Title: Precesión del perihelio de mercurio con relatividad especial de campos

Abstract
Se propone una reinterpretación de la relatividad especial y se explica con ella la precesión del perihelio de mercurio.
Esta prueba completa la serie de experimentos denominados 'test clásicos' de relatividad general, que ahora hemos tratado en el ámbito de esta relatividad especial de campos.

Autor: Enrique Domínguez Pinos.
Ingeniero Industrial.

Email: enrique_pinos@yahoo.es

Málaga, 10 de Abril de 2023. Revisado: Málaga, 7 de Febrero de 2024

Table of Contents

Introducción

La relatividad especial modificada la denominaremo relatividad especial de campos[11], que hace referencia a que cada campo, tanto el gravitatorio como el electromagnético, tienen su propia versión de la relatividad especial[1], particularizada para la velocidad de su partícula mensajera (gravitón y fotón, respectivamente)
El cambio que vamos a introducir en la relatividad especial no afecta a los tests previos que ya explicamos, como se verá seguidamente.

Lagrangiano en relatividad especial de campos

Entre las justificaciones del lagrangiano de la relatividad especial, se encuentra en la literatura la interpretación de la ecuación de Euler-Lagrange para el tiempo propio de la partícula,

$$\mathrm{L}=\int \mathrm{d}\tau=\int \frac{\mathrm{dt}}{\gamma}.$$

E inmediatamente se reemplaza el tiempo propio con el tiempo del observador junto con el factor de Lorentz[2].
Este cambio es la interpretación correcta de la relatividad especial, el tiempo de las ecuaciones de la mecánica es relativo al observador. Pero este razonamiento no lleva a la ecuación dinámica correcta.
Este lagrangiano nos lleva, mediante la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0\,,\, q_i=\{x\,,y\,,z\}$$

a la ecuación mecánica,

$$\frac{\mathrm{d}(\gamma\vec{\mathrm{v}})}{\mathrm{dt}}=\frac{\vec{\mathrm{F}}}{\mathrm{m}}.$$

Que podemos despejar en función a la velocidad. La ecuación mecánica queda,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{x}}}{\mathrm{dt}}=\vec{\mathrm{v}},$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}}=\frac{1}{\mathrm{m}}\left(\vec{\mathrm{F}}-\frac{(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{F}})\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{c}_{\mathrm{m}}^2}\right)\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}_{\mathrm{m}}^2}},$$

Donde se ha escrito la expresión del factor de Lorentz en términos de la velocidad de la partícula. El efecto de esta ecuación es insuficiente para explicar la precesión del perihelio.

La expresión correcta para la ecuación mecánica es,

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{\vec{v}}{\gamma},\qquad \frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{1}{m\gamma}\left(\vec{F}-\frac{(\vec{v}\cdot\vec{F})\vec{v}}{c_m^2}\right). \tag{1}$$

Ahora la interpretación es diferente. Los términos a la izquierda representan la velocidad y aceleración aparentes. Necesitan multiplicarse por el factor de Lorentz para dar los valores reales. De hecho la ecuación para los fotones en tiempo 'propio' queda,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{x}}}{\mathrm{d}\tau}=\vec{\mathrm{v}},\qquad \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{\mathrm{m}}\left(\vec{\mathrm{F}}-\frac{(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{F}})\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{c_m^2}}\right).$$

Obviamente, no podemos saber cómo pasa realmente el tiempo para el fotón, pero estas ecuaciones ya se usaron con éxito en predecir el curvado de la luz a su paso junto al sol[1],[3].

La confusión con el factor de Lorentz se debe a que tiene dos funciones dentro del lagrangiano; la primera, poner las ecuaciones en la forma (1) cuando se despeja la velocidad y, la segunda, actuar como factor de escala sobre el eje temporal.

Con este cambio de interpretación, el lagrangiano sigue siendo correcto, sorprendentemente, y sólo hace falta cambiar un poco la forma de la ecuación de Euler-Lagrange para que todo siga funcionando como hasta ahora,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)=0,\ q_i=\{x,y,z\},\ v_i=\{v_x,v_y,v_z\},$$

y obtengamos las expresiones (1). El lagrangiano es,

$$\mathrm{L}=-\frac{\mathrm{c_m^2}}{\gamma}-\mathrm{V}.$$

Con 'V' el potencial del que derivan las fuerzas.
Pese a tener el lagrangiano, no podemos olvidar el papel que juega el factor de Lorentz en las ecuaciones mecánicas, puesto que sólo las ecuaciones dispuestas como en las (1), describen correctamente la dinámica del sistema.

Conservación de la energía

Puede verse en el Anexo I: Ecuación de la energía la deducción de la expresión de conservación de la energía, que queda,

$$\mathrm{E}=\mathrm{c_m^2}(\gamma-1)+\mathrm{V}.$$

Donde la energía cinética es cero cuando la velocidad es cero. Y la expresión se reduce a las leyes de Newton cuando la velocidad es muy inferior a c_m.

Efectos de las magnitudes aparentes

Puesto que las magnitudes que obtenemos por derivación respecto al tiempo (del observador) son aparentes sin conocer el factor de Lorentz a aplicar, esto podría ofrecer una explicación a efectos como velocidades súper-lumínicas o curvas de rotación de galaxias con velocidades imposibles.

Precesión del perihelio de mercurio

Para realizar este test, seguiremos la idea inicial que propusimos en [4]. Resumidamente, vamos a definir al ángulo de precesión calculando el instante en que se produce el perihelio, integrando las ecuaciones de n-body (con 9 cuerpos) para los cuerpos celestes desde el Sol (índice 1) hasta Neptuno (índice 9). Si el cuerpo celeste es un sistema con lunas, tomamos el baricentro del sistema (sólo sol, mercurio y venus se excluyen de esto)
El valor que existe en la literatura no representa correctamente la evolución temporal (por no ser realmente una evolución lineal) y el pretender obtenerlo exige un postprocesado de los resultados de cada perihelio excesivamente complejo, a mi entender. Ver por ejemplo las referencias [6], [7] y [8]. (Un especial agradecimiento a la gente del SSD en el JPL por mojarse donde nadie quiere, y a la NASA en general, por publicar en abierto y con tanta claridad)
Es cierto, y poco costoso, que el ajuste de mínimos cuadrados muestra resultados mucho más parecidos a lo que se espera, por lo que usaremos esta métrica para los resultados obtenidos (al contrario se lo que se hiciera en [4], donde se usó la media como estimador de la evolución temporal) Ver Anexo V: Mínimos cuadrados.
Como ya comentamos en [4], el no poder obtener el valor teórico nos exige comprobar el método mediante otro procedimiento, y para ello se usa el kernel de JPL DE405 ascii.

Preparación del experimento

La fuente de datos para el integrador sigue usando valores de Horizons[5], pero actualizados a DE440, tanto condiciones iniciales como datos de cuerpos celestes.
Como se ha comentado, también se ha simulado el baricentro de los subsistemas de Tierra a Neptuno en vez de los cuerpos en sí.
Otro cambio respecto a [4], es que esta vez se ha integrado respecto al SSB (solar system barycenter) de nuestro mini-sistema solar. Para ello, se obtienen las posiciones y velocidades heliocéntricas de Horizons, como en [4], y con esos valores se calcula el centro de masas del sistema (SSB). Luego se resta la posición y velocidad (no nula, en general) del SSB a la posición y velocidad de todos los cuerpos (esto deja el SSB con velocidad nula). No podemos usar el SSB de Horizons porque su SSB tiene en cuenta cuerpos celestes que hemos excluido en la simulación. Ver Anexo II: Coordenadas del SSB.
Las ecuaciones que se han usado vienen en la primera parte del Anexo IV: Expresión ley dinámica para la partícula puntual. Se ha incluido la forma de las ecuaciones que usa el JPL para futura referencia.
También es preciso realizar la simulación en fortran porque simular 100 años tarda aproximadamente 10 horas con un lenguaje compilado como fortran.

Resultados

Aunque los efectos relativistas, evaluados mirando la diferencia entre la energía que predice el lagrangiano de Newton frente al de relatividad especial de campos, sólo son apreciables en los cuerpos celestes desde mercurio a Júpiter ambos incluidos, puede realizarse la simulación poniendo a uno todos los factores de Lorentz sin pérdida significativa de resolución. Los efectos importantes son la modificación de la fuerza tangencial, y la inducción de campo gravitatorio; este último sólo en el caso de mercurio.

Si realizamos la simulación durante 100 años, manteniendo una resolución de 0.1 segundos en la localización del perihelio, obtenemos la tabla siguiente,

Tipo de simulación	Arcseg
Sólo con fuerzas de Newton	515.66
Términos ecuaciones de relatividad especial de campos (SRf)	28.88
Término de inducción de Faraday (sol a mercurio sólo)	14.04
	558.58

El valor que se obtiene con el kernel ascii es 558.51 arcseg con una resolución de 0.6 segundos (lo máximo) en la localización del perihelio (EphemUtil con código C clonado del código fortran) La aportación de GR teórica sería 42.98 arcosegundos; SRf+Faraday obtiene 42.92.

Mercurio completa 416 perihelios en total.

Las fechas del último perihelio tampoco terminan por cuadrar y ahora se parecen más a los valores que suministra el kernel que al resultado que aporta Horizons.

Tipo de simulación	Resolución (segundos)	Fecha último perihelio (@416)
Datos Horizons	10	Sun Feb 17 02:28:50 2013
Kernel ascii DE405 con EphemUtil en C	0.6	Sun Feb 17 03:27:44 2013
Código fortran (real*16)	0.1	Sun Feb 17 03:14:20 2013

La simulación a 2000 años suma aproximadamente 10 arcosegundos más sin llegar al valor teórico.

Comentarios finales

Gravedad cuántica

El modelo que se propone en el Anexo XIII: Conservación del momento angular y el acoplamiento spin-órbita con spin variable podría ser extrapolable al caso del átomo y sería el primer paso para obtener una gravedad cuántica.
También, es interesante ver cómo irrumpe el concepto de onda de De Broglie para permitirnos simular el sistema con la restricción de la energía relativista (ver Anexo XI: Conservación de la energía total). Así como las tres constantes de mecánica cuántica (energía, momento angular e interacción spin-órbita)
Sería necesario reconstruir el modelo con expresiones totalmente relativistas (empezando por la definición del centro de masas)

Rotación solar

En un modelo completo del sistema solar, donde los cuerpos gaseosos como el sol o júpiter tienen rotaciones que no son uniformes en todo su volumen (por ejemplo, el sol rota más rápido por el ecuador) el campo inducido podría explicar esta rotación como una inducción del resto de cuerpos celestes. Serían ecuaciones acopladas bastante más complicadas de lo que se expone aquí.

Curvado del espacio-tiempo

Este experimento pone de manifiesto que el curvado del espacio-tiempo es nulo. La luz se curva por efecto de la modificación de la fuerza tangencial según la (1), pero el factor de lorentz no tiene nada que ver en este curvado. El factor de lorentz sólo modifica la ley horaria de la trayectoria, esto es, la velocidad con que se recorre la trayectoria calculada mediante (1).

Anexo I: Ecuación de la energía

Vamos a deducir la forma de la energía, basándonos en una analogía con la mecánica newtoniana.

Mecánica newtoniana

La ley de conservación de la energía la vamos a obtener desde la ecuación dinámica,

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{1}{m}\vec{F},$$

multiplicando la expresión por la velocidad de la partícula (tendríamos dimensiones de potencia) e integrando en el tiempo (tendríamos dimensiones de energía). Haciendo esto,

$$\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{m}\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt,$$

e integrando,

$$\int\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{m}\int\vec{F}\cdot d\vec{x},$$

que da,

$$\frac{1}{2}m v^2=-V+E,$$

Despejando la constante de integración E (energía),

$$E=\frac{1}{2}m v^2+V.$$

Siendo V el potencial del que derivan las fuerzas.

Mecánica relativista

Análogamente,

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{\vec{v}}{\gamma},$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{1}{m\gamma}\left(\vec{F}-\frac{(\vec{v}\cdot\vec{F})\vec{v}}{c_m^2}\right).$$

multiplicando la expresión segunda por la velocidad de la partícula,

$$\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{m\gamma}\left(\vec{F}\cdot\vec{v}-\frac{(\vec{v}\cdot\vec{F})\vec{v}\cdot\vec{v}}{c_m^2}\right)dt.$$

agrupando términos,

$$\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{m\gamma}\left(1-\frac{v^2}{c_m^2}\right)\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt\,.$$

expandiendo el factor de Lorentz y reagrupando de nuevo,

$$\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{m}\left(1-\frac{v^2}{c_m^2}\right)^{3/2}\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt\,.$$

Integrando en el tiempo,

$$\int\frac{\vec{v}\cdot d\vec{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c_m^2}\right)^{3/2}}=\frac{1}{m}\int\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt\,.$$

La integral se puede resolver para el módulo de la velocidad,

$$\int\frac{v\cdot dv}{\left(1-\frac{v^2}{c_m^2}\right)^{3/2}}=\frac{1}{m}\int\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt+E\,.$$

dando,

$$\frac{m\,c_m^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c_m^2}}}=-V+E\,.$$

Despejando la energía y sustituyendo el factor de Lorentz,

$$E=m\,c_m^2\,\gamma+V\,.$$

Donde vamos a respetar el convenio de restar la constante aditiva ‘m c_m^2’, para que la energía cinética sea nula cuando la velocidad es nula,

$$E=m\,c_m^2(\gamma-1)+V\,.$$

Por otro lado, si separamos las fuerzas en conservativas y no conservativas, podemos deducir una expresión para la variación con el tiempo de la energía,

$$m\,c_m^2(\gamma-1)=\int\vec{F}_C\cdot\vec{v}\,dt+\int\vec{F}_{NC}\cdot\vec{v}\,dt\,,$$

análogamente,

$$m\,c_m^2(\gamma-1)=-V+\int\vec{F}_{NC}\cdot\vec{v}\,dt\,,$$

sustituyendo la energía,

$$E=\int\vec{F}_{NC}\cdot\vec{v}\,dt\,,$$

siendo su variación con el tiempo,

$$\frac{dE}{dt}=\vec{F}_{NC}\cdot\vec{v}\,.$$

Donde el término de la derecha es la potencia (trabajo por unidad de tiempo) de las fuerzas no conservativas.

$$\frac{\mathrm{d\,E}}{\mathrm{dt}}=\mathrm{P_{NC}}.$$

También será útil disponer de expresiones para la ecuación de Euler-Langrange con fuerzas no conservativas,

$$\frac{-\partial L}{\partial q_i}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)=\vec{F}_{NC}$$

Anexo II: Coordenadas del SSB

Dadas las posiciones y velocidades heliocéntricas de cada cuerpo celeste; y el producto GMi (constante de cada planeta, producto de la constante de la ley de gravitación de Newton y la masa del cuerpo celeste ‘i’),

$$\vec{r}_{SSB}=\frac{\sum_i \vec{r}_i GM_i}{\sum_i GM_i},$$

$$\vec{v}_{SSB}=\frac{\sum_i \vec{v}_i GM_i}{\sum_i GM_i},$$

y restamos ambos valores a posiciones y velocidades (respectivamente) para referirlo todo al SSB.

$$\vec{r}\,'_i=\vec{r}_i-\vec{r}_{SSB},$$
$$\vec{v}\,'_i=\vec{v}_i-\vec{v}_{SSB}.$$

Anexo III: Faraday: Campo gravitatorio inducido

Vamos a usar notación de campo electromagnético en lo que sigue.

El campo gravitatorio inducido por el cuerpo celeste i sobre el j, se debe al movimiento tanto del cuerpo celeste ‘i’ como al movimiento del cuerpo celeste ‘j’. La expresión matemática es,

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

que nos simplifica el cálculo del término de Faraday a la derivada parcial del potencial vector,

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \tag{2}$$

La expresión del potencial vector para una partícula puntual con velocidad es,

$$\vec{A}_{i\to j}=\frac{\mu_o M_i \vec{v}_{i,j}}{4\pi R_{ij}}.$$

donde, para el campo gravitatorio,

$$\mu_o=\frac{4\pi G}{c_m^2},$$

$$c_m=\frac{c}{\sqrt{(2)}}.$$

Con c_m la velocidad de los gravitones, c la velocidad de la luz, y G la constante de la ley de gravitación.
La velocidad vi,j, representa la velocidad de i que observa el cuerpo j, se calcula como,

$$\vec{v}_{i,j}=\vec{v}_i-\vec{v}_j.$$

Este término tiene en cuenta que el efecto de ver un campo gravitomagnético variable es debido al hecho de que el sol se mueve, y mercurio se mueve (respectivamente). Ojo a la coma, está ahí para indicar que no es como se suele interpretar una velocidad con subíndices (en particular, indica que es el opuesto).

Mientras que Rij es el vector de posición relativo,

$$R_{ij}=\vec{r}_j-\vec{r}_{i.}$$

Este término sólo es importante en la influencia del sol sobre mercurio,

$$\vec{A}_{1\to 2}=\frac{GM_1(\vec{v}_1-\vec{v}_2)}{c_m^2 R_{12}}.$$

Para evaluar su derivada parcial, tenemos que derivar sólo los términos de velocidad. Si te resulta ambiguo, puedes evaluar la derivada total y despejar de ella la parcial respecto al tiempo (ver Anexo VI: Variación parcial respecto al tiempo de A). El resultado es,

$$\vec{E}_{1\to 2}=-\frac{GM_1}{c_m^2 R_{12}}\left(\frac{\vec{a}_1}{\gamma_1}-\frac{\vec{a}_2}{\gamma_2}\right).$$

donde se ha tenido en cuenta que,

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}}}{\mathrm{dt}}=\frac{\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{i}}}{\gamma_{\mathrm{i}}},$$

con,

$$\gamma_{\mathrm{i}}=\gamma_{\mathrm{i}}(\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}}).$$

Ya que estamos derivando respecto al tiempo del observador.

Anexo IV: Expresión ley dinámica para la partícula puntual

Para nuestra partícula puntual, en el caso de mercurio, tenemos que incluir un término debido a la inducción de campo gravitatorio que ejerce el sol sobre mercurio,

$$\vec{a}_i=\frac{\sum_{j\neq i}-\frac{GM_j\vec{r}_{ji}}{r_{ji}^3}-\frac{1}{c_m^2}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j\vec{a}_j}{\gamma_j r_{ji}}}{\left\{1-\frac{1}{\gamma_i c_m^2}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j}{r_{ji}}\right\}}$$

en particular, para mercurio sólo con la influencia del sol,

$$\vec{a}_2=\frac{\sum_{j\neq 2}-\frac{GM_j\vec{r}_{j2}}{r_{j2}^3}-\frac{GM_1\vec{a}_1}{c_m^2\gamma_1 r_{12}}}{1-\frac{GM_1}{c_m^2\gamma_2 r_{12}}}$$

Ver Anexo III: Faraday: Campo gravitatorio inducido.

Para el resto, es suficiente con las fuerzas de Newton sólo,

$$\frac{\vec{F}_i}{M_i}=\sum_{j\neq i}-\frac{GM_j\vec{r}_{ji}}{r_{ji}^3}$$

y,

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt}=\frac{\vec{v}_i}{\gamma_i},$$
$$\vec{a}_i=\frac{1}{M_i}\left(\vec{F}_i-\frac{(\vec{v}_i\cdot\vec{F}_i)\vec{v}_i}{c_m^2}\right),$$
$$\frac{d\vec{v}_i}{dt}=\frac{\vec{a}_i}{\gamma_i},$$

o, resumidamente,

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt}=\frac{\vec{v}_i}{\gamma_i},$$
$$\frac{d\vec{v}_i}{dt}=\frac{1}{\gamma_i M_i}\left(\vec{F}_i-\frac{(\vec{v}_i\cdot\vec{F}_i)\vec{v}_i}{c_m^2}\right).$$

Mientras que las ecuaciones del JPL para elaborar las efemérides[8],

$$\vec{a}_i=\sum_{j\neq i}\frac{GM_j\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\left\{1-\frac{4}{c^2}\sum_{k\neq i}\frac{GM_k}{r_{ik}}-\frac{1}{c^2}\sum_{k\neq j}\frac{GM_k}{r_{jk}}+\left(\frac{v_i}{c}\right)^2+2\left(\frac{v_j}{c}\right)^2-\frac{4}{c^2}\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j-\frac{3}{2c^2}\left[\frac{\vec{r}_{ji}\cdot\vec{v}_j}{r_{ij}}\right]^2+\frac{\vec{r}_{ij}\cdot\vec{a}_j}{2c^2}\right\}$$
$$+\frac{1}{c^2}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j}{r_{ij}^3}\{\vec{r}_{ji}\cdot[\vec{v}_i-3\vec{v}_{ji}]\}\vec{v}_{ji}+\frac{7}{2c^2}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j\vec{a}_j}{r_{ij}}.$$

Anexo V: Mínimos cuadrados

Para ajustar la precesión del perihelio a una recta en función del siglo, definimos 'x_i' como el número del perihelio i, e 'y_i' como el valor en arcosegundos de dicho perihelio. Vamos a ajustar la recta,

$$y=m\cdot x.$$

Esto se ha hecho así porque el ajuste se ha calculado durante la simulación, incrementando dos acumuladores que forman el numerador y denominador de,

$$m=\frac{k\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N}x_i^2}.$$

Con k=41600/101.36, que nos ajusta la escala del numero de perihelio a numero de siglos; y N=416 para simular a 100 años. Mercurio tarda 101.36 años en realizar 416 perihelios.
Esta expresión permite realizar simulaciones de 2000 años sin cambiar la forma del ajuste.

Anexo VI: Variación parcial respecto al tiempo de A

Vamos a obtener la expresión para la ecuación (2) a partir de la derivada total,

$$\frac{d\vec{A}_{12}}{dt}=\frac{\partial\vec{A}_{12}}{\partial t}+\frac{(\vec{v}_1\cdot\nabla_1)}{\gamma_2}\vec{A}_{12}+\frac{(\vec{v}_2\cdot\nabla_2)}{\gamma_2}\vec{A}_{12.}$$

Dando,

$$\vec{E}_{12}=-\frac{\partial\vec{A}_{12}}{\partial t}=-\frac{d\vec{A}_{12}}{dt}+\frac{(\vec{v}_1\cdot\nabla_1)}{\gamma_2}\vec{A}_{12}+\frac{(\vec{v}_2\cdot\nabla_2)}{\gamma_2}\vec{A}_{12.}\qquad(3)$$

Ahora calculamos cada derivada; tomando, por simplificar,

$$\vec{A}_{1\to2}=\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2R_{12}}.$$

para la derivada total necesitamos,

$$\frac{dR_{12}}{dt}=\frac{(x_2-x_1)\cdot(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+(y_2-y_1)\cdot(\dot{y}_2-\dot{y}_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=\frac{\vec{R}_{12}\cdot\left(\frac{\vec{v}_2}{\gamma_2}-\frac{\vec{v}_1}{\gamma_1}\right)}{R_{12}},$$

que da,

$$\frac{d\vec{A}_{12}}{dt}=\frac{GM_1}{c_m^2}\left(\frac{\vec{a}_1}{\gamma_1R_{12}}-\frac{\vec{v}_1}{R_{12}^2}\frac{\vec{R}_{12}\cdot\left(\frac{\vec{v}_2}{\gamma_2}-\frac{\vec{v}_1}{\gamma_1}\right)}{R_{12}}\right).$$

para los términos convectivos necesitamos,

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial x_2}=\frac{x_2-x_1}{R_{12}},$$
$$\frac{\partial R_{12}}{\partial y_2}=\frac{y_2-y_1}{R_{12}},$$
$$\frac{\partial R_{12}}{\partial x_1}=-\frac{x_2-x_1}{R_{12}},$$
$$\frac{\partial R_{12}}{\partial y_1}=-\frac{y_2-y_1}{R_{12}},$$

que da,

$$\frac{\partial \vec{A}_{12}}{\partial x_2}=-\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2}\left(\frac{x_2-x_1}{R_{12}}\right),$$
$$\frac{\partial \vec{A}_{12}}{\partial y_2}=-\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2}\left(\frac{y_2-y_1}{R_{12}}\right).$$

Y,

$$\frac{(\vec{v}_2\cdot\nabla_2)}{\gamma_2}\vec{A}_{12}=-\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_2}\left(\dot{x}_2\frac{x_2-x_1}{R_{12}}+\dot{y}_2\frac{y_2-y_1}{R_{12}}\right)=-\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_2}\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{R}_{12}}{R_{12}}.$$

Análogamente,

$$\frac{(\vec{v}_1\cdot\nabla_1)}{\gamma_2}\vec{A}_{12}=\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_2}\left(\dot{x}_1\frac{x_2-x_1}{R_{12}}+\dot{y}_1\frac{y_2-y_1}{R_{12}}\right)=\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_1}\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{R}_{12}}{R_{12}}.$$

Y sustituyendo todo lo calculado en (3),

$$\vec{E}_{12}=-\frac{GM_1}{c_m^2}\left(\frac{\vec{a}_1}{\gamma_1 R_{12}}-\frac{\vec{v}_1}{R_{12}^2}\frac{\vec{R}_{12}\cdot\left(\frac{\vec{v}_2}{\gamma_2}-\frac{\vec{v}_1}{\gamma_1}\right)}{R_{12}}\right)-\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_2}\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{R}_{12}}{R_{12}}+\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_1}\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{R}_{12}}{R_{12}},$$
$$\vec{E}_{12}=-\frac{GM_1\vec{a}_1}{\gamma_1 c_m^2 R_{12}}+\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2}\left(\frac{\vec{R}_{12}\cdot\left(\frac{\vec{v}_2}{\gamma_2}-\frac{\vec{v}_1}{\gamma_1}\right)-\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{R}_{12}}{\gamma_2}+\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{R}_{12}}{\gamma_1}}{R_{12}}\right).$$

Donde el segundo término del segundo miembro se cancela dando,

$$\vec{E}_{12}=-\frac{GM_1}{c_m^2 R_{12}}\frac{\vec{a}_1}{\gamma_1}.$$

Anexo VII: Relaciones encontradas

Simplemente vamos a enumerar algunas relaciones encontradas mientras se buscaba un lagrangiano directo.
Para la función potencial V,

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{\gamma},$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}=-F_x,$$

Para el redshift, representado por ‘z’,

$$\frac{d(1+z)}{dt}=-\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{\gamma}\frac{1+z}{c_m^2},$$
$$\frac{\partial(1+z)}{\partial x}=-F_x\frac{1+z}{c_m^{2.}}$$

Para el factor de Lorentz,

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\gamma^3}{c_m^2}(v_x\dot{v}_x+v_y\dot{v}_y)=\frac{\gamma^2}{c_m^2}\vec{v}\cdot\vec{a},$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial v_x}=\frac{\gamma^3 v_x}{c_m^2}.$$

Anexo VIII: Conservación del momento angular

Si expresamos en coordenadas esféricas la ecuación del movimiento de la partícula material sometida a fuerzas centrales,

$$\mathrm{L}=\frac{1}{2}\mathrm{m}(\dot{\mathrm{r}}^2+\mathrm{r}^2\dot{\theta}^2+\mathrm{r}^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2)-\mathrm{V}(\mathrm{r}).$$

Que da las ecuaciones del movimiento,

$$\ddot{\mathrm{r}}-\mathrm{r}(\dot{\theta}^2+\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{\mathrm{m}}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\mathrm{r}}=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{r}^2\dot{\theta})-\mathrm{r}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{r}^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi})=0.$$

Al no depender el lagrangiano de φ , se conserva su momento lineal,

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=r^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}=cte. \tag{4}$$

Si el movimiento empieza en el plano XY, se desarrolla en él. Vamos a trasladar la relación anterior a coordenadas cartesianas.
Dadas las relaciones cartesianas,

$$\mathrm{x}=\mathrm{r}\sin(\theta)\cos(\varphi),$$
$$\mathrm{y}=\mathrm{r}\sin(\theta)\sin(\varphi),$$
$$\mathrm{z}=\mathrm{r}\cos(\theta).$$

Podemos expresar,

$$x^2+y^2=r^2\sin^2(\theta). \tag{5}$$

Y para la variación temporal,

$$\varphi=\mathrm{atan}(\mathrm{y}/\mathrm{x}).$$

derivamos respecto al tiempo la anterior (derivada total),

$$\dot{\varphi}=\frac{1}{1+(\mathrm{y}/\mathrm{x})^2}\left(\frac{\dot{\mathrm{y}}}{\mathrm{x}}-\frac{\mathrm{y}\dot{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}^2}\right)=\frac{\dot{\mathrm{y}}\mathrm{x}-\mathrm{y}\dot{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}.$$

Sustituyendo la anterior y la (5) en la (4), nos da finalmente,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\dot{\mathrm{y}}\mathrm{x}-\mathrm{y}\dot{\mathrm{x}})=0.$$

Que nos indica que para un movimiento en el plano XY, la proyección del vector momento angular sobre el eje Z se conserva.

En el caso general, y expresado ya en términos de velocidades relativistas,

$$e_x \gamma (y v_z - v_y z) + e_y \gamma (v_x z - v_z x) + e_z \gamma (v_y x - y v_x) = L_o .$$

Con,

$$\hat{e} \cdot \vec{L}_o = L_o ,$$
$$\vec{L}_o = \gamma (y v_z - v_y z) \hat{\imath} + \gamma (v_x z - v_z x) \hat{\jmath} + \gamma (v_y x - y v_x) \hat{k} .$$

Siendo 'e' el versor perpendicular al plano en que se desarrolla el movimiento (vector característico del plano del movimiento). Esto es, para definir la conservación el momento angular necesitamos calcular el versor 'e' y proyectar el vector genérico 'Lo' sobre él.

Anexo IX: Primeras integrales y ecuación del movimiento

Este apartado no es necesario para el experimento, pero se incluye para futura referencia.

Al analizar la precesión del perihelio de mercurio, vimos que sería necesario definir la posición del plano de la eclíptica para proyectar en él el vector de posición de mercurio (al estilo de la referencia [6]) y realizar un cálculo más preciso de la precesión del perihelio. Para identificar el plano de la eclíptica se empleo el método que se indica en el Anexo XVII: Estimación del plano de la eclíptica, y lo he se obtiene es que el plano estimado depende de en qué posición de la trayectoria se detenga el cálculo. Esto parece indicar que el plano de la eclíptica puede estar cambiando. La necesidad de un modelo que incluya esta variación del plano es el objeto de este apartado. Desde ya, indicamos que el modelo va a hacer uso del concepto de fuerzas giroscópicas; donde, de un modo natural, va a aparecer el vector característico del plano de la eclíptica, y se va a predecir su variación como la precesión del eje de rotación de la órbita.

Cuando usamos la ecuación de Euler-Lagrange estamos calculando el movimiento de la partícula con el principio de la mínima acción. Si tenemos un lagrangiano que conserva la energía, por ejemplo, y no introducimos este hecho en la expresión del lagrangiano a modo de restricción, las ecuaciones del movimiento no cumplen con la conservación de la energía. Lo mismo se puede decir para toda primera integral del movimiento. Vamos a exponer la conservación del momento angular y energía y en posteriores anexos lo refinaremos para que la simulación respete la física del problema.

Nuestro lagrangiano de relatividad especial de campos puede escribirse como,

$$L = -\frac{c_m^2}{\gamma} - V + \lambda_e (c_m^2 (\gamma - 1) + V - E_o) + \lambda_m (e_x \gamma (y v_z - v_y z) + e_y \gamma (v_x z - v_z x) + e_z \gamma (v_y x - y v_x) - L_o) .$$

o, resumidamente,

$$L = -\frac{c_m^2}{\gamma} - V + \lambda_e (c_m^2 (\gamma - 1) + V - E_o) + \lambda_m (\hat{e} \cdot (\vec{r} \times \gamma \vec{v}) - L_o) .$$

siendo 'r' el vector de posición.

Ecuaciones del movimiento

Introduciendo en la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\vec{p}\,\gamma=\gamma\,\vec{v}\,(1+\lambda_e\gamma^2)+\lambda_m\gamma\,\vec{v}\,\frac{\gamma^2}{c_m^2}(\hat{e}\cdot(\vec{r}\times\vec{v}))-\lambda_m\gamma(\vec{r}\times\hat{e}),$$

simplificando,

$$\vec{p}=\vec{v}\left(1+\lambda_e\gamma^2+\frac{\lambda_m\gamma\,L_o}{c_m^2}\right)-\lambda_m(\vec{r}\times\hat{e}), \tag{6}$$

Obtenemos,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\gamma\,\vec{\mathrm{p}})=\vec{\mathrm{F}}(1-\lambda_{\mathrm{e}})+\lambda_{\mathrm{m}}(\vec{\mathrm{v}}\times\hat{\mathrm{e}}).$$

Donde hemos definido ‘p’ como una pseudo velocidad multiplicada por el factor de Lorentz para mantener la forma de las ecuaciones. Este valor es conocido porque al integrar, se impone que los multiplicadores de lagrange valen cero en el instante inicial.

Despejando la velocidad de (6),

$$\vec{v}=\frac{\vec{p}+\lambda_m(\vec{r}\times\hat{e})}{1+\lambda_e\gamma^2+\frac{\lambda_m\gamma\,L_o}{c_m^2}}. \tag{7}$$

Como el movimiento se desarrolla en un plano perpendicular al versor ‘e’, tanto el vector de posición como el vector velocidad están contenidos en él. Esto permite calcular la dirección del vector velocidad y de la ecuación de la energía obtenemos su módulo.

Además, vamos a descomponer las fuerzas en perpendicular al plano del movimiento y contenida en él.

Ecuación de la energía: módulo del vector velocidad

La ecuación de la energía es lineal y podemos resolverla,

$$\gamma=1+\frac{\mathrm{E_o}-\mathrm{V}}{\mathrm{c_m^{2.}}}$$

Pero nos va a interesar más la variación de la energía con el tiempo; para ello, derivemos (derivada total) respecto al tiempo en la expresión anterior,

$$\gamma=\frac{-\dot{\mathrm{V}}}{\mathrm{c_m^{2.}}}$$

O, (ver Anexo VII: Relaciones encontradas),

$$\dot{\gamma}=\frac{\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathrm{v}}}{\gamma\,\mathrm{c_m^2}}.$$

Que, con la condición inicial, nos permite calcular el factor de Lorentz directamente (y el módulo del vector velocidad).

Vector velocidad

Para expresar el vector velocidad, usaremos el par de ecuaciones,

$$(\vec{r}\times\hat{e})\cdot\gamma\,\vec{v}=-L_o,$$
$$\vec{v}\cdot\hat{e}=0.$$

Parametrizando la solución mediante la componente vz (componente z del vector de velocidad),

$$\vec{v}=\frac{1}{r_z}\left(v_z\,\vec{r}+\frac{L_o}{\gamma}\begin{bmatrix}e_y\\-e_x\\0\end{bmatrix}\right).$$

Ver Anexo XVI: Ecuación para el vector velocidad.
Para obtener vz, recurrimos a la ecuación de la energía, multiplicando (7) por sigo misma, y notando que,

$$v^2=c_m^2\left(1-\gamma^{-2}\right).$$

queda una expresión cuadrática en vz. Para evitar el problema de resolver una ecuación cuadrática y decidir qué valor tomar, derivamos la expresión respecto al tiempo (derivada total) y despejamos la variación de la velocidad vz con el tiempo (ver Anexo XV: Ecuación para Vz). Como hicimos con la ecuación de la energía. Dando el monstruo,

$$n_1=\gamma\left(\vec{r}\cdot\vec{v}+\dot{\gamma}\,\vec{r}\cdot\vec{r}\right),$$
$$n_2=L_o\left[v_x e_y-v_y e_x+\gamma\left(r_x\dot{e}_y-r_y\dot{e}_x\right)\right]+\left(r_x e_y-r_y e_x\right)\left(L_o\dot{\gamma}+\dot{L}_o\gamma\right),$$
$$n_3=L_o\dot{L}_o\left(1-e_z^2\right)+L_o^2\left(e_x\dot{e}_x+e_y\dot{e}_y\right)-\frac{r_z v_z}{\gamma}c_m^2\left(\gamma^2-1\right)-r_z^2c_m^2\gamma\dot{\gamma},$$
$$d_1=\vec{r}\cdot\vec{r}\,\gamma^2,$$
$$d_2=\gamma L_o\left(r_x e_y-r_y e_x\right),$$
$$\dot{v}_z=-\frac{n_1v_z^2+n_2v_z+n_3}{d_1v_z+d_2}.$$

Que se integra con el resto de ecuaciones y determina el valor de la componente z de la velocidad.

Multiplicadores

Para tener el sistema cerrado, todavía necesitamos los valores de los multiplicadores; para el multiplicador de la cantidad de movimiento, multiplicamos escalarmente la (7) por $\gamma\,\vec{r}\times\hat{e}$,

$$-L_o=\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}\times\hat{e})\gamma+\lambda_m\gamma(\vec{r}\times\hat{e})\cdot(\vec{r}\times\hat{e})}{1+\lambda_e\gamma^2+\dfrac{\lambda_m\gamma L_o}{c_m^2}},$$

De donde despejamos una relación entre ambos multiplicadores,

$$1+\lambda_e\gamma^2+\frac{\lambda_m\gamma L_o}{c_m^2}=\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}\times\hat{e})\gamma+\lambda_m\gamma(\vec{r}\times\hat{e})\cdot(\vec{r}\times\hat{e})}{-L_o}.$$

Ahora, multiplicamos escalarmente la (6) por el vector velocidad y el factor de Lorentz, y le introducimos la anterior para eliminar el término que contiene al multiplicador de la energía,

$$\vec{p}\cdot\vec{v}\,\gamma=v^2\gamma\left(1+\lambda_e\gamma^2+\frac{\lambda_m\gamma L_o}{c_m^2}\right)+\lambda_m L_o,$$

dando,

$$\vec{p}\cdot\vec{v}\,\gamma=v^2\gamma^2\left(\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}\times\hat{e})+\lambda_m(\vec{r}\times\hat{e})\cdot(\vec{r}\times\hat{e})}{-L_o}\right)+\lambda_m L_o,$$

usando la relación del factor de Lorentz con el módulo de la velocidad,

$$v^2\gamma^2=c_m^2(\gamma^2-1).$$

obtenemos,

$$\vec{p}\cdot\vec{v}\,\gamma=c_m^2(\gamma^2-1)\left(\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}\times\hat{e})+\lambda_m(\vec{r}\times\hat{e})\cdot(\vec{r}\times\hat{e})}{-L_o}\right)+\lambda_m L_o,$$

de donde podemos despejar el multiplicador,

$$\lambda_m=\frac{\gamma L_o\vec{p}\cdot\vec{v}+c_m^2(\gamma^2-1)\vec{p}\cdot(\vec{r}\times\hat{e})}{L_o^2-c_m^2(\gamma^2-1)(\vec{r}\times\hat{e})\cdot(\vec{r}\times\hat{e})},$$

Para el multiplicador de la energía, multiplicamos la (6) por el vector de posición; esto anula un término del multiplicador del momento angular y permite que despejemos el multiplicador de la energía,

$$\lambda_e=\frac{\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\vec{v}\cdot\vec{r}}-1-\dfrac{\lambda_m\gamma L_o}{c_m^2}}{\gamma^2}.$$

Ecuación del eje giroscópico

Para el versor del plano de la eclíptica o plano del movimiento, se cumple la relación,

$$\frac{d\hat{e}}{dt}=\vec{w}\times\hat{e}. \tag{8}$$

que es la ecuación de derivación en ejes móviles del versor ‘e’. Y el vector ‘w’ la velocidad de precesión del eje ‘e’.
El par que crean las fuerzas, agrupadas en perpendiculares y paralelas al plano de la eclíptica (o paralelas y perpendiculares al versor ‘e’) es,

$$\vec{M}_o=\vec{r}\times(\vec{F}\cdot\hat{e})\hat{e}+\vec{r}\times(\vec{F}-(\vec{F}\cdot\hat{e})\hat{e}).$$

La derivada del momento angular sería,

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt}=\vec{M}_o.$$

Donde los subíndices ‘o’ nos recuerdan que estamos calculando todo en el SSB que estimamos previamente (y es un punto fijo, o sea, de velocidad nula). Dando,

$$L_o\frac{d\hat{e}}{dt}+\hat{e}\frac{dL_o}{dt}=\vec{r}\times(\vec{F}\cdot\hat{e})\hat{e}+\vec{r}\times(\vec{F}-(\vec{F}\cdot\hat{e})\hat{e}).$$

Por lo que de la anterior quedan el par de ecuaciones,

$$L_o \frac{d\hat{e}}{dt} = \vec{r} \times (\vec{F} \cdot \hat{e}) \hat{e},$$
$$\frac{dL_o}{dt} = \vec{r} \times (\vec{F} - (\vec{F} \cdot \hat{e}) \hat{e}) \cdot \hat{e}.$$

Para la primera de ellas, pasando al principio del segundo miembro todo lo que es escalar e identificando con la (8),

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = \frac{(\vec{F} \cdot \hat{e})}{L_o} \vec{r} \times \hat{e}. \tag{9}$$

Identificamos la velocidad angular de precesión del eje,

$$\vec{w} = \frac{(\vec{F} \cdot \hat{e})}{L_o} \vec{r}.$$

Que es colineal con el vector de posición y no aporta velocidad adicional a la partícula; lo que provoca es la torsión del plano de la eclíptica.
Nótese que el valor del módulo del vector momento angular 'Lo', varía con la acción de la componente de las fuerzas contenidas en el plano de la eclíptica, mientras que la variación de la dirección del vector 'Lo' corre a cargo de la componente de las fuerzas que se proyectan ortogonalmente al plano de la eclíptica.

Ecuación de precesión del eje

Esta ecuación no puede resolverse directamente; sin entrar en muchos detalles, hace falta la introducción de cuaternios para resolverla (gracias Hamilton!)
La ecuación en forma de cuaternios es,

$$\frac{d\tilde{e}}{dt} = \tilde{w} \otimes \tilde{e}.$$

En resumen, esto introduce la ecuación en 4 dimensiones,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_o \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(w_x e_1 + w_y e_2 + w_z e_3) \\ w_x e_o + w_y e_3 - w_z e_2 \\ w_y e_o + w_z e_1 - w_x e_3 \\ w_z e_o + w_x e_2 - w_y e_1 \end{bmatrix}.$$

y del cuaternio del versor, sacamos el versor como,

$$\hat{e} = \frac{1}{\sin(acos(e_o))} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}.$$

Para este caso en que el vector 'w' es ortogonal al versor 'e'. Ver Anexo XIV: Integración de cuaternios.

Resumen de las ecuaciones

Se listan en el orden en que se resuelven,

$$\vec{v} = \frac{1}{r_z} \left(v_z \vec{r} + \frac{L_o}{\gamma} \begin{bmatrix} e_y \\ -e_x \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

$$\lambda_{\mathrm{m}}=\frac{\gamma\,\mathrm{L_o}\,\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{v}}+\mathrm{c_m^2}(\gamma^2-1)\vec{\mathrm{p}}\cdot(\vec{\mathrm{r}}\times\hat{\mathrm{e}})}{\mathrm{L_o^2}-\mathrm{c_m^2}(\gamma^2-1)(\vec{\mathrm{r}}\times\hat{\mathrm{e}})\cdot(\vec{\mathrm{r}}\times\hat{\mathrm{e}})},$$

$$\lambda_{\mathrm{e}}=\frac{\dfrac{\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{r}}}{\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{r}}}-1-\dfrac{\lambda_{\mathrm{m}}\gamma\,\mathrm{L_o}}{\mathrm{c_m^2}}}{\gamma^2}.$$

$$\vec{\mathrm{F}}'=\vec{\mathrm{F}}(1-\lambda_{\mathrm{e}})+\lambda_{\mathrm{m}}(\vec{\mathrm{v}}\times\hat{\mathrm{e}}),$$

$$\hat{e}=\frac{1}{\sin(acos(e_o))}\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}.$$

$$\vec{\mathrm{w}}=\frac{\vec{\mathrm{F}}\cdot\hat{\mathrm{e}}}{\mathrm{L_o}}\vec{\mathrm{r}}.$$

$\dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{e}}}{\mathrm{dt}}=\vec{\mathrm{w}}\times\hat{\mathrm{e}}.$: sólo expresión de componentes x e y, para vz

y las EDOs,

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{\vec{v}}{\gamma},$$
$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{1}{\gamma}\left(\vec{F}'-\vec{p}\,\dot{\gamma}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{dt}}=\frac{\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathrm{v}}}{\gamma\,\mathrm{c_m^2}}.$$

$$\begin{gathered}
n_1=\gamma(\vec{r}\cdot\vec{v}+\dot{\gamma}\,\vec{r}\cdot\vec{r}),\\
n_2=L_o\left[v_x e_y-v_y e_x+\gamma(r_x\dot{e}_y-r_y\dot{e}_x)\right]+(r_x e_y-r_y e_x)(L_o\dot{\gamma}+\dot{L}_o\gamma),\\
n_3=L_o\dot{L}_o(1-e_z^2)+L_o^2(e_x\dot{e}_x+e_y\dot{e}_y)-\frac{r_z v_z}{\gamma}c_m^2(\gamma^2-1)-r_z^2c_m^2\gamma\dot{\gamma},\\
d_1=\vec{r}\cdot\vec{r}\,\gamma^2,\\
d_2=\gamma L_o(r_x e_y-r_y e_x),\\
\dot{v}_z=-\frac{n_1 v_z^2+n_2 v_z+n_3}{d_1 v_z+d_2}.
\end{gathered}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}e_o\\e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(w_x e_1+w_y e_2+w_z e_3)\\ w_x e_o+w_y e_3-w_z e_2\\ w_y e_o+w_z e_1-w_x e_3\\ w_z e_o+w_x e_2-w_y e_1\end{bmatrix}.$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{L_o}}{\mathrm{dt}}=\vec{\mathrm{r}}\times(\vec{\mathrm{F}}-(\vec{\mathrm{F}}\cdot\hat{\mathrm{e}})\hat{\mathrm{e}})\cdot\hat{\mathrm{e}}.$$

Junto con las condiciones iniciales de Horizons para posición y velocidad, y los multiplicadores nulos en t=0 (por lo que el vector p coincide con la velocidad).
El valor inicial para el módulo del vector momento angular se calcularía como,

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times (\gamma \vec{v}).$$

En este modelo, el versor 'e' es coincidente con el versor del vector momento angular en todo tiempo,

$$\hat{e} = \hat{L}_o.$$

El sistema así definido es fuertemente stiff debido a la integración del cuaternio; pero realizando simulaciones aproximadas, parece que el sistema no respeta la física del problema. Por lo que vamos a realizar simulaciones parciales para probar cada integral del movimiento.

Anexo X: Primera integral de conservación de la energía

Este modelo sería útil para simular largos períodos de tiempo, pues al conservar la energía, evita que los planetas realicen espirales. Las ecuaciones quedarían (listadas en el orden en que se resuelven),

$$k_e = \frac{\gamma}{c_m} \sqrt{\frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{\gamma^2 - 1}},$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{k_e},$$

$$\lambda_e = \frac{k_e - 1}{\gamma^2},$$

y las EDOs,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{\gamma c_m^2}.$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma},$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \left(\vec{F} (1 - \lambda_e) - \vec{p} \dot{\gamma} \right),$$

Para las derivadas sin despejar, usamos el valor definido previamente (para no evaluar dos veces la misma expresión)

Aplicando la conservación de la energía al caso de mercurio sólo, se obtiene un resultado que no respeta la física del problema; la energía se conserva con error absoluto de 10^{-18}, pero la trayectoria de mercurio es incorrecta y alarga el periodo orbital T fuera del rango 88<T<89 días.

Sorprendentemente, la simulación con conservación de energía newtoniana sí que respeta la física del problema (ver Anexo XVIII: Conservación de la energía: caso newtoniano)

Anexo XI: Conservación de la energía total

Dado que en el anexo anterior no conseguimos una sistema de ecuaciones que respetase la física del problema, tiene que haber en juego una fuerza no conservativa; con esto en mente, notamos que la energía que se cede al redshift durante la trayectoria de un fotón es energía que se resta a la energía potencial del fotón (el fotón tampoco puede adquirirla porque su velocidad es contante, pero esto no pasa a una partícula no relativista). Incluyendo esta fuerza como no conservativa, consigue realizarse una simulación en la que, ya adelantamos, la energía total se conserva. Siendo la energía cedida a la onda asociada, devuelta a la partícula periódicamente durante el tránsito de mercurio entorno al sol.

En el Anexo I: Ecuación de la energía obtuvimos, particularizada para nuestro caso actual,

$$\frac{dE}{dt}=P_{redshift}.$$

La potencia de redshift la consideramos perdida y de valor,

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{v^2}{c_m^2}\vec{a}\cdot\vec{v}. \qquad (10)$$

La nueva ecuación para el factor de Lorentz queda,

$$\frac{d\gamma}{dt}=\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{v^2}{c_m^2}\right)\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c_m^2}.$$

Ver Anexo XII: Potencia de redshift.

La simulación del sistema en estas condiciones predice un valor menos exacto para la fecha del último perihelio.

Tipo de simulación	Precesión (arcseg)	Fecha último perihelio (@416)	Distancia al sol en perihelio[3] (m)
Datos Horizons	-	Sun Feb 17 02:28:50 2013	46002,830,600.0
Kernel ascii DE405 con EphemUtil en C	558.51	Sun Feb 17 03:27:44 2013	-
SRF+Faraday	558.58	Sun Feb 17 03:14:20 2013	46000,278,021.2
SRF+Faraday+Restriccion Energía[1]	558.58	Sat Feb 17 03:14:02 2013	46000,278,024.2
SRF+Faraday+R. Energía+Factor Lorentz generalizado (HK)[2]	558.58	Sun Feb 17 01:09:32 2013	46000,278,220.8

[1]El tiempo de simulación pasa de 569 minutos (simulación newtoniana) a 589.
[2]El tiempo de simulación pasa 659 minutos (ver referencia [11] para los detalles de la simulación).
[3]El error absoluto es aproximadamente 2.6km entre los datos de Horizons y las simulaciones.

Anexo XII: Potencia de redshift

La potencia de redshift es la potencia que desarrolla la fuerza tangencial que no influye sobre el movimiento de la partícula,

$$P_{redshift}=-\frac{(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}\cdot\vec{v}}{c_m^2}.$$

Donde hemos puesto la aceleración de la partícula en vez de la fuerza porque en la expresión de la energía también se omite siempre la masa de la partícula (se simplifica a lo largo de toda la ecuación) La anterior indica,

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{v^2}{c_m^2}(\vec{v}\cdot\vec{a}),$$

donde hemos conservado el signo menos porque suponemos que es energía que se toma de la de la partícula (a modo de fuerza disipativa).

Para obtener la variación del factor de Lorentz, derivamos en la ecuación de conservación de la energía,

$$\dot{E}=c_m^2\dot{\gamma}+\dot{V}.$$

Y sustituimos la anterior, dando,

$$c_m^2\dot{\gamma}+\dot{V}=-\frac{v^2}{c_m^2}\vec{a}\cdot\vec{v}.$$

Sustituyendo la variación del potencial, calculamos la del factor de Lorentz,

$$c_m^2\dot{\gamma}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\gamma}-\frac{v^2}{c_m^2}\vec{a}\cdot\vec{v}.$$

Ya que 'todas' las fuerzas sobre el sistema son conservativas. Reagrupando términos,

$$\frac{d\gamma}{dt}=\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{v^2}{c_m^2}\right)\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c_m^2}$$

Si queremos considerar al aceleración debido al término de Faraday, repetimos el razonamiento con otra fuerza no conservativa adicional en la expresión de variación de la energía,

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{v^2}{c_m^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})+\vec{a}_{NC}\cdot\vec{v}.$$

Derivamos en la ecuación de la energía nuevamente,

$$c_m^2\dot{\gamma}+\dot{V}=-\frac{v^2}{c_m^2}\vec{a}\cdot\vec{v}+\vec{a}_{NC}\cdot\vec{v}.$$

Dando la derivada del potencial las aceleraciones conservativas del sistema,

$$c_m^2\dot{\gamma}=\frac{\vec{a}_C\cdot\vec{v}}{\gamma}-\frac{v^2}{c_m^2}\vec{a}\cdot\vec{v}+\vec{a}_{NC}\cdot\vec{v}.$$

El vector de aceleraciones conservativas lo podemos escribir como la resta de la aceleración total, menos las no conservativas,

$$\vec{a}_C=\vec{a}-\vec{a}_{NC}.$$

Dando,

$$\frac{d\gamma}{dt}=\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{v^2}{c_m^2}\right)\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c_m^2}+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\vec{a}_{NC}\cdot\vec{v}}{c_m^2}.$$

Donde sustituimos la expresión de la aceleración de faraday,

$$\vec{a}_{NC}=-\frac{GM_1}{c_m^2 R_{12}}\left(\frac{\vec{a}_1}{\gamma_1}-\frac{\vec{a}_2}{\gamma_2}\right).$$

Para obtener,

$$\frac{d\gamma}{dt}=\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{v^2}{c_m^2}\right)\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c_m^2}+\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\frac{GM_1}{c_m^4 R_{12}}\left(\frac{\vec{a}_1}{\gamma_1}-\frac{\vec{a}_2}{\gamma_2}\right)\cdot\vec{v}$$

La expresión análoga para considerar la inducción de Faraday del sol (subíndice 1) sobre mercurio (subíndice 2) es,

$$\frac{d\gamma_2}{dt}=\left(\frac{1}{\gamma_2}-\frac{v_2^2}{c_m^2}\right)\frac{\vec{a}_2\cdot\vec{v}_2}{c_m^2}+\left(\frac{1}{\gamma_2}-1\right)\frac{GM_1}{c_m^4 R_{12}}\left(\frac{\vec{a}_1}{\gamma_1}-\frac{\vec{a}_2}{\gamma_2}\right)\cdot\vec{v}_{2.}$$

Que tiene muy poca importancia.

Como hemos comentado, la energía que hemos considerado disipada, se guarda en la potencia de redshift y se devuelve a mercurio periódicamente; por lo que la energía global se conserva.

Anexo XIII: Conservación del momento angular y el acoplamiento spin-órbita

Este modelo es tentativo; la dificultad de integración del cuaternio ha imposibilitado su test.
En la simulación de la conservación de la energía, nos dimos cuenta que hacía falta un factor extra para que la energía relativista pudiera conservarse durante el tránsito de mercurio entorno al sol.

Esto hizo que introdujéramos la potencia de redshift en el modelo, que absorbía o cedía la energía para permitir que la energía total se conservase. Ahora en la conservación del momento parece repetirse el caso y vamos a incluir en el modelo el spin de mercurio (rotación de mercurio sobre sí mismo) Dado que horizons no da información del versor del spin, lo vamos a suponer paralelo al versor ‘e’ en el momento inicial.

El sistema de ecuaciones pasa a ser implícito en la velocidad de rotación de mercurio.

El momento angular quedaría,

$$\vec{L}_o=\vec{r}\times(\gamma\vec{v})+\bar{\bar{I}}_G\cdot\vec{w}_G.$$

Que, dado que mercurio es una esfera, podemos expresar,

$$\vec{L}_o=\vec{r}\times(\gamma\vec{v})+I_G\vec{w}_G.$$

Con él, nuestro lagrangiano de relatividad especial de campos (suponiendo válidas las expresiones newtonianas) queda,

$$L=-\frac{c_m^2}{\gamma}-V+\lambda_e\left(c_m^2(\gamma-1)+\frac{1}{2}I_G w_G^2+V-E_o\right)+\lambda_m\left(\hat{e}\cdot(\vec{r}\times\gamma\vec{v})+I_G\hat{e}\cdot\vec{w}_G-L_{oe}\right).$$

Donde hemos notado con L_{oe} al valor de la proyección del vector momento angular sobre el eje e, para recordar que no representa al módulo del vector momento angular.

Si definimos,

$$L_o' = L_{oe} - I_G \hat{e} \cdot \vec{w}_G .$$

Podemos expresarlo de una forma similar a lo hecho anteriormente, como

$$L = -\frac{c_m^2}{\gamma} - V + \lambda_e \left(c_m^2 (\gamma - 1) + \frac{1}{2} I_G w_G^2 + V - E_o \right) + \lambda_m \left(\hat{e} \cdot (\vec{r} \times \gamma \vec{v}) - L_o' \right).$$

Por lo que las ecuaciones del modelo son las mismas, usando el valor modificado del módulo del momento angular; y añadiendo al sistema la ecuación adicional del spin,

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{w}_G \lambda_e + \hat{e} \lambda_m \right] = \vec{0}.$$

Al no depender el Lagrangiano del ángulo que define la posición del planeta.
Esta relación, igual que pasaba con la ecuación vectorial del momento angular, ha de proyectarse. Elegimos el versor del spin para ello, por lo que dicha ecuación nos permite calcular el módulo del vector rotación ‘w_G’, dado su versor,

$$w_G = \frac{(\vec{w}_{Go} - \hat{e} \lambda_m) \cdot \hat{w}_G}{\lambda_e} .$$

Para que esta ecuación funcione correctamente, hemos de hacer en el instante inicial,

$$\lambda_e = 1 , \lambda_m = 0.$$

Por lo que el vector ‘w_{Go}’ sería el vector de spin de mercurio en el instante inicial.

Nótese que fijar $\lambda_m \neq 0$, sería inválido en este modelo, porque la ecuación dejaría de tener su efecto regulador.

Resumen de las ecuaciones

Se listan en el orden en que se resuelven,

$$L_o' = L_{oe} - I_G w_G \hat{e} \cdot \hat{w}_G ,$$

$$\gamma = 1 + \frac{E_o - V - \frac{1}{2} I_G w_G^2}{c_m^2} ,$$

$$\vec{v} = \frac{1}{r_z} \left(v_z \vec{r} + \frac{L_o'}{\gamma} \begin{bmatrix} e_y \\ -e_x \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

$$\lambda_m = \frac{\gamma L_o' \vec{p} \cdot \vec{v} + c_m^2 (\gamma^2 - 1) \vec{p} \cdot (\vec{r} \times \hat{e})}{L_o'^2 - c_m^2 (\gamma^2 - 1)(\vec{r} \times \hat{e}) \cdot (\vec{r} \times \hat{e})} ,$$

$$\lambda_e = \frac{\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\vec{v}\cdot\vec{r}} - 1 - \dfrac{\lambda_m \gamma L_o'}{c_m^2}}{\gamma^2}.$$

$$w_G = \frac{(\vec{w}_{Go} - \hat{e}\,\lambda_m)\cdot\hat{w}_G}{\lambda_e}.$$

$$\vec{F}' = \vec{F}(1-\lambda_e) + \lambda_m(\vec{v}\times\hat{e}),$$

$$\hat{e} = \frac{1}{\sin(acos(e_o))}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{w} = \frac{\vec{F}\cdot\hat{e}}{L_o}\vec{r}.$$

$\dfrac{d\hat{e}}{dt} = \vec{w}\times\hat{e}.$: sólo expresión de componentes x e y, para vz

$\dfrac{d\gamma}{dt} = \dfrac{\gamma^2}{c_m^2}\vec{v}\cdot\vec{a}.$: para ecuación del vector 'p' y vz

y las EDOs,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{v}}{\gamma},$$
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{\gamma}(\vec{F}' - \vec{p}\,\dot{\gamma}),$$

$$\frac{dE_o}{dt} = -\frac{\gamma v}{c_m}\vec{a}\cdot\vec{v}.$$

$$n_1 = \gamma(\vec{r}\cdot\vec{v} + \dot{\gamma}\,\vec{r}\cdot\vec{r}),$$
$$n_2 = L_o'[v_x e_y - v_y e_x + \gamma(r_x \dot{e}_y - r_y \dot{e}_x)] + (r_x e_y - r_y e_x)(L_o'\dot{\gamma} + \dot{L}_o'\gamma),$$
$$n_3 = L_o'\dot{L}_o'(1-e_z^2) + L_o'^2(e_x\dot{e}_x + e_y\dot{e}_y) - \frac{r_z v_z}{\gamma}c_m^2(\gamma^2-1) - r_z^2 c_m^2\gamma\dot{\gamma},$$
$$d_1 = \vec{r}\cdot\vec{r}\,\gamma^2,$$
$$d_2 = \gamma L_o'(r_x e_y - r_y e_x),$$
$$\dot{v}_z = -\frac{n_1 v_z^2 + n_2 v_z + n_3}{d_1 v_z + d_2}.$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e_o \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(w_x e_1 + w_y e_2 + w_z e_3) \\ w_x e_o + w_y e_3 - w_z e_2 \\ w_y e_o + w_z e_1 - w_x e_3 \\ w_z e_o + w_x e_2 - w_y e_1 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{dL_o'}{dt} = \vec{r}\times(\vec{F} - (\vec{F}\cdot\hat{e})\hat{e})\cdot\hat{e}.$$

Junto con las condiciones iniciales de Horizons para posición y velocidad, y los multiplicadores en t=0, $\lambda_e=1, \lambda_m=0$. Por lo que el vector p es,

$$\vec{p}=\vec{v}\left(1+\gamma^2\right).$$

El valor inicial para el módulo del vector momento angular se calcularía como,

$$\vec{L}_o=\vec{r}\times(\gamma\,\vec{v})+\bar{\bar{I}}_G\cdot\vec{w}_G.$$

Donde el producto de inercia sobre el centro de gravedad (G) sería,

$$I_G=\frac{2}{5}R^{2.}$$

Siendo R el radio del planeta y el vector ‘w_G’ la velocidad angular (rotación sobre sí mismo) del planeta.

Y el versor ‘e’ es coincidente con el versor del vector momento angular prima.

$$\hat{e}=\hat{L}_o'.$$

Dado como,

$$\vec{L}_o'=\vec{r}\times(\gamma\,\vec{v}).$$

Y fijamos,

$$\vec{w}_{Go}=w_G\,\hat{e}.$$

A falta de un dato mejor.

Las seis primeras ecuaciones forman un sistema implícito para w_G que se resuelve con el método de steffensen (2 iteraciones del sistema de punto fijo de 6 ecuaciones y una con la delta cuadrada de aitken). Se usa como semilla para el valor de w_G su valor en la iteración previa del solver de las EDOs (el valor en el paso de tiempo anterior). La solución es muy rápida porque los multiplicadores se separan muy poco de su valor inicial en toda la integración del solver.

Anexo XIII: Conservación del momento angular y el acoplamiento spin-órbita con spin variable

Este modelo es tentativo; la dificultad de integración del cuaternio ha imposibilitado su test.

Este modelo es igual que el anterior pero incluye el efecto de variación del spin de mercurio a través de la ecuación de Larmor[9]. Por lo que habrá que integrar un cuaternio adicional.

La ecuación de Larmor, influye en el spin del planeta a través de,

$$\frac{d\,\vec{L}_G}{dt}=\vec{M}_G.$$

Siendo G el centro de masas del planeta.
Donde el vector momento sigue la expresión de Larmor,

$$\vec{M}_G=\vec{b}\times\vec{B}.$$

Donde el vector 'b' siempre tiene la dirección del spin del planeta y el vector 'B' depende del tipo de interacción en consideración. (Ver referencia [9]) Por lo que el vector momento 'M_G' nunca puede tener la dirección del versor del spin. Esto significa que no hay interacción que, a través de la expresión de Larmor, modifique el módulo del spin; sólo cambian su dirección,

$$I_G w_G \frac{d\,\hat{w}_G}{dt} = -\frac{3GM_1}{2c_m^2}\frac{\vec{v}\times\vec{R}_{12}}{R_{12}^3}\times\hat{w}_G\frac{1}{2}w_G I_G .$$

Donde hemos supuesto que el factor 3/2 debería estar presente en la ecuación (Ver referencia [9]). Si definimos la velocidad de precesión 'w_L',

$$\frac{d\,\hat{w}_G}{dt} = \vec{w}_L\times\hat{w}_G .$$

Para el efecto de precesión geodética (del sol sobre mercurio) quedaría,

$$\vec{w}_L = -\frac{3GM_1}{4c_m^2}\frac{\vec{v}\times\vec{R}_{12}}{R_{12}^3} .$$

Siendo,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{2.}$$

Con R_{12} el vector de posición relativa.
Sin embargo, la velocidad de rotación del spin no será perpendicular al versor del spin,

$$\vec{w}_L\cdot\hat{w}_G \neq 0 .$$

Lo que complica la integración del cuaternio.

No se ha comprobado, por la dificultad en la integración, si este modelo tiene un comportamiento que respeta la física del problema al eliminar la restricción de redshift del sistema de ecuaciones.

Anexo XIV: Integración de cuaternios

La ecuación en forma de cuaternios es,

$$\frac{d\,\tilde{e}}{dt} = \tilde{w}\otimes\tilde{e} .$$

Donde el gorro curvado indica que el vector es cuaternio y, el producto encerrado en el círculo, el producto de cuaternios. Que puede resumirse,

$$\tilde{w}\otimes\tilde{e} = (w_o e_o - \vec{w}\cdot\hat{e}) + w_o\hat{e} + e_o\vec{w} + \vec{w}\times\hat{e} .$$

siendo las componentes con subíndice cero la parte real del cuaternio, y las partes con vectores las imaginarias.

El versor 'e' se define como el cuaternio unidad,

$$\tilde{e} = \cos(\theta) + \hat{e}\sin(\theta) .$$

En resumen, esto introduce la ecuación en 4 dimensiones,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e_o \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(w_x e_1 + w_y e_2 + w_z e_3) \\ w_x e_o + w_y e_3 - w_z e_2 \\ w_y e_o + w_z e_1 - w_x e_3 \\ w_z e_o + w_x e_2 - w_y e_1 \end{bmatrix}.$$

y del cuaternio del versor, sacamos el versor como,

$$\hat{e} = \frac{1}{\sin(acos(e_o))}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}.$$

Esta ecuación es útil cuando el cuaternio que se integra es unitario, y es directa cuando el vector w es ortogonal al versor ‘e’.

Nótese que hemos eliminado el factor 1/2 en el sistema de ecuaciones diferenciales anterior. Puede comprobarse que este factor no debería estar ahí (al menos en este caso de uso) Haciendo el cálculo para un vector w de módulo π/2 y dirección sobre el eje z, y el vector e como el eje x. Este cálculo convierte el eje x en el eje y si integramos durante un segundo.

Cuando no se cumple la condición de ortogonalidad, tenemos que descomponer el versor en parte ortogonal y parte paralela. Como la parte paralela se queda igual ante un giro, hacemos el giro con la parte ortogonal y luego sumamos la parte paralela.

Resumidamente, para girar el vector ‘v’,

$$\vec{v}_p = (\vec{v} \cdot \hat{w})\hat{w},$$
$$\vec{v}_o = \vec{v} - \vec{v}_p,$$
$$\hat{v}_o = \frac{\vec{v}_o}{v_o}.$$

Ahora integramos el cuaternio definido mediante el versor ‘v_o’ (reusando el valor de su parte real, si estamos integrando una EDO)

$$\frac{d\tilde{v}_o}{dt} = \tilde{w} \otimes \tilde{v}_o.$$

Giramos el vector mediante la ecuación diferencial en 4 componentes, y volvemos a calcular el vector resultante con,

$$\vec{v}_{of} = \hat{v}_{of} v_o + \vec{v}_p.$$

También podemos probar este caso de uso, volviendo a convertir el eje x en el eje y, al usar el vector $\vec{w} = \frac{2\pi}{3}[1,1,1]/\sqrt{(3)}$; esto es, girar sobre la trisectriz del sistema de referencia 120º. Con el procedimiento indicado para descomponer el vector a girar sobre el eje de rotación.

Anexo XV: Ecuación para Vz

La ecuación para la componente z de la velocidad la sacamos multiplicando la expresión de la velocidad escalarmente consigo misma y sustituyendo el módulo de la velocidad con la expresión equivalente del factor de Lorentz,

$$\vec{\mathrm{v}}=\frac{1}{\mathrm{r_z}}\left(\mathrm{v_z}\,\vec{\mathrm{r}}+\frac{\mathrm{L_o}}{\gamma}\begin{bmatrix}\mathrm{e_y}\\-\mathrm{e_x}\\0\end{bmatrix}\right).$$

Dando,

$$\left[r^2\gamma^2\right]v_z^2+\left[2\gamma L_o(r_x e_y-r_y e_x)\right]v_z+\left[L_o^2(e_x^2+e_y^2)-r_z^2 c_m^2(\gamma^2-1)\right]=0.$$

Si llamamos a cada término,

$$p_1 v_z^2+p_2 v_z+p_3=0.$$

Y derivamos,

$$\dot{p}_1 v_z^2+\dot{p}_2 v_z+\dot{p}_3+2\,p_1 v_z\dot{v}_z+p_2\dot{v}_z=0\,,$$

Podemos despejar la variación de la componente z de la velocidad. Si dividimos por 2 en numerador y denominador,

$$\dot{v}_z=-\frac{\frac{\dot{p}_1}{2}v_z^2+\frac{\dot{p}_2}{2}v_z+\frac{\dot{p}_3}{2}}{p_1 v_z+\frac{p_2}{2}}.$$

Si usamos la derivada logarítmica para calcular los términos,

$$f=\log p\rightarrow\dot{f}=\frac{\dot{p}}{p}\rightarrow\dot{p}=\dot{f}\,p\,.$$

Para el primer término,

$$p_1=r^2\gamma^2,$$
$$f_1=\log(r^2\gamma^2),$$
$$\dot{f}_1=\frac{2\vec{r}\cdot\vec{v}}{r^2\gamma}+\frac{2\dot{\gamma}}{\gamma},$$
$$\frac{\dot{p}_1}{2}=\gamma(\vec{r}\cdot\vec{v}+\dot{\gamma}\,\vec{r}\cdot\vec{r}).$$

Para el segundo término,

$$\frac{p_2}{2}=\gamma L_o(r_x e_y-r_y e_x),$$
$$f_2=\log(\gamma L_o(r_x e_y-r_y e_x)),$$
$$\dot{f}_2=\frac{(v_x e_y-v_y e_x)/\gamma+r_x\dot{e}_y-r_y\dot{e}_x}{r_x e_y-v_y e_x}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}+\frac{\dot{L}_o}{L_o},$$
$$\frac{\dot{p}_2}{2}=L_o\left[v_x e_y-v_y e_x+\gamma(r_x\dot{e}_y-r_y\dot{e}_x)\right]+(r_x e_y-r_y e_x)(L_o\dot{\gamma}+\dot{L}_o\gamma).$$

Para el tercer término,

$$p_3=L_o^2(e_x^2+e_y^2)-r_z^2 c_m^2(\gamma^2-1),$$
$$\frac{\dot{p}_3}{2}=L_o\dot{L}_o(1-e_z^2)+L_o^2(e_x\dot{e}_x+e_y\dot{e}_y)-\frac{r_z v_z}{\gamma}c_m^2(\gamma^2-1)-r_z^2 c_m^2\gamma\dot{\gamma}.$$

Renombrando,

$$n_1=\gamma(\vec{r}\cdot\vec{v}+\dot{\gamma}\,\vec{r}\cdot\vec{r}),$$
$$n_2=L_o\left[v_x e_y-v_y e_x+\gamma(r_x\dot{e}_y-r_y\dot{e}_x)\right]+(r_x e_y-r_y e_x)(L_o\dot{\gamma}+\dot{L}_o\gamma),$$
$$n_3=L_o\dot{L}_o(1-e_z^2)+L_o^2(e_x\dot{e}_x+e_y\dot{e}_y)-\frac{r_z v_z}{\gamma}c_m^2(\gamma^2-1)-r_z^2 c_m^2\gamma\dot{\gamma},$$
$$d_1=\vec{r}\cdot\vec{r}\,\gamma^2,$$
$$d_2=\gamma L_o(r_x e_y-r_y e_x),$$
$$\dot{v}_z=-\frac{n_1 v_z^2+n_2 v_z+n_3}{d_1 v_z+d_2}.$$

Anexo XVI: Ecuación para el vector velocidad

Desde el par de ecuaciones,

$$(\vec{\mathrm{r}}\times\hat{\mathrm{e}})\cdot\gamma\,\vec{\mathrm{v}}=-\mathrm{L_o},$$
$$\vec{\mathrm{v}}\cdot\hat{\mathrm{e}}=0.$$

Parametrizando la solución mediante la componente v_z (componente z del vector de velocidad), obtenemos el sistema de dos ecuaciones Ax=b,

$$\begin{pmatrix} e_x & e_y \\ y\,e_z-z\,e_y & z\,e_x-x\,e_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -v_z e_z \\ -(x\,e_y-y\,e_x)v_z-\dfrac{L_o}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz A es,

$$|A|=e_x(z\,e_x-x\,e_z)-e_y(y\,e_z-z\,e_y)=z\,e_x^2+z\,e_y^2-x\,e_x e_z-y\,e_y e_z=z-z\,e_z^2-x\,e_x e_z-y\,e_y e_z,$$
$$|A|=z-e_z(x\,e_x+y\,e_y+z\,e_z)=z-e_z(\vec{\mathrm{r}}\cdot\hat{\mathrm{e}})=z$$

Donde hemos podido simplificar la expresión por la ortogonalidad entre el vector de posición y el versor e.
La solución es,

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\frac{1}{z}\begin{pmatrix} z\,e_x-x\,e_z & -e_y \\ z\,e_y-y\,e_z & e_x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e_z \\ y\,e_x-x\,e_y \end{pmatrix}v_z+\begin{pmatrix} z\,e_x-x\,e_z & -e_y \\ z\,e_y-y\,e_z & e_x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{-L_o}{\gamma}.$$

Que se simplifica a,

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\frac{1}{z}\begin{pmatrix} -e_z(z\,e_x-x\,e_z)-e_y(y\,e_x-x\,e_y) \\ -e_z(z\,e_y-y\,e_z)+e_x(y\,e_x-x\,e_y) \end{pmatrix}v_z+\begin{pmatrix} -e_y \\ e_x \end{pmatrix}\frac{-L_o}{\gamma},$$
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\frac{1}{z}\begin{pmatrix} -z\,e_x e_z-y\,e_x e_y+x(e_z^2+e_y^2) \\ -z\,e_y e_z+y(e_z^2+e_x^2)-x\,e_x e_y \end{pmatrix}v_z+\begin{pmatrix} -e_y \\ e_x \end{pmatrix}\frac{-L_o}{\gamma},$$
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\frac{1}{z}\begin{pmatrix} x-e_x\,\vec{\mathrm{r}}\cdot\hat{\mathrm{e}} \\ y-e_y\,\vec{\mathrm{r}}\cdot\hat{\mathrm{e}} \end{pmatrix}v_z+\begin{pmatrix} -e_y \\ e_x \end{pmatrix}\frac{-L_o}{\gamma},$$
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\frac{1}{z}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}v_z+\begin{pmatrix} -e_y \\ e_x \end{pmatrix}\frac{-L_o}{\gamma}.$$

Por la ortogonalidad entre vectores.

La ecuación en tres dimensiones resulta,

$$\vec{v}=\frac{1}{z}\left(v_z\vec{r}+\frac{L_o}{\gamma}\begin{bmatrix} e_y \\ -e_x \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Anexo XVII: Estimación del plano de la eclíptica

Estimaremos el vector característico del plano mediante mínimos cuadrados. Por ello, imponemos la ecuación,

$$v_x x+v_y y+v_z z=k.$$

Siendo las v_x, v_y ,v_z las componentes del vector característico, y las x,y,z las posiciones del cuerpo celeste (mercurio en este caso). Obviamente, necesitamos muchos puntos a lo largo de la trayectoria para estimar el plano correctamente (para evitar el ruido de la muestra).

Si usamos el vector de posición normalizado, obtendremos el versor característico con k=1. No nos interesa la posición del plano en el espacio, sólo su orientación.

Definimos el error cuadrático (SQE) como,

$$SQE=\sum_i (\hat{v}\cdot\hat{r}-1)^{2.}$$

E imponemos la condición de extremo, derivando respecto a cada componente del vector característico. Resulta el sistema de ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} \sum_i r_x^2(i) & \sum_i r_x(i) r_y(i) & \sum_i r_x(i) r_z(i) \\ \sum_i r_x(i) r_y(i) & \sum_i r_y^2(i) & \sum_i r_y(i) r_z(i) \\ \sum_i r_x(i) r_z(i) & \sum_i r_y(i) r_z(i) & \sum_i r_z^2(i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_i r_x(i) \\ \sum_i r_y(i) \\ \sum_i r_z(i) \end{pmatrix}.$$

Como la matriz es simétrica, sólo precisamos 6 elementos de ella; por lo que solo evaluamos 9 sumas (contando el vector independiente). El número de condición de la matriz es mejor si hemos empleado los versores de posición en el cálculo (notados como r_x, r_y, r_z, y con el índice i indicando cada lectura de posición que incluyéramos en el cálculo)

Anexo XVIII: Conservación de la energía: caso newtoniano

Las ecuaciones para el caso newtoniano se indican aquí por completitud y para futura referencia. Para el lagrangiano,

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-V+\lambda_e\left(\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+V-E_o\right).$$

Con,

$$\vec{v}=\frac{\vec{p}}{k_e},$$

$$V=-\frac{GM}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}.$$

Las ecuaciones son,

$$k_e=\sqrt{\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2(E_o-V)}},$$

$$\lambda_e=k_e-1,$$

y las EDOs,

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{\vec{p}}{k_e},$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}(1-\lambda_e),$$

Haciendo el multiplicador nulo en t=0, se tiene que el vector p coincide con el vector velocidad en el instante inicial.

Referencias

[1] Extensión alternativa de la relatividad especial. https://vixra.org/abs/2302.0124

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic_Lagrangian_mechanics

[3] Desplazamiento en frecuencia gravitacional de fotones en relatividad especial. https://vixra.org/abs/2211.0117

[4] Mass wave model and speed propagation estimation. https://vixra.org/abs/2211.0020

[5] https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html

[6] Precession of mercury's perihelion from ranging to the MESSENGER spacecraft. https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017AJ....153..121P/abstract

[7] The JPL planetary and lunar ephemerides DE440 and DE441. https://ssd.jpl.nasa.gov/doc/Park.2021.AJ.DE440.pdf

[8] Mathematical formulation of the double precision orbit determination program. https://ntrs.nasa.gov/citations/19710017134

[9] Análisis del experimento gravity probe b con relatividad especial de campos. https://vixra.org/abs/2307,0013

[10] Joan Solà. Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter. 2015. hal-01122406v5. https://hal.science/hal- 01122406v5

[11] Experimentos de GR resueltos con relatividad especial de campos. https://vixra.org/abs/2404,0013