Théorie des Surfaces: Application Aux Surfaces Equipotentielles du Champ Normal de gravité $U = U_0$, Partie I

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Résidence Bousten8, Bloc B, Avenue Mosquée Raoudha,
1181 Soukra Raoudha, TUNISIE.

E-mail: `abenhadjsalem@gmail.com`

ABSTRACT: Recently, in the article [1], we reviewed some models of equipotential surfaces of the normal field of gravity relative to the Earth. In this note, we will apply the important theorems of surface theory to the surface obtained from the second model whose normal gravitational field is given by:

$$U = \frac{Gm}{r} + \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right)$$

RÉSUMÉ:Récemment, dans l'article [1], nous avons passé en revue quelques modèles de surfaces équipotentielles du champ normal de gravité relatif à la Terre. Dans cette note, on va appliquer les grands théorèmes de la théorie des surfaces à la surface obtenue du deuxième modèle dont le champ normal de gravité est donné par:

$$U = \frac{Gm}{r} + \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right)$$

21 Février 2023

Table des matières

1 Introduction

Récemment, dans l'article [1], nous avons passé en revue quelques modèles de surfaces équipotentielles du champ normal de gravité relatif à la Terre. Dans cette note, on va étudier les propriétés de la surface obtenue du deuxième modèle dont le champ normal de gravité est donné par :

$$U = \frac{Gm}{r} + \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right) \tag{1.1}$$

où :

- G la constante universelle de gravitation,
- m la masse de la Terre,
- ω la vitesse de rotation de la Terre.

La surface équipotentielle du champ de pesanteur $U = U_0$ est définie par [1] :

$$H(X, Y, Z) = (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - U_0\right)^2 - G^2m^2 = 0 \tag{1.2}$$

Appelons cette surface (Γ). Soit $P(x, y, z)$ un point de cette surface tel que :

$$P\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x, y) \end{cases} \tag{1.3}$$

et z vérifie l'équation (1.2) qu'on peut écrire :

$$z^2 = \frac{4k^2}{\left[\omega^2(x^2 + y^2) - 2U_0\right]^2} - x^2 - y^2 \tag{1.4}$$

en notant $k = Gm$ et en supposant x, y tels que $\omega^2(x^2 + y^2) - 2U_0 \neq 0$.

2 Calcul de la Première Forme Fondamentale

Introduisons les notations habituelles :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Alors, nous avons :

$$\boldsymbol{OP'}_x = \frac{\partial \boldsymbol{OP}}{\partial x} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{OP'}_y = \frac{\partial \boldsymbol{OP}}{\partial y} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{OP}}{\partial x}.\frac{\partial \boldsymbol{OP}}{\partial x} = 1 + p^2, \quad F = \frac{\partial \boldsymbol{OP}}{\partial x}.\frac{\partial \boldsymbol{OP}}{\partial y} = p.q, \quad G = \frac{\partial \boldsymbol{OP}}{\partial y}.\frac{\partial \boldsymbol{OP}}{\partial y} = 1 + q^2$$

Par suite, on obtient l'expression de la première forme fondamentale :

$$\boxed{ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdz^2 = (1+p^2)dx^2 + 2pqdxdy + (1+q^2)dy^2} \tag{2.1}$$

De la symétrie de la surface (Γ), on considère que $x > 0, y > 0$ et $z > 0$. A partir de l'équation (1.4), on obtient :

$$p = -x\left(1 + \frac{1}{z}.\frac{8k^2\omega^2}{[\omega^2(x^2+y^2) - 2U_0]^3}\right) \Rightarrow E = 1 + x^2\left(1 + \frac{1}{z}.\frac{8k^2\omega^2}{[\omega^2(x^2+y^2) - 2U_0]^3}\right)^2 \tag{2.2}$$

$$q = -y\left(1 + \frac{1}{z}.\frac{8k^2\omega^2}{[\omega^2(x^2+y^2) - 2U_0]^3}\right) \Rightarrow G = 1 + y^2\left(1 + \frac{1}{z}.\frac{8k^2\omega^2}{[\omega^2(x^2+y^2) - 2U_0]^3}\right)^2 \tag{2.3}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left[1 + x^2\left(1 + \frac{1}{z}.\frac{8k^2\omega^2}{[\omega^2(x^2+y^2) - 2U_0]^3}\right)^2\right]dx^2 + \left[1 + y^2\left(1 + \frac{1}{z}.\frac{8k^2\omega^2}{[\omega^2(x^2+y^2) - 2U_0]^3}\right)^2\right]dy^2 \\ &+2xy\left(1 + \frac{1}{z}.\frac{8k^2\omega^2}{[\omega^2(x^2+y^2) - 2U_0]^3}\right)^2 dxdy \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le descriminant de la forme quadratique ds^2 est $\Delta' = F^2 - EG = -(1 + p^2 + q^2) < 0$, donc elle est définie positive. On peut l'écrire sous la forme :

$$ds^2 = (dx, dy)\begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = d\boldsymbol{P}^T.g.d\boldsymbol{P}, \quad g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix}, \quad d\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Soit la matrice g est définie positive, g est appelée la matrice du tenseur métrique de la surface (Γ).

2.1 Le Plan tangent

Le plan tangent au point P(x,y,z) est déterminé par les vecteurs non parallèles $\frac{\partial \boldsymbol{OP}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \boldsymbol{OP}}{\partial y}$. Son équation est donnée par le déterminant :

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{Z - z = p(X - x) + q(Y - y)} \tag{2.6}$$

2.2 Le vecteur normal à (Γ) au point P

Le vecteur normal N est donné par :

$$\mathcal{N} = \boldsymbol{OP'}_x \wedge \boldsymbol{OP'}_y = \begin{vmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

Le vecteur unitaire est obtenu par :

$$n = \frac{\mathcal{N}}{\|\mathcal{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \begin{vmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{vmatrix}$$

3 La Deuxième Forme Fondamentale

Rappelons le calcul de la deuxième forme fondamentale qu'on note $\Phi(x, y)$. On calcule le vecteur $d^2\boldsymbol{P}$ la différentielle seconde de $\boldsymbol{OP}$. On obtient :

$$d^2\boldsymbol{P} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial y^2}dy^2 \tag{3.1}$$

Alors :

$$\Phi(x, y) = n.d^2\boldsymbol{P} = n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial x^2}dx^2 + 2n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial x \partial y}dxdy + n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial y^2}dy^2 \tag{3.2}$$

On pose :

$$\boxed{\begin{cases} L = n.\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial x^2} \\[2ex] M = n.\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial x \partial y} \\[2ex] N = n.\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial y^2} \end{cases}} \tag{3.3}$$

Par suite, l'expression de la deuxième forme fondamentale :

$$\boxed{\Phi(x, y) = Ldx^2 + 2Mdxdy + Ndy^2} \tag{3.4}$$

En utilisant les notations citées ci-dessus, on obtient :

$$L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad ,M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \tag{3.5}$$

soit :

$$\Phi(x, y) = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dx^2 + 2\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dxdy + \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dy^2 \tag{3.6}$$

4 Calculs des Lignes Géodésiques

Soit une courbe (γ) tracée sur (Γ) et n' est le vecteur unitaire de la normale principale le long de (γ).

Définition 4.1. *Une courbe* (γ) *est dite ligne géodésique de la surface* (Γ) *si et seulement si les vecteurs* n *et* n' *sont colinéaires.*

On pose :

$$E'_x = \frac{\partial E}{\partial x} = 2pr; \quad E'_y = \frac{\partial E}{\partial y} = 2ps; \quad F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = rq + ps$$
$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = sq + pt; \quad G'_x = \frac{\partial G}{\partial x} = 2qs; \quad G'_y = \frac{\partial G}{\partial y} = 2qt \tag{4.1}$$

Les équations des lignes géodésiques de la surface (Γ) sont données par les deux équations différentielles [2] :

$$\boxed{(F'_x - \frac{E'_y}{2})\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + F\frac{d^2x}{ds^2} + G'_x\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + \frac{G'_y}{2}\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + G\frac{d^2y}{d\sigma^2} = 0} \tag{4.2}$$

$$\boxed{(F'_y - \frac{G'_x}{2})\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + F\frac{d^2y}{ds^2} + E'_y\frac{dy}{d\sigma}\frac{dx}{d\sigma} + \frac{E'_x}{2}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + E\frac{d^2x}{d\sigma^2} = 0} \tag{4.3}$$

σ désigne l'abscisse curviligne de la courbe γ. On obtient alors :

$$\boxed{rq\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + pq\frac{d^2x}{d\sigma^2} + 2qs\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + qt\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + (1+q^2)\frac{d^2y}{d\sigma^2} = 0} \tag{4.4}$$

$$\boxed{pt\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + pq\frac{d^2y}{d\sigma^2} + 2ps\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + pr\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + (1+p^2)\frac{d^2x}{d\sigma^2} = 0} \tag{4.5}$$

De la dernière équation, on va exprimer $\dfrac{d^2x}{d\sigma^2}$, soit :

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} = -\frac{pt}{1+p^2}\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 - \frac{pq}{1+p^2}\frac{d^2y}{d\sigma^2} - \frac{2ps}{1+p^2}\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} - \frac{pr}{1+p^2}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2$$

L'équation (4.4) devient :

$$\frac{1+p^2+q^2}{1+p^2}\frac{d^2y}{d\sigma^2} + \frac{qt}{1+p^2}\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + \frac{2sq}{1+p^2}\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + \frac{rq}{1+p^2}\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 = 0 \tag{4.6}$$

Comme la forme quadratique $d\sigma^2$ est définie positive, alors $d\sigma^2$ est toujours positive. On multiplie l'équation ci-dessus par $(1+p^2).\dfrac{d\sigma^2}{dx^2}$, on obtient alors l'équation différentielle du second d'ordre définissant les lignes géodésiques ($x = x, y = y(x, C_1, C_2), z = z(x, y(x, C_1, C_2)) = Z(x, C_1, C_2)$), C_1, C_2 sont les deux constantes d'intégration :

$$\boxed{(1 + p^2 + q^2)\frac{d^2y}{dx^2} + qt\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2sq\frac{dy}{dx} + rq = 0} \tag{4.7}$$

Nous verrons dans un prochain article, l'aspect numérique en choisissant une valeur numérique de U_0.

Références

[1] **Abdelmajid Ben Haj Salem**. 2023. *Note Sur Les Surfaces de Référence du Champ de Gravité*. www.vixra.org/abs/2302.0041, 12 pages.

[2] **Abdelmajid Ben Haj Salem**. 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens*, publié par Nour-Publishing, 365 pages. ISBN - 13 : 978-3-330-96843-1 (lien : https ://www.morebooks.de/store/gb/book/eléments-de-géodésie-et-de-la-théorie-des-moindres-carrés/isbn/978-3-330-96843-1), et https ://vixra.org/pdf/1511.0131v1.pdf, 390 pages, 2015.