Title: Desplazamiento en frecuencia gravitacional de fotones en relatividad especial de campos

Abstract
Se presenta un procedimiento de cálculo para el desplazamiento en frecuencia gravitacional al amparo de la relatividad especial de campos. Se ofrecen algunas implicaciones a otros campos.

Autor: Enrique Domínguez Pinos.
Ingeniero Industrial.

Email: enrique_pinos@yahoo.es

Málaga, 15 de Noviembre de 2022 (v2, revisado: 10/04/2024)

Table of Contents

Introducción

En el modelo mecánico sin cálculo de frecuencia de los fotones[1] usamos las ecuaciones de Euler-Lagrange con la restricción de relatividad especial de constancia de la velocidad de la luz.
Ese procedimiento es útil cuando los fotones no viajan perpendicularmente a las lineas de potencial, esto es, en la dirección de alejarse/acercarse hacia la masa gravitacional. El modelo también es inestable numéricamente cuando esto pasa.
Vamos a ver un nuevo modelo que, en la misma línea, ahora permite el cálculo en cualquier caso y, además, permite evaluar la variación de frecuencia sin recurrir a relatividad general, usaremos los resultados de relatividad especial de campos[10]. Para un análisis más conciso del experimento de Pound & Sneider, consultar el documento consolidado de relatividad especial de campos, en la referencia [10]. Aquí vamos a tratar el problema de modo más general, planteando y resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) que exige relatividad especial de campos.

Definiciones

La ecuación de la energía cinética para las ondas electromagnéticas sería,

$$E_c = m\, c_m^2 = hf\,. \qquad (1)$$

No podemos usar en (1) una expresión relativista (con el factor de Lorentz) porque los fotones viajan a la velocidad de la luz, y esa expresión ya coincide con la definición de energía cinética del fotón; su onda asociada se desplaza a velocidad c_m. Y en el lado derecho vemos la energía, en función de la frecuencia, de dicha onda. El no usar esta expresión así, va en contra del resultado de los experimentos[2],[6],[7].

La relatividad especial de campos en campo gravitatorio requiere que la velocidad del fotón sea c_m,

$$\vec{v}\cdot\vec{v}=c_m^{2.} \qquad (2)$$

Dado un campo de fuerzas, para la partícula de masa m, la aceleración que se produce es,

$$\vec{a}=\vec{F}/m.$$

Podemos obtener su descomposición en aceleración tangencial, paralela a la dirección de movimiento,

$$\vec{a}_t=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})\vec{v}}{c_m^2},$$

y normal,

$$\vec{a}_n=\vec{a}-\vec{a}_t.$$

La fuerza con componente tangencial sería,

$$\vec{F}_t=m\,\vec{a}_t.$$

Esta descomposición permite calcular el desplazamiento en frecuencia, definido como el trabajo de la fuerza tangencial, e igual a la variación de frecuencia por la constante de Planck,

$$\frac{dW_t}{2}=\frac{1}{2}\vec{F}_t\cdot d\,\vec{x}=h\,df.$$

El factor un medio aparece por el hecho de que las ondas electromagnéticas tienen dos polarizaciones susceptibles de capturar energía , y esta energía se reparte equitativamente (en principio) entre las dos polarizaciones. Implícitamente hemos supuesto que ambas polarizaciones poseen la misma frecuencia f.

Despejando en (1) la masa y sustituyendo en la anterior, ya con el valor de la fuerza tangencial, nos queda,

$$\frac{hf}{2\,c_m^2}\vec{a}_t\cdot d\,\vec{x}=h\,df.$$

que nos da la variación de la frecuencia con el tiempo,

$$\frac{df}{dt}=\frac{f}{2\,c_m^2}\vec{a}_t\cdot\vec{v}.$$

o, sustituyendo la expresión de la aceleración tangencial y usando (2),

$$\frac{df}{dt}=\frac{f}{2\,c_m^2}\vec{a}\cdot\vec{v}. \qquad (3)$$

Y no depende de la constante de Planck.

Como el trabajo de la aceleración tangencial se invierte exclusivamente en la variación de frecuencia, es la aceleración normal la que define la trayectoria del fotón.

De este modo, las ecuaciones diferenciales ordinarias salen de introducir la fuerza normal en la ley de Newton,

$$\vec{F}_n = m\,\vec{a}_n = m\,\frac{d^2\vec{x}}{dt^2},$$

que no depende de la masa del fotón, como cabría esperar,

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{a}_n. \qquad (4)$$

El conjunto final de EDOs es el dado por (3) y (4).

Aplicación al experimento de Pound et al

Redshift

Dado por[3],

$$z = \frac{f_o}{f} - 1.$$

Donde f_o es la frecuencia inicial, y f la que se observa en el punto de recogida de la medición.

Ecuaciones

En campo gravitatorio la aceleración es,

$$\vec{a} = GM\left(\frac{-x}{[x^2+y^2]^{3/2}}, \frac{-y}{[x^2+y^2]^{3/2}}\right),$$

la aceleración tangencial,

$$\vec{a}_t = \frac{-GM}{2c_m^2}\left(\frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{[x^2+y^2]^{3/2}}\right)(\dot{x}, \dot{y}),$$

y llamando, por simplificar,

$$G_r = \frac{GM}{c_m^2}\frac{1}{[x^2+y^2]^{3/2}},$$

la aceleración normal queda,

$$\vec{a}_n = G_r\left((x\dot{x}+y\dot{y})\dot{x} - x c_m^2, (x\dot{x}+y\dot{y})\dot{y} - y c_m^2\right),$$

ó, agrupando términos,

$$\vec{a}_n = G_r\left(y\dot{y}\dot{x} + x(\dot{x}^2 - c_m^2), x\dot{x}\dot{y} + y(\dot{y}^2 - c_m^2)\right).$$

Para la (4), las EDOs quedan,

$$\ddot{x} = G_r\left(y\dot{y}\dot{x} + x(\dot{x}^2 - c_m^2)\right),$$
$$\ddot{y} = G_r\left(x\dot{x}\dot{y} + y(\dot{y}^2 - c_m^2)\right).$$

Para la (3), con,

$$\vec{a}\cdot\vec{v}=-GM\left(\frac{x\,\dot{x}+y\,\dot{y}}{[x^2+y^2]^{3/2}}\right),$$

queda,

$$\frac{df}{dt}=\frac{-GMf}{2\,c_m^2}\left(\frac{x\,\dot{x}+y\,\dot{y}}{[x^2+y^2]^{3/2}}\right).$$

ó,

$$\frac{df}{dt}=\frac{-f\,G_r}{2}(x\,\dot{x}+y\,\dot{y}).$$

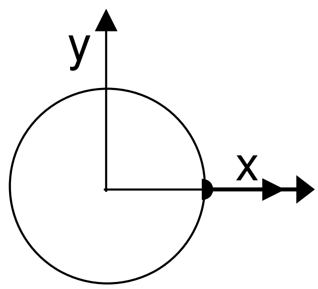
Si expresamos todas las EDOs en el espacio de estados,

$$\begin{gathered}\dot{p}=-G_r\left(x(c_m^2-p^2)-y\,p\,q\right),\\ \dot{q}=-G_r\left(-x\,p\,q+y(c_m^2-q^2)\right),\\ \dot{x}=p,\\ \dot{y}=q,\\ \dot{f}=\frac{-f\,G_r}{2}(x\,p+y\,q).\end{gathered}$$

este sistema se integra con las condiciones en t=0,

$$\begin{gathered}p=c_m,\\ q=0,\\ x=R,\\ y=0,\\ f=f_o.\end{gathered}$$

Hacemos coincidir con el eje x la dirección de partida del fotón. Con el origen de coordenadas en el centro de la masa gravitacional, de masa M y radio R. El fotón partirá desde su superficie paralelamente a la gravedad.



Puesto que hemos alineado el eje x con la dirección en que los fotones se emiten alejándose del campo gravitatorio, el sistema de ecuaciones se simplifica a,

$$\begin{gathered}p=c_m,\\ q=0,\\ x=c_m t+R,\\ y=0,\\ \dot{f}=\frac{-f}{2}G_r\,x\,p.\end{gathered}$$

sustituyendo en la última G_r,

$$\dot{f}=-f\frac{GM}{2c_m^2x^2}p.$$

E integrando con el valor de x(t),

$$\frac{f}{f_o}=\exp\left(\frac{GM}{2c_m^2}\left(\frac{1}{c_m t+R}-\frac{1}{R}\right)\right).$$

Siendo 'exp' la función exponencial.
Y el redshift queda,

$$z=\exp\left(\frac{-GM}{2c_m^2}\left(\frac{1}{c_m t+R}-\frac{1}{R}\right)\right)-1.$$

Como lo que está en el interior de la exponencial es muy pequeño comparado con 1 en ambas de las dos expresiones anteriores, podemos aproximarlas,

$$z\simeq\frac{-GM}{2c_m^2}\left(\frac{1}{c_m t+R}-\frac{1}{R}\right), \tag{5}$$

y para la frecuencia,

$$\frac{f}{f_o}\simeq 1+\frac{GM}{2c_m^2}\left(\frac{1}{c_m t+R}-\frac{1}{R}\right). \tag{6}$$

Resultados

En el experimento,

$$c_m t=h,$$

Usando la aproximación de que el radio de la tierra es muy superior a h,

$$\mathrm{R}\gg\mathrm{h},$$

(5) queda,

$$\mathrm{z}\simeq\frac{\mathrm{GMh}}{2\mathrm{R}^2\mathrm{c}_\mathrm{m}^2},$$

y sustituyendo por la aceleración de la gravedad,

$$\mathrm{g}=\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{R}^2},$$

resulta,

$$\mathrm{z}\simeq\frac{\mathrm{gh}}{2\mathrm{c}_\mathrm{m}^2},$$

que, en función a la velocidad del fotón,

$$\mathrm{z}\simeq\frac{\mathrm{gh}}{\mathrm{c}^2},$$

Nótese que Pound y Snider calcularon el redshift del camino de ida y vuelta de los fotones[11], redshift-blueshift, como el blueshift es negativo e igual al redshift,

$$\mathrm{z}_{\mathrm{exp}}=\mathrm{z}_{\mathrm{redshift}}-\mathrm{z}_{\mathrm{blueshift}}=2\,\mathrm{z}_{\mathrm{redshift}}.$$

Hay que multiplicar por dos el resultado de los cálculos.

Sustituyendo los valores del experimento de Pound y Snider (1965),

$$h=22.5552\,m\,,$$
$$g=9.82\,m/s^2\,,$$
$$c=299{,}792{,}458\,m/s\,,$$
$$R=6.371\,e^6\,m\,,$$

queda,

$$z_{exp}=4.905\,e^{-15}\,,$$
$$z_{teo}=4.9296\,e^{-15}\,.$$

Aceleración centrípeta terrestre

Un cálculo rápido sobre la aceleración centrípeta terrestre arroja,

$$a_c=\left(\frac{2\pi}{24\cdot 3600}\right)^2 R=0.034\,m/s^2\,,$$

Con R el radio de la tierra. Si restamos esta aceleración a la de la gravedad, el nuevo redshift es,

$$z_{teo}=4.9120\,e^{-15}\,.$$

nos aproxima más al valor del experimento.

Masa del fotón

Nótese que (1) parece predecir una masa para el fotón[4],[5],[8]. Que varía, además, con la frecuencia de la onda electromagnética,

$$m=\frac{2\,hf}{c^2}\,,$$

Expresado en función de la velocidad de la luz.

Para la temperatura de T=1e3K, la ley de Wien[9],

$$\lambda_{max}\,T=b\,,$$

con,

$$b=2.898\,e^{-3}\,m\cdot K\,.$$

Nos da una frecuencia máxima de los fotones de,

$$f_{max}=\frac{c}{\lambda_{max}}=\frac{c\,T}{b}\,,$$

Lo que nos da una masa estimada de,

$$m=\frac{2\,hT}{cb}=1.5253\,e^{-36}\,kg\gg 1\,e^{-40}\,kg\,,$$

que ya debiera haberse detectado. Lo que no deja claro cómo interpretar la masa en (1).

Radio de Schwarzschild

Vamos a definir el radio de Schwarzschild, sobre la predicción de agujeros negros, en base a (6).

Imaginemos un fotón que se aleja del campo gravitatorio hasta perder toda su energía. Si en la expresión (6) hacemos,

$$t \rightarrow \infty, f \rightarrow 0,$$

entonces, invirtiendo el orden de los términos de la ecuación para tener el cero a la derecha,

$$1-\frac{GM}{2Rc_m^2}=0,$$

Podemos despejar el valor del radio R,

$$R=\frac{GM}{2c_m^2}.$$

En función a la velocidad de la luz,

$$R=\frac{GM}{c^2}.$$

Que es la mitad del radio de Schwarzschild, obtenida con consideraciones sólo sobre energía de los fotones. Nótese que en éste caso el infinitésimo de la exponencial tiene bastante error, y es mejor usar una aproximación más precisa como,

$$R=\frac{2GM}{10\cdot c^2}.$$

Por lo que este razonamiento nos lleva a dos conclusiones:
- El radio de Schwarzschild parece estar sobreestimado en un factor de 10.
- Los agujeros negros dejarían de emitir radiación sólo en el límite del infinito, o sea, que con el instrumento lo bastante preciso, tiene que detectarse radiación.

Referencias

[1] Deflection of photons in gravitational field. https://vixra.org/abs/2211.0075

[2] Measurements of gravitational redshift between 1959 and 1971. https://www.researchgate.net/publication/250892397

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Redshift

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Photon

[5] https://pdg.lbl.gov/2022/tables/contents_tables.html

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Pound-Rebka_experiment

[7] The Gravitational Red-Shift. arXiv:gr-qc/0403082

[8] The mass of the photon. http://stacks.iop.org/RoPP/68/77. Doi:10.1088/0034-4885/68/1/R02

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Wien%27s_displacement_law

[10] Experimentos de GR resueltos con relatividad especial de campos. https://vixra.org/abs/2404,0013

[11] https://www.physics.harvard.edu/sites/projects.iq.harvard.edu/files/physics/files/2021-pund-rebka.pdf