?Решение? уравнения Навье-Стокса.   А. Панин

1. Математический аппарат

Обычным текстом в выражениях обозначим скаляры, жирным текстом обозначим векторы, применим единичный вектор-орт, единицы которого могут быть и рациональными, и комплексными, за счет чего определяется деление на вектор, по аналогии с кватернионами. Дополнительно, мнимая и вещественная величина не могут одновременно быть нулем, и в силу дальнейшего изложения материала это естественное предположение.

Единичные векторы

$$\boldsymbol{er} = \frac{\mathbf{1}}{|r|} * \left(r_x * \boldsymbol{i} + r_y * \boldsymbol{j} + r_z * \boldsymbol{k}\right) = (Cos(\alpha 1) * \boldsymbol{i} + Cos(\alpha 2) * \boldsymbol{j} + Cos(\alpha 3) * \boldsymbol{k}) * (a + b * i)\ ;$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \quad ; \quad |a + b * i| = 1 \quad ; \quad |Cos(\alpha 1) * \boldsymbol{i} + Cos(\alpha 2) * \boldsymbol{j} + Cos(\alpha 3) * \boldsymbol{k}| = 1$$

$$\frac{1}{\boldsymbol{er}} = \frac{\overline{\boldsymbol{er}}}{\boldsymbol{er}^{\mathbf{2}}} = \frac{Cos(\alpha 1)*\boldsymbol{i}+Cos(\alpha 2)*\boldsymbol{j}+Cos(\alpha 3)*\boldsymbol{k}}{(Cos(\alpha 1)*\boldsymbol{i}+Cos(\alpha 2)*\boldsymbol{j}+Cos(\alpha 3)*\boldsymbol{k})^{\mathbf{2}}} * \frac{(a-b*i)}{(a+b*i)^2} = \boldsymbol{er} = \overline{\boldsymbol{er}}$$

$$\boldsymbol{er} = \overline{\boldsymbol{er}} = \frac{1}{\boldsymbol{er}} \qquad (\mathbf{1.1.}) \qquad ; \quad \boldsymbol{er} * \frac{1}{\boldsymbol{er}} = 1 = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{e}$$

Так же запишем выражения для определения перестановок в скалярном произведении

$$\overline{\boldsymbol{er}} * (\mathrm{A} * \overline{\boldsymbol{er}}) = \overline{\boldsymbol{er}} * (B * \boldsymbol{er}) \quad \xrightarrow{def} \quad \boldsymbol{er} * (\mathrm{A} * \boldsymbol{er}) = \boldsymbol{er} * (B * \boldsymbol{er}) \quad (\mathbf{1.1.1.})$$

1. Если A и B скаляры

$$\overline{\boldsymbol{er}} * \boldsymbol{er} * A = \overline{\boldsymbol{er}} * \boldsymbol{er} * B \quad \rightarrow \quad \mathrm{A} = B$$

2. Если A и B векторы, с учетом того что $(\mathrm{A} * \boldsymbol{er})$ это скаляры, помножим на $\boldsymbol{er}$ слева

$$(\mathrm{A} * \boldsymbol{er}) = (B * \boldsymbol{er})$$

$$\left(A_x * \left(Cos(\alpha 1)\right) + A_y * \left(Cos(\alpha 2)\right) + A_z * \left(Cos(\alpha 3)\right)\right) * (a + b * i)$$
$$= \left(B_x * \left(Cos(\alpha 1)\right) + B_y * \left(Cos(\alpha 2)\right) + B_z * \left(Cos(\alpha 3)\right)\right) * (a + b * i)$$

Таким образом $\rightarrow$ $\mathrm{A} = B$

Тогда применяемое далее деление на вектор с любыми перестановками в скалярном произведении для $\overline{\boldsymbol{er}}$ и $\boldsymbol{er}$ определено для всех точек кроме нуля.

Запишем производную проекции скорости по направлению

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = \left(\frac{\partial(v_x)}{\partial x} * Cos(\alpha 1) + \frac{\partial(v_x)}{\partial y} * Cos(\alpha 2) + \frac{\partial(v_x)}{\partial z} * Cos(\alpha 3)\right) = \frac{\partial v_x}{\partial r}$$

Так же можно записать, с учетом того что $\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{er} \rangle$ это скаляр

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = \langle \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{er} \rangle, v_x \rangle \ ; \ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r} = \langle \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{er} \rangle, \boldsymbol{v} \rangle \ ; \ \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r} * \frac{1}{er}\right) = \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{er} \rangle * \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{er} \rangle$$

Тогда $\frac{\partial v_x}{\partial r} = \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{er} \rangle * v_x$ $\quad (\mathbf{1.3.})$ - производная скаляра по направлению

Тогда $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}} = \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{er} \rangle * \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{er} \rangle$ $\quad (\mathbf{1.2.})$ - производная вектора по вектору

Так же можно записать из (1.3.) и (1.1.1.)

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = \boldsymbol{er} * \frac{\partial v_x}{\partial r} = \boldsymbol{\nabla} * v_x \qquad (\mathbf{1.4.}) \qquad \text{(Градиент)}$$

Из (1.2.) и (1.1.1.)

$$\boldsymbol{er} * \boldsymbol{er} * \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}} = \langle \boldsymbol{er}, \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{er} \rangle\rangle * \langle \boldsymbol{er}, \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{er} \rangle\rangle \qquad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} * \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{v} \qquad (\mathbf{1.5.}) \qquad \text{(Дивергенция)}$$

Запишем операторы второго порядка

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}^2} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \langle \boldsymbol{\nabla}, \langle v_x * \boldsymbol{i} \rangle + \langle v_y * \boldsymbol{j} \rangle + \langle v_z * \boldsymbol{k} \rangle\rangle = \langle \boldsymbol{\nabla}, \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{v} \rangle\rangle \ (\mathbf{1.6.}) \qquad \text{(Градиент дивергенции)}$$

$$\langle \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\nabla} \rangle, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial}{\partial r}, \boldsymbol{v} \rangle \qquad (\mathbf{1.7.}) \qquad \text{(Оператор Лапласа)}$$

$$\langle\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\nabla} \rangle, v_x \rangle = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial v_x}{\partial r} \qquad (\mathbf{1.8.}) \qquad \text{(Дивергенция градиента)}$$

$$\langle \boldsymbol{\nabla}^2, \boldsymbol{v} \rangle = \frac{\partial^2 \langle v_x \rangle}{\partial \boldsymbol{r}^2} * \boldsymbol{i} + \frac{\partial^2 \langle v_y \rangle}{\partial \boldsymbol{r}^2} * \boldsymbol{j} + \frac{\partial^2 \langle v_z \rangle}{\partial \boldsymbol{r}^2} * \boldsymbol{k} \qquad (\mathbf{1.8.1.})$$

Определим операцию интегрирования для производной по вектору

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \int_{\boldsymbol{r_0}}^{\boldsymbol{r}} \frac{\partial(\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{r}} * \boldsymbol{dr} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v_0}) = \frac{\partial(\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \int_{\boldsymbol{r_0}}^{\boldsymbol{r}} \left(\frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) * \boldsymbol{dr} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} (v_x - v_{x0}) = \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial \boldsymbol{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \int_{\boldsymbol{r_0}}^{\boldsymbol{r}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) * \boldsymbol{dr} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_{\boldsymbol{r_0}}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \int_{\boldsymbol{r_0}}^{\boldsymbol{r}} \langle \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r}, \boldsymbol{v} \rangle * \boldsymbol{dr} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial v_x}{\partial r} * \boldsymbol{i} + \frac{\partial v_z}{\partial r} * \boldsymbol{j} + \frac{\partial v_z}{\partial r} * \boldsymbol{k} - \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} * \boldsymbol{i} + \frac{\partial v_z}{\partial r} * \boldsymbol{j} + \frac{\partial v_z}{\partial r} * \boldsymbol{k}\right)_{\boldsymbol{r_0}}\right) = \langle \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r}, \boldsymbol{v} \rangle$$

2. Уравнение Навье-Стокса в полной форме (с учетом полного тензора деформаций)

Пусть время будет комплексной скалярной переменной. Уравнение Навье-Стокса запишем идентично выражению в статье в Википедии, в полной форме, то есть с учетом полного тензора деформаций
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F_%D0%9D%D0%B0%D0%B2%D1%8C%D0%B5_%E2%80%94_%D0%A1%D1%82%D0%BE%D0%BA%D1%81%D0%B0

И если выше по тексту ошибок не допущено, после интегрирования уравнение Навье-Стокса упрощается, для несжимаемых сред, до вида ниже.

$$i * \rho * \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} * \boldsymbol{dr} = \left(-\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\lambda + \frac{\mu}{3}\right) * \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}^2} + \mu * \langle \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial v_x}{\partial \boldsymbol{r}} * \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial v_z}{\partial \boldsymbol{r}} * \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial v_z}{\partial \boldsymbol{r}} * \boldsymbol{k} \rangle + \boldsymbol{f_r}\right) * \boldsymbol{dr} \qquad (\mathbf{2})$$

$$\left(\left(\lambda+\frac{\mu}{3}\right)*\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}}+\mu*\left(\frac{\partial v_x}{\partial \boldsymbol{r}}*\boldsymbol{i}+\frac{\partial v_z}{\partial \boldsymbol{r}}*\boldsymbol{j}+\frac{\partial v_z}{\partial \boldsymbol{r}}*\boldsymbol{k}\right)\right)_{\boldsymbol{r1_0}}^{\boldsymbol{r1}}=\left(\ i*\frac{\rho}{2}*\left(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{2}}\right)+p\right)_{\boldsymbol{r1_0}}^{\boldsymbol{r1}}-Cf(\boldsymbol{r})\quad (\mathbf{2.1.})$$

$$Cf(\boldsymbol{r})=\int_{\boldsymbol{r1_0}}^{\boldsymbol{r1}}\boldsymbol{f_r}*d\boldsymbol{r}\qquad (\mathbf{2.2.})$$

$$\left(\mu*\boldsymbol{v}+\left(\lambda+\frac{\mu}{3}\right)*\boldsymbol{v}-\mu*\boldsymbol{r}*\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_{\boldsymbol{r1_0}}-\left(\lambda+\frac{\mu}{3}\right)*\boldsymbol{r}*\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_{\boldsymbol{r1_0}}\right)_{\boldsymbol{r2_0}}^{\boldsymbol{r2}}=\int_{\boldsymbol{r2_0}}^{\boldsymbol{r2}}\left(\left(\frac{\rho}{2}*(\boldsymbol{v}^2)+p\right)_{\boldsymbol{r1_0}}^{\boldsymbol{r1}}-Cf(\boldsymbol{r})\right)*d\boldsymbol{r}\qquad (\mathbf{2.3.})$$

Цифрами обозначены пределы первого и второго интегрирования.