LA NOUVELLE TRIANGULATION TUNISIENNE

THE NEW TUNISIAN TRIANGULATION

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Résumé

La géodésie tunisienne a connu une multitude de systèmes géodésiques donnant différentes coordonnées. A l'occasion de l'unification de ces systèmes en un nouveau système appelé " **la Nouvelle Triangulation Tunisienne - NTT**", nous avons rédigé ces notes à l'attention des adjoints-techniques de l'OTC pour les préparer à l'utilisation du nouveau système et surtout la question du passage des systèmes existants au nouveau système **NTT**.

Abstract

Tunisian geodesy has known a multitude of geodetic systems giving different coordinates. On the occasion of the unification of these systems into a new system called "the New Tunisian Triangulation - NTT", we have written these notes for the attention of the technical assistants of the OTC to prepare them for the use of the new system and above all the question of switching from existing systems to the new NTT system.

VERSION 4, DECEMBER 2021
VERSION 3, 2010

LA NOUVELLE TRIANGULATION TUNISIENNE
Pour Les Adjoints Techniques

par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM,
Ingénieur Géographe Général

Retraité de l'Office de la Topographie et du Cadastre
(OTC, Tunisie)

Version 4., Décembre 2021

Version 3., Février 2010

abenhadjsalem@gmail.com

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

La géodésie tunisienne a connu une multitude de systèmes géodésiques donnant différentes coordonnées. A l'occasion de l'unification de ces systèmes en un nouveau système appelé " **la Nouvelle Triangulation Tunisienne - NTT**", nous avons rédigé ces notes à l'attention des adjoints-techniques de l'OTC pour les préparer à l'utilisation du nouveau système et surtout la question du passage des systèmes existants au nouveau système **NTT**.

1.1.1 Rappels et Définitions

Définition d'un système géodésique ou datum géodésique : C'est un système de coordonnées où sont représentés les points géodésiques. Ce système est défini par :
* son origine,
* son orientation,
* l'échelle,
* le type de coordonnées utilisées.

Le système le plus utilisé est le système cartésien formé par un repère (OX, OY, OZ) tel que :
- O soit le centre des masses de la Terre,
- l'axe OZ soit parallèle à l'axe de rotation de la Terre,
- le plan OXZ parallèle au méridien de Greenwich origine des longitudes,
- l'axe OY est tel que le trièdre (OX, OY, OZ) soit orthogonal et direct.

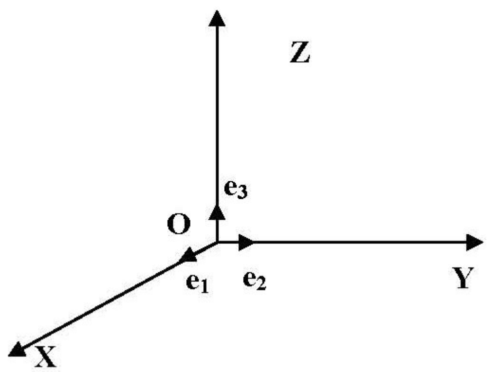

FIGURE 1.1 – Le Repère Cartésien

A ce système, on lui associe une base orthonormée $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ c'est-à-dire :

$$\|\boldsymbol{e}_1\| = \|\boldsymbol{e}_2\| = \|\boldsymbol{e}_3\| = 1\text{mètre(l'unité des longueurs)}$$

Ce qui définit l'échelle du système. A ce repère, on associe un ellipsoïde de référence (E). Par suite à un point M on lui correspondre ses coordonnées géodésiques à savoir :
- la latitude géodésique φ ,
- la longitude géodésique λ ,
- l'altitude ellipsoïdique he.

1.1.2 Définition des coordonnées planes

Une fois qu'on a défini le système géodésique, on met en place une représentation plane qui à (φ, λ) associe le couple de coordonnées planes (X, Y). Ces coordonnées sont calculées à partir des formules définissant la représentation plane choisie.

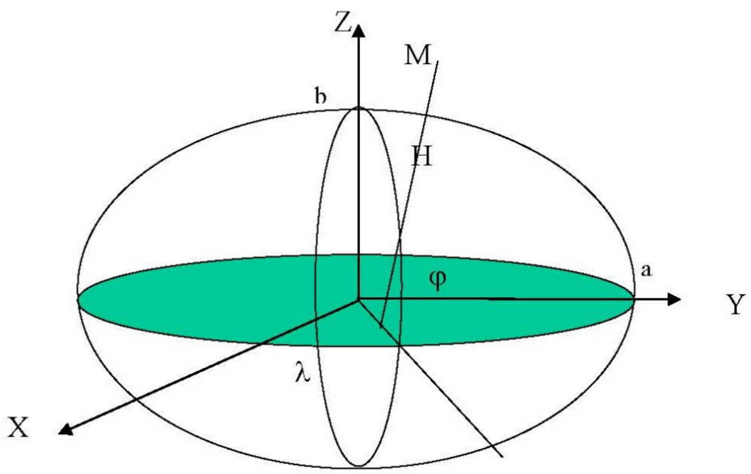

FIGURE 1.2 – Ellipsoide Terrestre de révolution

Chapitre 2

Les Systèmes Géodésiques en Tunisie

2.1 Le Système Géodésique 'VOIROL'

C'était le premier système géodésique en Tunisie (C. Fezzani, 1979) caractérisé par :

- le point fondamental (point de départ) : Voirol près d'Alger créé en 1875,

- la surface de référence c'est-à-dire le modèle choisi pour la Terre est l'ellipsoïde de Clarke Français 1880,

- l'orientation de départ est l'azimut de la direction Voirol - Meleb El Kora, mesuré en 1874,

- la mise à l'échelle ou la qualité métrique de réseau : la mesure d'une distance ou base à Blida en Algérie mesurée en 1854.

Une grande partie du premier réseau géodésique Tunisien était calculé dans ce système.

2.2 Le Système Géodésique 'CARTHAGE 34'

A la suite de la détection d'une erreur dans la mise à l'échelle du système Voirol en 1910 et vu sa qualité, le Service Géographique de l'Armée Française (S.G.A.F) a établi un nouveau système géodésique indépendant du système Voirol. Les éléments de définition de ce système sont :

* le point fondamental : le point Carthage en Tunisie,

* l'ellipsoïde de référence : l'ellipsoïde de Clarke Français 1880,

* l'azimut de l'orientation : la direction Carthage - Bir Bou Regba,

* la mise à l'échelle : les bases de Tunis et de Médenine.

Les calculs des points géodésiques de la partie nord ont été achevés en 1934.

Au point fondamental Carthage, on a les différences suivantes :

$$\varphi_{Voirol} - \varphi_{Carthage} = 25.86\, dmgr \tag{2.1}$$

$$\lambda_{Voirol} - \lambda_{Carthage} = 36.19\, dmgr \tag{2.2}$$

soit en moyenne $245\, m$ en Δx et $280\, m$ en Δy .

2.3 La Structure des Réseaux Géodésiques Tunisiens après 1978

A partir de 1978, l'OTC a décidé de moderniser les réseaux géodésiques tunisiens afin de satisfaire les besoins cartographiques et topographiques du pays en commençant par le réseau géodésique de base.

Les travaux de revalorisation de la géodésie Tunisienne (M. Charfi,1983) comprenaient :

- la réfection des anciens points du 1er ordre, du 1er ordre complémentaire, du 2ème ordre et du 2ème ordre complémentaire,
- la construction de nouveaux points sur les sites des anciens points disparus,
- la densification de l'ancien réseau par de nouveaux points,
- les observations angulaires azimutales et zénithales,
- la détermination de 8 points de Laplace,
- la mesure des côtés de 8 triangles géodésiques,
- la détermination de 5 points par la méthode Doppler,
- la compensation des observations terrestres avec les données Doppler pour obtenir les nouvelles coordonnées du nouveau réseau.

Les observations des 8 points de Laplace et la mesure des côtés des 8 triangles géodésiques, les observations et le calcul des 5 stations Doppler ainsi que la compensation du réseau géodésique ont fait l'objet de la convention n° 2916 signée entre l'OTC et l'IGNF en 1982.

Le nouveau réseau géodésique appelé Réseau Géodésique Primordial (RGP) est composé de 312 points comme suit :

1. 143 points anciens,
2. 112 nouveaux points construits sur les sites des anciens points disparus,
3. 58 nouveaux points.

2.3.1 La Compensation du Réseau Géodésique Primordial

La compensation du RGP effectuée par l'IGNF dans le cadre de la convention 2916 comprenait les compensations planimétrique et altimétrique (Rapport sur les calculs de l'IGNF, 1985).

La compensation planimétrique de 1984, effectuée par l'IGNF, a défini un nouveau système géodésique appelé le Système Géodésique 1984. En comparant les coordonnées issues de ce dernier avec celles de CARTHAGE34, on a trouvé que les coordonnées anciennes ont subi un déplacement sous la forme d'une rotation dans le sens des gisements dont le centre se trouve dans la région de J. Semmama et d'un angle de $27\,dmgr$ (2.7/1000 de grade). Les déplacements planimétriques varient de 0 à $12\,m$ en s'éloignant du centre de la rotation.

Ces déplacements ont été jugés inacceptables pour le patrimoine national en matière de cadastre.

2.4 Le Système CARTHAGE86

Les nouvelles coordonnées issues de la compensation de 1984 de l'IGNF n'ont pas été acceptées, la Direction de la géodésie de l'OTC a effectué un calcul de compensation du RGP en trois blocs, en fixant les coordonnées CARTHAGE34 des points anciens. On a obtenu ainsi un nouveau système géodésique appelé CARTHAGE86. Ce système a gardé le même ellipsoïde de référence à savoir l'ellipsoïde de Clarke Français 1880. Par suite, les coordonnées des points du Réseau Géodésique Terrestre Secondaire ont été calculées dans ce système en fixant les points géodésiques primordiaux. Le décalage entre les systèmes CARTHAGE34 et CARTHAGE86 est de l'ordre du mètre.

2.5 Le Nouveau Système Géodésique Terrestre Tunisien :La Nouvelle Triangulation Tunisienne

Au vue des problèmes des systèmes géodésiques en Tunisie et dans le but de l'unification des systèmes géodésiques en usage en Tunisie, il a été créé en décembre 2002 une commission technique permanente chargée de l'étude de la géodésie à l'OTC. Lors de sa réunion élargie n°10 du 23 mars 2004, la Commission a adopté un nouveau système géodésique terrestre Tunisien appelé ' **NTT** ' pour '**La Nouvelle Triangulation Tunisienne**', unifiant les systèmes géodésiques terrestres tunisiens. Ce nouveau système est défini par les éléments suivants :

- ellipsoïde de référence : l'ellipsoïde de Clarke Français 1880 ($a = 6\,378\,249.200\,m$ et $b = 6\,356\,515.00\,m$) avec a et b sont respectivement le demi-grand axe et le demi- petit axe,

- fixation des coordonnées de 5 points dans CARTHAGE34 (J. Hamid, Bou Rebeh, J. Semmama, Ain Abdour et Henchir Hajjar) avec un écart-type de $50\,cm$.

- azimuts d'orientation : les 8 azimuts astronomiques observés :

* J. Gattous vers Nadour de Bizerte,
* J. Hamid vers Sidi Salem,
* Bou Rebeh vers Kbar Eroumi,
* Pilier Astro vers Nef Kelb,
* J. Semmama vers Kef Anéza,
* Ain Abdour vers J. Selja,
* Lafaya vers Toual Echeikh,
* Henchir Hajjar vers J. Jiar.

- Les bases 24 distances observées dans les huit triangles :

1. J. Gattous - J. Ichkel - Nadour de Bizerte,
2. Bou Rebeh - Dyr EL Kef - Kbar Erroumi,
3. J. Hamid- Chott Khanfous- Sidi Salem,
4. Pilier Astro-Nef Kelb- Hanyeh,
5. J. Semmama - J. Biréno- Kef Anéza,
6. Ain Abdour - J. Selja - Oued Seli,
7. Lafaya- Toual Echeikh - M'Chouch,
8. Henchir Hajjar - J. Jiar- Zemlet Hallogua.

- Compensation en un seul bloc des observations angulaires + les distances + les azimuts astronomiques.

2.6 Définition des Eléments de la Géodésie et Cartographie Tunisienne

Par l'arrêté du ministre de la défense nationale du 10 février 2009, fixant le système national de référence terrestre unifié de la géodésie, de la projection cartographique et du nivellement, on a :

Article premier - Le système national de référence terrestre unifié de la géodésie, de la projection cartographique et du nivellement est défini comme suit :

A- Le système national de référence terrestre unifié de la géodésie :
- le système national géodésique des coordonnées géographiques : la nouvelle triangulation tunisienne (**N.T.T.**),
- l'ellipsoïde associé : l'ellipsoïde de Clarke 1880 (F),

B- Le système national de référence de la projection cartographique : l'universal transverse Mercator (U.T.M.) fuseau 32 Nord.

C- Le système national de référence du nivellement :
- le système des altitudes orthométriques,
- la référence des altitudes : le repère de nivellement général de la Tunisie situé au site de « Bâb Bhar - Tunis », d'altitude sept mètres ($7.000\,m$) au dessus du niveau moyen de la mer.

La côte du zéro hydrographique de marée est définie par le centre hydrographique et océanographique de la marine nationale dans le système national de référence du nivellement.

Chapitre 3

Les Représentations Planes en usage à l'OTC

3.1 La Représentation des Fuseaux ou Représentation de Guillaume Postel

Elle a été utilisée dans le système géodésique Voirol pour le besoin de la triangulation et reste en usage dans les travaux de l'Immatriculation Foncière Facultative pour traiter certains dossiers anciens.

Dans cette représentation, la Tunisie est partagée en six fuseaux, d'une étendue chacun de 0.5 grades (gr) en longitude, subdivisés chacun en onze quadrilatères curvilignes de 0.5 gr de côté en latitude. Soit un ensemble de 66 systèmes de coordonnées.

Chacun système de coordonnées est défini par la donnée des coordonnées géographiques (φ_0, λ_0) du centre du quadrilatère généralement par rapport à l'origine Voirol. Les coordonnées rectangulaires sont obtenues en assimilant le quadrilatère curviligne de l'ellipsoïde (Clarke Français 1880) au plan tangent à l'ellipsoïde au point (φ_0, λ_0).

Cette représentation plane fût abandonnée en 1922 pour être remplacée par la représentation plane Lambert.

3.2 La Représentation Lambert Tunisie

C'est une représentation conforme (conserve les angles) d'un modèle ellipsoïdique. Afin d'éviter les déformations trop importantes, la représentation Lambert Nord Tunisie a été adoptée pour la partie Nord du pays (latitude comprise entre $37.5\,gr$ et $42.5\,gr$) et la représentation Lambert Sud Tunisie a été adoptée pour la partie sud (latitude comprise entre $34.5\,gr$ et $39.5\,gr$). La représentation Lambert Tunisie est nommée à l'OTC sous l'appellation "Origine Unique".

Définition et Propriétés

La représentation plane Lambert est une représentation conique, conforme et directe d'un modèle ellipsoïdique :

- conique : on utilise les coordonnées polaires R etΩ,

- conforme : conservation des angles ou l'altération angulaire est nulle ou le module linéaire est indépendant de la direction,

- directe : les coordonnées polaires sont des fonctions de la forme :

$$R = R(\varphi) \qquad (3.1)$$

$$\Omega = \Omega(\lambda) \qquad (3.2)$$

où (φ, λ) sont les coordonnées d'un point sur le modèle ellipsoïdique.

Les images des parallèles sont des arcs de cercles concentriques, celles des méridiens sont des droites concordantes.

Les courbes coordonnées $\varphi = constante$ et $\lambda = constante$ sur le modèle sont orthogonales et leurs images dans le plan le sont aussi.

3.2.1 Indicatrice de Tissot

La représentation est conforme, par suite l'altération angulaire est nulle, l'indicatrice de Tissot est un cercle et le module linéaire ne dépend pas de la direction mais seulement du point et on a l'équivalence entre :

$$\text{Altération angulaire nulle} \Leftrightarrow m_\varphi = m_\lambda \Leftrightarrow \forall\delta\, m_\delta = m \qquad (3.3)$$

où δ désigne 'direction'.

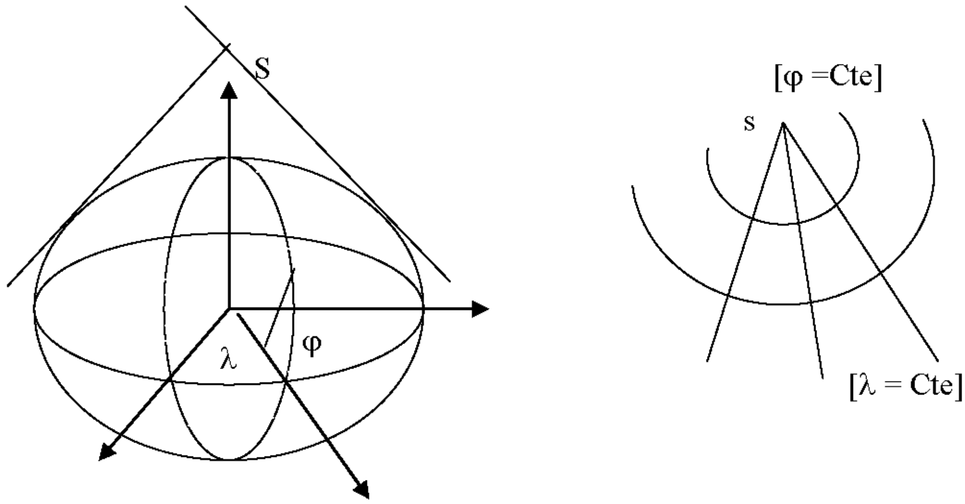

FIGURE 3.1 – représentation géométrique de la représentation Lambert

3.2.2 Expressions des Formules $R(\varphi)$ et $\Omega(\lambda)$

On démontre que :

$$\Omega = (\lambda - \lambda_0) sin\varphi_0 \tag{3.4}$$

$$R = N_0 cotg\varphi_0 e^{-sin\varphi_0 (L-L_0)} \tag{3.5}$$

$$\text{avec } L(\varphi) = Logtg(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - \frac{e}{2} Log\left(\frac{1 + esin\varphi}{1 - esin\varphi}\right) \tag{3.6}$$

$L(\varphi)$ est appelée la latitude isométrique, avec $L_0 = L(\varphi_0)$ où φ_0 la latitude du parallèle origine et :

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi_0)}}$$

a : le demi-grand axe de l'ellipsoïde de référence,
b : le demi-petit axe de l'ellipsoïde de référence,
e^2 : le carré de la première excentricité $= (a^2 - b^2)/a^2$,
N_0 est appelé la grande normale, c'est le deuxième rayon de courbure de l'ellipsoïde de révolution.

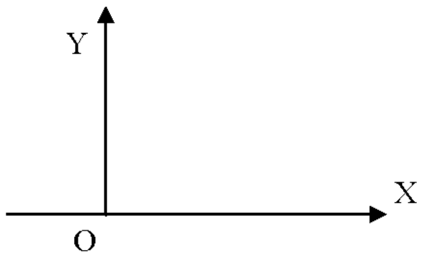

FIGURE 3.2 – Le Repère OXY

3.2.3 Expression des Coordonnées Cartésiennes (X,Y)

Dans ce paragraphe, on va décrire les coordonnées cartésiennes (X, Y) en fonction de (Ω, R). Soit un point $M(\varphi, \lambda)$ ayant pour coordonnées polaires (Ω, R) prenons un système d'axes OXY (Fig.3.2) tel que OY est porté par l'image du méridien origine et dirigé vers le Nord et l'axe OX par la tangente à l'image du parallèle origine et dirigé vers l'Est.
Alors les coordonnées cartésiennes X et Y sont données par :

$$X_M = Rsin(\ (\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0) \tag{3.7}$$

$$Y_M = R_0 - Rcos((\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0) \tag{3.8}$$

Avec λ comptée positivement à l'Est du méridien origine des longitudes.

3.2.4 Expression des Coordonnées Cartésiennes Translatées (X, Y)

Les expressions des coordonnées cartésiennes (X, Y) des représentations planes Lambert Tunisie (Nord et Sud) dites coordonnées translatées se diffèrent des formules (3.7) et (3.8) par un facteur d'échelle k et une translation, comme suit :

$$X_M = 500\,000.00\,m\ + kRsin((\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0) \tag{3.9}$$

$$Y_M = 300\,000.00\,m\ + k(R_0 - Rcos((\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0)) \tag{3.10}$$

3.2.5 Les Eléments de définition du Lambert Nord Tunisie

Ellipsoïde de référence = ellipsoïde Clarke Français ($a = 6378249.200$ m, $b = 6356515.000$ m et $e^2 = 0.0068034877$)
Latitude parallèle origine = φ_0 = 40 gr = 36°
Longitude méridien origine = λ_0 = 11 gr Est Greenwich = 9° 54'
Facteur d'échelle = k_N= 0.999 625 544
Constante translation X = 500 000.00 m
Constante translation Y = 300 000.00 m
Amplitude de la latitude = $37.5gr < \varphi < 42.5gr$

3.2.6 Les Eléments de définition du Lambert Sud Tunisie

Ellipsoïde de référence = ellipsoïde Clarke Français ($a = 6378249.200$ m, $b = 6356515.000$ m et $e^2 = 0.0068034877$)
Latitude parallèle origine = φ_0 = 37 gr = 33° 18'
Longitude méridien origine = λ_0 = 11 gr Est Greenwich = 9° 54'
Facteur d'échelle = $k_S = 0.999625769$
Constante translation $X = 500000$ m
Constante translation $Y = 300000$ m
Amplitude de la latitude = $34.5\,gr < \varphi < 39.5\,gr$

3.2.7 Module linéaire et Altération linéaire

Le module linéaire en un point $M(\varphi, \lambda)$ est exprimé par le rapport :

$$m = \frac{dS}{ds} = \frac{\text{distance plan}}{\text{distance ellipsoïde}} \tag{3.11}$$

On démontre que l'expression du module linéaire au point M est donnée par la formule ci-dessous :

$$m = k\frac{sin\varphi_0 R(\varphi)}{N(\varphi)cos\varphi} \tag{3.12}$$

On appelle altération linéaire la quantité :

$$\epsilon = m - 1 \tag{3.13}$$

Soit D_e la distance réduite à l'ellipsoïde de référence,D_P la distance réduite au plan de la représentation est donnée par :

$$D_P = mD_e = (1 + \epsilon)D_e = D_e + \epsilon D_e \tag{3.14}$$

ϵ s'exprime généralement en cm/km.

3.2.8 Relations entre les Coordonnées Translatées (X, Y) et les Coordonnées SST (x, y)

Généralement, les techniciens de l'immatriculation foncière utilisent non pas les coordonnées translatées (X, Y) données par (3.9) et (3.10) mais plutôt les coordonnées (x, y) qu'on nomme coordonnées STT(Service Topographique Tunisien) dont les axes $O'x$ et $O'y$ sont définis par la figure ci-dessous : On

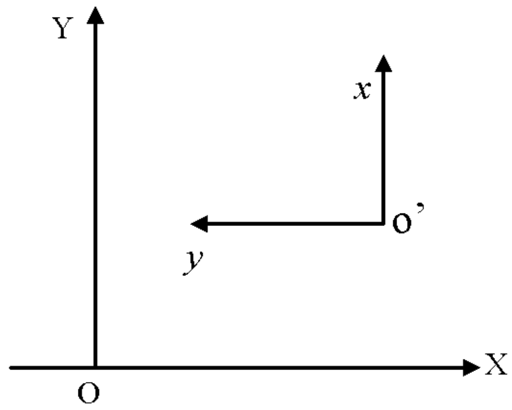

FIGURE 3.3 – Les Coordonnées STT

a alors :

$$X = 500000.00\text{m} - y \tag{3.15}$$
$$Y = 300000.00\text{m} + x \tag{3.16}$$

avec :

$$y = -kRsin((\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0) \tag{3.17}$$
$$x = k(R_0 - Rcos((\lambda - \lambda_0)sin\varphi_0)) \tag{3.18}$$

3.2.9 Convergence des Méridiens

En un point $M(\varphi, \lambda)$, la "convergence des méridiens" γ ou gisement de l'image du méridien passant par le point est donnée par :

$$\gamma = (\lambda - \lambda_0).sin\varphi_0 \tag{3.19}$$

Application numérique On donne les points : A $(40.1245\,3\,gr, 11.2536\,4\,gr)$ et B $(37.2145\,3\,gr, 10.8957\,4\,gr)$.

Calculer les coordonnées Lambert Nord Tunisie (respectivement Lambert Sud Tunisie) de A (respectivement de B). Calculer les modules linéaires en A et B. En déduire les altérations linéaires en A et B. Calculer la convergence des méridiens en A et B.

On donne le point C de coordonnées Lambert Nord Tunisie : $X = 580\,123.56\,m$ et $Y = 463\,875.41\,m$. Déterminer les coordonnées géographiques de C.

3.3 La Représentation UTM

3.3.1 Définition et Propriétés

La représentation plane UTM (Universal Transverse Mercator) est l'une des représentations la plus utilisée dans le monde.

C'est une représentation :

- conforme d'un modèle ellipsoïdique,

- transverse : c'est-à-dire l'image de l'équateur (en partie) est l'axe Ox (vers l'Est) et l'image d'un méridien appelé méridien central, de longitude que nous supposons égale à 0, est l'axe Oy (vers le Nord) du plan.

Les coordonnées rectangulaires d'un point sont des fonctions de la forme :

$$X = X(\varphi, \lambda) \tag{3.20}$$

$$Y = Y(\varphi, \lambda) \tag{3.21}$$

où (φ, λ) sont les coordonnées du point sur le modèle ellipsoidique.

Soit un point $M(\varphi, 0)$ sur le méridien origine, alors les coordonnées de m son image sur le plan sont :

$$X(\varphi, 0) = 0 \tag{3.22}$$

$$Y(\varphi, 0) = Y(\varphi) \tag{3.23}$$

$Y(\varphi)$ sera déterminée en imposant que le long du méridien central ou origine, les longueurs sont conservées. Sur le méridien, la longueur est donnée par :

$$\beta(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho ds \tag{3.24}$$

d'où :

$$\beta(\varphi) = Y(\varphi) = Y(\varphi, 0)$$

3.3.2 Détermination des coordonnées UTM

Calcul Direct

Sur l'ellipsoide, on a :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 cos^2\varphi d\lambda^2 \tag{3.25}$$

le carré de l'élément de longueur infinitésimal, avec :

$$N(\varphi) = a(1 - e^2 sin^2\varphi)^{-1/2}$$

$$\rho(\varphi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 sin^2\varphi)^{-3/2}$$

respectivement les rayons de courbure de la grande normale et de la méridienne, a le demi grand axe et e la première excentricité de l'ellipsoide de référence . On peut écrire que :

$$ds^2 = N^2 cos^2\varphi(\frac{\rho^2 d\varphi^2}{N^2 cos^2\varphi} + d\lambda^2) \tag{3.26}$$

en posant :

$$dL = \frac{\rho d\varphi}{N cos\varphi} \tag{3.27}$$

$$\text{ou}\, L = Logtg(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) - \frac{e}{2} Log\frac{1 + esin\varphi}{1 - esin\varphi} \tag{3.28}$$

Avec L la latitude isométrique. On a alors les coordonnées (L, λ) symétriques et orthogonales. On se limite à n = 8. D'où :

$$X = a_1\lambda - a_3\lambda^3 + a_5\lambda^5 - a_7\lambda^7 + \dots \tag{3.29}$$

$$Y = \beta(\varphi) - a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4 - a_6\lambda^6 + a_8\lambda^8 + \dots \tag{3.30}$$

Avec a_i des coefficients fonctions de la latitude géodésique φ.

En posant :

$$\eta^2 = e'^2 cos^2\varphi$$

avec e' la deuxième excentricité

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \tag{3.31}$$

on obtient les coefficients :

$$a_0 = \beta(\varphi)$$

$$a_1 = Ncos\varphi$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}Ncos\varphi sin\varphi$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}Ncos^3\varphi(1 + \eta^2 - t^2)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}Ncos^3\varphi sin\varphi(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)$$

$$a_5 = \frac{1}{120}cos^5\varphi(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2 + 13\eta^4)$$

$$a_6 = -\frac{1}{720}Nco^5\varphi sin\varphi(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2 + 200\eta^4 - 232t^2\eta^4)$$

$$a_7 = -\frac{1}{5040}Ncos^7\varphi(61 + 131t^2 + 179t^4 + 331\eta^2 - 3298t^2\eta^2)$$

$$\begin{aligned} a_8 = \frac{1}{40320}&Ncos^7\varphi sin\varphi(165 - 61t^2 + 537t^4 + 9679\eta^2 - \\ &23278t^2\eta^2 + 358t^4\eta^2 + 9244\eta^4 - 19788t^2\eta^4) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Le calcul de $\beta(\varphi) = \beta$ se calcule à partir du développement de $\beta(\varphi)$ en fonction de $t = e^2 sin^2(\varphi)$ car $t < 1$. En intégrant, on arrive à :

$$\begin{aligned} \beta(\varphi) = a(1 - e^2).(&C_0\varphi + C_2 sin2\varphi + C_4 sin4\varphi + \\ &C_6 sin6\varphi + C_8 sin8\varphi + C_{10} sin10\varphi + C_{12} sin12\varphi) \end{aligned} \tag{3.33}$$

Avec :

$$C_0 = 1 + 3e^2/4 + 45.e^4/64 + 175.e^6/256 + 11025.e^8/16384+ \\ 43659.e^{10}/65536 + 693693.e^{12}/1048576$$

$$C_2 = -(3.e^2/8 + 15.e^4/32 + 525.e^6/1024 + 2205.e^8/4096 + 72765e^{10}/131072+ \\ 297297e^{12}/524288)$$

$$C_4 = 15.e^4/256 + 105.e^6/1024 + 2205.e^8/16384 + 10395e^{10}/65536 + 1486485e^{12}/8388608$$

$$C_6 = -35.e^6/3072 - 315.e^8/12288 - 31185.e^{10}/786432 - 165165.e^{12}/3145728$$

$$C_8 = 315.e^8/131072 + 3465.e^{10}/524288 + 99099.e^{12}/8388608$$

$$C_{10} = -693.e^{10}/1310720 - 9009.e^{12}/5242880$$

$$C_{12} = 1001.e^{12}/8388608 \tag{3.34}$$

Posons :

$$\Lambda = \lambda - \lambda_0 \tag{3.35}$$

Alors les formules définitives du calcul direct sont :

$$X = a_1\Lambda - a_3\Lambda^3 + a_5\Lambda^5 - a_7\Lambda^7 + .. \tag{3.36}$$
$$Y = \beta(\varphi) - a_2\Lambda^2 + a_4\Lambda^4 - a_6\Lambda^6 + a_8\Lambda^8 + .. \tag{3.37}$$

En général, on applique à X, Y un coefficient de réduction $k = 0.9996$ et une constante de translation en X de $500\,000\,m$, les coordonnées obtenues sont :

$$X' = k.X + 500\,000.00\,m \tag{3.38}$$
$$Y' = k.Y \tag{3.39}$$

Calcul Inverse

Ayant les coordonnées (X', Y') en UTM et la longitude λ_0 du méridien central, comment calculer (φ, λ) ?. On revient à :

$$X = (X' - 500000)/k \tag{3.40}$$
$$Y = Y'/k \tag{3.41}$$

De même, on montre que :

$$\lambda - \lambda_0 = b_1 X - b_3 X^3 + b_5 X^5 - b_7 X^7 + \ldots \tag{3.42}$$

$$L = L' - b_2 X^2 + b_4 X^4 - b_6 X^6 + \ldots \tag{3.43}$$

Avec b_i des coefficients fonctions de φ' obtenue en résolvant l'équation :

$$\beta(\varphi') = Y \tag{3.44}$$

En posant $\eta'^2 = e'^2 cos^2\varphi'$ avec e' la deuxième excentricité, on obtient les coefficients :

$$b_1 = \frac{1}{N' cos\varphi'} \tag{3.45}$$

$$b_2 = \frac{tg\varphi'}{2N'^2 cos\varphi'} \tag{3.46}$$

$$b_3 = \frac{(1 + 2t'^2 + \eta'^2)}{6N'^3 cos\varphi'} \tag{3.47}$$

$$b_4 = \frac{tg\varphi' 1(5 + 6t'^2 + \eta'^2 - \eta'^4)}{24N'^4 cos\varphi'} \tag{3.48}$$

$$b_5 = \frac{(5 + 28t'^2 + 6\eta'^2 + 24t'^4 + 8\eta'^2 t'^2)}{120N'^5 cos\varphi'} \tag{3.49}$$

$$b_6 = \frac{tg\varphi'(61 + 180t'^2 + 46\eta'^2 + 120t'^4 + 48\eta'^2 t'^2)}{720N'^6 cos\varphi'} \tag{3.50}$$

$$b_7 = \frac{(61 + 622t'^2 + 107\eta'^2 + 1320t'^4 + 1538\eta'^2 t'^2 + 46\eta'^4)}{5040N'^7 cos\varphi'} \tag{3.51}$$

3.3.3 Les Eléments de définition de l'UTM Tunisie

Ellipsoïde de référence = ellipsoïde Clarke Français ($a = 6\,378\,249.200\,m$, $b = 6\,356\,515.000\,m$ et $e^2 = 0.006\,803\,487\,7$)

Origine des latitudes = $\varphi = 0$ gr = $0°$,

Longitude méridien central = $\lambda_0 = 9°$Est Greenwich,

Facteur d'échelle = $k = 0.999\,6$,

Constante translation $X = 500\,000.00\,m$,

Constante translation $Y = 0.00\,m$,

Amplitude de la latitude = $6° < \lambda < 9°$.

3.3.4 Le Module linéaire

Le module linéaire m est donné par :

$$m = \sqrt{1 + \lambda^2(1 + \eta^2)cos^2\varphi} \tag{3.52}$$

Au lieu de prendre m comme module linéaire, on le multiplie par un facteur k appelé facteur de réduction de l'échelle généralement égal à 0.999 6. Le module linéaire devient :

$$m' = k\sqrt{1 + \lambda^2(1 + \eta^2)cos^2\varphi} \tag{3.53}$$

Convergence des méridiens

Le gisement de l'image du méridien appelé ' convergence des méridiens' et noté par γ en un point (φ, λ) est donné en première approximation par la formule :

$$tg\gamma = (\lambda - \lambda_0)sin\varphi \tag{3.54}$$

γ est comptée dans le sens des gisements.

Application numérique On donne les points : A $(40.1245\,3\,gr, 11.2536\,4\,gr)$ et B $(37.2145\,3\,gr, 10.8957\,4\,gr)$.

Calculer les coordonnées UTM de A et de B. Calculer les modules linéaires en A et B. En déduire les altérations linéaires en A et B. Calculer la convergence des méridiens en A et B. On donne le point C de coordonnées UTM Tunisie : $X = 544\,715.42$ m et $Y = 4\,062\,176.80$ m. Déterminer les coordonnées géographiques de C.

Chapitre 4

Transformations entre Systèmes Géodésiques

4.1 Le Problème Posé

On dispose d'un ensemble de points $(X_{1i}, Y1i)i = 1, \ldots, n$ relatif à un système géodésique S_1 et d'un autre ensemble de points $(X_{2j}, Y_{2j})j = 1, \ldots, m$ d'un deuxième système géodésique S_2. On suppose qu'on dispose d'un certain nombre de points en commun. Le problème posé est de transformer les points du système S_1 au système S_2 avec les erreurs minimales.

Parmi les solutions proposées au problème précédent, ce sont les transformations polynomiales conformes. Etant conformes, elles conservent les angles. Nous proposons d'en étudier jusqu'à l'ordre 3.

4.1.1 Les Transformations Polynomiales Conformes

Polynômes d'ordre 1

C'est la transformation du type :

$$X_2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 - \beta_1 Y_1 \tag{4.1}$$

$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \alpha_1 Y_1 \tag{4.2}$$

Ce qui s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

C'est un système à 4 inconnues :$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1$ et β_1. Le modèle (4.3) est connu sous le nom de " la transformation de Helmert ".

Posons :

$$\alpha_1 = s.cos\theta \tag{4.4}$$
$$\beta_1 = s.sin\theta \tag{4.5}$$

D'où :

$$tg\theta = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \tag{4.6}$$
$$s = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \tag{4.7}$$

(α_0, β_0) sont les composantes du vecteur translation,
s : c'est le facteur d'échelle,
θ est l'angle de rotation.

L'équation (4.3) s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

La résolution de (4.8) nécessite la connaissance d'au moins 3 points communs dans les deux systèmes.

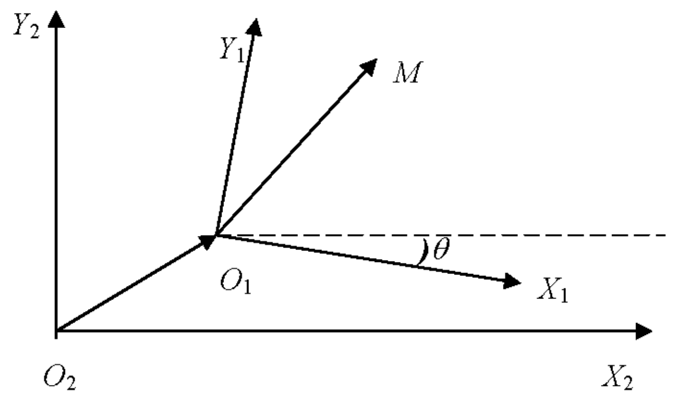

FIGURE 4.1 – Modèle de Helmert

En posant :

$$\mathbf{O_1M} = \mathbf{X_1} \tag{4.9}$$
$$\mathbf{O_2M} = \mathbf{X_2} \tag{4.10}$$
$$\mathbf{O_2O_1} = \mathbf{T} \tag{4.11}$$

Alors (4.8) s'écrit :

$$\mathbf{X_2} = \mathbf{T} + s.R(\theta).\mathbf{X_1} \tag{4.12}$$

où $R(\theta)$ est la matrice de passage de S_1 à S_2 donnée par :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Polynôme d'ordre 2

C'est la transformation du type :

$$X_2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 - \beta_1 Y_1 + \alpha_2 X_1^2 - 2\beta_1 X_1 Y_1 - \alpha_2 Y_1^2 \tag{4.14}$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \alpha_1 Y_1 + \beta_2 X_1^2 + 2\alpha_2 X_1 Y_1 - \beta_2 Y_1^2 \tag{4.15}$$

C'est un système à 6 inconnues : $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, dont la résolution nécessite la connaissance d'au moins 4 points communs dans les 2 systèmes.

Polynôme d'ordre 3 :

C'est la transformation du type :

$$X_2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 - \beta_1 Y_1 + \alpha_2 X_1^2 - 2\beta_1 X_1 Y_1 - \alpha_2 Y_1^2 + \alpha_3 X_1^3 \tag{4.16}$$
$$-3\beta_3 X_1^2 Y_1 - 3\alpha_3 X_1 Y_1^2 + \beta_3 Y_1^3 \tag{4.17}$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \alpha_1 Y_1 + \beta_2 X_1^2 + 2\alpha_2 X_1 Y_1 - \beta_2 Y_1^2 + \beta_3 X_1^3 \tag{4.18}$$
$$+3\alpha_3 X_1^2 Y_1 - 3\beta_3 X_1 Y_1^2 - \alpha_3 Y_1^3 \tag{4.19}$$

Ce système est à 8 inconnues : $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$ et β_3 ; et sa résolution nécessite la connaissance de 5 points communs dans les 2 systèmes.

4.1.2 Application

On donne les coordonnées de n points géodésiques d'une feuille au 1/50000 dans les systèmes Carthage86 et NTT exprimées respectivement en coordonnées Lambert Nord Tunisie et UTM. On a calculé les paramètres de passage entre Carthage86 et le système NTT par une transformation polynomiale conforme du 3ème degré.

Posons :

$$CX = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} X_i^{Cart86}}{n} \tag{4.20}$$

$$CY = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} Y_i^{Cart86}}{n} \tag{4.21}$$

Et :

$$X_i = X_i^{Cart86} - CX \tag{4.22}$$

$$Y_i = Y_i^{Cart86} - CY \tag{4.23}$$

Alors les formules de passage du système Carthage86 au système NTT sont données par :

$$\begin{aligned} X_i^{NTT} &= CX + A_1 + A_3X_i - A_4Y_i + A_5X_i^2 - 2A_6X_iY_i \\ &\quad -A_5Y_i^2 - 3A_8X_i^2Y_i - 3A_7X_iY_i^2 + A_7X_i^3 + A_8Y_i^3 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} Y_i^{NTT} &= CY + A_2 + A_4X_i + A_3Y_i + A_3X_i^2 + 2A_5X_iY_i \\ &\quad -A_6Y_i^2 + 3A_7X_i^2 - 3A_8X_iY_i^2 + A_8X_i^3 - A_7Y_i^3 \end{aligned} \tag{4.25}$$

avec les coefficients A_i déterminés par le logiciel de calcul. Par suite, on applique les formules (4.24) et (4.25) à tout point de la feuille.

Bibliographie

1. **C. Fezzani**. 1979. La structure astro-géodésiques des réseaux géodésiques tunisiens. Thèse de Docteur Ingénieur. ENSG. IGN France.
2. **M. Charfi**. 1984. Les Travaux de la Revalorisation de la Géodésie Tunisienne. OTC.

Table des figures