Preuve élémentaire du Théorème de Fermat-Wiles

par Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

Théorème de Fermat-Wiles :

(1) « L'égalité $x^n + y^n = z^n$, où n, x, y, z $\in N^*$, est impossible pour n > 2. »

**

Abstract of proof :

Let $x^n = z^n - y^n$ and $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$, $(a, b) \in Z^2$.
In the Euclidean-division of $ab(z^n - y^n)$ by $az^{n-1} - by^{n-1}$, it exists one and only one remainder which can be equal to zero and valid, and which implies the equality $b^2 y^{n-2} = a^2 z^{n-2}$ which is impossible for n > 2 since $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$ and x, y, z are coprim integers.

**

L'arbre de la division euclidienne :

On suppose x, y et z sont des nombres entiers premiers entre eux.
Etant donnés pgcd(y, z) = 1 et le corollaire du théorème de Bachet (1624), il existe deux entiers relatifs a et b tel que :

(2) $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$

On a la division

(3) $ab(z^n - y^n) : (az^{n-1} - by^{n-1})$

qui doit avoir un seul reste nul valide.

Recherche de la branche optimale de l'arbre de la division :

Posons la division et effectuons les opérations jusqu'à l'obtention d'un reste déjà obtenu (fin du cycle des opérations) et ainsi obtenir les restes candidats à être nuls. Pour cela, on doit appliquer une méthode de réduction de la puissance n qui consiste à éliminer les monômes comportant la puissance n de sorte à n'avoir que des monômes comportant au plus la puissance n – 1.
Cette méthode optimise la recherche du seul reste pouvant être nul et valide en écartant des restes nuls sans suite ou non valides.

Pose de la division euclidienne :

$z^n - y^n = (az^{n-1} – by^{n-1})x$, $q = x$

$ab * (z^n - y^n)$

(D) $abz^n - aby^n$ | $az^{n-1} – by^{n-1}$ (d)

$- abz^n + b^2zy^{n-1}$ $bz + ay –bz + bz$

Evaluation des restes et des quotients partiels :

$R_{1=}$ $- aby^n + b^2 zy^{n-1}$ $R_1 = 0 \Rightarrow q_1 = abx = bz \Rightarrow$ **$ax = z$** $\Rightarrow R_1 \neq 0$

$aby^n - a^2yz^{n-1}$ pgcd(x, z) = 1

$R_2=$ **$b^2zy^{n-1} - a^2yz^{n-1}$** $R_2 =0 \Rightarrow b^2y^{n-2}-a^2 z^{n-2}=0 \Rightarrow q_2 = abx = bz+ ay$

$- b^2zy^{n-1} + abz^n$ pgcd(y, a) >1, pgcd(z, b) >1 et $x^{n-1}= az^{n-1} - by^{n-1}$

==> pgcd(x, y) > 1, pgcd(x, z) > 1 pour n > 2.

$R_3=$ $abz^n - a^2yz^{n-1}$ $R_3=0 \Rightarrow q_3 = abx= bz + ay –bz \Rightarrow$ **$bx = y$** $\Rightarrow R_3\neq 0$

$b^2zy^{n-1} - abz^n$ pgcd(x, y) = 1

$b^2zy^{n-1} - a^2yz^{n-1}$ fin du cycle des opérations.

**

L'évaluation des restes et des quotients partiels a permis de déterminer le reste, qui peut être nul et valide, obtenu par déduction : deux restes sur les trois obtenus ne peuvent pas être nuls.

Ainsi, seul le reste R_2 dans la division euclidienne ci-dessus peut être nul :

(4) $R_2 = b^2zy^{n-1} - a^2yz^{n-1} = 0$ implique l'égalité

(5) $b^2 y^{n-2} = a^2 z^{n-2}$ qui est impossible pour n > 2 puisque $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$ et x, y, z sont des nombres entiers premiers entre eux.

Par conséquent, les égalités :

(6) $b^2y^{n-2} - a^2z^{n-2} = 0$ (R), $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$ (d), $x^n = z^n - y^n$ (D)

tel que D = dx sont impossibles pour n > 2.

Preuve élémentaire du Théorème de Fermat-Wiles

par Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

Théorème de Fermat-Wiles :

(1) « L'égalité $x^n + y^n = z^n$, où n, x, y, z Є N^*, est impossible pour n > 2. »

**

Abstract of proof :

Let $x^n = z^n - y^n$ and $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$, (a, b) Є Z^2.

In the division $ab(z^n - y^n) = (az^{n-1} - by^{n-1})(bz + ay) + b^2zy^{n-1} – a^2yz^{n-1}$, the term $b^2zy^{n-1} – a^2yz^{n-1}$ must be zero according to the tree of the Euclidean-division. What implies the equality $b^2y^{n-2} = a^2z^{n-2}$ which is impossible for n > 2 since $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$ and x, y, z are coprim integers.

**

La division directe :

On suppose x, y et z sont des nombres entiers premiers entre eux.

Etant donnés pgcd(y, z) = 1 et le corollaire du théorème de Bachet (1624), il existe deux entiers relatifs a et b tel que :

(2) $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$

On a la division :

(3) $x^n = (z^n - y^n) = (az^{n-1} - by^{n-1})(z/a + y/b) + (b/a)zy^{n-1} – (a/b)yz^{n-1}$

normalisée en la division euclidienne :

(4) $ab(z^n - y^n) = (az^{n-1} - by^{n-1})(bz + ay) + b^2zy^{n-1} – a^2yz^{n-1}$

(D'après l'arbre de la division euclidienne, le reste doit être nul.)

S'il existe un couple (a,b) Є Z^2 tels que :

(5) $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$ et

$abx = bz + ay$ (Problème non résolu.)

alors la division (4) est entière et le reste $b^2zy^{n-1} – a^2yz^{n-1} = 0$.

Ce qui implique l'égalité :

(6) $b^2y^{n-2} = a^2z^{n-2}$ qui est impossible pour n > 2 puisque $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$ et x, y, z sont des nombres entiers premiers entre eux.

Par conséquent, les égalités :

(7) $b^2y^{n-2} - a^2z^{n-2} = 0$ (R), $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$ (d), $x^n = z^n - y^n$ (D)

tel que D = dx sont impossibles pour n > 2.

Remarque :

Soit le système :

(1) $a^x + b^y = c^z$, $(a, b, c, x, y, z) \in N^{*6}$ et a, b, c premiers entre eux.

(2) $a^x = c^z - b^y$

(3) $a^{x-1} = uc^{z-1} - vb^{y-1}$, $(u, v) \in Z^2$

Comme décrit ci-dessus pour la division $(z^n - y^n)$: $(az^{n-1} - by^{n-1})$, le reste de la division $(c^z - b^y)$: $(uc^{z-1} - vb^{y-1})$ qui peut être nul, implique l'égalité :

(4) $v^2b^{y-2} = u^2c^{z-2}$,

égalité impossible pour (y > 2 ou z > 2), et par symétrie, ou pour (x > 2 ou z > 2), ou pour (x > 2 ou y > 2).