Le Problème de Mouvement de N Corps - v2, October 2022 -

Cas du Mouvement de Trois Corps

Abdelmajid Ben Hadj Salem

16 octobre 2022

Résidence Bousten 8, Bloc B, Rue Mosquée Raoudha,
1181 Soukra Raoudha, Tunisia

Abstract

The object of this paper is the problem of the motion of three bodies subjected to the attraction of gravitation. In section 1, we write the equations of motion, then we give the ten first integrals of motion. We treat the equations of motion of the case of an artificial satellite around the earth in section 2, where we deduce the 3 laws of Kepler and we give the resolution of the equations of motion of the artificial satellite. In section 3, we consider the case of the motion of two bodies. Finally in section 4, we give details of the equations of motion of 3 bodies, we develop the inverse of the squares of the distances to the first order. We treat, by neglecting the mass of a body, the problem called the restricted movement of two bodies.

Résumé

L'objet de ce papier est le problème du mouvement de trois corps soumis à l'attraction de la gravitation. Dans la section 1, on écrit les équations du mouvement, puis on donne les dix intégrales premières du mouvement. On traite les équations du mouvement du cas d'un satellite artificiel autour de la terre dans la section 2, où on déduit les 3 lois de Kepler et on donne la résolution des équations du mouvement du satellite artificiel. Dans la section 3, on considère le cas du mouvement de deux corps. Enfin dans la section 4, on donne détaille les équations du mouvement de 3 corps, on développe l'inverse des carrés des distances au premier ordre. On traite alors en négligeant la masse d'un corps le mouvement restreint de deux corps seulement.

Keywords : Mouvement de 3 corps, lois de Kepler, potentiel de gravitation, le hamiltonien, intégrales premières, mouvement elliptique.

Table des matières

Le Problème de Mouvement de N Corps
- V2, October 2022 -

Le Problème des trois corps a une telle importance pour l'Astronomie, et il est en même temps si difficile, que tous les efforts des géomètres ont été depuis longtemps dirigés de ce côté. Une intégration complète et rigoureuse étant manifestement impossible, c'est aux procédés d'approximation que l'on a dû faire appel.
Henri Poincaré[1] ([3],1892)

A tous mes amis et collègues

1 Le Problème de n corps

Considérons le mouvement de n corps $P_k(k = 1, 2, ..., n)$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$. Soient (x_k, y_k, z_k) les coordonnées de P_k dans un repère cartésien fixe et m_k sa masse ($m_k > 0$). Notons r_{kl} la distance entre les points P_k et P_l telle que :

$$r_{kl}^2 = (x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2 \quad (k, l = 1, 2, ..., n) \tag{1}$$

Les corps P_k soumis à l'attraction universelle dans le repère cartésien qu'on note $\mathscr{R}(O, e_1, e_2, e_3)$.

Définition 1.1: Fonction Potentiel

La fonction potentiel due à la gravitation est :

$$U = \sum_{k<l} \frac{G.m_k m_l}{r_{kl}} = \sum_{k<l} \frac{G.m_k m_l}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2}} = \sum_{k<l} U_{kl} \tag{2}$$

avec G la constante universelle de la gravitation et :

$$U_{kl} = \frac{G.m_k m_l}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2}} \tag{3}$$

Notons par q et m respectivement l'une des composantes et la masse d'un point quelconque P_l, alors on peut écrire les équations du mouvement :

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = U_q = \frac{\partial U}{\partial q} \tag{4}$$

Appliquons par exemple la formule précédente pour la composante x d'un point P_k, on obtient :

$$m_k\frac{d^2x_k}{dt^2} = U_{x_k} = \frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l\neq k}\frac{Gm_k m_l}{r_{kl}} \tag{5}$$

1. Henri Poincaré (1854-1912) : mathématicien français, parmi les plus grands du XIXème siècle.

par suite l'équation du mouvement pour la première composante du point P_k :

$$m_k\frac{d^2x_k}{dt^2}=\sum_{l\neq k}\frac{Gm_km_l(x_l-x_k)}{r_{kl}^3}=\sum_{l=1;l\neq k}^{l=n}\frac{Gm_km_l(x_l-x_k)}{r_{kl}^3}\quad k=1,2,\ldots,n \tag{6}$$

1.1 Les Intégrales Premières des équations du mouvement

Si on somme les deux membres à gauche et à l'extrême droite de l'équation précédente, on obtient :

$$\sum_k m_k\frac{d^2x_k}{dt^2}=\sum_k\sum_{l\neq k}\frac{Gm_km_l(x_l-x_k)}{r_{kl}^3}=0 \tag{7}$$

Ce qui donne :

$$\sum_k m_k\frac{d^2x_k}{dt^2}=0\Longrightarrow\boxed{\sum_k m_k\frac{dx_k}{dt}=a,\quad a=constante} \tag{8}$$

De même, on obtient :

$$\boxed{\sum_k m_k\frac{dy_k}{dt}=b,\quad b=constante} \tag{9}$$

$$\boxed{\sum_k m_k\frac{dz_k}{dt}=c,\quad c=constante} \tag{10}$$

C'est la conservation de la quantité de mouvement $\sum_k m_kv_k\;=\;constante$.

En intégrant une deuxième fois les équations (8-9-10), on obtient :

$$\boxed{\textstyle\sum_k m_kx_k=at+a_0,\quad a_0=constante} \tag{11}$$

$$\boxed{\textstyle\sum_k m_ky_k=bt+b_0,\quad b_0=constante} \tag{12}$$

$$\boxed{\textstyle\sum_k m_kz_k=ct+c_0,\quad c_0=constante} \tag{13}$$

A partir de (6), les équations du mouvement s'écrivent sous forme vectorielle comme suit :

$$m_k\frac{d^2\boldsymbol{OP}_k}{dt^2}=\sum_{l=1;l\neq k}^{l=n}\frac{Gm_km_l(\boldsymbol{OP}_l-\boldsymbol{OP}_k)}{r_{kl}^3} \tag{14}$$

Multiplions vectoriellement les deux membres de l'équation précédente par $\boldsymbol{OP}_k$, on obtient :

$$m_k\frac{d^2\boldsymbol{OP}_k}{dt^2}\wedge\boldsymbol{OP}_k=\sum_{l=1;l\neq k}^{l=n}\frac{Gm_lm_k(\boldsymbol{OP}_l-\boldsymbol{OP}_k)}{r_{kl}^3}\wedge\boldsymbol{OP}_k=\sum_{l=1;l\neq k}^{l=n}\frac{Gm_lm_k(\boldsymbol{OP}_l\wedge\boldsymbol{OP}_k)}{r_{kl}^3} \tag{15}$$

On somme sur l'indice k, d'où :

$$\sum_k m_k \frac{d^2 \boldsymbol{OP}_k}{dt^2} \wedge \boldsymbol{OP}_k = \sum_k \sum_{l=1;l\neq k}^{l=n} \frac{Gm_l m_k(\boldsymbol{OP}_l \wedge \boldsymbol{OP}_k)}{r_{kl}^3} = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

L'équation précédente s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k m_k \frac{d\boldsymbol{OP}_k}{dt} \wedge \boldsymbol{OP}_k\right) = \boldsymbol{0} \tag{17}$$

En intégrant, on trouve :

$$\sum_k m_k \frac{d\boldsymbol{OP}_k}{dt} \wedge \boldsymbol{OP}_k = \boldsymbol{W} = (\alpha, \beta, \gamma)^T \textit{ vecteur constant} \tag{18}$$

C'est la conservation du <u>moment cinétique</u>. Soit en considérant les composantes du moment cinétique :

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k(\dot{y}_k z_k - y_k \dot{z}_k) = \alpha \\ \sum_{k=1}^n m_k(\dot{z}_k x_k - z_k \dot{x}_k) = \beta \\ \sum_{k=1}^n m_k(\dot{x}_k y_k - x_k \dot{y}_k) = \gamma \end{aligned}} \tag{19}$$

en notant $\dot{q}_k = \dfrac{dq_k}{dt}$.

A partir de l'équation (4), on peut écrire en multipliant ses deux membres par $\dfrac{dq}{dt}$:

$$m\frac{d^2q}{dt^2}.\frac{dq}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q}.\frac{dq}{dt} \tag{20}$$

En sommant sur toutes les composantes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \sum_i^3 d\left(\frac{1}{2}m_k\left(\frac{dq_{ik}}{dt}\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial U}{\partial q_k} dq_k \tag{21}$$

En intégrant l'équation précédente, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \sum_i^3 \left(\frac{1}{2}m_k\left(\frac{dq_{ik}}{dt}\right)^2\right) - U = \textit{constante} \tag{22}$$

or :

$$v_k^2 = \sum_i^3 \left(\frac{dq_{ik}}{dt}\right)^2 \tag{23}$$

Par suite, on écrit :

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 - U = T - U = constante} \tag{24}$$

où :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 \tag{25}$$

est l'énergie cinétique et U l'energie potentielle.

Les équations (8-9-10) et (11-12-13) et les 3 équations de (19) et (24) constituent les 10 intégrales premières. Le système (14) est formé de $3n$ équations avec les 10 intégrales pour déterminer les $3n$ inconnues.

2 Notions sur Le Mouvement d'un Satellite Artificiel de la terre

Dans cette section, on va étudier le cas du mouvement d'un satellite artificiel autour de la Terre.

2.1 Le Champ de Pesanteur

Le phénomène fondamental qui régit la forme de la Terre est la pesanteur. Elle est le résultat de l'attraction newtonienne du corps terrestre et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre autour de son axe. Voyons ce-ci en détail.

Soit le repère $OXYZ$ tel que O soit le centre de gravité de la Terre et OZ son axe de rotation. Le plan OXZ contient le méridien de Greenwich.

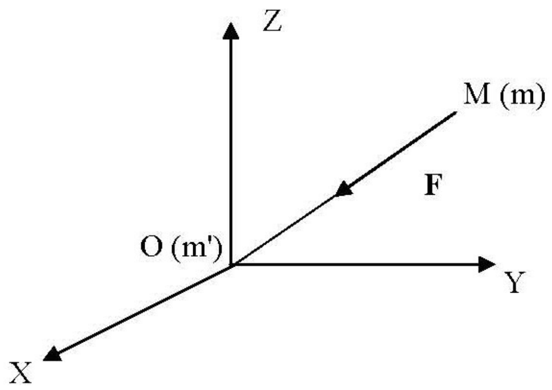

FIGURE 1 – Le Repère 3D

2.1.1 Le Champ du Potentiel

On appelle champ du potentiel la fonction scalaire V définie par :

$$V = \frac{Gmm'}{r} = V(X, Y, Z) \tag{26}$$

2.1.2 Gradient

On appelle gradient d'une fonction scalaire $U(X,Y,Z)$ le vecteur noté $\boldsymbol{grad}U$ et de composantes :

$$\boldsymbol{grad}U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} \\ \\ \frac{\partial U}{\partial Y} \\ \\ \frac{\partial U}{\partial Z} \end{pmatrix} \tag{27}$$

Exemple 1 : $U = X^2 + Y^2 + Z^2$, $\boldsymbol{grad}\,U$ est le vecteur de composantes :

$$\boldsymbol{grad}U = (2X, 2Y, 2Z)^T = \begin{pmatrix} 2X \\ 2Y \\ 2Z \end{pmatrix} \tag{28}$$

où T désigne transposé.

Exemple 2 :

$$U = \frac{1}{r} \tag{29}$$

comme :

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 ==> 2rdr = 2XdX + 2YdY + 2ZdZ$$

d'où :

$$\boldsymbol{grad}U = \left(\frac{-X}{r^3}, \frac{-Y}{r^3}, \frac{-Z}{r^3}\right)^T \tag{30}$$

Si on pose :

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} \tag{31}$$

Alors :

$$\mathbf{grad}U = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{32}$$

Calculons le gradient de la fonction scalaire donnée par l'équation (26) c'est-à-dire le champ du potentiel. En utilisant l'exemple 2., on a :

$$\mathbf{grad}V = \mathbf{grad}\left(\frac{Gmm'}{r}\right) = Gmm'\mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -Gmm'\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{33}$$

Remarquons si on pose :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{34}$$

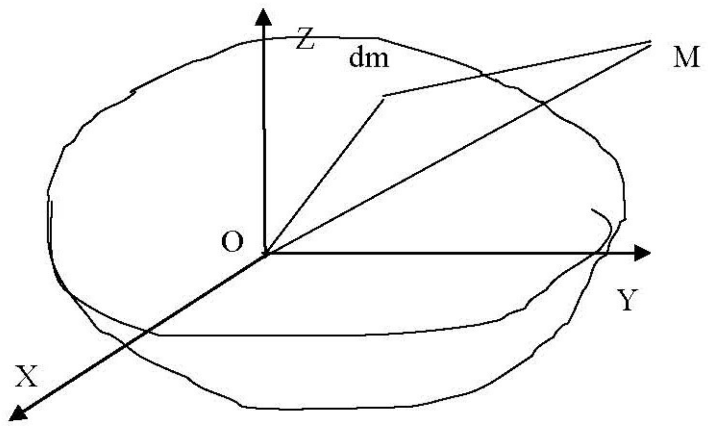

Figure 2 – Le Potentiel

On a $\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire porté par $\boldsymbol{OM}$ et dans la direction $\boldsymbol{OM}$. L'expression de la force $\boldsymbol{F}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{F} = -F\boldsymbol{n} = -\frac{Gmm'}{r^2}\boldsymbol{n} \tag{35}$$

comme :

$$\boldsymbol{grad}V = -\frac{Gmm'}{r^2}\boldsymbol{n} \tag{36}$$

D'où :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{grad}V \tag{37}$$

On dit que la force $\boldsymbol{F}$ dérive du champ de potentiel V.

2.1.3 Le Champ Réel ou Champ du Potentiel de la Pesanteur

Un point $M(X,Y,Z)$ de masse unité est soumis au potentiel V de gravitation et au potentiel Φ de la force centrifuge due à la rotation de la terre.

L'expression de V est :

$$V = G\iiint_{Terre}\frac{dm'}{r} \tag{38}$$

Malheureusement, cette expression n'est pas calculable car nous ignorons la distribution des masses à l'intérieur de la Terre. L'expression du potentiel Φ de la force centrifuge est donnée par :

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\varpi^2 \tag{39}$$

où ϖ est la vitesse de la rotation de la Terre.

Définition 2.1: Potentiel du Champ

On appelle Potentiel du champ réel W ou potentiel de la pesanteur la somme du potentiel V et Φ :

$$W = V + \Phi \tag{40}$$

Définition 2.2: Vecteur de Gravité

On appelle vecteur de gravité le vecteur $\boldsymbol{g}$ tel que :

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{grad}\, W \tag{41}$$

$g = \|\boldsymbol{g}\|$ mesure la gravité ou la pesanteur a la dimension d'une accélération et exprimée en m/s^2(Unité Système International) ou en cm/s^2 ($1cm/s^2 = 1gal$ en hommage à Galilée). g mesure 978 $gals$ à l'équateur et 983 $gals$ aux pôles.

Soit un repère $OXYZ$ orthonormé direct centré au centre de gravité de la terre (de masse m') et soit un point $M(X,Y,Z)$ représentant le satellite artificiel de de masse ponctuelle m. Comme $m' \geq\geq m$, on considère que la terre est représentée par une masse ponctuelle m' au centre de la terre.

Alors, le point M est soumis à une force $\boldsymbol{F}$ due à l'attraction de la masse m' au point O. Le module de cette force est :

$$F = \frac{Gmm'}{r^2} = F(X,Y,Z) \tag{42}$$

où G est la constante universelle de gravitation et r est la distance OM.

2.2 Les Equations du Mouvement

2.2.1 Introduction

Un cas simple du mouvement de deux corps est celui du mouvement d'un satellite artificiel autour de la Terre. Dans ce mouvement, on néglige la masse du satellite et des effets des autres planètes (essentiellement le soleil et la lune).

Considérons un satellite de masse m défini par le vecteur $\boldsymbol{OS} = \boldsymbol{r}$. La Terre est considérée comme une masse ponctuelle de masse m' située au point O centre de la Terre.

L'équation du mouvement est donnée par :

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} = -G\frac{mm'}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{43}$$

avec $\boldsymbol{F}$ la force d'attraction gravitationnelle et G est la constante universelle de gravitation de valeur égale à $(6673 \pm 1) \times 10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$.

L'équation (43) s'écrit aussi :

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{grad} V \tag{44}$$

On dit que $\boldsymbol{F}$ dérive du potentiel V avec :

$$V = G\frac{mm'}{r} \tag{45}$$

Posons :

$$\boxed{\mu = Gm' = (3986005 \pm 0.5) \times 10^8 m^3 s^{-2}} \tag{46}$$

L'équation (43) s'écrit :

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{47}$$

Comme :

$$\boldsymbol{r} = \begin{cases} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{cases} \tag{48}$$

Alors l'équation vectorielle (47) s'écrit en trois équations différentielles du deuxième ordre comme suit :

$$\ddot{X}_C + \frac{\mu}{r^3}X_C = 0 \tag{49}$$

$$\ddot{Y}_C + \frac{\mu}{r^3}Y_C = 0 \tag{50}$$

$$\ddot{Z}_C + \frac{\mu}{r^3}Z_C = 0 \tag{51}$$

Après l'intégration de (49)-(51), nous obtenons six paramètres des conditions initiales qui définissent la forme et la position de l'orbite et une constante donnant la variation du mouvement du satellite avec le temps.

Les équations (49)-(51) montrent que nous avons un mouvement d'un corps dans un champ central.

2.2.2 La 2ème Loi de Kepler

1. Si nous appliquons *le théorème du moment cinétique*, nous avons :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \boldsymbol{0} \tag{52}$$

car :

$$\sigma = \boldsymbol{OS} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{C} = \text{constante} \tag{53}$$

En effet, dérivons (53) par rapport au temps, on a alors :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\boldsymbol{OS}}{dt} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{OS} \wedge \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{OS} \wedge \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \wedge \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{54}$$

Or d'après (47) :

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}$$

D'où :

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \tag{55}$$

On déduit donc (53) et on a :

$$C = ||\boldsymbol{C}|| = \text{constante des aires} \tag{56}$$

De (53), le mouvement se fait dans un plan, en définissant $\boldsymbol{OS} = \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(r, \upsilon)$, alors les composantes de $\boldsymbol{v}$ vecteur vitesse sur le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ et de la direction perpendiculaire sont :

$$\boldsymbol{v} = \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} \\ \\ r\dfrac{d\upsilon}{dt} \end{cases} \tag{57}$$

On a alors :

$$C = r.r\frac{d\upsilon}{dt} = r^2\frac{d\upsilon}{dt} \tag{58}$$

et aussi :

$$\dot{\Sigma} = \frac{d\Sigma}{dt} = \frac{r^2 d\upsilon}{2dt} \tag{59}$$

Avec Σ la surface balayée par le vecteur position.

De (58) et (59), nous avons *la 2ème loi de Kepler* :

$$\dot{\Sigma} = \frac{1}{2}C = \text{constante} \tag{60}$$

Proposition 2.3: Deuxième loi de Kepler ou loi des aires

L'aire balayée par le vecteur position $\boldsymbol{r}(t)$ varie linéairement avec le temps.

$$\dot{\Sigma} = \frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{2}C = \textit{constante}$$

2. Si nous appliquons *le théorème de l'énergie cinétique* sous forme différentielle, on a :

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v}dt \tag{61}$$

où :

$$\boldsymbol{F}.\boldsymbol{v} = -\mu\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{-\mu m}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu m}{r}\right) \tag{62}$$

En remplaçant (62) dans le second membre de (61) et en intégrant, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r} = \text{constante} \tag{63}$$

Soit :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r} = H = \text{constante} \tag{64}$$

où H est *la constante de l'énergie* ou *l'énergie*.

Lemme 2.4: Intégrales Premières

Les fonctions H et C sont constantes le long des solutions : on dit que ce sont des intégrales premières du mouvement, c'est-à-dire que H et C sont des fonctions de la position r et de la dérivée première de r par rapport au temps (t), constantes au cours du temps.

En effet, de (64) et de (56), on a respectivement :

$$H = H(r, v) = \text{constante}$$

et

$$C = C(r, v) = r^2 \frac{dv}{dt} = \text{constante}$$

2.2.3 La 1ère loi de Kepler

Multiplions vectoriellement à droite les membres de l'équation (47) par $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{C} = -\frac{\mu}{r^3} \boldsymbol{r} \wedge (\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}) = -\frac{\mu}{r^3} [\boldsymbol{r} \wedge (\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v})] = -\frac{\mu}{r^3} [\boldsymbol{r}.(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{r}.\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}] \\ = -\frac{\mu}{r^3} \left(\boldsymbol{r} r \frac{dr}{dt} - r^2 \boldsymbol{v} \right) = -\frac{\mu}{r^2} \left(\boldsymbol{r} \frac{dr}{dt} - r \boldsymbol{v} \right)\end{aligned}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{C} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r} \right) \tag{65}$$

Comme $\boldsymbol{C}$ est constant, (65) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{C}) - \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r} \right) = 0 \tag{66}$$

Après intégration, nous obtenons :

$$\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{C} - \mu \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{l} = \text{ vecteur constant } \boldsymbol{l}_0$$

ou :

$$(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{C}) - \mu \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{l} \tag{67}$$

On appelle $\boldsymbol{l}$ vecteur de Laplace. Multiplions (67) par $\boldsymbol{r}$, nous obtenons :

$$\boldsymbol{r}.(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{C}) - \mu \frac{\boldsymbol{r}.\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{r}.\boldsymbol{l} \tag{68}$$

Comme :

$$\boldsymbol{r}.(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{v}.(\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{C}.(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{C} = C^2$$

et

$$\boldsymbol{l}.\boldsymbol{r} = lrcosv$$

(68) devient :

$$C^2 = \mu r + lrcosv \tag{69}$$

En posant :

$$p = \frac{C^2}{\mu} \quad \text{et} \quad e = \frac{l}{\mu} \tag{70}$$

On déduit de (69) :

$$r = \frac{p}{1 + ecosv} \tag{71}$$

C'est l'équation d'une conique en coordonnées polaires (r, v) soit pour notre cas une ellipse. C'est la première loi de Kepler.

Proposition 2.5: Première Loi de Kepler

Les satellites tournent autour de la Terre en suivant des orbites en forme d'ellipse dont la Terre occupe un des foyers.

L'angle v comptée entre la direction du vecteur de Laplace $\boldsymbol{l}$ ou $\boldsymbol{OP}$ (périgée) et le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ s'appelle *l'anomalie vraie.*

On a :

$$\text{Pour } v = 0 \Longrightarrow r_1 = \frac{p}{1+e} \quad \text{c'est la périgée} \tag{72}$$

$$\text{Pour } v = \pi \Longrightarrow r_2 = \frac{p}{1-e} \quad \text{c'est l'apogée} \tag{73}$$

$$\text{D'où :} \quad r_1 + r_2 = 2a = \frac{2p}{1-e^2} \Longrightarrow p = a(1-e^2) \tag{74}$$

Par suite :

$$r_1 = \frac{p}{1+e} = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e) \tag{75}$$

$$r_2 = \frac{p}{1-e} = \frac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1+e) \tag{76}$$

2.2.4 La 3ème Loi de Kepler

D'après la 2ème loi de Kepler donnée par (60) :

$$\dot{\Sigma} = \frac{d\Sigma}{dt} = \frac{C}{2} = \text{constante}$$

d'où :

$$d\Sigma = \frac{C}{2}dt \tag{77}$$

En intégrant (77) sur une période, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\int_0^T Cdt = \int d\Sigma = \Sigma = \pi.a.b = \pi.a^2\sqrt{1-e^2} \tag{78}$$

Soit :

$$C = \frac{2\pi}{T} a^2 \sqrt{1-e^2} \tag{79}$$

Comme $C = \sqrt{p\mu} = \sqrt{a(1-e^2)\mu}$ et T la période, nous avons finalement :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} = \text{constante} \tag{80}$$

C'est la *3ème loi de Kepler*.

Proposition 2.6: Troisième Loi de Kepler

Le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe.

2.3 Eléments de l'orbite

Après l'intégration des équations du mouvement du satellite artificiel, nous obtenons six paramètres qui définissent la position du plan de l'orbite, ses dimensions, appelés les éléments d'orbite et ce sont :

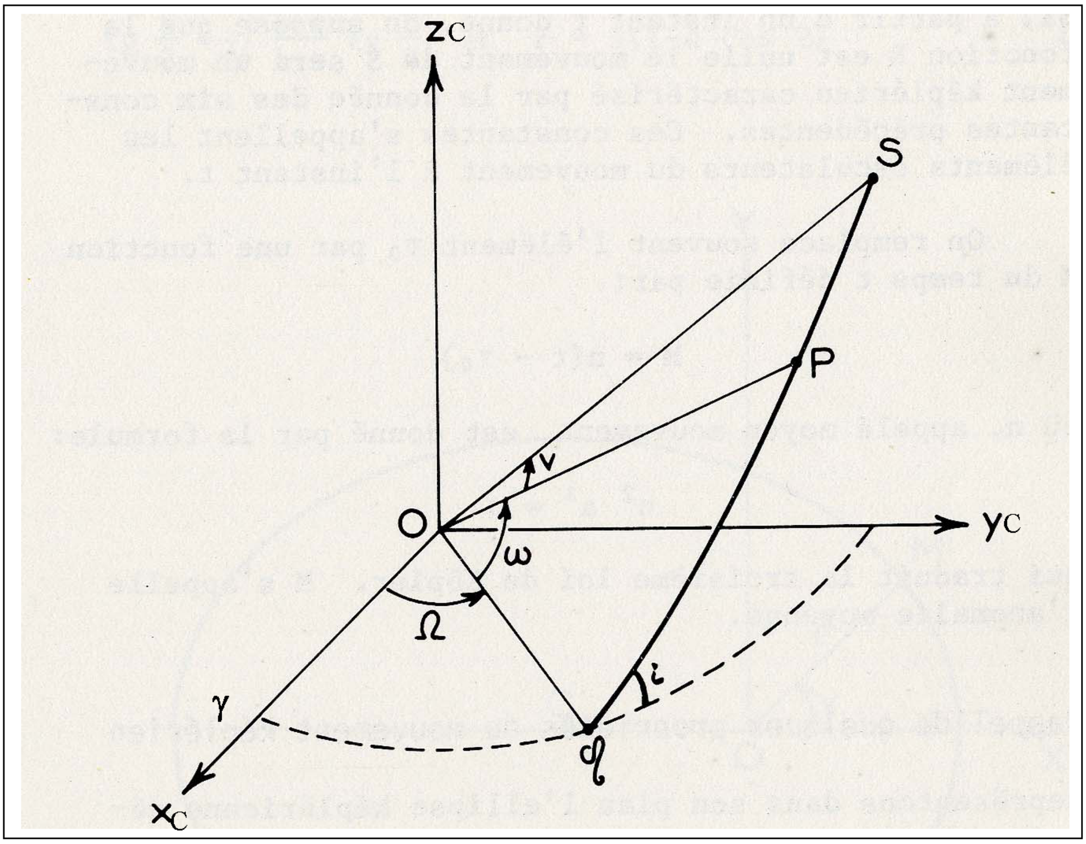

Figure 3 – Le Repère Celeste

- a - le demi grand-axe,

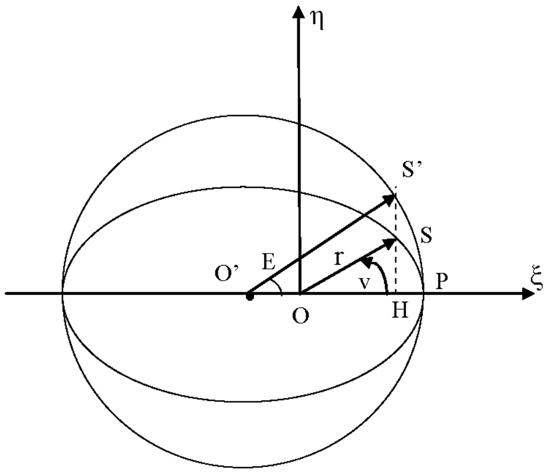

Figure 4 – Plan de l'orbite

- e - la première excentricité,
- i - l'angle d'inclinaison,
- Ω - l'ascension droite du noeud ascendant,
- ω - l'argment,
- t_0 - l'instant de passage au périgée.

2.3.1 Les Coordonnées

En conséquence de la 3ème loi de Kepler (80), nous pouvons écrire :

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{81}$$

n est appelé *vitesse moyenne angulaire*. A partir de (81), on définit *l'anomalie moyenne* M à l'instant t par :

$$\boxed{M = n(t - t_0)} \tag{82}$$

Exprimons les coordonnées du satellite dans le plan de l'orbite à l'aide de la figure (Fig. 4) :

où :

- O est la terre et aussi un foyer de l'ellipse,
- S la position du satellite,
- v l'anomalie vraie,
- E =l'angle $PO'S'$ est appelé l'anomalie excentrique.

- l'axe $O\eta$ est perpendiculaire à l'axe $O\xi$ et l'axe $T\zeta$ est perpendiculaire au plan $O\xi\eta$.

On sait que dans le repère $O\xi\eta$, on a :

$$\boldsymbol{OS} = \begin{cases} \xi = OScosv = rcosv \\ \eta = OSsinv = rsinv \end{cases} \tag{83}$$

$$\text{avec } r = \frac{p}{1+ecosv} \tag{84}$$

Maintenant, d'après la première loi de Kepler, l'aire balayée par le vecteur position $\boldsymbol{OS}$ entre les instants t_0 et t vaut :

$$\Sigma = \int_{t_0}^{t} Cdt = \frac{C(t-t_0)}{2} = \frac{(t-t_0)2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{2T} =$$

$$\frac{n(t-t_0)a^2\sqrt{1-e^2}}{2} = \frac{Ma^2\sqrt{1-e^2}}{2} \tag{85}$$

Comme l'ellipse de paramètres (a,b) est obtenue par affinité de rapport $k = b/a = \sqrt{1-e^2}$ du cercle centré en O' et de rayon a. Donc :

$$k = \frac{\Sigma}{\sigma_1} \tag{86}$$

où la surface σ_1 est celle du triangle curviligne OPS', elle est égale à la différence du secteur circulaire $O'PS'$ et du triangle $O'OS'$ soit :

$$A_1 = \text{aire secteur O'PS'} = \frac{\pi.a^2}{2\pi}.E = \frac{a^2.E}{2} \tag{87}$$

et l'aire du triangle $O'OS'$ vaut :

$$A_2 = \frac{O'O.HS'}{2} \tag{88}$$

Comme :

$$sinE = \frac{HS'}{a} \Rightarrow HS' = a.sinE, \quad O'O = a - r_1 = a - a(1-e) = a.e$$

d'où :

$$\sigma_1 = A_1 - A_2 = \frac{a^2E}{2} - \frac{O'O.HS'}{2} = \frac{a^2E}{2} - \frac{ae.asinE}{2} = \frac{a^2(E-esinE)}{2} \tag{89}$$

On peut écrire alors en utilisant (85)que :

$$\Sigma = k\sigma_1 \Longrightarrow \frac{Ma^2\sqrt{1-e^2}}{2} = \frac{b}{a}\frac{a^2(E-esinE)}{2} =$$

$$\sqrt{1-e^2}\frac{a^2(E-esinE)}{2} \Longrightarrow E - esinE = M = n(t-t_0)$$

L'équation :

$$\boxed{E - esinE = M = n(t-t_0)} \tag{90}$$

s'appelle *l'équation de Kepler*.

Cette relation est importante, puisqu'elle permet de calculer E en fonction du temps et par suite de déterminer $v = v(t)$ voir l'équation (99) ci-dessous, et $r = r(t)$.

Nous pouvons calculer la valeur de l'anomalie excentrique E par la méthode itérative. A la première itération, nous prenons :

$$E_1 = M + esinM$$

et

$$E_2 = E_1 + \delta E$$

Utilisons (90) on a :

$$E_1 + \delta E - esin(E_1 + \delta E) = M \tag{91}$$

En faisant un développement au premier degré, nous obtenons :

$$E_1 + \delta E - esinE_1 cos\delta E - esin\delta E cosE_1 = M \tag{92}$$

Comme δE est petit, on a $cos\delta E \approx 1$ et $sin\delta E \approx \delta E$, nous obtenons :

$$\delta E = \frac{M - E_1 + esinE_1}{1 - ecosE_1} \tag{93}$$

Prenons maintenant

$$E_1 = E_1 + \delta E$$

et appliquons (93) et ainsi de suite jusqu'à ce que δE soit négligeable devant la précision désirée.

Dans le repère $O\xi\eta\zeta$, on peut écrire les coordonnées du satellite sous la forme :

$$\xi = OH = O'H - O'O = acosE - ae = a(cosE - e) \tag{94}$$

$$\eta = SH = (b/a)HS' = \sqrt{1-e^2}asinE = a\sqrt{1-e^2}sinE \tag{95}$$

$$\zeta = 0 \tag{96}$$

Ce qui donne :

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}sinE}{cosE - e} \tag{97}$$

Or d'après (83), on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = rcosv \\ \eta = rsinv \end{array} \right. \Longrightarrow tgv = \frac{\eta}{\xi} \tag{98}$$

d'où :

$$tgv = \frac{\sqrt{1-e^2}sinE}{cosE - e} \tag{99}$$

Exprimons maintenant les coordonnées (X_C, Y_C, Z_C) du satellite dans le référentiel céleste $X_C Y_C Z_C$ à l'aide de la figure (Fig.3). Il est nécessaire de faire successivement :

1. une rotation de $-\omega$ autour de l'axe $O\xi$,
2. une rotation de $-i$ autour de l'axe $O\Omega$,
3. une rotation de $-\Omega$ autour de l'axe $O'Z_C$.

Les matrices de rotations sont les suivantes :

$$R(-\Omega) = \begin{pmatrix} cos\Omega & -sin\Omega & 0 \\ sin\Omega & cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{100}$$

et :

$$R(-i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cosi & -sini \\ 0 & sini & cosi \end{pmatrix} \tag{101}$$

et :

$$R(-\omega) = \begin{pmatrix} cos\omega & -sin\omega & 0 \\ sin\omega & cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{102}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = R(-\Omega).R(-i).R(-\omega) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \tag{103}$$

Ce qui donne après calculs :

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\Omega cos\omega - sin\Omega sin\omega cosi & -cos\Omega sin\omega - sin\Omega cos\omega cosi & sin\Omega sin\omega \\ sin\Omega cos\omega + cos\Omega sin\omega cosi & -sin\Omega sin\omega + cos\Omega cos\omega cosi & -cos\Omega sini \\ sini.sin\omega & sini.cos\omega & cosi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \tag{104}$$

En posant :

$$P_X = cos\Omega cos\omega - sin\Omega sin\omega cosi \tag{105}$$

$$P_Y = -cos\Omega sin\omega - sin\Omega cos\omega cosi \tag{106}$$

$$Q_X = sin\Omega cos\omega + cos\Omega sin\omega cosi \tag{107}$$

$$Q_Y = -sin\Omega sin\omega + cos\Omega cos\omega cosi \tag{108}$$

On obtient comme $\zeta = 0$:

$$X_C = P_X\xi + P_Y\eta \tag{109}$$

$$Y_C = Q_X\xi + Q_Y\eta \tag{110}$$

$$Z_C = \xi sini.sin\omega + \eta sini.cos\omega \tag{111}$$

Si on veut calculer les coordonnées du satellite dans le référentiel terrestre (O, X_T, Y_T, Z_T), on a :

$$\begin{pmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\Omega & sin\Omega & 0 \\ -sin\Omega & cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} \tag{112}$$

où Ω est le temps sidéral de Greenwich au temps t. Il vaut :

$$\Omega(\text{en heures}) = 1.002737909 \times UT2 + HSG_{0TU} \tag{113}$$

avec $UT2$ le Temps Universel corrigé (en heures) et HSG_{0TU} l'heure sidérale à Greenwich à 0h TU(Temps Universel).

2.4 Les Perturbations des Orbites

Nous avons vu dans le chapitre précédent le mouvement d'un satellite artificiel autour de la terre sous l'action de la force gravitationnelle. Le mouvement réel du satellite est sous l'effet de la force centrale gravitationnelle et d'une force supplémentaire. On supposera que cette force est petite par rapport à la force centrale. On l'appelle force perturbatrice.

Cette force perturbatrice est la somme de forces d'origine gravitationnelle et d'autres non gravitationnelles. Dans le cas général, une force perturbatrice $\boldsymbol{f}$ en un point est fonction de ses coordonnées, de sa vitesse et du temps. On peut écrire alors :

$$\begin{aligned} f_X &= f_X(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, t) \\ f_Y &= f_Y(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, t) \\ f_Z &= f_Z(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, t) \end{aligned} \tag{114}$$

Les équations du mouvement en coordonnées rectangulaires obtenues en complètement les équations du problème de la façon suivante :

$$m\ddot{X}_C + \frac{\mu m}{r^3} X_C = f_{X_C}(X_C, Y_C, Z_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \dot{Z}_C, t) \tag{115}$$

$$m\ddot{Y}_C + \frac{\mu m}{r^3} Y_C = f_{Y_C}(X_C, Y_C, Z_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \dot{Z}_C, t) \tag{116}$$

$$m\ddot{Z}_C + \frac{\mu m}{r^3} Z_C = f_{Z_C}(X_C, Y_C, Z_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \dot{Z}_C, t) \tag{117}$$

Comme une force perturbatrice est d'origine gravitationnelle, elle dérive d'un potentiel qu'on note R soit :

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{grad} R \tag{118}$$

Alors les équations précédentes s'écrivent :

$$m\ddot{X}_C + \frac{\mu m}{r^3} X_C = \frac{\partial R}{\partial X_C} \tag{119}$$

$$m\ddot{Y}_C + \frac{\mu m}{r^3}Y_C = \frac{\partial R}{\partial Y_C} \tag{120}$$

$$m\ddot{Z}_C + \frac{\mu m}{r^3}Z_C = \frac{\partial R}{\partial Z_C} \tag{121}$$

Faisons un changement de variables tel que :

$$h(X_C, Y_C, Z_C, \dot{X}_C, \dot{Y}_C, \dot{Z}_C) = g(a, e, i, \Omega, \omega, M) \tag{122}$$

Le système (119) à (121) devient un nouveau système différentiel d'ordre 2 de six inconnues de la forme :

$$\dot{a} = \Phi_a(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \tag{123}$$

$$\dot{e} = \Phi_e(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \tag{124}$$

$$\dot{i} = \Phi_i(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \tag{125}$$

$$\dot{\Omega} = \Phi_\Omega(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \tag{126}$$

$$\dot{\omega} = \Phi_\omega(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \tag{127}$$

$$\dot{M} = \Phi_M(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \tag{128}$$

Ces six nouvelles variables sont appelées les éléments osculateurs ou instantanés.

La solution des équations du mouvement est possible par une méthode analytique ou numérique. On peut dire que le satellite se mouve le long de l'orbite keplérienne, mais les éléments de l'orbite sont, dans ce cas, des fonctions du temps. On l'appelle orbite osculateur.

Comme $\boldsymbol{f}$ a été supposée petite, la solution du système d'équations des éléments osculateurs se présentera en général sous la forme :

$$a = a_0 + \delta a \tag{129}$$

$$e = e_0 + \delta e \tag{130}$$

$$i = i_0 + \delta i \tag{131}$$

$$\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega \tag{132}$$

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega \tag{133}$$

$$M = M_0 + \delta M \tag{134}$$

où $\delta a, \delta e, \delta i, \delta\Omega, \delta\omega, \delta M$ seront des petites quantités. Elles sont appelées les perturbations des éléments de l'orbite. L'intérêt de l'emploi des variables osculatrices est que la solution est exprimée sous la forme d'un petit complément à des quantités fixes.

3 *Le Mouvement de 2 Corps*

3.1 Le problème de deux corps

Soient deux corps $\boldsymbol{X}_1(m_1)$ et $\boldsymbol{X}_2(m_2)$ soumis à l'attraction universelle dans un repère orthonormé $\mathscr{R}(O, e_1, e_2, e_3)$. Posons :

$$\begin{cases} \boldsymbol{OM}_1 = \boldsymbol{X}_1(m_1) \\ \boldsymbol{OM}_2 = \boldsymbol{X}_2(m_2) \end{cases} \tag{135}$$

Les équations de mouvement des points M_1, M_2 sont :

$$m_1 \frac{d^2\boldsymbol{OM}_1}{dt^2} = -\mu m_1 m_2 \frac{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}{M_1M_2^3} \tag{136}$$

$$m_2 \frac{d^2\boldsymbol{OM}_2}{dt^2} = -\mu m_2 m_1 \frac{\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1}{M_1M_2^3} \tag{137}$$

avec μ la constante universelle de la gravitation. Or :

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{OM}_2 - \boldsymbol{OM}_1 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$$

Donc (136)-(137) s'écrivent :

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}_1}{dt^2} = -\mu m_2 \frac{(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1)}{\|\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1\|^3} \tag{138}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}_2}{dt^2} = -\mu m_1 \frac{(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)}{\|\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1\|^3} \tag{139}$$

Soit G le centre de gravité des deux corps M_1, M_2, on a :

$$m_1\boldsymbol{GM}_1 + m_2\boldsymbol{GM}_2 = 0 \tag{140}$$

Ce qui donne :

$$\boldsymbol{OG} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{OM}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{OM}_2 \tag{141}$$

Posons :

$$M = m_1 + m_2 \tag{142}$$

$$\alpha = \frac{m_1}{M} \tag{143}$$

$$1 - \alpha = \frac{m_2}{M} \tag{144}$$

Ce qui donne :

$$\boldsymbol{OG} = \alpha\boldsymbol{OM}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{OM}_2 = \alpha\boldsymbol{X}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{X}_2 \tag{145}$$

Et en prenant la dérivée seconde, on obtient :

$$\alpha\frac{d^2\boldsymbol{X}_1}{dt^2} + (1-\alpha)\frac{d^2\boldsymbol{X}_2}{dt^2} = 0 \tag{146}$$

Soit :

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}_2}{dt^2} = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\frac{d^2\boldsymbol{X}_1}{dt^2} \tag{147}$$

Posons :

$$\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{OG} \Rightarrow \frac{d^2\boldsymbol{X}_{\ 1}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{Y}_{\ 1}}{dt^2} \tag{148}$$

$$\boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{OG} \Rightarrow \frac{d^2\boldsymbol{X}_{\ 2}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{Y}_{\ 2}}{dt^2} \tag{149}$$

Utilisant l'équation (147), on obtient :

$$\frac{d^2\boldsymbol{Y}_{\ 2}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{X}_{\ 2}}{dt^2} = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\frac{d^2\boldsymbol{X}_1}{dt^2} = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\frac{d^2\boldsymbol{Y}_1}{dt^2} \tag{150}$$

On a aussi :

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{OG} = \boldsymbol{Y}_1 + \alpha\boldsymbol{X}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{X}$$

$$(1-\alpha)\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{Y}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{X}_2 \Rightarrow \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2 = \frac{\boldsymbol{Y}_1}{1-\alpha} \tag{151}$$

L'équation (138) devient :

$$\frac{d^2\boldsymbol{Y}_{\ 1}}{dt^2} = -\mu M(1-\alpha)^3\frac{\boldsymbol{Y}_1}{\|\boldsymbol{Y}_1\|^3} \tag{152}$$

Or la solution de (152) est le mouvement képlérien vu précédemment. De l'équation (150), on a donc :

$$\frac{d^2\boldsymbol{Y}_{\ 2}}{dt^2} = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\frac{d^2\boldsymbol{Y}_1}{dt^2} \tag{153}$$

Il s'ensuit que le point M_2 se mouve suivant un mouvement képlérien.

4 *Les Equations du Mouvement de 3 Corps : Partie I.*

On considère maintenant le problème général de trois corps soumis seulement à l'attraction universelle. Ce problème n'est pas encore résolu en présentant une expression finie des coordonnées en fonction du temps car le système est non intégrable. On essaie de donner dans ce rapport un développement approché du problème.

Soit un repère orthonormé $\mathscr{R}(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ inertiel et 3 corps P_0, P_1 et P_2 de masse $m_i, i = 0, 1, 2$ considérés comme des masses ponctuelles.

4.1 Equations du mouvement

Les équations du mouvement sont données par :

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{OP}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=0, j\neq i}^{2} \frac{m_i m_j \boldsymbol{P}_j \boldsymbol{P}_i}{\|\boldsymbol{P}_j \boldsymbol{P}_i\|^3} \tag{154}$$

où G est la constante universelle de gravitation de valeur égale à $(6673 \pm 1) \times 10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$.

Faisons la somme des équations (154), on obtient :

$$\sum_i m_i \frac{d^2 \boldsymbol{OP}_i}{dt^2} = \boldsymbol{0} \tag{155}$$

En intégrant une première fois l'équation précédente, on obtient :

$$\sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{OP}_i}{dt} = \text{vecteur constant} = \boldsymbol{V}_0 \tag{156}$$

Par suite :

$$\sum_i m_i \boldsymbol{OP}_i = t.\boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{W}_0 \tag{157}$$

où $\boldsymbol{W}_0$ est un vecteur constant déterminé avec $\boldsymbol{V}_0$ par les conditions initiales du mouvement.

L'équation (157) est dite une intégrale première des équations du mouvement (154).

En plus, on a aussi la conservation du moment cinétique :

$$\sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{OP}_i}{dt} \wedge \boldsymbol{OP}_i = \text{constante} = \boldsymbol{C} \tag{158}$$

Soit G le centre de gravité ou barycentre des points P_i (à ne pas confondre avec la constante de la gravitation universelle), il est défini par :

$$m_0 \boldsymbol{GP}_0 + m_1 \boldsymbol{GP}_1 + m_2 \boldsymbol{GP}_2 = \boldsymbol{0} \tag{159}$$

Ce qui donne :

$$(m_0 + m_1 + m_2)\boldsymbol{OG} = m_0 \boldsymbol{OP}_0 + m_1 \boldsymbol{OP}_1 + m_2 \boldsymbol{OP}_2 \tag{160}$$

Soit :

$$M.\boldsymbol{OG} = \sum_i m_i \boldsymbol{OP}_i = t.\boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{W}_0 \tag{161}$$

avec :

$$M = m_0 + m_1 + m_2 \tag{162}$$

Cela veut dire que le mouvement du centre de gravité G est muni d'un mouvement rectiligne uniforme.

Ecrivons les équations (154) autrement :

$$\frac{d^2\boldsymbol{OG}}{dt^2} + \frac{d^2\boldsymbol{GP}_i}{dt^2} = -G\sum_{j=0,j\neq i}^{2} \frac{m_j(\boldsymbol{GP}_i - \boldsymbol{GP}_j)}{\|\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j\|^3} \tag{163}$$

Or :

$$\frac{d^2\boldsymbol{OG}}{dt^2} = \boldsymbol{0} \tag{164}$$

Considérons un repère $\mathscr{G}$ d'origine le point G et en gardant la même base que $\mathscr{R}$. Soient :

$$P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \tag{165}$$

les coordonnées du point P_i pour $i = 0, 1, 2$ dans le repère $\mathscr{G}$.

4.1.1 Les équations du mouvement du point P_0

Ecrivons les équations du point P_0, on a :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\frac{Gm_1(x_0 - x_1)}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} - \frac{Gm_2(x_0 - x_2)}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} \tag{166}$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} = -\frac{Gm_1(y_0 - y_1)}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} - \frac{Gm_2(y_0 - y_2)}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} \tag{167}$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} = -\frac{Gm_1(z_0 - z_1)}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} - \frac{Gm_2(z_0 - z_2)}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} \tag{168}$$

ou encore :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -Gx_0\left(\frac{m_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3}\right) + \frac{Gm_1x_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} \tag{169}$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} = -Gy_0\left(\frac{m_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3}\right) + \frac{Gm_1y_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{Gm_2y_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} \tag{170}$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} = -Gz_0\left(\frac{m_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3}\right) + \frac{Gm_1z_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{Gm_2z_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} \tag{171}$$

Comme :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3 &= ((x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2)^{3/2} \\ &= (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0)^{3/2}\end{aligned} \tag{172}$$

Posons :

$$\Delta_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \tag{173}$$

$$\Delta_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \tag{174}$$

$$\Delta_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \tag{175}$$

(172) devient :

$$\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3 = (\Delta_0^2 + \Delta_2^2 - 2\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0)^{3/2} \tag{176}$$

En choisissant les points P_i tels que :

$$GP_2 < GP_1 < GP_0 \tag{177}$$

On peut écrire :

$$\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3 = \Delta_0^3\left(1 + \frac{\Delta_2^2}{\Delta_0^2} - 2\frac{\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^2}\right)^{3/2} \tag{178}$$

Donc :

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} = \frac{1}{\Delta_0^3}\left(1 + \frac{\Delta_2^2}{\Delta_0^2} - 2\frac{\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^2}\right)^{-3/2} \tag{179}$$

Au premier ordre, on peut écrire :

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} = \frac{1}{\Delta_0^3}\left(1 - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_0^2} + 3\frac{\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^2}\right) \tag{180}$$

Soit :

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} = \frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} + 3\frac{\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} \tag{181}$$

De même :

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} = \frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_1^2}{2\Delta_0^5} + 3\frac{\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} \tag{182}$$

D'où :

$$\frac{m_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} = \frac{m_1+m_2}{\Delta_0^3} - 3\frac{m_1\Delta_1^2 + m_2\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} + 3\frac{(m_1\boldsymbol{GP}_1 + m_2\boldsymbol{GP}_2).\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} \tag{183}$$

Or par la définition du point G, on a ;

$$m_0\boldsymbol{GP}_0 + m_1\boldsymbol{GP}_1 + m_2\boldsymbol{GP}_2 = \boldsymbol{0}$$

L'équation précédente devient :

$$\frac{m_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} = \frac{m_1+m_2-3m_0}{\Delta_0^3} - 3\frac{m_1\Delta_1^2 + m_2\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} \tag{184}$$

Considérons l'expression de $\dfrac{d^2x_0}{dt^2}$:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -Gx_0\left(\frac{m_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3}\right) + \frac{Gm_1x_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3}$$

Elle devient en tenant compte de (184) :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -Gx_0\left(\frac{m_1+m_2-3m_0}{\Delta_0^3} - 3\frac{m_1\Delta_1^2+m_2\Delta_2^2}{2\Delta_0^5}\right) + \frac{Gm_1x_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} \tag{185}$$

Calculons les deux derniers termes :

$$\frac{Gm_1x_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3}$$

On a alors :

$$\frac{Gm_1x_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} = Gm_1x_1\left(\frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_1^2}{2\Delta_0^5} + \frac{3\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5}\right) +$$

$$Gm_2x_2\left(\frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_1^2}{2\Delta_2^5} + \frac{3\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5}\right) =$$

$$\frac{G(m_1x_1+m_2x_2)}{\Delta_0^3} - \frac{3G(m_1x_1\Delta_1^2+m_2x_2\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \frac{3G(m_1x_1\boldsymbol{GP}_1+m_2x_2\boldsymbol{GP}_2).\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} =$$

$$-\frac{Gm_0x_0}{\Delta_0^3} - \frac{3G(m_1x_1\Delta_1^2+m_2x_2\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \frac{3G(m_1x_1\boldsymbol{GP}_1+m_2x_2\boldsymbol{GP}_2).\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} \tag{186}$$

Alors l'équation (185) devient :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\frac{Gx_0(M-3m_0)}{\Delta_0^3} + \frac{3G(m_1(x_0-x_1)\Delta_1^2+m_2(x_0-x_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} +$$

$$\frac{3G(m_1x_1\boldsymbol{GP}_1+m_2x_2\boldsymbol{GP}_2).\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} \tag{187}$$

De même :

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} = -\frac{Gy_0(M-3m_0)}{\Delta_0^3} + \frac{3G(m_1(y_0-y_1)\Delta_1^2+m_2(y_0-y_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} +$$

$$\frac{3G(m_1y_1\boldsymbol{GP}_1+m_2y_2\boldsymbol{GP}_2).\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} \tag{188}$$

et :

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} = -\frac{Gz_0(M-3m_0)}{\Delta_0^3} + \frac{3G(m_1(z_0-z_1)\Delta_1^2+m_2(z_0-z_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} +$$

$$\frac{3G(m_1z_1\boldsymbol{GP}_1+m_2z_2\boldsymbol{GP}_2).\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} \tag{189}$$

On pose :

$$\mu_0 = G(M-3m_0) \tag{190}$$

$$r_0 = \Delta_0 \tag{191}$$

$$r_1 = \Delta_1 \tag{192}$$

$$r_2 = \Delta_2 \tag{193}$$

Alors, les équations (187),(188) et (189) s'écrivent :

$$\ddot{x}_0 + \frac{\mu_0}{r_0^3} x_0 = F_{x_0}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \tag{194}$$

$$\ddot{y}_0 + \frac{\mu_0}{r_0^3} y_0 = F_{y_0}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \tag{195}$$

$$\ddot{z}_0 + \frac{\mu_0}{r_0^3} z_0 = F_{z_0}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \tag{196}$$

On retrouve les équations de mouvement de deux corps (115) à (117) avec la force perturbatrice $\boldsymbol{F}_0$, avec ses composantes comme suit :

$$\begin{aligned} F_{x_0}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = & \frac{3G(m_1(x_0 - x_1)\Delta_1^2 + m_2(x_0 - x_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \\ & \frac{3G(m_1 x_1 \boldsymbol{GP}_1 + m_2 x_2 \boldsymbol{GP}_2).\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} \end{aligned} \tag{197}$$

$$\begin{aligned} F_{y_0}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = & \frac{3G(m_1(y_0 - y_1)\Delta_1^2 + m_2(y_0 - y_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \\ & \frac{3G(m_1 y_1 \boldsymbol{GP}_1 + m_2 y_2 \boldsymbol{GP}_2).\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} \end{aligned} \tag{198}$$

$$\begin{aligned} F_{z_0}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = & \frac{3G(m_1(z_0 - z_1)\Delta_1^2 + m_2(z_0 - z_2)\Delta_2^2)}{2\Delta_0^5} + \\ & \frac{3G(m_1 z_1 \boldsymbol{GP}_1 + m_2 z_2 \boldsymbol{GP}_2).\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} \end{aligned} \tag{199}$$

4.1.2 Les équations du mouvement du point P_1

Ecrivons les équations du mouvement du point P_1. De (163), on a :

$$\frac{d^2 \boldsymbol{GP}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=0, j\neq i}^{2} \frac{m_j(\boldsymbol{GP}_i - \boldsymbol{GP}_j)}{\|\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j\|^3}$$

ce qui donne vectoriellement :

$$\frac{d^2 \boldsymbol{GP}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(\boldsymbol{GP}_1 - \boldsymbol{GP}_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(\boldsymbol{GP}_1 - \boldsymbol{GP}_2)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|^3} \tag{200}$$

Pour les coordonnées x_1, y_1, et z_1, on a :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(x_1 - x_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(x_1 - x_2)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|^3} \tag{201}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(y_1-y_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(y_1-y_2)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|^3} \tag{202}$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(z_1-z_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(z_1-z_2)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|^3} \tag{203}$$

Ecrivons l'équation en x_1 :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{Gm_2x_1}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|^3} + \frac{Gm_2x_2}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|^3} - \frac{Gm_0(x_1-x_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3} \tag{204}$$

En gardant les termes du premier ordre de :

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|^3}$$

on a :

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{Gm_2x_1}{\Delta_1^3} + \frac{3Gm_2x_1\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} - \frac{3Gm_2x_1\,\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_2}{\Delta_1^5}\\ +\frac{Gm_2x_2}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|^3} - \frac{Gm_0(x_1-x_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3}\end{aligned} \tag{205}$$

Posons :

$$\mu_1 = Gm_2 \tag{206}$$

Les équations de mouvement de P_1 deviennent :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\mu_1}{r_1^3}x_1 = F_{x_1}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \tag{207}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{\mu_1}{r_1^3}y_1 = F_{y_1}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \tag{208}$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{\mu_1}{r_1^3}z_1 = F_{z_1}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \tag{209}$$

Avec :

$$F_{x_1}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \frac{3Gm_2x_1\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} - \frac{3Gm_2x_1\,\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_2x_2}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|^3} - \frac{Gm_0(x_1-x_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3} \tag{210}$$

$$F_{y_1}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \frac{3Gm_2y_1\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} - \frac{3Gm_2y_1\,\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_2y_2}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|^3} - \frac{Gm_0(y_1-y_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3} \tag{211}$$

$$F_{z_1}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \frac{3Gm_2z_1\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} - \frac{3Gm_2z_1\,\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_2z_2}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|^3} - \frac{Gm_0(z_1-z_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3} \tag{212}$$

4.1.3 Les équations du mouvement du point P_2

Ecrivons les équations du mouvement du point P_2. De (163), on a :

$$\frac{d^2\boldsymbol{GP}_2}{dt^2} = -G\sum_{j=0,j\neq 2}^{2}\frac{m_j(\boldsymbol{GP}_2-\boldsymbol{GP}_j)}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_j\|^3}$$

ce qui donne vectoriellement :

$$\frac{d^2\boldsymbol{GP}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_0(\boldsymbol{GP}_2 - \boldsymbol{GP}_0)}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} - \frac{Gm_1(\boldsymbol{GP}_2 - \boldsymbol{GP}_1)}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3} \tag{213}$$

Pour les coordonnées x_2, y_2, et z_2, on a :

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{Gm_0(x_2 - x_0)}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3} \tag{214}$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = -\frac{Gm_0(y_2 - y_0)}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(y_2 - y_1)}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3} \tag{215}$$

$$\frac{d^2z_2}{dt^2} = -\frac{Gm_0(z_2 - z_0)}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2(z_2 - z_1)}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3} \tag{216}$$

Comme au premier ordre, on a :

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\|^3} = \frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} + 3\frac{\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} \tag{217}$$

De même :

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3} = \frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} + 3\frac{\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_2}{\Delta_1^5} \tag{218}$$

L'équation en x_2 s'écrit :

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -Gx_2\left(\frac{m_0}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} + \frac{m_2}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3}\right) + \frac{Gm_0x_0}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2x_1}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3} \tag{219}$$

Qu'on peut écrire aussi sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{Gm_2}{\Delta_2^3}x_2 &= \frac{Gm_2x_2}{\Delta_2^3} - Gx_2\left(\frac{m_0}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} + \frac{m_2}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3}\right) + \frac{Gm_0x_0}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2x_1}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3} \\ &= \frac{Gm_2x_2}{\Delta_2^3} - Gm_0x_2\left(\frac{1}{\Delta_0^3} - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_0^5} + 3\frac{\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5}\right) - Gm_2x_2\left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{3\Delta_2^2}{2\Delta_1^5} + 3\frac{\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_2}{\Delta_1^5}\right) + \\ &\quad + \frac{Gm_0x_0}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2x_1}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3}\end{aligned} \tag{220}$$

On pose :

$$\mu_2 = Gm_2 \tag{221}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{\mu_2}{r_2^3}x_2 &= Gx_2\left(\frac{m_2}{\Delta_2^3} - \frac{m_0}{\Delta_0^3} - \frac{m_2}{\Delta_1^3}\right) - \frac{3Gx_1}{2}\left(\frac{m_0\Delta_2^2}{\Delta_0^5} + \frac{m_2\Delta_2^3}{\Delta_1^5}\right) \\ &-3Gm_0x_2\frac{\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} - 3Gm_2x_2\frac{\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_0x_0}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2x_1}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3}\end{aligned} \tag{222}$$

Soit :

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{\mu_2}{r_2^3}x_2 = F_{x_2}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \tag{223}$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + \frac{\mu_2}{r_2^3}y_2 = F_{y_2}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \tag{224}$$

$$\frac{d^2z_2}{dt^2} + \frac{\mu_2}{r_2^3}z_2 = F_{z_2}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \tag{225}$$

Avec :

$$F_{x_2}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = Gx_2\left(\frac{m_2}{\Delta_2^3} - \frac{m_0}{\Delta_0^3} - \frac{m_2}{\Delta_1^3}\right) - \frac{3Gx_1}{2}\left(\frac{m_0\Delta_2^2}{\Delta_0^5} + \frac{m_2\Delta_2^3}{\Delta_1^5}\right)$$

$$-3Gm_0x_2\frac{\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} - 3Gm_2x_2\frac{\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_0x_0}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2x_1}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3} \tag{226}$$

$$F_{y_2}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = Gy_2\left(\frac{m_2}{\Delta_2^3} - \frac{m_0}{\Delta_0^3} - \frac{m_2}{\Delta_1^3}\right) - \frac{3Gy_1}{2}\left(\frac{m_0\Delta_2^2}{\Delta_0^5} + \frac{m_2\Delta_2^3}{\Delta_1^5}\right)$$

$$-3Gm_0y_2\frac{\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} - 3Gm_2y_2\frac{\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_0y_0}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2y_1}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3} \tag{227}$$

$$F_{z_2}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = Gz_2\left(\frac{m_2}{\Delta_2^3} - \frac{m_0}{\Delta_0^3} - \frac{m_2}{\Delta_1^3}\right) - \frac{3Gz_1}{2}\left(\frac{m_0\Delta_2^2}{\Delta_0^5} + \frac{m_2\Delta_2^3}{\Delta_1^5}\right)$$

$$-3Gm_0z_2\frac{\boldsymbol{GP}_2.\boldsymbol{GP}_0}{\Delta_0^5} - 3Gm_2z_2\frac{\boldsymbol{GP}_1.\boldsymbol{GP}_2}{\Delta_1^5} + \frac{Gm_0z_0}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_0\|^3} + \frac{Gm_2z_1}{\|\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\|^3} \tag{228}$$

4.2 Le Mouvement restreint de deux corps

Pour simplifier les calculs, on considère que le corps P_2 est prépondérant en masse c'est-à-dire que $m_0 \ll m_2$ et $m_1 \ll m_2$. Dans ce cas, le centre de gravité G est confondu avec le point P_2. Comme le centre de gravité est en mouvement rectiligne, on peut considérer que le point P_2 est fixe. Alors, on a le mouvement restreint de deux corps. Les équations de mouvement s'écrivent sous la forme :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -Gx_0\left(\frac{m_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\boldsymbol{GP}_0\|^3}\right) + \frac{Gm_1x_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} \tag{229}$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} = -Gy_0\left(\frac{m_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\boldsymbol{GP}_0\|^3}\right) + \frac{Gm_1y_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} \tag{230}$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} = -Gz_0\left(\frac{m_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} + \frac{m_2}{\|\boldsymbol{GP}_0\|^3}\right) + \frac{Gm_1z_1}{\|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\|^3} \tag{231}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(x_1 - x_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2.x_1}{\|\boldsymbol{GP}_1\|^3} \tag{232}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(y_1 - y_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2y_1}{\|\boldsymbol{GP}_1\|^3} \tag{233}$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = -\frac{Gm_0(z_1 - z_0)}{\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0\|^3} - \frac{Gm_2z_1}{\|\boldsymbol{GP}_1\|^3} \tag{234}$$

Aux équations précédentes, on ajoute l'équation :

$$H = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{1}{2} m_i v_i^2 - G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\| \boldsymbol{GP}_i - \boldsymbol{GP}_j \|} = \text{constante} \tag{235}$$

qui représente l'hamiltonien et la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \wedge \mathbf{GP}_i \right) = 0 \tag{236}$$

Les équations (229) á (234) peuvent s'écrivent sous la forme vectorielle :

$$\frac{d^2 \boldsymbol{GP}_0}{dt^2} = -G m_2 \frac{\boldsymbol{GP}_0}{\| \boldsymbol{GP}_0 \|^3} - G m_1 \frac{\boldsymbol{GP}_0 - \boldsymbol{GP}_1}{\| \boldsymbol{P}_0 \boldsymbol{P}_1 \|^3} \tag{237}$$

$$\frac{d^2 \boldsymbol{GP}_1}{dt^2} = -G m_2 \frac{\boldsymbol{GP}_1}{\| \boldsymbol{GP}_1 \|^3} - G m_0 \frac{\boldsymbol{GP}_1 - \boldsymbol{GP}_0}{\| \boldsymbol{P}_0 \boldsymbol{P}_1 \|^3} \tag{238}$$

ou encore sous la forme :

$$\frac{1}{m_1} . \frac{d^2 \boldsymbol{GP}_0}{dt^2} + \frac{G m_2}{m_1} \frac{\boldsymbol{GP}_0}{\| \boldsymbol{GP}_0 \|^3} = F_{12} \tag{239}$$

$$-\frac{1}{m_0} . \frac{d^2 \boldsymbol{GP}_1}{dt^2} - \frac{G m_2}{m_0} \frac{\boldsymbol{GP}_1}{\| \boldsymbol{GP}_1 \|^3} = F_{12} \tag{240}$$

avec :

$$F_{12} = -G \frac{\boldsymbol{GP}_0 - \boldsymbol{GP}_1}{\| \boldsymbol{P}_0 \boldsymbol{P}_1 \|^3} = fonction\ de\ (\boldsymbol{GP}_0, \boldsymbol{GP}_1) \tag{241}$$

Le membre gauche de l'équation (239) est fonction des coordonnées de P_0 et du temps, de même le membre gauche de (240) est fonction des coordonnées de P_1 et du temps. Comme les deux équations (239) et (240) sont égales, on a alors nécessairement :

$$\frac{1}{m_1} . \frac{d^2 \boldsymbol{GP}_0}{dt^2} + \frac{G m_2}{m_1} \frac{\boldsymbol{GP}_0}{\| \boldsymbol{GP}_0 \|^3} = -\frac{1}{m_0} . \frac{d^2 \boldsymbol{GP}_1}{dt^2} - \frac{G m_2}{m_0} \frac{\boldsymbol{GP}_1}{\| \boldsymbol{GP}_1 \|^3} = \Phi(t) \tag{242}$$

où $\Phi(t)$ est le vecteur :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \tag{243}$$

De (242), on a les deux équations :

$$\frac{d^2 \boldsymbol{GP}_0}{dt^2} + G m_2 \frac{\boldsymbol{GP}_0}{\| \boldsymbol{GP}_0 \|^3} = m_1 \Phi(t) \tag{244}$$

$$\frac{d^2 \boldsymbol{GP}_1}{dt^2} + G m_2 \frac{\boldsymbol{GP}_1}{\| \boldsymbol{GP}_1 \|^3} = -m_0 \Phi(t) \tag{245}$$

Il suffit de résoudre la première équation :

$$\frac{d^2 \boldsymbol{GP}_0}{dt^2} + G m_2 \frac{\boldsymbol{GP}_0}{\| \boldsymbol{GP}_0 \|^3} = m_1 \Phi(t)$$

On commence par résoudre (244) sans second membre :

$$\frac{d^2\boldsymbol{GP}_0}{dt^2} + Gm_2\frac{\boldsymbol{GP}_0}{\|\boldsymbol{GP}_0\|^3} = 0 \tag{246}$$

Or cette équation a été résolue dans la section 2, on a le mouvement de P_0 par rapport au point P_2. Les coordonnées de P_0 dans le repère (P_2, ξ, η, ζ) sont :

$$\xi = a(cosE - e) \tag{247}$$

$$\eta = a\sqrt{1-e^2}sinE \tag{248}$$

$$\zeta = 0 \tag{249}$$

Pour tenir compte du deuxième membre, on cherche les solutions (ξ_1, η_1, ζ_1) et la fonction inconnue λ telles que :

$$\xi_1 = \lambda\xi = a\lambda(cosE - e) \tag{250}$$

$$\eta_1 = \lambda\eta = a\lambda\sqrt{1-e^2}sinE \tag{251}$$

$$\zeta_1 = \lambda\zeta = \lambda \times 0 = 0 \tag{252}$$

et Ecrivons l'équation vectorielle (244) dans le repère (P_2, ξ, η, ζ), on a alors :

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + Gm_2\xi_1\frac{1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^{3/2}} = m_1\varphi_1 \tag{253}$$

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + Gm_2\eta_1\frac{1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^{3/2}} = m_1\varphi_2 \tag{254}$$

$$\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} + Gm_2\zeta_1\frac{1}{(\xi_1^2+\eta_1^2)^{3/2}} = m_1\varphi_3 \tag{255}$$

$$\tag{256}$$

La dernière équation devient :

$$\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = m_1\varphi_3 = 0 \Longrightarrow \varphi_3 = 0 \tag{257}$$

Calculons les dérivées premières et secondes de (250) :

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \dot{\lambda}\xi + \lambda\frac{d\xi}{dt} \tag{258}$$

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \ddot{\lambda}\xi + 2\dot{\lambda}\frac{d\xi}{dt} + \lambda\frac{d^2\xi}{dt^2} \tag{259}$$

L'équation (253) devient :

$$\ddot{\lambda}\xi + 2\dot{\lambda}\frac{d\xi}{dt} + \lambda\frac{d^2\xi}{dt^2} + +Gm_2\xi\frac{1}{\lambda^2(\xi^2+\eta^2)^{3/2}} = m_1\varphi_1 \tag{260}$$

soit :

$$\ddot{\lambda}\xi + 2\dot{\lambda}\frac{d\xi}{dt} + \lambda\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + Gm_2\xi\frac{1}{\lambda^3(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}\right) = m_1\varphi_1 \tag{261}$$

Or :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -Gm_2\xi\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}$$

$$\ddot{\lambda}\xi + 2\dot{\lambda}\frac{d\xi}{dt} + Gm_2\xi\lambda\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}\left(\frac{1}{\lambda^3} - 1\right) = m_1\varphi_1 \tag{262}$$

Or, on a en utilisant l'équation de Kepler (90) :

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2(1 - ecosE)^2 \tag{263}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -asinE\frac{dE}{dt} = -\frac{nasinE}{1 - ecosE} \tag{264}$$

L'équation (262) devient :

$$a(cosE - e)\ddot{\lambda} - \frac{2nasinE}{1 - ecosE}\dot{\lambda} + \frac{Gm_2(cosE - e)}{a^2(1 - ecosE)^3}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right) = m_1\varphi_1 \tag{265}$$

Octobre 2022

Références

[1] **Helmut Moritz and Ivan I. Mueller**. 1988. *Earth Rotation :Theory and Observation.* Ungar Publishing Compagny. New York. 617p.

[2] **Bruno Morando**. 1974. *Mouvement d'un satellite artificiel de la terre.* Gordon & Breach, Paris, London et New York. 255p.

[3] **Henri Poincaré**. 1892. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.* Tome I. Gauthier Villars et Fils, Imprimeurs-Libraires. Paris. 408p.