О необходимости обобщения Теории Алгоритмов для описания процессов в параллельных потоках*

А.А. Демидов, alex@dem.botik.ru[1]

[1]ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залеский

Традиционно понятие алгоритма вводится в теории через последовательность элементарных шагов, приводящих к решению задачи, а параллельные алгоритмы рассматриваются как внешнее по отношению к Теории Алгоритмов техническое решение, позволяющее ускорить процесс выполнения. Однако ряд физических процессов, используемых в настоящее время для вычислений, таких как квантовые вычисления, не укладываются в рамки предсказаний Теории Алгоритмов, в частности — по оценке вычислительной сложности, что говорит о том, что наше понимание параллельных вычислительных процессов, ограниченное рамками классической Теории Алгоритмов, может быть не полно. Возможен качественный скачок в Теории Вычислимости, если параллельные алгоритмы понимать как *обобщение* классических в рамках гипотетической Теории Параллельных Алгоритмов. В данной работе рассматриваются до-квантовые физические процессы, которые уже выходят за рамки классической Теории Алгоритмов. Предлагаются понятийные примитивы, подходящие для анализа параллельных потоков.

Ключевые слова: теория алгоритмов, теория вычислимости, теория вычислительной сложности, оптическое проеобразование Фурье, параллельные вычисления

1. Введение

Известен оптический физический процесс [1–3], выполняющий преобразование Фурье за время $O(n)$ [4], тогда как лучший алгоритм БПФ выполняется за время $O(n\log(n))$ [5,6].

Также известно конструктивное доказательство существования вычислимого, абсолютно интегрируемого сигнала, с ограниченной полосой пропускания, имеющего непрерывное преобразование Фурье, которое, однако, не вычислимо по Тьюрингу, но при этом вычислимо на *идеальном* (без шумов и искажений) аналоговом компьютере [7].

Алгоритмов, позволяющих выполнять точное преобразование Фурье за время, меньшее $O(n\log(n/p))$, где p — количество потоков, неизвестно [8,9]. Хотя фундаментальный вопрос о вычислительной сложности преобразования Фурье не решён [10].

Если мы допускаем, что существуют физические процессы, **A:** невозможные или **B:** превосходящие по мощности предсказания Теории Алгоритмов, тогда мы должны признать её неполноту либо **A:** в части Теории Вычислимости, либо **B:** в части Теории Вычислительной Сложности, основанной на вычислимости по Тьюрингу. Сильное требование **A:** обосновывается результатами типа [7]. Более слабое требование **B:** обосновывается результатами типа [4]. Также должны поставить под сомнение **A:** физический тезис Чёрча-Тьюринга, в соответствии с которым любая функция, которая может быть вычислена физическим устройством, может быть вычислена машиной Тьюринга, и **B:** одноимённый тезис, в соответствии с которым класс вычислимых функций ограничивается примитивно рекурсивными, и допустить существование вычислительного устройства, превосходящего по мощности машину Тьюринга. В частности, в рамках обобщённой теории должны найти разрешение парадоксы квантовой факторизации, позволяющей вскрывать коды RSA ($P = NP$).

Преобразование Фурье также используется для быстрой реализации операции свёртки (Теорема о свёртке) и умножения. Операция свёртки — основная операция в цифровой обработке и фильтрации сигналов, поэтому исследование представляет особый интерес.

*__WANTED!__ Разыскиваются производители оборудования, заинтересованные реализовать принципиально новую архитектуру «WIDE DATA ECHANGE BUS» и атомарные вычисления на аппаратном уровне [47].

2. Аппроксимирующие методы ПФ

Существуют аппроксисирующие методы преобразования Фурье [6,11–13], вписывающие результирующую функцию в некоторую область между двумя ограничивающими кривыми, и в ряде случаев позволяющие достичь времени $O(n)$.

Характерной особенностью аппроксисирующих методов преобразования Фурье является зависимость времени $O(n \cdot k)$ от точности ϵ вычисления коэффициентов: $k = f(n, \epsilon)$. Обычно $f(n, \epsilon) \sim \log(n) + \log(\epsilon^{-1})$ [14], однако может иметь порядок 1, $\log^{\beta}(n)$ или n^{α} [15].

При значении ϵ, равном машинному слову, то есть при вычислении с максимальной точностью, в общем случае значение $k > \log n$, поэтому при точном вычислении коэффициентов аппроксисирующие методы оказываются медленнее БПФ.

3. Анализ оптического метода ПФ

Физиками был сконструирован оптический стенд [4], измеряющий комплексные (с учётом фазы) значения коэффициентов преобразования Фурье после прохождения светового пучка от транспаранта через систему линз. Полное время измерения с интеграцией сигналов от датчиков составляет $O(n)$, что превосходит возможности вычислительных методов.

Основной вклад в оценку времени преобразования вносит разложение комплексной входной функции $C_{inp} = R_1 + iR_2$ на чётную и нечётную компоненты, занимая время $O(n)$:

$$E_k = \frac{R(x) + R(-x)}{2}; \quad O_k = \frac{R(x) - R(-x)}{2}. \tag{1}$$

Преобразование Фурье чётной функции имеет фазы, ограниченные $\phi = \{0, \pi\}$, а нечётной функции — $\phi = \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, расположенные по оси абсцисс и ординат соответственно.

После разложения все четыре компоненты $C_{inp} = O_1 + E_1 + iO_2 + iE_2$ подаются на преобразователь. Таким образом, метод обеспечивает преобразование Фурье комплексного сигнала в комплексный, а информация о фазе не теряется. Все затраты времени, составляющие оценку $O(n)$, приходятся на операции разложения и последующего объединения сигналов на выходе. Преобразователем является оптический стенд из системы линз, зеркал и поляризаторов, имеющий константное время $O(1)$ — собственно преобразование Фурье.

Эксперимент проводился с использованием пространственного модулятора светового пучка (SLM) Holoeye LC 2012, обеспечивающего разрешение 1024 х 768 пикселей при 256 градациях яркости на частоте 100 кадров в секунду, и имеющего размер 3.7 х 2.8 см. В качестве датчика использовался CMOS сенсор камеры Ximea MQ0013MG-E2 с разрешением 1280 x 1024 пикселей. Ни характеристики модулятора, ни камеры не являются предельными: производители предлагают оборудование с лучшим разрешением и глубиной цвета.

Порядка 100 преобразований Фурье в секунду, обеспечиваемых устройством, сравнимы по производительности с ускорителем NVIDIA K80, обеспечивающим 22 преобразования Фурье с одинарной точностью в секунду на 2D образе 7680 x 4320 пикселей. Как и для всех аналоговых систем, точность измерений ограничена внутренним физическим шумом.

Если разложение 1 реализовать на аппаратном уровне, или использовать раздельное представление компонент сигнала в программе изначально, то комплексное преобразование Фурье таким стендом будет выполняться полностью за время $O(1)$.

Аппаратная реализация разложения 1 является несложной: для функции O_k можно попарно соединить противоположные входы $R(x_i) = R(x_{n-i})$, а для функции E_k — соединить их попарно через операционный усилитель, осуществляющий вычитание сигнала. Поэтому *идеальный* оптический метод обеспечивает время преобразования $O(1)$.

Снижению шума способствует усреднение экспозиции в вариантах [4], увеличение площади пикселя S, снижение температуры T, применение добротных материалов с большим динамическим диапазоном ДД, ограниченном сверху: зарядом насыщения, пропорциональным S, а снизу: дробовым эффектом и спеклами [16,17], обратно пропорциональными $S\Delta T$.

Проведём также анализ изменения качества измерения коэффициентов $\epsilon = f(n)$ с ростом количества отсчётов $n \to \infty$ в *реальной*, а не идеальной, установке.

Заменим линзу отражающим фокусирующим зеркалом [18], либо плоской голографической дифракционной решёткой в виде линзы Френеля [19], без комы [1, §5.6], либо суперлинзой [21]. Это позволит избавиться от сферической аберрации, свойственной толстым линзам, и минимизировать хроматическую аберрацию. Интересен метод освещения транспаранта сходящимся пучком, уменьшающий апертуру вдвое, а длину f — на порядок [22–24].

Таблица 1. Все возможные искажения в установке с апертурой $D = 2d$.

Вид искажений	**Зависимость $\epsilon = f(n)$ и способ устранения**
Дробовой эффект электронов	Обратно пропорционален площади $S = \pi d^2/4n$ и разнице температур ΔT отдельной ячейки и излучения, зависит от материала, из которого изготовлен датчик.
Насыщение, пересвет, обратные квантовая эффективность и ДД	Обратно пропорционально площади $S = \pi d^2/4n$, имеет сложную зависимость от температуры излучения и отдельной ячейки — оптимум температуры [25, 26], зависит от материала, из которого изготовлен датчик.
Паразитная интерференция — спеклы, спектр	Обратно пропорциональна площади $S = \pi d^2/4n$ отдельной ячейки и температуре излучения $T \sim \lambda^{-1}$, пропорциональна монохроматичности излучения $1/\Delta\nu$, для устранения: метод двойного рассеивателя [16] и др. Ахроматичность зеркал допускает белый $1/\Delta\nu \to 0$ или $\sum \nu_i$ источник [27, 28], т.к. $\mathrm{Im}(z)$ отсутствует [4].
Оптическая аберрация	Обратно пропорциональна площади $S = \pi d^2/4n$ отдельной ячейки. Искажения зеркала: астигматизм и кома, $\Delta l = Dw(3A + 8w)/16$ [18, (4.51)], $S = \pi \Delta l^2/4$, откуда угловое поле зрения $2w \approx 22A^{-1}\sqrt{S/\pi D^2}$ радиан, где f — фокусное расстояние, и $A = D/f$. При этом образ и прообраз располагаются в фокусах f зеркала.
Дифракционный предел	Ограничивает площадь ячейки $S_{min} > \pi\lambda^2/16\eta^2$, где η — показатель преломления. Угловой размер: $1.22\lambda/D$. Незначим из-за шумов. Появление суперлинзы из метаматериалов с $\eta < 0$, устранит все аберрации [21].
Предел освещённости транспаранта — перегрев	Ограничивает световой поток через единицу прощади, который обратно пропорционален телесному углу в поле зрения $2\pi(1 - \cos(w))$ по отношению к полусфере 2π. Зависит от материала транспаранта и датчика.

При проектировании прибора сначала выбирается необходимая площадь ячейки S, исходя из доступных материалов, температурного режима, и необходимого динамического диапазона (соотношения сигнал/шум), а затем по формуле для аберрации рассчитывается необходимый размер его оптической подсистемы. Для размера ячеек $\Delta l = 5.5 \cdot 10^{-6}$, характерного для эксперимента [4] и $n = 1024^2 \approx 10^6$, этот размер будет составлять:

$$S = \pi \Delta l^2/4 = 2.376 \cdot 10^{-11}; \quad d = \sqrt{4nS/\pi} = 5.632 \cdot 10^{-3}; \quad 2wA = 5.371 \cdot 10^{-3} = 0.3077^\circ. \quad (2)$$

Параметр A, относительное отверстие (квадрат этой величины называют светосилой), характеризует меру светопропускания оптической системы, и должен быть выбран так, чтобы плоская волна за зеркалом от каждой точки транспаранта, в том числе — по краям, падала на всю поверхность датчика ($D = 2d$): $w = \mathrm{arctg}(A)$. Поэтому, с учётом формулы (2), $2A \cdot \arctan(A) = 5.371 \cdot 10^{-3}$, откуда $f = 0.22$ м, $w = 2.97°$.

При увеличении количества отсчётов до $n = 1024^3$ линейный размер оптической подсистемы $2f = 2 \cdot 39.35$ м увеличивается в ≈181 раз, диаметр — в 32 раза, а рабочий объём установки — в ≈185363 раза. Видимый угловой размер транспаранта $2w$ уменьшается в 5.657 раз до $2w = 2 \cdot 0.52°$, необходимая освещённость транспаранта увеличивается в 32 раза [1], либо, эквивалентно, в 32 раза увеличивается время экспозиции C. Эти соотношения сохраняются и с дальнейшим ростом n.

Таким образом, для реального устройства время преобразования является *сублинейным* и составляет $O(\sqrt[\gamma]{n}{+}C)$, где $\gamma = \log(1024)/\log(181.0194) = 4/3$ — при прочих равных условиях, увеличение количества отсчётов требует увеличения размеров стенда и расстояния между транспарантом и датчиком. Время преобразования $t = 2f/c + C = 4.425 \cdot 10^{-14} \cdot \sqrt[4]{n^3} + C$ также увеличивается как $f(n) = \sqrt[4]{n^3}$ из-за ограниченности скорости света c. При неизменной освещённости: $C \sim \sqrt[\varepsilon]{n}$, где $\varepsilon = \log(1024)/\log(32) = 2$.

Оценку $O(\sqrt[4]{n^3}) = O(\sqrt[4]{n^3} + \sqrt{n})$ можно считать верхней границей *фундаментальной* вычислительной сложности преобразования Фурье, полученной теоретически методами математической физики. Эта оценка может быть уменьшена, если найдётся более подходящий физический процесс, например — станут доступны суперлинзы [20], или удастся организовать измерение относительно пространства большей размерности (такого как банахово).

3.1. Метод освещения сходящимся пучком

Отдельно рассмотрим метод с освещением транспаранта сходящимся пучком [22–24], принципиальным отличием которого является равномерность освещения датчика каждой ячейкой транспаранта при малой апертуре $D = d$. Обычный метод освещения транспаранта параллельным пучком требует большей апертуры $D \geq 2d$ для сохранения высших гармоник [22]. Интересна также зависимость освещённости — времени экспозиции C от n.

Так же заменим все линзовые оптические элементы соответствующими зеркалами — для исключения хроматической аберрации, либо голографическими аналогами, либо суперлинзами. Так, зеркало, формирующее сходящийся пучок, — эллиптическое, точечный источник света расположен на расстоянии Δf дальше фокуса. Между зеркалом и транспарантом расположена решётка в виде фасеточного жалюзи, пропускающая сходящийся пучок и отражающая паразитную засветку от точечного источника.

Для оценки искажений привлечём методику, предложенную в работах [1, 24, 29, 30]. Отношение размера ячеек $\Delta l = 5.5 \cdot 10^{-6}$, характерного для эксперимента [4], к длине волны гелий-неонового лазера $\lambda = 6.328 \cdot 10^{-11}$, применённого в методике, составляет $8.7 \cdot 10^5$.

Волновая аберрация, влияющая на качество Фурье-образа, определяется уравнением:

$$\frac{dW(r)}{dr} = -\frac{\Delta l}{R - W(r)},$$

где r — расстояние от оптической оси, Δl — лучевая аберрация (отклонение координаты точки изображения от расчётного значения), $R \sim f$ — расстояние до изображения.

Решением этого уравнения является полином вида: $W(r) = k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^5 + ...$, что после дифференцирования с точностью до нескольких λ даёт линейную зависимость волновой аберрации изображения от расстояния: $-\Delta l/R = 2k_1 r + 4k_2 r^3 + 6k_3 r^5 + ...$

[1] Нагрев с ростом освещённости зависит от организации отвода тепла, 32 раза — не много. Для сравнения, освещённость: ночью в полнолуние — 0.2, на экране кинотеатра — 100, восхода и захода Солнца — 1 000, летом в полдень — 17 000, наибольшая при ясном небе — 100 000, вне атмосферы — 135 000 $\sim 1/R^2\odot$.

Тогда, пропорциональное удвоение всех линейных размеров прибора не оказывает влияния на качество изображения, если линейные размеры ячеек транспаранта и датчика тоже возрастут вдвое (площадь — в 4 раза), поскольку все угловые соотношения при этом будут сохранены. Необходимая освещённость транспаранта не изменится по этой же причине.

В силу линейности $\Delta l/R$ размер ячеек можно вернуть к исходному размеру, дополнительно увеличив фокусное расстояние f немногим менее, чем в 2 раза. С учётом формулы $\Delta l = Dw(3A + 8w)/16$ [18, (4.51)] точное значение — в $\sqrt{2}$ раза в параксиальной области, и до 2 раз — вне её. Мы работаем только в параксиальной области: $D \ll f$, поэтому освещённость при этом упадет в $R^2 = 2$ раза.

Таким образом, с ростом n линейные размеры прибора растут как $f = \sqrt{n\sqrt{n}}$, а необходимая освещённость транспаранта — как $f = \sqrt{n}$. Отсюда окончательно получаем оценку вычислительной сложности преобразования Фурье: $O(\sqrt[4]{n^3}) = O(\sqrt[4]{n^3} + \sqrt{n})$.

3.2. Реализация k-мерного ПФ

Двумерное (или, в общем случае, k-мерное) преобразование Фурье сводится к одномерному с помощью преобразования изображения по строкам с последующим домножением на «поворачивающие» (фазовые) множители и преобразованием результата по столбцам [31]. Декомпозиция не отличается от вычислительных методов, кроме того что вычислительными блоками здесь выступают оптические преобразователи. Изначально сигнал разделяется по строкам и распределяется на $p = n/\sqrt[k]{n}$ преобразователей, результат их работы домножается на фазовые множители за время $O(1)$, распределяется по столбцам — транспонируется за время $O(1)$ [параллельный попарный обмен значений; физическое время с учётом «длины проводов» $O_V(\sqrt[V]{p})$, где $V = 3$], и подаётся на те же p преобразователей. Оценка при этом оказывается $O(\sqrt[4k]{n^3}) = O(k\sqrt[4k]{n^3} + kC)$ из-за массового распараллеливания. Функция имеет оптимум $k = \log(n)/2$, при котором достигается $O(\log(n)) = O(\sqrt{2}\log(n))$ на гиперкубе 4^k.

3.3. Быстрое оптическое ПФ

Как и в случае вычислительной реализации БПФ, оптический метод можно декомпозировать к последовательности преобразований меньшей размерности по алгоритму Кули-Тьюки. Этот вариант является предельным случаем k-мерной декомпозиции:

$$\lim_{k\to\log(n)/2} O\left(k\sqrt[4k]{n^3}\right) = O\left(\frac{2\sqrt{2}\log(n)}{\log(4)}\right) = O\left(\sqrt{2}\log(n)\right) = O(\log(n)\cdot 1),$$

что является оценкой сверху для быстрого оптического преобразования Фурье. Вопрос достижимости $O(1)$ при *оптической* декомпозиции по основанию $n/2$ остаётся открытым: время композиции $O(\log(n))$ маскирует время собственно преобразования $O(1)\dots O(\log(n))$, которое наблюдалось бы в отсутствие искажений, являющихся в этом случае *устранимыми*.

Таблица 2. Сравнение ПФ $O(n^2)$, БПФ $O(n\log(n))$, ОПФ $O(\sqrt[4]{n^3})$ и БОПФ $O(\log(n))$.

n	ПФ	БПФ	ОПФ	БОПФ
10 000	100 000 000	132 877	1000	19 ($k = 7$)
100 000 000	10 000 000 000 000 000	2 657 542 476	1 000 000	38 ($k = 13$)
10^{12}	10^{24}	$4.0 \cdot 10^{13}$	10^9	56 ($k = 20$)

3.4. Учёт нелинейных искажений (в худшем случае)

Оценка $O(\sqrt[4]{n^3})$ получена в предположении, что влияние спеклов в устройстве полностью устранено. В противном случае ошибка преобразования росла бы с ростом n независимо от величины прибора — зернистость спеклов возрастает линейно с увеличением расстояния от транспаранта, так что для больших n преобразование было бы принципиально невозможно из-за неустранимых шумов: большие ячейки быстро исчерпали бы всю доступную площадь, а при удалении от транспаранта вырос бы и размер спеклов.

Это означает, что наличие спеклов относится к качеству оптической подсистемы, такому как прозрачность, от которого зависит пространственное разрешение трансформации непрерывных сигналов, а число отсчётов мы выбираем произвольно при дискретизации. Фокусное расстояние матовой линзы не имеет значения, и выкладки теряют смысл.

Физически спеклы полностью устранимы в белом свете, что эквивалентно множеству параллельных устройств при $\sum \nu_i$. Зависимость динамического диапазона ДД от площади ячейки получается методом разрезания на q частей (binning [32]): при этом ток насыщения уменьшается в q раз, а дробовой шум — увеличивается в $\sqrt{q}$ в соответствии с формулой для стандартного отклонения, поэтому $1/\epsilon \sim \sqrt[3]{n^2} \approx n$. Например, если ячейка обеспечивает 256 градаций яркости, то при разрезании на 4 части получим ячейки по 32 градации яркости каждая, с количеством информации $4 \cdot 5 > 8$ бит (возможность деления ограничена T)[1].

Время устранения спеклов с помощью объёмной (как дом из кубиков) сборки параллельных устройств зависит от n как $f_{max} = \sqrt{n}\sqrt[V]{\sqrt[3]{n^2}\sqrt[4]{n^3}} < \sqrt[4]{n^3}\,|_{V\geq 3}$ — если учитывать «длину проводов» (чего обычно не делают, и из-за чего необходимы дополнительные оценки — по объёму памяти), поскольку с ростом n диаметры устройств тоже растут.

Это не меняет оценку ОПФ $O(\sqrt[4]{n^3}) = O(\sqrt[4]{n^3} + \sqrt{n} + f_{max}) < O(n)$, производимого в данном случае *точно*. Более того, спеклы устранимы и другими физическими методами.

4. Сопоставление оптического и вычислительного ПФ

Если время преобразования $O(n)$ ещё можно было бы объяснить, сопоставив *зашумлённые* оптические методы с аппроксимирующими методами преобразования Фурье, то сублинейное реальное время $O(\sqrt[4]{n^3})$, а тем более — логарифмическое $O(\log(n))$, недостижимо ни для каких вычислительных методов. Коэффициенты вычисляются «интуитивно» даже без перебора всех элементов, что требовало бы времени $O(n/p)$. И с этим надо что-то делать!

4.1. Обоснование метода оценки

Методом «чёрного ящика». Допустим, у нас есть вычислительное устройство, скрытое в чёрном ящике. Тогда, подавая на его вход серии данных всё возрастающей длины n, мы можем измерить сложность скрытого алгоритма как функции от размера входных данных и аппроксимировать зависимость при $n \to \infty$. Если алгоритм не имеет особых точек, то есть если функция его сложности монотонна, то эта оценка будет асимптотически верной.

Монотонность функции сложности можно гарантировать, если иметь представление об устройстве алгоритма — что он не содержит инструкций, меняющих его сложность, то есть вносящих дополнительные циклы, при некоторых n.

Расчётный метод, которым была получена оценка, пусть и выглядит нестандартным, однако удовлетворяет самым строгим критериям формального математического доказательства. В физическом устройстве невозможно обнаружить привычных нам циклов, по уровню вложенности которых обычно оценивается вычислительная сложность. Это не отменяет факта, что вычисления производятся, и что их длительность зависит от n.

[1]SNR, зависящий от интенсивности Q, приводится к градациям яркости, если соотнести $Q_{max}/Q_{SNR=1}$. Соотношение $1/\epsilon \sim n$ достигнуто в прямых экспериментах, даже при наличии корреляции пикселов CCD.

Монотонность функции сложности физического устройства мы можем гарантировать, исходя из наших представлений о его работе на основе известных законов физики.

Произведённые расчёты являются верифицируемыми и легко проверяются в прямых экспериментах в физической лаборатории [33]. Строгость физических истин, часто дискриминируемых «чистыми» математиками, ничем не хуже незыблемости истин Платоновских — достаточно указать, что до Кантора все бесконечности считали одинаковыми.

Нет *никаких* аргументов, чтобы не признавать стенд [4] вычислительным устройством. Но, открыв чёрный ящик, вместо кучи процессоров, памяти и вентиляторов мы обнаруживаем там... пустоту. Которая работает быстрей любой машины Тьюринга.

В данном случае образуется рычаг, либо-либо: мы кладём на одну чашу весов физику, на другую — математику, и должны выбирать, либо законы физики не полны, и мы не учли какие-то искажения, возрастающие с ростом n. Либо не полны наши математические познания, и мы должны доработать Теорию Алгоритмов так, чтобы в ней стал возможен масштабируемый алгоритм преобразования Фурье, выполняемый за время $O(\log(n))$, а также — масштабируемый алгоритм факторизации целых чисел, выполняемый за $O(n)$.

5. Параллельный алгоритм как конфигурация

Разработчики параллельных программ знают, что параллельный код интуитивно перестаёт восприниматься как последовательность шагов, но больше напоминает город со своей архитектурой, башнями, стенами и барьерами, по которому путешествуют сигналы — потоки выполнения: не лента с инструкциями подаётся в процессор, а множество процессоров путешествуют по архитектурно выстроенному алгоритму. Классическая Теория Алгоритмов не может описать случай, когда таких путешественников становится бесконечно много, и уже не город, а две галактики — конфигурации пространства, равноправные физические бозонные и фермионные поля — проходят друг через друга во взаимодействии [34].

Существуют несколько эквивалентных классических формулировок понятия алгоритма. Интуитивное определение как «конечного набора чётких, недвусмысленных инструкций, следуя которым можно по входным данным определённого вида получать на выходе некоторый результат» [35] через тезис Чёрча подкреплено эквивалентными формальными определениями посредством машин Тьюринга, примитивно-рекурсивных функций, нормальных алгоритмов Маркова, и лямбда-исчисления.

С алгоритмической вычислимостью над множеством конструктивных объектов тесно связано важнейшее понятие *доказуемости* в Математической Логике и Теории Моделей, в частности, установлена алгоритмическая неразрешимость многих математических проблем, таких как десятая проблема Гильберта о диофантовых уравнениях. Достаточно сказать, что в Теории Моделей есть теорема Лёвенгейма-Скулема, согласно которой возможно построение модели континуума, такой, что при добавлении извне новой функции, отсутствовавшей в модели, этот континуум становится счётным. Суть парадокса в том, что пока у нас нет биекции $\aleph \mapsto 2^{\aleph}$, два множества имеют разную мощность, но как только нам её привнесли — существование биекции даёт равномощность множеств по определению. Поэтому понятие мощности множества не является абсолютным, а зависит от модели.

Вашнейшей является связь Теории Алгоритмов с понятиями *непротиворечивости* и *полноты* формальной системы и теоремами Гёделя о неполноте, устанавливающих границы возможностей нашего познания. В частности, первая теорема утверждает, что если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует невыводимая и неопровержимая формула. Фактически это требование бесконечного количества аксиом эквивалентно утверждению, что существуют алгоритмы, которые мы *не в состоянии* «вывести» — выразить через примитивно-рекурсивные функции! Потому что их невозможно декомпозировать на последовательность шагов... Множество алгоритмов Теории Алгоритмов либо противоречиво, либо не полно, либо не является достаточно сильным по Гёделю для представления натурального ряда, что, очевидно, не так — каждому числу можно сопоставить алгоритм.

Использование теорий, содержащих неполноту, описывает притча о слепцах, ощупывающих слона — все их суждения верны, и одновременно — все противоречат друг другу. В одной проекции слон может оказаться круглым, в другой — квадратным, но нет *никакой* возможности описать и воссоздать слона как единое и непротиворечивое целое.

Поэтому даже формальная Аристотелева Логика, вообще говоря, посредством Теории Алгоритмов зависит от физики пространства, в котором разворачиваются события. Так, вместо линейной последовательности слов в качестве элементов параллельной логики могут выступать k-мерные объекты и k-мерные правила вывода над ними. Тем более, от свойств пространства зависят алгебра и анализ, непривычные работать в атмосфере, когда все множества оказываются счётными, или когда пространство замкнуто и ограничивает числовую ось, не зная размера, большего некоторого L. Основания математики *зависят* от модели и интерпретации в смысле Теории Моделей, коих несть числа.

5.1. Программы, не являющиеся алгоритмами

Строго говоря, недетерминированная (несериализуемая) параллельная программа не может рассматриваться как формализация классического понятия алгоритма, поскольку последовательность действий и получаемый ею результат — различны каждый раз при запуске программы на одних и тех же данных [35]. По той же причине не являются классическими алгоритмами коды операционных и других событийно-ориентированных программных систем — их состояние частично записывается в окружении, в окружающем мире и голове оператора, так что входящие события, определяющие поведение системы, отчасти зависят от её предыдущей реакции, так что окружающий мир выступает в роли ленты машины Тьюринга, состояние которой параллельно меняется извне.

Классическая Теория Алгоритмов рассматривает недетерминированные машины Тьюринга как удобный инструмент, полагая, что их можно свести к детерминированным. Это не всегда так: только если множество недетерминированных состояний теоретически конечно. Это принципиальный момент, влияющий на доказуемость теорем о вычислимости: несмотря на то, что на практике компьютеры всегда работают с конечными наборами данных, алгоритмически неразрешимые проблемы существуют, и соответствующие теоремы доказываются с использованием нумераций бесконечных множеств.

В Теории Вычислительной Сложности недетерминированные машины Тьюринга определяют класс NP-полных задач, разрешимых на таких машинах за полиномиальное время. Детерминированные машины Тьюринга определяют класс P-полных задач [36, 37].

5.2. Связь логики с программными алгебрами

В силу указанных проблем с полнотой и непротиворечивостью, представляется необходимым строить Теорию Алгоритмов из базовых принципов, абстрагируясь от текстов, последовательностей шагов и подобных представлений. Фундаментальными математическими объектами являются отображения и отношения. В этом смысле примитивно-рекурсивные функции представляются наиболее естественными объектами теории, а языком должен являться язык алгебры, подобный подходу GAPS, предложенному Непейводой [38, 39].

Алгоритм в такой теории является отношением, определённым на множестве других отношений. В частности, применение алгоритма к другому алгоритму является допустимой операцией, а данные являются частным случаем алгоритмов (в некотором текстовом представлении). Тогда множество всех алгоритмов представляет собой группоид G, замкнутый относительно операции композиции (суперпозиции).

В докладе [43] устанавливается изоморфизм между формулами логики и отношениями программной алгебры, в частности — конструктивно строится отображение $\propto^{-1} \in G$, накладывающее ограничения на возможные отношения онтологии и соответствующее логическому противоречию $P\&\neg P$. Что позволяет заменить язык формальной логики алгебраическим языком отношений с единственной операцией композиции.

Любую онтологию можно представить в виде нумерованных отношений: если f — отношение, то $\#f$ — его номер. Композиция отношений и применение функции к аргументу связаны равенством $f \circ g = \propto^{-1} (g(\#f))$. Функция $\propto^{-1}$ — одна и та же для любых $f, g \in G$.

Логика, таким образом, является представлением Теории Алгоритмов, связывающим математику с реальным миром: Мир $\rightarrow$ Теория Алгоритмов $\rightarrow$ Логика $\rightarrow$ Математика.

6. Дискуссия и заключение

Феноменальной является полученная оценка быстрого оптического преобразования Фурье за логарифмическое время $O(\log(n))$ — это физически реализуемая, а не идеальная процедура. Это значит, что можно создать реальное вычислительное устройство, выполняющее ПФ почти за константное время, слабо зависящее от размера входных данных.

Среди прочего это означает, что отличие вычислительной сложности операций умножения и сложения имеет порядок не выше $O(\log(s))$ — в избыточных системах счисления Непейводы с переносом, затухающим независимо от числа слагаемых $O(1)$ для сложения [40] — вопреки сложившемуся мнению сравнение в таких системах возможно без нормализации: $\mathrm{cmp}(a, b) = (a + b)/2 \pm \mathrm{abs}(a - b)/2$; в позиционной системе счисления $O(s)$ для сложения и $O(s) = O(s + \log(s))$ для умножения, — в то время как лучшая оценка для умножения в настоящее время $O(s \cdot \log(s))$ [41,42]. Также это означает, что алгоритмы цифровой обработки и фильтрации сигналов могут работать на многие порядки быстрее, не нагревая при этом атмосферу, что вычислительная сложность некоторых классов задач может быть переоценена и т.д. В оценке ряда задач значима «длина проводов».

Поскольку вычислительных методов мощности равной БОПФ у нас нет, и не предвидится, мы ставим под сомнение абсолют машины Тьюринга как универсального вычислительного устройства, полагая, что существуют физические процессы, превосходящие её возможности. В том числе — физические процессы, не вычислимые машиной Тьюринга.

В качестве возможного решения предлагается обобщение Теории Алгоритмов в части пополнения набора примитивно-рекурсивных функций за счёт отношений. Такое пополнение не сводимо к недетерминированным машинам Тьюринга по причине того, что мощность образа в отношении может быть бесконечной, и его уже невозможно свести к последовательному обходу детерминированной машиной Тьюринга.

Это *принципиальное* отличие новой теории, влияющее на доказуемость теорем о вычислимости: несмотря на то, что на практике компьютеры всегда работают с конечными наборами данных, существование алгоритмически неразрешимых проблем следует из теорем, использующих нумерации бесконечных множеств.

6.1. Ознакомительные препринты

Теория, последовательно построенная на алгебраических принципах, приводит к понятию алгоритма как области пространства с заданной конфигурацией бозонно-фермионного поля. Подробное изложение выходит за рамки данной работы, однако элементы новой теории и её язык можно найти в докладе [43]. По оценке автора, такой подход естественным образом приводит к алгоритмической интерпретации Квантовой Теории, поэтому парадоксы квантовых вычислений должны найти своё объяснение. Имеется рецензированный физиком-теоретиком препринт, подкрепляющий интуицию [44], тема актуальна [45].

Основные идеи, движущие автором, описаны в нерецензированном препринте [46], и могут быть рекомендованы лишь для ознакомительного прочтения (определения, алгоритм как конфигурация, автоморфное пространство, выход на квантовую физику), поскольку относятся к раннему периоду становления и содержат ошибки. Однако сами идеи указывают на конструктивность выбранного пути.

Литература

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. – 721 с.
   DOI: 10.1017/CBO9781139644181
   URL: http://optic.cs.nstu.ru/files/Lit/Optic/Born_Volf.pdf

2. Марешаль А., Франсон М. Структура оптического изображения. Дифракционная теория и влияние когерентности света. М.: Мир, 1964. – 295 с.
   URL: http://optic.cs.nstu.ru/files/Lit/Optic/Mareshal.pdf

3. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. – 363 с.
   URL: http://optic.cs.nstu.ru/files/Lit/Optic/gudman.pdf

4. Macfaden A.J., Gordon G.S.D., Wilkinson T.D. An optical Fourier transform coprocessor with direct phase determination. Sci Rep 7, 13667, 2017. DOI: 10.1038/s41598-017-13733-1.

5. Musk D.R. A Comparison of Quantum and Traditional Fourier Transform Computations // Computing in Science & Engineering, vol. 22, No. 6, P. 103–110, Nov.–Dec, 2020.
   DOI: 10.1109/MCSE.2020.3023979.

6. Edelman A., McCorquodale P., Toledo S. The Future Fast Fourier Transform? // SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 20(3), P. 1094–1114, 1999.
   DOI: 10.1137/S1064827597316266.

7. Boche H., Mönich U.J. Turing Computability of Fourier Transforms of Bandlimited and Discrete Signals // IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 68, P. 532–547, 2020.
   DOI: 10.1109/TSP.2020.2964204.

8. Lui B. Parallel Fast Fourier Transform // Studies in Parallel and Distributed System. Auckland Campus, Massey University of New Zealand. 2009. 9 p.
   URL: https://cs.wmich.edu/gupta/teaching/cs5260/5260Sp15web/studentProjects/tiba&hussein/03278999.pdf

9. Takahashi D. Fast Fourier Transform Algorithms for Parallel Computers // High-Performance Computing Series, vol. 2, Springer Singapore, 2019. 114 p.
   DOI: 10.1007/978-981-13-9965-7.

10. Johnson S.G., Frigo M. A Modified Split-Radix FFT With Fewer Arithmetic Operations // IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 55, No. 1, P. 111-119, Jan. 2007.
    DOI: 10.1109/TSP.2006.882087.

11. Guo H., Burrus C.S. Fast approximate Fourier transform via wavelets transform // Proceedings of SPIE. Wavelet Applications in Signal and Image Processing IV, 2825, P. 250–259, 1996. DOI: 10.1117/12.255236.

12. Shentov O.V., Mitra S.K., Heute U., Hossen A.N. Subband DFT. I. Definition, interpretations and extensions // Signal Processing 41(3), P. 261–277, 1995.
    DOI: 10.1016/0165-1684(94)00103-7.

13. Hassanieh H., Indyk P., Katabi D., Price E. Simple and Practical Algorithm for Sparse Fourier Transform // ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, January 2012.
    URL: https://www.mit.edu/ ecprice/papers/sparse-fft-soda.pdf
    URL: http://groups.csail.mit.edu/netmit/sFFT

14. Gumerov N.A., Duraiswami R. Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions // Elsevier Science, 2005. 520 p.
    DOI: 10.1016/B978-0-08-044371-3.X5000-5.

15. Gumerov N.A., Duraiswami R. A broadband fast multipole accelerated boundary element method for the three dimensional Helmholtz equation // The Journal of the Acoustical Society of America, 125(1), P. 191–205, 2009. DOI: 10.1121/1.3021297.

16. Колфилд Г. Оптическая голография // Спеклы. М.: Мир, vol. 2, 1982. 736 p. DOI: 10.1016/C2009-0-22049-6.

17. Короленко П.В. Оптика когерентного излучения // Учебное пособие. М.: МГУ, 1997. – 222 с. URL: http://optic.cs.nstu.ru/files/Lit/Optic/Korolenko.pdf

18. Михельсон Н.Н. Оптика астрономических телескопов и методы ее расчета // М.: Физматлит, 1995. — 333 с. URL: http://inis.jinr.ru/sl/vol2/Physics/Оптика, Электродинамика/Михельсон,_Оптика_астрономических_телескопов,1995.pdf

19. Kedmi J., Friesem A.A. Optimal holographic Fourier-transform lens // Appl Opt. 23(22): 4015, 1984. DOI: 10.1364/ao.23.004015.

20. Engelberg J., Zhou C., Mazurski N., Bar-David J., Levy U., Kristensen A. Near-IR Wide Field-of-View Huygens Metalens for Outdoor Imaging Applications // Conference on Lasers and Electro-Optics, OSA Technical Digest (Optical Society of America), paper FTh3M.8, 2019. DOI: 10.1515/nanoph-2019-0177.

21. Lin Z., Roques-Carmes C., Christiansen R.E., Soljačić M., Johnson S.G. Computational inverse design for ultra-compact single-piece metalenses free of chromatic and angular aberration // Appl. Phys. Lett. 118, 041104, 2021. DOI: 10.1063/5.0035419.

22. Puang-ngern S., Almeida S.P. Converging beam optical Fourier transforms // American Journal of Physics 53, P. 762–765, 1985. DOI: 10.1119/1.14309.

23. Joyeux D., Lowenthal S. Optical Fourier transform: what is the optimal setup? // Appl Opt., 21(23): 4368–72, 1982. DOI: 10.1364/AO.21.004368.

24. Jagoszewski E., Andruchow A. Holographic elements for Fourier transform // Optica Applicata, vol. 34(1), P. 63–75, 2004. URL: https://opticaapplicata.pwr.edu.pl/article.php?id=2004100063

25. Белоус Д.А. Оптимизация режима работы твердотельного фотоприемника в ближнем инфракрасном участке спектра // Известия вузов России. Радиоэлектроника, No. 3, 2017. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/optimizatsiya-rezhima-raboty-tverdotelnogo-fotopriemnika-v-blizhnem-infrakrasnom-uchastke-spektra

26. Prangsma J. The effect of cooling CCD detectors for spectroscopy // Ibsen Photonics A/S, Technical Note: Cooled CCD detectors for spectroscopy, 2015. URL: https://ibsen.com/wp-content/uploads/Tech-Note-Cooled-CCD-detectors-for-spectroscopy-v1.pdf

27. Domingo M., Arias I., García A. Achromatic Fourier processor with holographic optical lenses // Appl. Opt. 40, P. 2267–2274, 2001. DOI: 10.1364/AO.40.002267.

28. Collados M.V., Arias I., Atencia J., Quintanilla M. Anamorphic white light Fourier processor with holographic lenses // Appl Opt., 45(34):8706-13, 2006. DOI: 10.1364/ao.45.008706.

29. Perez-Tudela J., Montes-Usategui M., Juvells I.P., Vallmitjana S. Analysis and optimization of convergent Fourier-transform setups for optical correlators // Proc. SPIE 4089, Optics in Computing, 2000. DOI: 10.1117/12.386819.

30. Pérez-Tudela J., Juvelis I., Montes-Usategui M., Vallmitjana S., Carnicer A. Reduction of the effect of aberrations in a joint-transform correlator // Applied optics, 43 4, 841-9, 2004. DOI: 10.1364/AO.43.000841.

31. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М: Мир, 1978. URL: http://optic.cs.nstu.ru/files/Lit/Math/Rabiner_Gold.pdf

32. Jin X., Hirakawa K. Analysis and processing of pixel binning for color image sensor // EURASIP J. Adv. Signal Process., 125, 2012. DOI: 10.1186/1687-6180-2012-125.

33. Павлов А.В. Обработка информации оптическими методами // Учебное пособие. Изд. 2, дополненное. СПб: СПбГУИТМО, 2010. – 65 с.
URL: https://books.ifmo.ru/file/pdf/742.pdf

34. Демидов А.А. Возможности вычислений на кристаллах // Программные системы: теория и приложения, vol. 6(4), P. 353–358, 2015. URL: http://mi.mathnet.ru/ps192

35. Подзоров С.Ю. Теория алгоритмов. Полный конспект лекций по курсу // Новосибирск: Изд-во НГУ, 2005. – 130 с.
URL: http://window.edu.ru/resource/127/28127/files/nsu003.pdf

36. Китаев А.Ю., Шень А., Вялый М.Н. Классические и квантовые вычисления // М.: МЦНМО, 1999. – 192 с. URL: https://mccme.ru/free-books/qcomp/qbook.pdf

37. Когабаев Н.Т. Лекции по теории алгоритмов. Учебное пособие // Новосибирск: мех.-математический факультет, Новосиб. гос. ун-т, 2009. — 107 с.
URL: https://www.nsu.ru/n/mathematics-mechanics-department/documents/algorithmskogabaev.pdf

38. Непейвода Н.Н. Алгебраический подход к управлению // Проблемы управления, No. 6, С. 2–14, 2013.
URL: http://www.mathnet.ru/links/d6ff9e2640475472f1f1a433afbaedf8/pu816.pdf

39. Демидов А.А. О пополнении группоида до программной алгебры // Программные системы: теория и приложения, том 6, выпуск 3, С. 45–52, 2015.
URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2015_3_45-52.pdf

40. Шворин А.Б. Параллельное сложение вещественных чисел в системах счисления с перекрытием // Программные системы: теория и приложения, vol. 6(2), P. 101–117, 2015. URL: http://mi.mathnet.ru/ps171

41. Fürer M. Faster integer multiplication // In Proceedings of the 39th annual ACM symposium on Theory of computing (STOC '07). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, P. 57–66, 2007. DOI: 10.1145/1250790.1250800.

42. Harvey D., van der Hoeven J. Integer Multiplication in Time O(n log n) // Annals of Mathematics, vol. 193, No. 2, P. 563–617, 2021. DOI: 10.4007/annals.2021.193.2.4.

43. Демидов А.А. Эволюционирующие онтологии в аспекте управления темпоральными или изменяющимися фактами // Supplementary Proceedings of the 4th International Conference on Analysis of Images, Social Networks and Texts (AIST), CEUR Workshop Proceedings, vol. 1452, P. 203–2014, 2015. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1452/paper25.pdf

44. Демидов А.А. Метод описания динамики системы, позволяющий обойти «скрытые параметры», 2015. — 7 с. URL: https://vixra.org/pdf/1806.0344v1.pdf

45. Hooft G. The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics // Fundamental Theories of Physics, 185, Springer, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-41285-6.

46. Демидов А.А. Использование коллективов автоматов в построении активных интеллектуальных систем, 2006. — 37 с. URL: https://vixra.org/pdf/1805.0195v1.pdf

47. Демидов А.А. Атомарные вычисления без блокировок: lock-free, wait-free // Сборник презентаций и статей докладов НСКФ, 2020.
URL: https://2020.nscf.ru/TesisAll/01_Apparatura/111_DemidovAA.pdf