

31.08.20

Практическое значение синтаксического определения теоремы¹ как элемента множества, порождаемого дедуктивной системой, заключается в возможности доказательства любой теоремы компьютером с неограниченным временем работы. Одним из способов непосредственной реализации данной идеи является построение формальной грамматики дедуктивной системы. Так, при автоматическом доказательстве теорем методами машинного обучения в качестве обучающей выборки мы могли бы указать множество пар вида (X, Y) , где X – теорема, а Y – порождающая X последовательность правил вывода формальной грамматики. Далее мы ограничимся построением грамматики исчисления высказываний. Полученная грамматика типа 0 иерархии Хомского [2] порождает язык, словами которого являются все тавтологии.

Для удобства будем исходить из порождающей все тавтологии дедуктивной системы Д. Г. Никода [3], состоящей из единственной использующей штрих Шеффера схемы аксиом и единственного типа правил вывода. Приведём их, обозначая штрих Шеффера как n и обращаясь к польской записи:

$$nnAnBCnnDnDDnnEBnnAEnAE$$

$$A, nAnBC \vdash C$$

Наряду с n , терминальными символами следующей грамматики \mathcal{G} являются x и v , так что записи $xv\dots v$ с k символами v соответствует переменная x_k . При данных обозначениях \mathcal{G} порождает те и только те слова, которые являются польской записью тавтологий. Далее приведены нетерминальные символы и таблица правил вывода \mathcal{G} , из которых первые 228 генерируют всевозможные аксиомы системы Никода:

$$S, V, A, B, C, D, E, A', B', D', E', T, T', T^<, T^>, A^L, B^L, C^L, D^L, E^L, A^R, B^R, C^R, D^R, E^R, A^<, B^<, D^<, E^<, B^>, D^>, E^>, A^{<<}, B^{<<}, D^{<<}, E^{<<}, A_n, B_n, D_n, E_n, A_x, B_x, D_x, E_x, A_v, B_v, D_v, E_v, (,), \{, \}, ,, F, F^>, F^{>>}, F^{<<}, F^{<n}, F^{<x}, F^{<v}$$

¹ Наряду с синтаксическим, имеет место семантическое определение, в соответствии с которым теоремой данной теории называется предложение, истинное во всякой модели теории. Эквивалентность определений следует из теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов.

1	S	T'TnnAnBCnnDnD'D'nnEB'nnA'E'nA'E'T'
2	A	A^LnxVxVA^R
3	B	B^LnxVxVB^R
4	C	C^LnxVxVC^R
5	D	D^LnxVxVD^R
6	E	E^LnxVxVE^R
7	V	v
8	V	vV
9	V	nxVxV
10	Tn	nT
11	Tx	xT
12	Tv	vT
13	TD'	D'T
14	TA^L	A^LT
15	TB^L	B^LT
16	TC^L	C^LT
17	TD^L	D^LT
18	TE^L	E^LT
19	TA^R	A^RT
20	TB^R	B^RT
21	TC^R	C^RT
22	TD^R	D^RT
23	TE^R	A^{<}E^R
24	nA^{<}	A^{<}n
25	xA^{<}	A^{<}x
26	vA^{<}	T^{<}v
27	A'A^{<}	A^{<}A'
28	B'A^{<}	A^{<}B'
29	D'A^{<}	A^{<}D'
30	E'A^{<}	A^{<}E'
31	B^LA^{<}	A^{<}B^L
32	C^LA^{<}	A^{<}C^L
33	D^LA^{<}	A^{<}D^L
34	E^LA^{<}	A^{<}E^L
35	B^RA^{<}	A^{<}B^R
36	C^RA^{<}	A^{<}C^R
37	D^RA^{<}	A^{<}D^R
38	E^RA^{<}	A^{<}E^R
39	A^RA^{<}	A^{<<}A^R
40	nA^{<<}A^R	A^RnA_n
41	xA^{<<}A^R	A^RxA_x
42	vA^{<<}A^R	A^RvA_v
43	A_nn	nA_n
44	A_nx	xA_n
45	A_nv	vA_n
46	A_nB'	B'A_n
47	A_nD'	D'A_n
48	A_nE'	E'A_n

49	$A_n B^L$	$B^L A_n$
50	$A_n C^L$	$C^L A_n$
51	$A_n D^L$	$D^L A_n$
52	$A_n E^L$	$E^L A_n$
53	$A_n B^R$	$B^R A_n$
54	$A_n C^R$	$C^R A_n$
55	$A_n D^R$	$D^R A_n$
56	$A_n E^R$	$E^R A_n$
57	$A_n A'$	$A' n A_n$
58	$A_x n$	$n A_x$
59	$A_x x$	$x A_x$
60	$A_x v$	$v A_x$
61	$A_x B'$	$B' A_x$
62	$A_x D'$	$D' A_x$
63	$A_x E'$	$E' A_x$
64	$A_x B^L$	$B^L A_x$
65	$A_x C^L$	$C^L A_x$
66	$A_x D^L$	$D^L A_x$
67	$A_x E^L$	$E^L A_x$
68	$A_x B^R$	$B^R A_x$
69	$A_x C^R$	$C^R A_x$
70	$A_x D^R$	$D^R A_x$
71	$A_x E^R$	$E^R A_x$
72	$A_x A'$	$A' x A_x$
73	$A_v n$	$n A_v$
74	$A_v x$	$x A_v$
75	$A_v v$	$v A_v$
76	$A_v B'$	$B' A_v$
77	$A_v D'$	$D' A_v$
78	$A_v E'$	$E' A_v$
79	$A_v B^L$	$B^L A_v$
80	$A_v C^L$	$C^L A_v$
81	$A_v D^L$	$D^L A_v$
82	$A_v E^L$	$E^L A_v$
83	$A_v B^R$	$B^R A_v$
84	$A_v C^R$	$C^R A_v$
85	$A_v D^R$	$D^R A_v$
86	$A_v E^R$	$E^R A_v$
87	$A_v A'$	$A' v A_v$
88	$A_n T'$	$A^< T'$
89	$A_x T'$	$A^< T'$
90	$A_v T'$	$A^< T'$
91	$A^L A^<< A^R$	$B^>$
92	$B^> n$	$n B^>$
93	$B^> x$	$x B^>$
94	$B^> v$	$v B^>$
95	$B^> B^L$	$B^L B^>$
96	$B^> B^R$	$B^<< B^R$

97	$nB^{<<B^R}$	$B^R n B_n$
98	$xB^{<<B^R}$	$B^R x B_x$
99	$vB^{<<B^R}$	$B^R v B_v$
100	$B_n n$	$n B_n$
101	$B_n x$	$x B_n$
102	$B_n v$	$v B_n$
103	$B_n D'$	$D' B_n$
104	$B_n C^L$	$C^L B_n$
105	$B_n D^L$	$D^L B_n$
106	$B_n E^L$	$E^L B_n$
107	$B_n C^R$	$C^R B_n$
108	$B_n D^R$	$D^R B_n$
109	$B_n E^R$	$E^R B_n$
110	$B_n B'$	$B^< B' n$
111	$B_x n$	$n B_x$
112	$B_x x$	$x B_x$
113	$B_x v$	$v B_x$
114	$B_x D'$	$D' B_x$
115	$B_x C^L$	$C^L B_x$
116	$B_x D^L$	$D^L B_x$
117	$B_x E^L$	$E^L B_x$
118	$B_x C^R$	$C^R B_x$
119	$B_x D^R$	$D^R B_x$
120	$B_x E^R$	$E^R B_x$
121	$B_x B'$	$B^< B' x$
122	$B_v n$	$n B_v$
123	$B_v x$	$x B_v$
124	$B_v v$	$v B_v$
125	$B_v D'$	$D' B_v$
126	$B_v C^L$	$C^L B_v$
127	$B_v D^L$	$D^L B_v$
128	$B_v E^L$	$E^L B_v$
129	$B_v C^R$	$C^R B_v$
130	$B_v D^R$	$D^R B_v$
131	$B_v E^R$	$E^R B_v$
132	$B_v B'$	$B^< B' v$
133	$nB^<$	$B^< n$
134	$xB^<$	$B^< x$
135	$vB^<$	$B^< v$
136	$D'B^<$	$B^< D'$
137	$C^L B^<$	$B^< C^L$
138	$D^L B^<$	$B^< D^L$
139	$E^L B^<$	$B^< E^L$
140	$C^R B^<$	$B^< C^R$
141	$D^R B^<$	$B^< D^R$
142	$E^R B^<$	$B^< E^R$
143	$B^R B^<$	$B^{<< B^R}$
144	$B^L B^{<< B^R}$	$D^>$

145	$D^>n$	$nD^>$
146	$D^>x$	$xD^>$
147	$D^>v$	$vD^>$
148	$D^>C^L$	$C^LD^>$
149	$D^>D^L$	$D^LD^>$
150	$D^>C^R$	$C^RD^>$
151	$D^>D^R$	$D^{<<}D^R$
152	$nD^{<<}D^R$	D^RnD_n
153	$xD^{<<}D^R$	D^RxD_x
154	$vD^{<<}D^R$	D^RvD_v
155	$D_n n$	nD_n
156	$D_n x$	xD_n
157	$D_n v$	vD_n
158	$D_n D'$	$D'nD_n$
159	$D_n E^L$	$D^<E^L$
160	$D_x n$	nD_x
161	$D_x x$	xD_x
162	$D_x v$	vD_x
163	$D_x D'$	$D'xD_x$
164	$D_x E^L$	$D^<E^L$
165	$D_v n$	nD_v
166	$D_v x$	xD_v
167	$D_v v$	vD_v
168	$D_v D'$	$D'vD_v$
169	$D_v E^L$	$D^<E^L$
170	$nD^<$	$D^<n$
171	$xD^<$	$D^<x$
172	$xD^<$	$D^<v$
173	$D'D^<$	$D^<D'$
174	$D^R D^<$	$D^{<<}D^R$
175	$D^L D^{<<}D^R$	$E^>$
176	$E^>n$	$nE^>$
177	$E^>x$	$xE^>$
178	$E^>v$	$vE^>$
179	$E^>D'$	$D'E^>$
180	$E^>E^L$	$E^LE^>$
181	$E^>E^R$	$E^{<<}E^R$
182	$nE^{<<}E^R$	E^RnE_n
183	$xE^{<<}E^R$	E^RxE_x
184	$vE^{<<}E^R$	E^RvE_v
185	$E_n n$	nE_n
186	$E_n x$	xE_n
187	$E_n v$	vE_n
188	$E_n A'$	$A'E_n$
189	$E_n B'$	$B'E_n$
190	$E_n E'$	$E'nE_n$
191	$E_x n$	nE_x
192	$E_x x$	xE_x

193	$E_x v$	$v E_x$
194	$E_x A'$	$A' E_x$
195	$E_x B'$	$B' E_x$
196	$E_x E'$	$E' x E_x$
197	$E_v n$	$n E_v$
198	$E_v x$	$x E_v$
199	$E_v v$	$v E_v$
200	$E_v A'$	$A' E_v$
201	$E_v B'$	$B' E_v$
202	$E_v E'$	$E' v E_v$
203	$E_n T'$	$E' T'$
204	$E_x T'$	$E' T'$
205	$E_v T'$	$E' T'$
206	$n E^<$	$E^< n$
207	$x E^<$	$E^< x$
208	$v E^<$	$E^< v$
209	$A' E^<$	$E^< A'$
210	$B' E^<$	$E^< B'$
211	$E' E^<$	$E^< E'$
212	$E^R E^<$	$E^<< E^R$
213	$E^L E^<< E^R$	$T^>$
214	$T^> n$	$n T^>$
215	$T^> x$	$x T^>$
216	$T^> v$	$v T^>$
217	$T^> A'$	$A' T^>$
218	$T^> B'$	$B' T^>$
219	$T^> E'$	$E' T^>$
220	$T^> T'$	$T^<$
221	$n T^<$	$T^< n$
222	$x T^<$	$T^< x$
223	$v T^<$	$T^< v$
224	$A' T^<$	$T^<$
225	$B' T^<$	$T^<$
226	$E' T^<$	$T^<$
227	$D' T^<$	$T^<$
228	$T' T^<$	ϵ
229	S	(S, S)
230	$(n n$	$\{F n F^>$
231	$F^> n$	$n F^>$
232	$F^> x$	$x F^>$
233	$F^> v$	$v F^>$
234	$F^>,$	$, F^>>$
235	$F^>> n$	$F^< n$
236	$F^>> x$	$F^< x$
237	$F^>> v$	$F^< v$
238	$n F^< n$	$F^< n n$
239	$x F^< n$	$F^< n x$
240	$v F^< n$	$F^< n v$

241	$\neg F^{<n}$	$F^{<n}$
242	$FF^{<n}n$	$FF^{>}$
243	$nF^{<x}$	$F^{<x}n$
244	$xF^{<x}$	$F^{<x}x$
245	$vF^{<x}$	$F^{<x}v$
246	$\neg F^{<x}$	$F^{<x}$
247	$FF^{<x}x$	$FF^{>}$
248	$nF^{<v}$	$F^{<v}n$
249	$xF^{<v}$	$F^{<v}x$
250	$vF^{<v}$	$F^{<v}v$
251	$\neg F^{<v}$	$F^{<v}$
252	$FF^{<v}v$	$FF^{>}$
253	$F^{>>}$	$F^{<n}xVxV\}$
254	$nF^{<}$	$F^{<}n$
255	$xF^{<}$	$F^{<}x$
256	$vF^{<}$	$F^{<}v$
257	$\neg F^{<}$	$F^{<}$
258	$\{FF^{<}$	$($
259	$F^{>>}\}$	$F^{<<}$
260	$nF^{<<}$	$F^{<<}n$
261	$xF^{<<}$	$F^{<<}x$
262	$vF^{<<}$	$F^{<<}v$
263	$\neg F^{<<}$	$F^{<<}$
264	$\{FF^{<<}$	ε

Литература

1. E. Mendelson, Introduction to Mathematical Logic
2. А. Е. Пентус, М. Р. Пентус, Теория формальных языков
3. J. G. Nicod, A Reduction in the Number of Primitive Propositions of Logic