS}=0$$

Le calcul des coefficients de Cristoffel donne :

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}.g^{11}.\frac{\partial g_{11}}{\partial U}=0, \quad \Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{1}{2}.g^{11}.\frac{\partial g_{11}}{\partial V}=\mathrm{th}V, \quad \Gamma^1_{22}=0$$
$$\Gamma^2_{11}=-\frac{1}{2}.g^{22}.\frac{\partial g_{11}}{\partial V}=-\mathrm{th}V, \quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=0, \quad \Gamma^2_{22}=\frac{1}{2}.g^{22}.\frac{\partial g_{22}}{\partial V}=\mathrm{th}V$$

Par la suite, on obtient les équations :

$$\frac{d^2U}{dS^2} + 2\mathrm{th}V\frac{dU}{dS}\frac{dV}{dS} = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{d^2V}{dS^2} - \mathrm{th}V\left(\frac{dU}{dS}\right)^2 + \mathrm{th}V\left(\frac{dV}{dS}\right)^2 = 0 \tag{1.8}$$

ii) Deuxième méthode

$$E = E(V) = \mathrm{ch}^2V, \quad F = 0, \quad G = G(V) = \mathrm{ch}^2V$$

Rappelons les équations des lignes géodésiques en utilisant les notations usuelles :

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U} = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}\right\|^2 \\ F &= \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V} \\ G &= \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V} = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}\right\|^2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Des équations (1.9), on obtient les équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial U} &= 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U^2} \\ \frac{\partial E}{\partial V} &= 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U \partial V} \\ \frac{\partial F}{\partial U} &= \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U \partial V} \\ \frac{\partial F}{\partial V} &= \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial V^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U \partial V} \\ \frac{\partial G}{\partial U} &= 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U \partial V} \\ \frac{\partial G}{\partial V} &= 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial V^2} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Soit $\boldsymbol{n}$ *le vecteur unitaire normal en* $M(U, V)$ *du caténoïde,* $\boldsymbol{n}$ *est donné par :*

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U} \wedge \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}}{H} \tag{1.11}$$

avec :

$$H = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}\right\| \tag{1.12}$$

Soit une courbe (Γ) *tracée sur le caténoïde et* $\boldsymbol{N}$ *est le vecteur unitaire de la normale principale le long de* (Γ).

Définition 1.0.4. *Une courbe* (Γ) *est dite ligne géodésique du caténoïde si et seulement si les vecteurs* $\boldsymbol{n}$ *et* $\boldsymbol{N}$ *sont colinéaires.*

On calcule l'expression de $\boldsymbol{N}$*, on obtient :*

$$\boldsymbol{N} = R\frac{d\boldsymbol{T}}{dS}$$

or :

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{M}}{dS} = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}\frac{dU}{dS} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}\frac{dV}{dS}$$

d'où :

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dS} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U^2}\left(\frac{dU}{dS}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U \partial V}\frac{dU}{dS}\frac{dV}{dS} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}\frac{d^2U}{dS^2} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}\frac{d^2V}{dS^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial V^2}\left(\frac{dV}{dS}\right)^2$$

La condition $\boldsymbol{n} \,//\, \boldsymbol{N}$ *peut être écrite :*

$$\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{n} = 0$$

soit :

$$R\frac{d\boldsymbol{T}}{dS} \wedge \left(\frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U} \wedge \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}}{H} \right) = 0 \tag{1.13}$$

Utilisant la formule du produit vectoriel :

$$\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{1.14}$$

on obtient :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{T}}{dS}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}\right)\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U} - \left(\frac{d\boldsymbol{T}}{dS}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}\right)\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V} = 0$$

Or $\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}$ *et* $\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}$ *forment une base du plan tangent en M, d'où les deux conditions :*

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dS}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V} = 0 \quad \textit{et} \quad \frac{d\boldsymbol{T}}{dS}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U} = 0 \tag{1.15}$$

Ce qui donne deux équations différentielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}\left(\frac{dU}{dS}\right)^2 + F\frac{d^2U}{dS^2} + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U \partial V}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}\frac{dU}{dS}\frac{dV}{dS} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial V^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial V}\left(\frac{dV}{dS}\right)^2 + G\frac{d^2V}{dS^2} = 0 \tag{1.16}$$

et :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial V^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}\left(\frac{dV}{dS}\right)^2 + F\frac{d^2V}{dS^2} + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U \partial V}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}\frac{dU}{dS}\frac{dV}{dS} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial U^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial U}\left(\frac{dU}{dS}\right)^2 + E\frac{d^2U}{dS^2} = 0 \tag{1.17}$$

On pose :

$$\begin{gathered} E'_U = \frac{\partial E}{\partial U} = 0; \quad E'_V = \frac{\partial E}{\partial V} = +2\mathrm{ch}V\mathrm{sh}V; \quad F'_U = \frac{\partial F}{\partial U} = 0 \\ F'_V = \frac{\partial F}{\partial V} = 0; \quad G'_U = \frac{\partial G}{\partial U} = 0; \quad G'_V = \frac{\partial G}{\partial V} = 2\mathrm{ch}V\mathrm{sh}V \end{gathered} \tag{1.18}$$

et on utilise les équations (1.10), (1.16) et 1.17), ces 2 dernières équations peuvent être écrites :

$$\boxed{(F'_U - \frac{E'_V}{2})\left(\frac{dU}{dS}\right)^2 + F\frac{d^2U}{dS^2} + G'_U\frac{dU}{dS}\frac{dV}{dS} + \frac{G'_V}{2}\left(\frac{dV}{dS}\right)^2 + G\frac{d^2V}{dS^2} = 0} \tag{1.19}$$

$$\boxed{(F'_V - \frac{G'_U}{2})\left(\frac{dV}{dS}\right)^2 + F\frac{d^2V}{dS^2} + E'_V\frac{dV}{dS}\frac{dU}{dS} + \frac{E'_U}{2}\left(\frac{dU}{dS}\right)^2 + E\frac{d^2U}{dS^2} = 0} \tag{1.20}$$

Par suite, on obtient :

$$\boxed{-2\mathrm{sh}V\left(\frac{dU}{dS}\right)^2 + 2\mathrm{sh}V\left(\frac{dV}{dS}\right)^2 + \mathrm{ch}V\frac{d^2V}{dS^2} = 0} \tag{1.21}$$

$$\boxed{\frac{d}{dS}\left(\mathrm{ch}^2V\frac{dU}{dS}\right) = 0 \Longrightarrow dS = A.\mathrm{ch}^2V.dU,\ A = \mathrm{cte}} \tag{1.22}$$

On intégre l'équation (1.7), d'où en considérant $dU/dS \neq 0$ *:*

$$\frac{d^2U}{dS^2} + 2\mathrm{th}V\frac{dU}{dS}\frac{dV}{dS} = 0 \Longrightarrow \frac{d\left(\frac{dU}{dS}\right)}{\frac{dU}{dS}} = -2\mathrm{th}VdV \Longrightarrow$$

$$\mathrm{Log}\left|\frac{dU}{dS}\right| = -2\int \mathrm{th}V.dV = -2\int\frac{\mathrm{sh}V}{\mathrm{ch}V}dV = -2\int\frac{d\mathrm{ch}V}{\mathrm{ch}V} = \mathrm{Log}\frac{A}{\mathrm{ch}^2V}, \quad A = \mathrm{cte} > 0$$

$$\Longrightarrow \frac{dU}{dS} = \frac{A}{\mathrm{ch}^2V} \Longrightarrow \mathrm{ch}V.\mathrm{ch}V\frac{dU}{dS} = A \tag{1.23}$$

Des équations définissant le caténoïde :

$$\boldsymbol{OM}\begin{cases} X = \mathrm{ch}V.\cos U = f(V).\cos U, \\ Y = \mathrm{ch}V.\sin U = f(V).\sin U, \\ Z = V = h(V) \end{cases}$$

le caténoïde est une surface de révolution. Soit $r = \sqrt{X^2+Y^2} = \mathrm{ch}V$*, la dernière équation (1.23) n'est que la relation de Clairaut :*

$$r.\sin\theta = A = \mathrm{constante}$$

En effet, on a $\sin\theta = r\dfrac{dU}{dS} \Longrightarrow \mathrm{ch}V.\mathrm{ch}V\dfrac{dU}{dS} = r.r\dfrac{dU}{dS} = r.\sin\theta = A = \mathrm{cte}.$

2) Par la formule donnée, l'azimut θ *s'écrit :*

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left(\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial V}\cos\theta - \frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial U}\sin\theta\right)$$

On obtient :

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{g_{11}}(\mathrm{sh}V\cos\theta) = \frac{\mathrm{sh}V}{\mathrm{ch}^2V}.\cos\theta$$

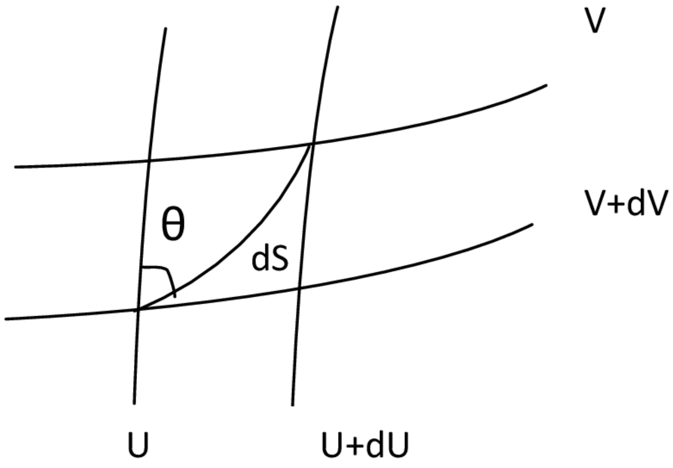

FIGURE 1.2 – Relations differentielles entre dU et dS

Des équations (1.6) et (1.23), on obtient :

$$dS = \frac{ch^2V}{\sqrt{ch^2V - A^2}}.dV \Longrightarrow \frac{d\theta}{\cos\theta} = \frac{dchV}{\sqrt{ch^2V - A^2}}$$

4)- Les coordonnées du point P_0 *sont* :$(X_0 = 0, Y_0 = ch(-0.9) = ch(0.9) = 1.433, Z_0 = -0.9)$. *On détermine la constante* A *d'après les données au point* P_0. *On a l'azimut* $\theta = \pi/4 \Longrightarrow \sin\theta = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $r^2 = X^2 + Y^2 = Y^2 \Longrightarrow r = Y = 1.433$, *par suite :*

$$A = r\sin\theta = 1.013$$

On va utiliser l'équation $dS = \dfrac{ch^2V}{\sqrt{ch^2V - A^2}}.dV$. *Son intégration détermine* V_1 *au point* P_1, *par suite l'intégration de l'équation* $\dfrac{d\theta}{\cos\theta} = \dfrac{dchV}{\sqrt{ch^2V - A^2}}$ *détermine* θ_1.

<u>Le calcul de V_1 au point P_1 :</u> Le calcul de la primitive $\displaystyle\int \frac{ch^2V}{\sqrt{ch^2V - A^2}}.dV$ *ne se fait pas par des formules fermées. On la traite par un calcul approché. De plus les données numériques sont petites. On pose* $t = chV \Longrightarrow dt = shV.dV$ *et on obtient à l'ordre 2 en* $1/t$ *:*

$$dS = \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - A^2}}\frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \left(1 + \frac{1 + A^2}{2}\frac{1}{t^2}\right)dt$$

D'où :

$$S_1 - S_0 = \int_{-0.9}^{V_1} \frac{ch^2V.dV}{\sqrt{ch^2V - A^2}} = \int_{1.433}^{t} \left(1 + \frac{1 + A^2}{2}\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$0.2 - 0 = t - \frac{1 + A^2}{2}\frac{1}{t} - \left(1.433 - \frac{0.5131}{1.433}\right)$$

$$t^2 - 1.275t - 0.5131 = 0 \Longrightarrow \textit{la racine positive } t_1 = 1.6215 = chV_1 \Longrightarrow V_1 = +1.068$$

Le calcul de θ_1 au point P_1 :

On déduit θ_1 par :

$$\frac{d\theta}{\cos\theta} = \frac{d\mathrm{ch}V}{\sqrt{\mathrm{ch}^2V - A^2}} \Longrightarrow \int_{\pi/4}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int_{-0.9}^{V_1} \frac{d\mathrm{ch}V}{\sqrt{\mathrm{ch}^2V - A^2}} = \int_{1.463}^{1.6225} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - A^2}}$$

$$\mathrm{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_1}{2}\right) - \mathrm{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \int_{1.463}^{1.6225} \frac{1}{t}\left(1 + \frac{A^2}{2t^2}\right) dt \Longrightarrow$$

$$\mathrm{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_1}{2}\right) - 0.8814 = \left(\mathrm{Log}1.6225 - \frac{1.026}{4 \times 1.6225^2}\right) - \left(\mathrm{Log}1.463 - \frac{1.026}{4 \times 1.463^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_1}{2}\right) = 0.8814 \Longrightarrow \theta_1 = 0.87048\,\mathrm{rd}$$

Si on calcule par l'équation de Clairaut la constante A, on trouve une valeur $A' = 1.2406$. Cette différence est due de l'utilisation d'un calcul approché.

Le calcul de U_1 du point P_1 :

De l'équation de Clairaut $\dfrac{dU}{dS} = \dfrac{A}{\mathrm{ch}^2V}$*, on obtient en éliminant dS :*

$$dU = \frac{A\,dV}{\sqrt{\mathrm{ch}^2V - A^2}}$$

On fait le même changement de variables $t = \mathrm{ch}V$, par suite :

$$dU = \frac{A}{\sqrt{t^2-1}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - A^2}} \Longrightarrow U_1 - U_0 = \int_{\mathrm{ch}V_0}^{\mathrm{ch}V_1} \frac{A\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(t^2-A^2)}} \Longrightarrow$$

$$U_1 - 0 = \int_{1.433}^{1.6215} \frac{A}{t^2}\left(1 + \frac{1}{2t^2}\right)\left(1 + \frac{A^2}{2t^2}\right) dt = \left[-\frac{A}{t} - \frac{A(A^2+1)}{3t^3}\right]_{1.433}^{1.6215} \Longrightarrow$$

$$U_1 = -0.6247 - 0.1605 + 0.7069 + 0.2325 = 0.1542 = U_1$$

La question 3) n'a pas été traitée.

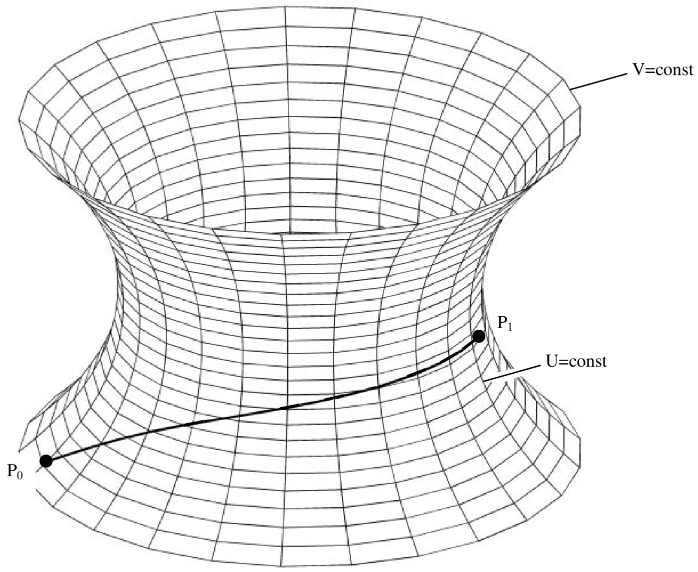

Figure 1.3 – Ligne géodésique du caténoïde

BIBLIOGRAPHIE

[1] https ://leibnizsozietaet.de/kolloquium-der-leibniz-sozietaet-am-13-02-2015-zum-thema-geodaesie-mathematik-physik-geophysik-kurzbericht/(2015)

[2] Abdelmajid Ben Hadj Salem. 2023. A Selected Collection of Exams of Geodesy and Mathematical Cartography From The German School. Version 1. June, in French. https://vixra.org/pdf/2306.0029v1.pdf