Title: Precesión del perihelio de mercurio con relatividad especial de campos

Abstract
Se propone una reinterpretación de la relatividad especial y se explica con ella la precesión del perihelio de mercurio.
Esta prueba completa la serie de experimentos denominados 'test clásicos' de relatividad general, que ahora hemos tratado en el ámbito de esta relatividad especial de campos.

Autor: Enrique Domínguez Pinos.
Ingeniero Industrial.

Email: enrique_pinos@yahoo.es

Málaga, 10 de Abril de 2023

Table of Contents

Introducción

La relatividad especial modificada la denominaremos relatividad especial de campos, que hace referencia a que cada campo, tanto el gravitatorio como el electromagnético, tienen su propia versión de la relatividad especial[1], particularizada para la velocidad de su partícula mensajera (gravitón y fotón, respectivamente)
El cambio que vamos a introducir en la relatividad especial no afecta a los tests previos que ya explicamos, como se verá seguidamente.

Lagrangiano en relatividad especial de campos

Entre las justificaciones del lagrangiano de la relatividad especial, se encuentra en la literatura la interpretación de la ecuación de Euler-Lagrange para el tiempo propio de la partícula,

$$\mathrm{L}=\int \mathrm{d}\,\tau=\int \frac{\mathrm{dt}}{\gamma}.$$

E inmediatamente se reemplaza el tiempo propio con el tiempo del observador junto con el factor de Lorentz[2].
Este cambio es la interpretación correcta de la relatividad especial, el tiempo de las ecuaciones de la mecánica es relativo al observador. Pero este razonamiento no lleva al lagrangiano correcto.
Este lagrangiano nos lleva a la ecuación mecánica,

$$\frac{\mathrm{d}(\gamma\vec{\mathrm{v}})}{\mathrm{dt}}=\frac{\vec{\mathrm{F}}}{\mathrm{m}}.$$

Que podemos despejar en función a la velocidad. Vamos a analizar la ecuación dinámica que se obtiene para convencernos más. La ecuación mecánica queda,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{x}}}{\mathrm{dt}}=\vec{\mathrm{v}},$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}}=\frac{1}{\mathrm{m}}\left(\vec{\mathrm{F}}-\frac{(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{F}})\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{c}_\mathrm{m}^2}\right)\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}_\mathrm{m}^2}},$$

Donde se ha escrito la expresión del factor de Lorentz en término de la velocidad de la partícula.
En esta expresión, conforme la velocidad de la partícula tiende a c_m, la segunda ecuación indica que la velocidad termina por fijarse a c_m, y en la primera se concluye que, al ser la velocidad constante, la única opción para la partícula es el movimiento rectilíneo uniforme. Por lo tanto, la luz no se curvaría al pasar cerca del sol, cosa que sí sucede.

La expresión correcta para la ecuación mecánica es,

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{\vec{v}}{\gamma},$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{1}{m\,\gamma}\left(\vec{F}-\frac{(\vec{v}\cdot\vec{F})\vec{v}}{c_m^2}\right). \tag{1}$$

Ahora la interpretación es diferente. Los términos a la izquierda representan la velocidad y aceleración aparentes. Necesitan multiplicarse por el factor de Lorentz para dar los valores reales.
De hecho la ecuación para los fotones en tiempo ‘propio’ queda,

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau}=\vec{v},$$
$$\frac{d\vec{v}}{d\tau}=\frac{1}{m}\left(\vec{F}-\frac{(\vec{v}\cdot\vec{F})\vec{v}}{c_m^2}\right).$$

Obviamente, no podemos saber cómo pasa realmente el tiempo para el fotón, pero estas ecuaciones ya se usaron con éxito en predecir el curvado de la luz a su paso junto al sol[1],[3].

La confusión con el factor de Lorentz se debe a que tiene dos funciones dentro del lagrangiano; la primera, poner las ecuaciones en la forma (1) cuando se despeja la velocidad y, la segunda, actuar como factor de escala sobre el eje temporal.

La búsqueda de un lagrangiano que directamente nos deje en las expresiones (1), ha sido infructífera (ver Anexo VII: Relaciones encontradas). Por lo que el lagrangiano propuesto es,

$$L=c_m^2\ln(\gamma)-V.$$

Con 'ln' indicando el logaritmo neperiano y 'V' el potencial del que derivan las fuerzas.
Pese a tener el lagrangiano, no podemos olvidar el papel que juega el factor de Lorentz en las ecuaciones mecánicas, puesto que, partiendo de,

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma^2\frac{d\vec{x}}{dt}\right)=\frac{\vec{F}}{m}.$$

sólo las ecuaciones despejadas como en las (1), describen correctamente la dinámica del sistema.

Conservación de la energía

Puede verse en el Anexo I: Ecuación de la energía la deducción de la expresión de conservación de la energía, que queda,

$$E=c_m^2(\gamma^2-1)-c_m^2\ln(\gamma)+V.$$

Donde la energía cinética, esta vez sí, es cero cuando la velocidad es cero. Y la expresión se reduce a las leyes de Newton cuando la velocidad es muy inferior a c_m.

Efectos de las magnitudes aparentes

Puesto que las magnitudes que obtenemos por derivación respecto al tiempo (del observador) son aparentes sin conocer el factor de Lorentz a aplicar, esto ofrece una explicación a efectos como velocidades súper-lumínicas o curvas de rotación de galaxias con velocidades imposibles.

Precesión del perihelio de mercurio

Para realizar este test, seguiremos la idea inicial que propusimos en [4]. Resumidamente, vamos a definir al ángulo de precesión calculando el instante en que se produce el perihelio, integrando las ecuaciones de n-body para los cuerpos celestes desde el Sol hasta Neptuno. Si el cuerpo celeste es un sistema con lunas, tomamos el baricentro del sistema (sólo sol, mercurio y venus se excluyen de esto)
El valor que existe en la literatura no representa correctamente la evolución temporal (por no ser realmente una evolución lineal) y el pretender obtenerlo exige un postprocesado de los resultados de cada perihelio excesivamente complejo, a mi entender. Ver por ejemplo las referencias [6], [7] y [8].

(Un especial agradecimiento a la gente del SSD en el JPL por mojarse donde nadie quiere, y a la NASA en general, por publicar en abierto y con tanta claridad)
Es cierto, y poco costoso, que el ajuste de mínimos cuadrados muestra resultados mucho más parecidos a lo que se espera, por lo que usaremos esta métrica para los resultados obtenidos (al contrario se lo que se hiciera en [4], donde se usó la media como estimador de la evolución temporal) Ver Anexo V: Mínimos cuadrados.
Como ya comentamos en [4], el no poder obtener el valor teórico nos exige comprobar el método mediante otro procedimiento, y para ello se usa el kernel de JPL DE405 ascii.

Preparación del experimento

La fuente de datos para el integrador sigue usando valores de Horizons[5], pero actualizados a DE440, tanto condiciones iniciales como datos de cuerpos celestes.
Como se ha comentado, también se ha simulado el baricentro de los subsistemas de Tierra a Neptuno en vez de los cuerpos en sí.
Otro cambio respecto a [4], es que esta vez se ha integrado respecto al SSB (solar system barycenter) de nuestro mini-sistema solar. Para ello, se obtienen las posiciones y velocidades heliocéntricas de Horizons, como en [4], y con esos valores se calcula el centro de masas del sistema (SSB). Luego se resta la posición y velocidad (no nula, en general) del SSB a la posición y velocidad de todos los cuerpos (esto deja el SSB con velocidad nula). No podemos usar el SSB de Horizons porque su SSB tiene en cuenta cuerpos celestes que hemos excluido en la simulación. Ver Anexo II: Coordenadas del SSB.
Las ecuaciones que se han usado vienen en la primera parte del Anexo IV: Expresión ley dinámica para la partícula puntual. Se ha incluido la forma de las ecuaciones que usa el JPL para futura referencia.
También es preciso realizar la simulación en fortran porque simular 100 años tarda aproximadamente 10 horas con un lenguaje compilado como fortran.

Resultados

Aunque los efectos relativistas, evaluados mirando la diferencia entre la energía que predice el lagrangiano de Newton frente al de relatividad especial de campos, sólo son apreciables en los cuerpos celestes desde mercurio a Júpiter ambos incluidos, puede realizarse la simulación poniendo a uno todos los factores de Lorentz sin pérdida significativa de resolución. Los efectos importantes son la modificación de la fuerza tangencial, y la inducción de campo gravitatorio; este último sólo en el caso de mercurio.

Si realizamos la simulación durante 100 años, manteniendo una resolución de 0.1 segundos en la localización del perihelio, obtenemos la tabla siguiente,

Tipo de simulación	Arcseg
Sólo con fuerzas de Newton	515.66
Términos ecuaciones de relatividad especial de campos (SRf)	28.88
Término de inducción de Faraday (sol a mercurio sólo)	14.04
	558.58

El valor que se obtiene con el kernel ascii es 558.51 arcseg con una resolución de 0.6 segundos (lo máximo) en la localización del perihelio (EphemUtil con código C clonado del código fortran) La aportación de GR teórica sería 42.98 arcosegundos; SRf+Faraday obtiene 42.92.

Mercurio completa 416 perihelios en total.

Las fechas del último perihelio tampoco terminan por cuadrar y ahora se parecen más a los valores que suministra el kernel que al resultado que aporta Horizons.

Tipo de simulación	Resolución (segundos)	Fecha último perihelio (@416)
Datos Horizons	10	Sun Feb 17 02:28:50 2013
Kernel ascii DE405 con EphemUtil en C	0.6	Sun Feb 17 03:27:44 2013
Código fortran (real*16)	0.1	Sun Feb 17 03:14:20 2013

La simulación a 2000 años suma aproximadamente 10 arcosegundos más sin llegar al valor teórico.

Comentarios finales

Gravedad cuántica

El modelo que se propone en el Anexo IX: Primeras integrales y ecuación del movimiento podría ser extrapolable al caso del átomo y sería el primer paso para obtener una gravedad cuántica.

Rotación solar

En un modelo completo del sistema solar, donde los cuerpos gaseosos como el sol o júpiter tienen rotaciones que no son uniformes en todo su volumen (por ejemplo, el sol rota más rápido por el ecuador) el campo inducido podría explicar esta rotación como una inducción del resto de cuerpos celestes. Serían ecuaciones acopladas bastante más complicadas de lo que se expone aquí.

Curvado del espacio-tiempo

Este experimento pone de manifiesto que el curvado del espacio-tiempo es nulo. La luz se curva por efecto de la modificación de la fuerza tangencial según la (1), pero el factor de lorentz no tiene nada que ver en este curvado. El factor de lorentz sólo modifica la ley horaria de la trayectoria, esto es, la velocidad con que se recorre la trayectoria calculada mediante (1).

Anexo I: Ecuación de la energía

Sólo es útil si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, esto es, su derivada parcial es nula.
La ley de conservación de la energía se obtiene de la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0,\; q_i = \{x, y, z\}$$

y despejamos,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right), \tag{2}$$

Ahora obtenemos la derivada total respecto al tiempo del lagrangiano,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i,$$

y sustituimos (2) en el primer sumatorio de la anterior,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i.$$

Y observamos que se puede unificar el sumatorio agrupando los términos de la derivada,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right),$$

y extraemos la derivada del sumatorio, y pasamos todo al segundo miembro,

$$0 = -\frac{dL}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right),$$

y agrupamos los términos de la derivada de nuevo,

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right).$$

Que nos da la integral primera,

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L.$$

Anexo II: Coordenadas del SSB

Dadas las posiciones y velocidades heliocéntricas de cada cuerpo celeste; y el producto GMi (constante de cada planeta, producto de la constante de la ley de gravitación de Newton y la masa del cuerpo celeste 'i'),

$$\vec{r}_{SSB} = \frac{\sum_i \vec{r}_i GM_i}{\sum_i GM_i},$$

$$\vec{v}_{SSB} = \frac{\sum_i \vec{v}_i GM_i}{\sum_i GM_i},$$

y restamos ambos valores a posiciones y velocidades (respectivamente) para referirlo todo al SSB.

$$\vec{r}\,'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{SSB},$$
$$\vec{v}\,'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{SSB}.$$

Anexo III: Faraday: Campo gravitatorio inducido

Vamos a usar notación de campo electromagnético en lo que sigue.

El campo gravitatorio inducido por el cuerpo celeste i sobre el j, se debe al movimiento tanto del cuerpo celeste 'i' como al movimiento del cuerpo celeste 'j'. La expresión matemática es,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

que nos simplifica el cálculo del término de Faraday a la derivada parcial del potencial vector,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3)$$

La expresión del potencial vector para una partícula puntual con velocidad es,

$$\vec{A}_{i \to j} = \frac{\mu_o M_i \vec{v}_{i,j}}{4 \pi R_{ij}}.$$

donde, para el campo gravitatorio,

$$\mu_o = \frac{4 \pi G}{c_m^2},$$
$$c_m = \frac{c}{\sqrt{(2)}}.$$

Con c_m la velocidad de los gravitones, c la velocidad de la luz, y G la constante de la ley de gravitación.
La velocidad vi,j, representa la velocidad de i que observa el cuerpo j, se calcula como,

$$\vec{v}_{i,j} = \vec{v}_i - \vec{v}_j.$$

Este término tiene en cuenta que el efecto de ver un campo gravitomagnético variable es debido al hecho de que el sol se mueve, y mercurio se mueve (respectivamente). Ojo a la coma, está ahí para indicar que no es como se suele interpretar una velocidad con subíndices (en particular, indica que es el opuesto).

Mientras que Rij es el vector de posición relativo,

$$R_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_{i.}$$

Este término sólo es importante en la influencia del sol sobre mercurio,

$$\vec{A}_{1 \to 2} = \frac{G M_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{c_m^2 R_{12}}.$$

Para evaluar su derivada parcial, tenemos que derivar sólo los términos de velocidad. Si te resulta ambiguo, puedes evaluar la derivada total y despejar de ella la parcial respecto al tiempo (ver Anexo VI: Variación parcial respecto al tiempo de A). El resultado es,

$$\vec{E}_{1\to 2}=-\frac{GM_1(\vec{a}_1-\vec{a}_2)}{c_m^2\,\gamma R_{12}}.$$

donde se ha tenido en cuenta que,

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}}=\frac{\vec{\mathrm{a}}}{\gamma},$$

con,

$$\gamma=\gamma(\vec{\mathrm{v}}_2).$$

Ya que estamos derivando respecto al tiempo del observador.

Anexo IV: Expresión ley dinámica para la partícula puntual

Para nuestra partícula puntual, en el caso de mercurio, tenemos que incluir un término debido a la inducción de campo gravitatorio que ejerce el sol sobre mercurio,

$$\vec{F}_i=\frac{\sum_{j\neq i}\frac{GM_j\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}-\frac{1}{\gamma_i c_m^2}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j\vec{a}_j}{r_{ji}}}{\left\{1-\frac{1}{\gamma_i c_m^2}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j}{r_{ji}}\right\}}$$

Ver Anexo III: Faraday: Campo gravitatorio inducido.

Para el resto, es suficiente con las fuerzas de Newton sólo,

$$\vec{F}_i=\sum_{j\neq i}\frac{GM_j\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$$

y,

$$\frac{d\,\vec{x}_i}{dt}=\frac{\vec{v}_i}{\gamma_i},$$

$$\vec{a}_i=\frac{d\,\vec{v}_i}{dt}=\frac{1}{\gamma_i}\left(\vec{F}_i-\frac{(\vec{v}_i\cdot\vec{F}_i)\vec{v}_i}{c_m^2}\right).$$

Mientras que las ecuaciones del JPL para elaborar las efemérides[8],

$$\vec{a}_i=\sum_{j\neq i}\frac{GM_j\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\left\{1-\frac{4}{c^2}\sum_{k\neq i}\frac{GM_k}{r_{ik}}-\frac{1}{c^2}\sum_{k\neq j}\frac{GM_k}{r_{jk}}+\left(\frac{v_i}{c}\right)^2+2\left(\frac{v_j}{c}\right)^2-\frac{4}{c^2}\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j-\frac{3}{2c^2}\left[\frac{\vec{r}_{ji}\cdot\vec{v}_j}{r_{ij}}\right]^2+\frac{\vec{r}_{ij}\cdot\vec{a}_j}{2c^2}\right\}$$
$$+\frac{1}{c^2}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j}{r_{ij}^3}\{\vec{r}_{ji}\cdot[\vec{v}_i-3\,\vec{v}_{ji}]\}\vec{v}_{ji}+\frac{7}{2\,c^2}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j\vec{a}_j}{r_{ij}}.$$

Anexo V: Mínimos cuadrados

Para ajustar la precesión del perihelio a una recta en función del siglo, definimos 'x_i' como el número del perihelio i, e 'y_i' como el valor en arcosegundos de dicho perihelio. Vamos a ajustar la recta,

$$y=m\cdot x\,.$$

Esto se ha hecho así porque el ajuste se ha calculado durante la simulación, incrementando dos acumuladores que forman el numerador y denominador de,

$$m=\frac{k\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}.$$

Con k=41600/101.36, que nos ajusta la escala del numero de perihelio a numero de siglos; y N=416 para simular a 100 años.
Esta expresión permite realizar simulaciones de 2000 años sin cambiar la forma del ajuste.

Anexo VI: Variación parcial respecto al tiempo de A

Vamos a obtener la expresión para la ecuación (3) a partir de la derivada total,

$$\frac{d\vec{A}_{12}}{dt}=\frac{\partial\vec{A}_{12}}{\partial t}+\frac{(\vec{v}_1\cdot\nabla)}{\gamma_2}\vec{A}_{12}+\frac{(\vec{v}_2\cdot\nabla)}{\gamma_2}\vec{A}_{12.}$$

Dando,

$$\vec{E}_{12}=-\frac{\partial\vec{A}_{12}}{\partial t}=-\frac{d\vec{A}_{12}}{dt}+\frac{(\vec{v}_1\cdot\nabla)}{\gamma_2}\vec{A}_{12}+\frac{(\vec{v}_2\cdot\nabla)}{\gamma_2}\vec{A}_{12.} \qquad (4)$$

Ahora calculamos cada derivada; tomando, por simplificar,

$$\vec{A}_{1\to 2}=\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}}.$$

para la derivada total necesitamos,

$$\frac{dR_{12}}{dt}=\frac{(x_2-x_1)\cdot(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+(y_2-y_1)\cdot(\dot{y}_2-\dot{y}_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=\frac{\vec{R}_{12}\cdot\vec{v}_{12}}{R_{12}\gamma_2},$$

que da,

$$\frac{d\vec{A}_{12}}{dt}=\frac{GM_1}{\gamma_2 c_m^2}\left(\frac{\vec{a}_1}{R_{12}}-\frac{\vec{v}_1}{R_{12}^2}\frac{\vec{R}_{12}\cdot\vec{v}_{12}}{R_{12}}\right).$$

para los términos convectivos necesitamos,

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial x_2}=\frac{x_2-x_1}{R_{12}},$$
$$\frac{\partial R_{12}}{\partial y_2}=\frac{y_2-y_1}{R_{12}},$$

que da,

$$\frac{\partial \vec{A}_{12}}{\partial x_2}=-\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2}\left(\frac{x_2-x_1}{R_{12}}\right),$$
$$\frac{\partial \vec{A}_{12}}{\partial y_2}=-\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2}\left(\frac{y_2-y_1}{R_{12}}\right).$$

Y,

$$\frac{(\vec{v}_2\cdot\nabla)}{\gamma_2}\vec{A}_{12}=-\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_2}\left(\dot{x}_2\frac{x_2-x_1}{R_{12}}+\dot{y}_2\frac{y_2-y_1}{R_{12}}\right)=-\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_2}\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{R}_{12}}{R_{12}}.$$

Análogamente,

$$\frac{(\vec{v}_1\cdot\nabla)}{\gamma_2}\vec{A}_{12}=\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_2}\left(\dot{x}_1\frac{x_2-x_1}{R_{12}}+\dot{y}_1\frac{y_2-y_1}{R_{12}}\right)=\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_2}\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{R}_{12}}{R_{12}}.$$

Y sustituyendo todo lo calculado en (4),

$$\vec{E}_{12}=-\frac{GM_1}{\gamma_2 c_m^2}\left(\frac{\vec{a}_1}{R_{12}}-\frac{\vec{v}_1}{R_{12}^2}\frac{\vec{R}_{12}\cdot\vec{v}_{12}}{R_{12}}\right)-\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_2}\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{R}_{12}}{R_{12}}+\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_2}\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{R}_{12}}{R_{12}},$$
$$\vec{E}_{12}=-\frac{GM_1\vec{a}_1}{\gamma_2 c_m^2 R_{12}}+\frac{GM_1\vec{v}_1}{c_m^2 R_{12}^2\gamma_2}\left(\frac{\vec{R}_{12}\cdot\vec{v}_{12}-\vec{v}_2\cdot\vec{R}_{12}+\vec{v}_1\cdot\vec{R}_{12}}{R_{12}}\right).$$

Donde el segundo término del segundo miembro se cancela dando,

$$\vec{E}_{12}=-\frac{GM_1\vec{a}_1}{\gamma_2 c_m^2 R_{12}}.$$

Anexo VII: Relaciones encontradas

Simplemente vamos a enumerar algunas relaciones encontradas mientras se buscaba un lagrangiano directo.
Para la función potencial V,

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{\gamma},$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}=-F_x,$$

por lo que verifica una ecuación parecida a la de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x},$$

y,

$$\frac{\partial(\frac{dV}{dt})}{\partial(\frac{\partial V}{\partial x})}=\dot{x}\,.$$

Para el redshift, representado por ‘z’,

$$\frac{d(1+z)}{dt}=-\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{\gamma}\frac{1+z}{c_m^2}\,,$$
$$\frac{\partial(1+z)}{\partial x}=-F_x\frac{1+z}{c_m^{2.}}$$

también verifica la misma ecuación que la función potencial, parecida a la de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{d(1+z)}{dt}=\frac{\partial(1+z)}{\partial x}.$$

y,

$$\frac{\partial(\frac{d(1+z)}{dt})}{\partial(\frac{\partial(1+z)}{\partial x})}=\dot{x}.$$

Para el factor de Lorentz,

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\gamma^3}{c_m^2}(\dot{x}\,\ddot{x}+\dot{y}\,\ddot{y}),$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial\dot{x}}=\frac{\gamma^3\dot{x}}{c_m^2}.$$

por lo que verifica una ecuación similar a la de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{x}}\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\partial\gamma}{\partial\dot{x}}.$$

Anexo VIII: Conservación del momento angular

Si expresamos en coordenadas esféricas la ecuación del movimiento de la partícula material sometida a fuerzas centrales,

$$\mathrm{L}=\frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\dot{\mathrm{r}}^2+\mathrm{r}^2\,\dot{\theta}^2+\mathrm{r}^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2\right)-\mathrm{V}(\mathrm{r}).$$

Que da las ecuaciones del movimiento,

$$\ddot{\mathrm{r}}-\mathrm{r}(\dot{\theta}^2+\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{\mathrm{m}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{r}}=0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\mathrm{r}^2\,\dot{\theta}\right)-\mathrm{r}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\varphi}^2=0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\mathrm{r}^2\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi}\right)=0.$$

Al no depender el lagrangiano de φ , se conserva su momento lineal,

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=r^2\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi}=cte\,. \tag{5}$$

Si el movimiento empieza en el plano XY, se desarrolla en él. Vamos a trasladar la relación anterior a coordenadas cartesianas.
Dadas las relaciones cartesianas,

$$\mathrm{x}=\mathrm{r}\sin(\theta)\cos(\varphi),$$
$$\mathrm{y}=\mathrm{r}\sin(\theta)\sin(\varphi),$$
$$\mathrm{z}=\mathrm{r}\cos(\theta).$$

Podemos expresar,

$$x^2+y^2=r^2\sin^2(\theta). \tag{6}$$

Y para la variación temporal,

$$\varphi=\mathrm{atan}(\mathrm{y}/\mathrm{x}).$$

derivamos respecto al tiempo la anterior (derivada total),

$$\dot{\varphi}=\frac{1}{1+(\mathrm{y}/\mathrm{x})^2}\left(\frac{\dot{\mathrm{y}}}{\mathrm{x}}-\frac{\mathrm{y}\,\dot{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}^2}\right)=\frac{\dot{\mathrm{y}}\,\mathrm{x}-\mathrm{y}\,\dot{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\,.$$

Sustituyendo la anterior y la (6) en la (5), nos da finalmente,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\dot{\mathrm{y}}\,\mathrm{x}-\mathrm{y}\,\dot{\mathrm{x}})=0.$$

Que nos indica que para un movimiento en el plano XY, la proyección del vector momento angular sobre el eje Z se conserva.

En el caso general, y expresado ya en términos de velocidades,

$$\mathrm{e_x}(\mathrm{y}\,\mathrm{v_z}-\mathrm{v_y}\,\mathrm{z})+\mathrm{e_y}(\mathrm{v_x}\,\mathrm{z}-\mathrm{v_z}\,\mathrm{x})+\mathrm{e_z}(\mathrm{v_y}\,\mathrm{x}-\mathrm{y}\,\mathrm{v_x})=\mathrm{L_o}\,.$$

O,

$$\hat{\mathrm{e}}\cdot\vec{\mathrm{L}}_\mathrm{o}=\mathrm{L_o}\,,$$
$$\vec{\mathrm{L}}_\mathrm{o}=(\mathrm{y}\,\mathrm{v_z}-\mathrm{v_y}\,\mathrm{z})\,\hat{\mathrm{i}}+(\mathrm{v_x}\,\mathrm{z}-\mathrm{v_z}\,\mathrm{x})\,\hat{\mathrm{j}}+(\mathrm{v_y}\,\mathrm{x}-\mathrm{y}\,\mathrm{v_x})\,\hat{\mathrm{k}}=\mathrm{L_o}\,\hat{\mathrm{e}}\,.$$

Siendo ‘e’ el versor perpendicular al plano en que se desarrolla el movimiento (vector característico del plano del movimiento) y ‘Lo’ el vector genérico que define el momento angular. Esto es, para definir la conservación el momento angular necesitamos calcular el versor ‘e’ y proyectar el vector genérico ‘Lo’ sobre él.

Anexo IX: Primeras integrales y ecuación del movimiento

Este apartado no es necesario para el experimento, pero se incluye para futura referencia.

Cuando usamos la ecuación de Euler-Lagrange estamos calculando el movimiento de la partícula con el principio de la mínima acción. Si tenemos un lagrangiano que conserva la energía, por ejemplo, y no introducimos este hecho en la expresión del lagrangiano a modo de restricción, las ecuaciones del movimiento no cumplen con la conservación de la energía. Lo mismo se puede decir para toda primera integral del movimiento.

Nuestro lagrangiano de relatividad especial de campos puede escribirse como,

$$L=c_m^2\ln(\gamma)-V+\lambda_e(c_m^2(\gamma^2-1)-c_m^2\ln(\gamma)+V-E_o)+\lambda_m(e_x(y\,v_z-v_y\,z)+e_y(v_x\,z-v_z\,x)+e_z(v_y\,x-y\,v_x)-L_o).$$

o, resumidamente,

$$L=c_m^2\ln(\gamma)-V+\lambda_e(c_m^2(\gamma^2-1)-c_m^2\ln(\gamma)+V-E_o)+\lambda_m(\hat{e}\cdot(\vec{r}\times\vec{v})-L_o).$$

siendo 'r' el vector de posición.

Ecuaciones del movimiento

Introduciendo en la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\vec{p}\,\gamma=\gamma\vec{v}(1+\lambda_e(2\gamma^2+1))-\lambda_m(\vec{r}\times\hat{e}), \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma\vec{p})=\vec{F}'(1-\lambda_e)+\lambda_m(\vec{v}\times\hat{e})=\vec{F}''.$$

Donde hemos definido 'p' como una pseudo velocidad multiplicada por el factor de Lorentz para mantener la forma de las ecuaciones. Este valor es conocido porque al integrar, se impone que los multiplicadores de lagrange valen cero en el instante inicial. El vector de la fuerza 'F' lo hemos denominado prima, porque ahí introducimos el valor de la fuerza descompuesta según la normal al plano de movimiento y su perpendicular (se comenta seguidamente).

Despejando la velocidad de la primera,

$$\vec{v}=\frac{\vec{p}\,\gamma+\lambda_m(\vec{r}\times\hat{e})}{\gamma(1+\lambda_e(2\gamma^2+1))}. \tag{8}$$

Como el movimiento se desarrolla en un plano perpendicular al versor 'e', tanto el vector de posición como el vector velocidad están contenidos en él. Esto permite calcular la dirección del vector velocidad y de la ecuación de la energía obtenemos su módulo.

Además, vamos a descomponer las fuerzas en perpendicular al plano del movimiento y contenida en él. Esto es necesario porque las fueras cuya componente está alineada con el versor que define el plano del movimiento están sujetas a la acción giroscópica.

$$\vec{F}'=\vec{F}-(\vec{F}\cdot\hat{e})\hat{e}.$$

Ecuación de la energía: módulo del vector velocidad

La ecuación de la energía es no lineal y para evitar resolverla, derivemos (derivada total) respecto al tiempo en la expresión de la misma,

$$c_m^2(\gamma^2-1)-c_m^2\ln(\gamma)+V=E_o.$$

Derivando respecto al tiempo y despejando la variación temporal del factor de Lorentz,

$$\dot{\gamma}(2\gamma^2-1)c_m^2+\gamma\dot{V}=0.$$

O, (ver Anexo VII: Relaciones encontradas),

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c_m^2(2\gamma^2-1)}.$$

Que, con la condición inicial, nos permite calcular el factor de Lorentz directamente (y el módulo del vector velocidad).

Vector velocidad

Para expresar el vector velocidad, usaremos el par de ecuaciones,

$$(\vec{r}\times\hat{e})\cdot\vec{v}=-L_o,$$
$$\vec{v}\cdot\hat{e}=0.$$

Parametrizando la solución mediante la componente vz (componente z del vector de velocidad),

$$\vec{v}=\frac{1}{r_z}\left(v_z\vec{r}+L_o\begin{bmatrix}e_y\\-e_x\\0\end{bmatrix}\right).$$

Para obtener vz, recurrimos a la ecuación de la energía, multiplicando (8) por sigo misma, y notando que,

$$v^2=c_m^2(1-\gamma^{-2}).$$

queda una expresión cuadrática en vz. Para evitar el problema de resolver una ecuación cuadrática y decidir qué valor tomar, derivamos la expresión respecto al tiempo (derivada total) y despejamos la variación de la velocidad vz con el tiempo. Como hicimos con la ecuación de la energía. Dando el monstruo,

$$\frac{dv_z}{dt}=\frac{c_m^2\left(\frac{r_z^2\dot{\gamma}}{\gamma^3}+\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{r_zv_z}{\gamma}\right)-\frac{v_z^2}{\gamma}(\vec{v}\cdot\vec{r})-\frac{v_zL_o}{\gamma}(v_xe_y-v_ye_x)-v_zL_o(r_x\dot{e}_y-r_y\dot{e}_x)-L_o^2(e_y\dot{e}_y+e_x\dot{e}_x)}{v_z(\vec{r}\cdot\vec{r})+L_o(r_xe_y-r_ye_x)}.$$

Que se integra con el resto de ecuaciones y determina el valor de la componente z de la velocidad.

Multiplicadores

Para tener el sistema cerrado, todavía necesitamos los valores de los multiplicadores; para el de la energía, multiplicamos la (7) por el vector de posición; esto anula el término del multiplicador del momento angular y permite que despejemos el multiplicador de la energía,

$$\lambda_e=\frac{\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\vec{v}\cdot\vec{r}}-1}{2\gamma^2-1}.$$

Para el otro multiplicador, multiplicamos escalarmente la (8) por $\vec{r}\times\hat{e}$,

$$-L_o=\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}\times\hat{e})\,\gamma+\lambda_m(\vec{r}\times\hat{e})\cdot(\vec{r}\times\hat{e})}{\gamma(1+\lambda_e(2\,\gamma^2+1))},$$

O, reordenando el producto con el vector ‘p’ y usando que el vector de posición es ortogonal al versor ‘e’,

$$L_o=\frac{\hat{e}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})\,\gamma-\lambda_m(\vec{r}\cdot\vec{r})}{\gamma(1+\lambda_e(2\,\gamma^2+1))},$$

de donde despejamos la relación entre ambos multiplicadores,

$$1+\lambda_e(2\,\gamma^2+1)=\frac{\hat{e}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})\,\gamma-\lambda_m(\vec{r}\cdot\vec{r})}{\gamma L_o}.$$

Ahora, multiplicamos escalarmente la (7) por el vector velocidad, y le introducimos la anterior para eliminar el multiplicador de la energía,

$$\vec{p}\cdot\vec{v}\,\gamma=\gamma^2\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{\gamma}(1+\lambda_e(2\,\gamma^2+1))+\lambda_m L_o,$$

dando,

$$\vec{p}\cdot\vec{v}\,\gamma=\gamma^2\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{\gamma}\left(\frac{\hat{e}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})\,\gamma-\lambda_m(\vec{r}\cdot\vec{r})}{\gamma L_o}\right)+\lambda_m L_o,$$

usando la relación del factor de lorentz con el módulo de la velocidad,

$$v^2\,\gamma^2=c_m^2(\gamma^2-1).$$

obtenemos,

$$\vec{p}\cdot\vec{v}\,\gamma=\frac{c_m^2(\gamma^2-1)}{\gamma}\left(\frac{\hat{e}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})\,\gamma-\lambda_m(\vec{r}\cdot\vec{r})}{\gamma L_o}\right)+\lambda_m L_o,$$

de donde podemos despejar el multiplicador,

$$\lambda_m=\frac{\gamma^3 L_o\vec{p}\cdot\vec{v}-\gamma\hat{e}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})c_m^2(\gamma^2-1)}{L_o^2\,\gamma^2-c_m^2(\gamma^2-1)(\vec{r}\cdot\vec{r})},$$

Ecuación del eje giroscópico

Para el versor del plano de la eclíptica o plano del movimiento, se cumple la relación,

$$\frac{d\hat{e}}{dt}=\vec{w}\times\hat{e}. \tag{9}$$

que es la ecuación de derivación en ejes móviles del versor ‘e’. Y el vector ‘w’ la velocidad de precesión del eje ‘e’.

El par que crean las fuerzas perpendiculares al plano de la eclíptica (o paralelas al versor ‘e’) es,

$$\vec{M}_o=\vec{r}\times(\vec{F}\cdot\hat{e})\hat{e}.$$

La derivada del momento angular sería,

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt}=\vec{M}_o.$$

Donde los subíndices 'o' nos recuerdan que estamos calculando todo en el SSB que estimamos previamente (y es un punto fijo, o sea, de velocidad nula). Por lo que la anterior queda,

$$L_o \frac{d\hat{e}}{dt} = \vec{r} \times (\vec{F} \cdot \hat{e}) \hat{e} .$$

Pasando al principio del segundo miembro todo lo que es escalar e identificando con la (9),

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = \frac{(\vec{F} \cdot \hat{e})}{L_o} \vec{r} \times \hat{e} . \tag{10}$$

Identificamos la velocidad angular de precesión del eje,

$$\vec{w} = \frac{(\vec{F} \cdot \hat{e})}{L_o} \vec{r} .$$

Que es colineal con el vector de posición y no aporta velocidad adicional a la partícula; lo que provoca es la torsión del plano de la eclíptica.

Ecuación de precesión del eje

Esta ecuación no puede resolverse directamente; sin entrar en muchos detalles, hace falta la introducción de cuaternios para resolverla (gracias Hamilton!)

La ecuación en forma de cuaternios es,

$$\frac{d\tilde{e}}{dt} = \frac{1}{2} \tilde{w} \otimes \tilde{e} .$$

Donde el gorro curvado indica que el vector es cuaternio y, el producto encerrado en el círculo, el producto de cuaternios. Que puede resumirse,

$$\tilde{w} \otimes \tilde{e} = (w_o e_o - \vec{w} \cdot \hat{e}) + w_o \hat{e} + e_o \vec{w} + \vec{w} \times \hat{e} .$$

siendo las componentes con subíndice cero la parte real del cuaternio, y las partes con vectores las imaginarias.

El versor 'e' se define como el cuaternio unidad,

$$\tilde{e} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{e} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

En resumen, esto introduce la ecuación en 4 dimensiones,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_o \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(w_x e_1 + w_y e_2 + w_z e_3) \\ w_x e_o + w_y e_3 - w_z e_2 \\ w_y e_o + w_z e_1 - w_x e_3 \\ w_z e_o + w_x e_2 - w_y e_1 \end{bmatrix} .$$

y del cuaternio del versor, sacamos el versor como,

$$\hat{e} = \frac{1}{\sin(acos(e_o))} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} .$$

No obstante, esta ecuación asume que el vector 'w' no depende del versor, y no está claro su rango de aplicación a este caso.

Resumen de las ecuaciones

Se listan en el orden en que se resuelven,

$$\vec{\mathrm{v}}=\frac{1}{\mathrm{r_z}}\left(\mathrm{v_z}\,\vec{\mathrm{r}}+\mathrm{L_o}\begin{bmatrix}\mathrm{e_y}\\-\mathrm{e_x}\\0\end{bmatrix}\right),$$

$$\lambda_{\mathrm{m}}=\frac{\gamma^3\,\mathrm{L_o}\,\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{v}}-\gamma\,\hat{\mathrm{e}}\cdot(\vec{\mathrm{r}}\times\vec{\mathrm{p}})\,\mathrm{c_m^2}(\gamma^2-1)}{\mathrm{L_o^2}\,\gamma^2-\mathrm{c_m^2}(\gamma^2-1)(\vec{\mathrm{r}}\cdot\vec{\mathrm{r}})},$$

$$\lambda_{\mathrm{e}}=\frac{\dfrac{\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{r}}}{\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{r}}}-1}{2\,\gamma^2-1},$$

$$\vec{\mathrm{F}}'=\vec{\mathrm{F}}-(\vec{\mathrm{F}}\cdot\hat{\mathrm{e}})\,\hat{\mathrm{e}},$$

$$\vec{\mathrm{F}}''=\vec{\mathrm{F}}'(1-\lambda_{\mathrm{e}})+\lambda_{\mathrm{m}}(\vec{\mathrm{v}}\times\hat{\mathrm{e}}),$$

$$\hat{e}=\frac{1}{\sin(acos(e_o))}\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}.$$

$$\vec{\mathrm{w}}=\frac{\vec{\mathrm{F}}\cdot\hat{\mathrm{e}}}{\mathrm{L_o}}\,\vec{\mathrm{r}}.$$

$\dfrac{\mathrm{d}\,\hat{\mathrm{e}}}{\mathrm{dt}}=\vec{\mathrm{w}}\times\hat{\mathrm{e}}.$: sólo expresión de componentes x e y, para vz

y las EDOs,

$$\frac{d\,\vec{x}}{dt}=\frac{\vec{v}}{\gamma},$$

$$\frac{d\,\vec{p}}{dt}=\frac{1}{\gamma}\left(\vec{F}\,''-\vec{p}\,\dot{\gamma}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\gamma}{\mathrm{dt}}=\frac{\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{c_m^2}(2\,\gamma^2-1)}.$$

$$\frac{\mathrm{d\,v_z}}{\mathrm{dt}}=\frac{\mathrm{c_m^2}\left(\dfrac{\mathrm{r_z^2}\,\dot{\gamma}}{\gamma^3}+\left(1-\dfrac{1}{\gamma^2}\right)\dfrac{\mathrm{r_z v_z}}{\gamma}\right)-\dfrac{\mathrm{v_z^2}}{\gamma}(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{r}})-\dfrac{\mathrm{v_z L_o}}{\gamma}(\mathrm{v_x e_y}-\mathrm{v_y e_x})-\mathrm{v_z L_o}(\mathrm{r_x}\,\dot{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}}-\mathrm{r_y}\,\dot{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}})-\mathrm{L_o^2}(\mathrm{e_y}\,\dot{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}}+\mathrm{e_x}\,\dot{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}})}{\mathrm{v_z}(\vec{\mathrm{r}}\cdot\vec{\mathrm{r}})+\mathrm{L_o}(\mathrm{r_x e_y}-\mathrm{r_y e_x})}.$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}e_o\\e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-(w_x e_1+w_y e_2+w_z e_3)\\w_x e_o+w_y e_3-w_z e_2\\w_y e_o+w_z e_1-w_x e_3\\w_z e_o+w_x e_2-w_y e_1\end{bmatrix}.$$

Junto con las condiciones iniciales de Horizons para posición y velocidad, y los multiplicadores nulos en t=0 (por lo que el vector p coincide con la velocidad).

Anexo X: Primera integral de conservación de la energía

Este modelo sería útil para simular largos períodos de tiempo, pues al conservar la energía, evita que los planetas realicen espirales. Las ecuaciones quedarían (listadas en el orden en que se resuelven),

$$\mathrm{k_e}=\frac{\gamma}{\mathrm{c_m}}\sqrt{\frac{\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{p}}}{\gamma^2-1}},$$

$$\vec{\mathrm{v}}=\frac{\vec{\mathrm{p}}}{\mathrm{k_e}},$$

$$\lambda_{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{k_e}-1}{2\,\gamma^2-1},$$

y las EDOs,

$$\frac{\mathrm{d}\,\gamma}{\mathrm{dt}}=\frac{\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{c_m^2}(2\,\gamma^2-1)}.$$

$$\frac{d\,\vec{x}}{dt}=\frac{\vec{v}}{\gamma},$$

$$\frac{d\,\vec{p}}{dt}=\frac{1}{\gamma}\left(\vec{F}\,(1-\lambda_e)-\vec{p}\,\dot{\gamma}\right),$$

Para las derivadas sin despejar, usamos el valor definido previamente (para no evaluar dos veces la misma expresión)

Referencias

[1] Extensión alternativa de la relatividad especial. https://vixra.org/abs/2302.0124

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic_Lagrangian_mechanics

[3] Desplazamiento en frecuencia gravitacional de fotones en relatividad especial. https://vixra.org/abs/2211.0117

[4] Mass wave model and speed propagation estimation. https://vixra.org/abs/2211.0020

[5] https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html

[6] Precession of mercury’s perihelion from ranging to the MESSENGER spacecraft. https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017AJ….153..121P/abstract

[7] The JPL planetary and lunar ephemerides DE440 and DE441. https://ssd.jpl.nasa.gov/doc/Park.2021.AJ.DE440.pdf

[8] Mathematicasl formulation of the double precision orbit determination program. https://ntrs.nasa.gov/citations/19710017134