

# 完全弹性碰撞条件下动量和动能守恒的本质因素分析

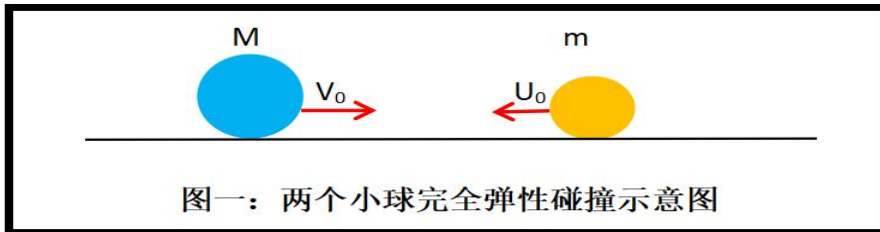
作者：彭晓韬

日期：2022.10.19

[内容摘要]：完全弹性碰撞条件下的动量和动能守恒是广为共知的常识，但就其内在因素的分析与研究资料并不常见，本文就此进行一些探索与讨论。希望有兴趣的朋友们多提意见与建议。

按照有质量物质运动状态的改变必定是力的作用之结果的普遍规律，我们可以很自然地想到：完全弹性碰撞条件下的动量和动能守恒定律应该是两个碰撞物体间相互碰撞时产生的相互作用力决定的：当两个物体相互碰撞时，接触面同时受到大小相等但方向相反的作用力与反作用力使彼此快速降低运动速度并改变运动速度与方向。我们假设碰撞过程中的相互作用力不随时间变化，则碰撞的作用力对碰撞双方所施加的变速运动的开始与结束时间完全一致，碰撞会使双方先减速后加速。此过程当然不存在所谓的动量或能量的传递。

## 一、完全弹性碰撞条件下的动量和动能守恒定律简介



### 1、动量守恒定律

假设两个小球的质量分别为  $M$ 、 $m$ ，碰撞前的速度分别为  $V_0$ 、 $-U_0$ ；碰撞后的速度分别为  $V_1$  和  $U_1$ 。则根据动量守恒定律有：

$$MV_0 - mU_0 = MV_1 + mU_1 \quad (\text{公式 1})$$

令：  $A = MV_0 - mU_0$  则有：  $A = mU_1 + MV_1$  (公式 1-1)

### 2、动能守恒定律

假设同上。则根据动能守恒定律有：

$$MV_0^2 + mU_0^2 = MV_1^2 + mU_1^2 \quad (\text{公式 2})$$

令：  $B = MV_0^2 + mU_0^2$  (公式 2) 可改写为：  $B = MV_1^2 + mU_1^2$  (公式 2-1)

### 3、碰撞后速度计算

根据 (公式 1-1) 有：  $V_1 = (A - mU_1) / M$

代入 (公式 2-1) 并整理后有：

$$U_1 = \frac{mA \pm \sqrt{(M+m)MmB - MmA^2}}{Mm + m^2} \quad (\text{公式 3})$$

将 A、B 值代入 (公式 3) 并整理后可得：

$$U_{11} = \frac{2MV_0 + (M - m)U_0}{M + m} \quad (\text{公式 3-1})$$

$$U_{12} = -U_0 \quad (\text{公式 3-2})$$

(公式 3) 的第二个解  $U_{12}$  暂时舍弃。

将 (公式 3-1) 代入 (公式 1) 并整理后有:

$$V_1 = \frac{(M-m)V_0 - 2mU_0}{M+m} \quad (\text{公式 4})$$

## 二、完全弹性碰撞持续期间的相互作用力为恒定值时的情形

假设相互碰撞期间的相互作用力为  $F$ ，碰撞开始时刻为  $T$ ，持续时间为  $\Delta t$ ，则自碰撞开始到碰撞结束期间两个小球的加速度和速度变化分别为:

### 1、质量为 $M$ 的球

加速度为:  $a_M = F/M$

速度为:  $V = V_0 - a_M (t-T)$

当时间  $t = T + 2\Delta t$  时有:

$$V = V_0 - a_M (t-T) = V_1 \quad (\text{公式 5})$$

### 2、质量为 $m$ 的球

加速度为:  $a_m = F/m$

速度为:  $U = a_m (t-T) - U_0$

当时间  $t = T + 2\Delta t$  时有:

$$U = a_m (t-T) - U_0 = U_1 \quad (\text{公式 6})$$

### 3、碰撞后的速度计算

假设碰撞后质量为  $M$  的球的速度正好等于 (公式 4) 确定的数据, 则将 (公式 4) 代入 (公式 5) 并整理后有:

$$(t-T) = \frac{M}{F} \frac{2m(V_0 + U_0)}{M+m} \quad (\text{公式 7})$$

将 (公式 7) 代入 (公式 6) 并整理后有:

$$U_1 = \frac{2MV_0 + (M-m)U_0}{M+m} \quad (\text{公式 8})$$

(公式 8) 得到的是碰撞后质量为  $m$  的球的速度值。从 (公式 8) 与 (公式 3-1) 对比可知: 两个公式完全一致。这就直接证明, 是碰撞产生的一对大小相同、方向相反的力且没有其他干扰因素影响的情况下才使两个球的运动速度发生变化后仍遵循动量和动能守恒定律的。

### 三、完全弹性碰撞球体碰撞期间的动量和动能变化情形

我们仍以碰撞期间的相互作用力为恒定值来计算上述两球碰撞期间的动量和动能变化情况。

假设相互碰撞期间的相互作用力为  $F$ ，碰撞开始时刻为  $T$ ，持续时间为  $\Delta t$ ，则自碰撞开始到碰撞结束期间两个小球的动量和动能变化分别为：

#### 1、质量为 $M$ 的球体

$$\text{动量: } P = MV = M (V_0 - F (t-T) / M) = MV_0 - F (t-T) \quad (0 < t < \Delta t)$$

$$\text{动量的增量: } \Delta P = MV - MV_0 = -F (t-T) \quad (\text{公式 9})$$

$$\text{动能: } 0.5MV^2 = 0.5M (V_0 - F (t-T) / M)^2 = 0.5(MV_0^2 - 2F (t-T) V_0 + [F (t-T)]^2 / M)$$

$$\text{动能的增量: } \Delta E = 0.5MV^2 - 0.5MV_0^2 = 0.5[F (t-T)]^2 / M - F (t-T) V_0 \quad (\text{公式 10})$$

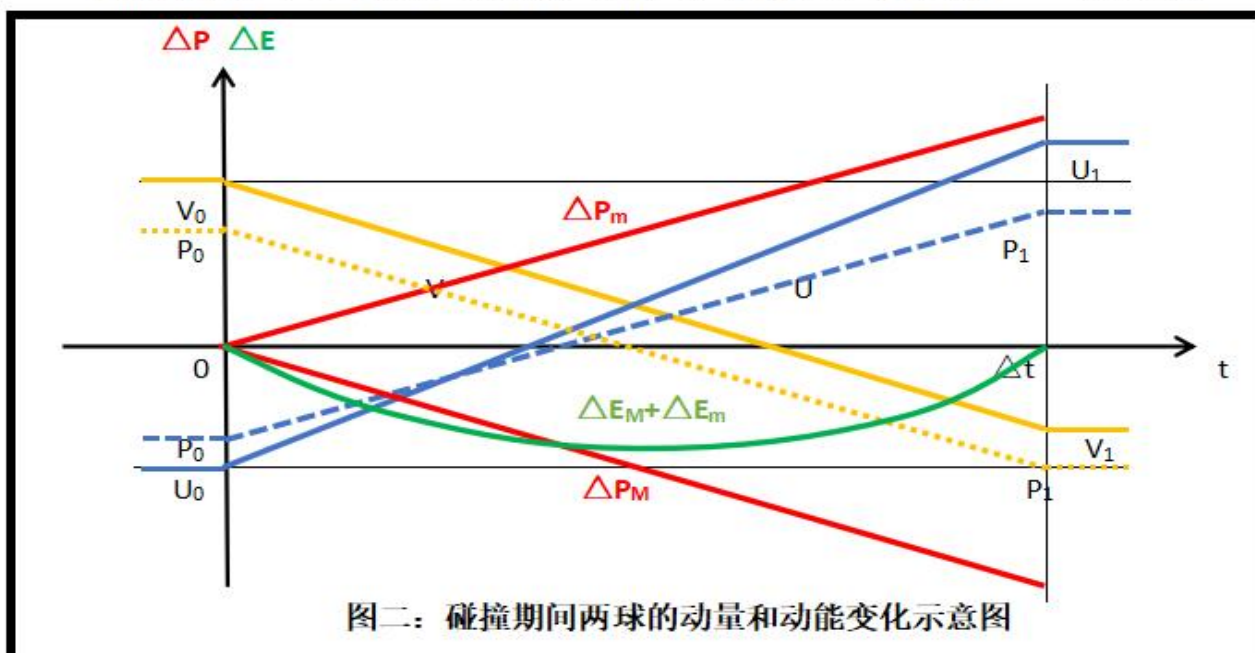
#### 2、质量为 $m$ 的球体

$$\text{动量: } P = mU = m (F (t-T) / m - U_0) = F (t-T) - mU_0 \quad (0 < t < \Delta t)$$

$$\text{动量的增量: } \Delta P = mU - mU_0 = F (t-T) \quad (\text{公式 11})$$

$$\text{动能: } 0.5mU^2 = 0.5m (F (t-T) / m - U_0)^2 = 0.5 (mU_0^2 - 2F (t-T) U_0 + [F (t-T)]^2 / m)$$

$$\text{动能增加量: } \Delta E = 0.5mU^2 - 0.5mU_0^2 = 0.5[F (t-T)]^2 / m - F (t-T) U_0 \quad (\text{公式 12})$$



#### 3、两球碰撞期间动量增量比较

由（公式 9）和（公式 11）可知：碰撞期间，两个球的动量增量在同一时刻的大小是相等的但方向相反，一个增、另一个减，其和为 0。如图二的红色实线所示。因此，在碰撞的整个过程中，动量都是保持恒定不变的。也就是动量守恒定律在整个碰撞过程中都是适用的。

#### 4、两球碰撞期间动能增量比较

将（公式 10）+（公式 12）则有：

$$\begin{aligned}\Delta E_M + \Delta E_m &= \frac{0.5(F(t-T))^2}{M} - F(t-T)V_0 + \frac{0.5(F(t-T))^2}{m} - F(t-T)U_0 \\ &= 0.5(F(t-T))^2 \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - F(t-T)(V_0 + U_0)\end{aligned}\quad (\text{公式 13})$$

我们知道：当两个球相互碰撞时，两者的速度绝对值都是降低的，直到两者相对静止时速度的绝对值达到最小后，再在碰撞的作用力作用下再逐渐向反方向提升速度绝对值。当两球脱离接触后，两者的速度绝对值就不再发生变化了。因此，（公式 13）的值应该是这样变化的：在前半个  $\Delta t$  期间，两球的动能增量之和是逐渐减小的；有后半个  $\Delta t$  期间，两球的动能增量之和是逐渐增大的。如上图二中绿色实线条所示。

从（公式 13）可知：两个球体在碰撞期间的动能是不守恒的，只是在完全弹性碰撞的情况下，两个球体的速度绝对值先是从大变小，后期又从小变大，从而在碰撞结果时保持了动能守恒。这种情况只能属于机缘巧合而已，是在没有外力干扰及碰撞力的损失情况下才有的理想结果。而实际上是很难遇到这种理想结果的。

将  $(t-T) = \Delta t$  代入（公式 13），其结果应该等于 0，也就是动能守恒。则有：

$$\Delta E_M + \Delta E_m = 0.5(F\Delta t)^2 \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) - F\Delta t(V_0 + U_0) = 0 \quad (\text{公式 14})$$

上式中的“ $F\Delta t$ ”即为常说的冲量，其数值为：

$$F\Delta t = \frac{2mM(V_0 + U_0)}{m + M} \quad (\text{公式 15})$$

## 四、完全弹性碰撞条件下动量和动能守恒的本质因素及物理意义

### 1、动量和动能守恒的本质因素分析

从以上分析过程可知：动量守恒和动能守恒都是由相互碰撞期间存在的一对作用力与反作用力决定的。动量守恒是在整个碰撞期间始终成立的；而能量守恒并不是在整个碰撞期间始终成立的，只有在碰撞期间的作用力与反作用力整个过程保持一致或前半程与后半程严格镜像对称（没有外力干扰或力量损耗）条件下才成立。即前期减速导致的动能减少在后期的加速中得到弥补。总之，动量和动能守恒的本质因素是碰撞期间的力，主要是原子最外层的电子之间存在的库仑力作用的结果。

### 2、动量和动能守恒定律的物理意义

此二守恒定律揭示了有质量物质间的动能与动量的变化都是力作用的结果，并不是动量和动能的传递与转移。动量和动能是力作用的结果，而不是可以改变物体运动的原因和力量。