NOTE SUR LA COMPENSATION DES RÉSEAUX DE NIVELLEMENT DE PRÉCISION

par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

***Résumé.* —** Dans cet article, nous présentons quelques éléments sur le mode de compensation de la correction de fermeture dans les réseaux de nivellement de précision.

***Abstract.* —** In this article, we present some elements on the mode of the adjustment of the closure correction in precision leveling networks.

A la mémoire de mon Collègue Mohamed Haddar[1]

Table des matières

1. Introduction

Dans cet article, nous allons présenter les méthodes de compensation des lignes de nivellement de précision. Au préalable, les dénivelées brutes de terrain seront corrigées de:

- la correction orthométrique,
- la correction d'étallonage des mires,

[1] Il avait occupé le poste de Chef de service Etudes et Calculs à la Direction de la Géodésie à l'Office de la Topographie et de Cartographie dans les années 80.

- la correction de fermeture.

Concernant les corrections dues à la courbure de la Terre et de la réfraction atmosphérique, nous estimons qu'elles s'annulent étant données que les mesures sont faites en aller et retour et que les distances entre les portées avant et arrières sont rigoureusement égales.

2. Les Corrections des dénivelées

2.1. Correction orthométrique. — Soit A et B deux repères de nivellement. La correction orthométrique entre ces deux repères est donnée par la formule suivante:

$$C_H = -0.0053 H_m . sin(\varphi_A + \varphi_B).(\varphi_A - \varphi_B) \tag{1}$$

H_m altitude moyenne provisoire à la latitude moyenne entre A et B

φ_A, φ_B : les latitudes géodésiques respectivement des points A et B en radians

2.2. Correction d'étalonnage. — Elle se fait suite à l'étalonnage de la paire de mires qui sera utilisée lors des observations(2).

2.3. Correction de la fermeture. — La correction de fermeture dépend de:
- la discordance entre aller et retour: e,
- la longueur entre 2 repères successifs: l,
- la longueur totale du tronçon: L,
- le nombre total des repères: n_R.

La compensation de cette correction est différente selon s'il s'agit:
* d'une ligne unique,
* d'un polygone,
* d'un nivellement homogène,
* d'un nivellement hétérogène.

(2)Les difficultés d'étalonnage des mires ne nous permettent pas de l'effectuer pour le moment (1982).

2.3.1. *Ligne unique (fermée ou tendue).* — Soit:

- f : écart de fermeture,
- $l_1, l_2, l_3, \ldots$, longueurs des travées,
- $x_1, x_2, x_3, \ldots$, corrections à apporter aux dénivelées,
- $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$, erreurs probables totales.

Nous avons alors:

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum_i x_i + f = 0, \text{ équation de fermeture} \\ \\ \sum_i \dfrac{x_i^2}{\theta_i^2} \quad \textit{minimum} : \text{ condition de probabilité} \end{cases}$$

Nous avons une condition du minimum ci-dessus avec une équation de condition. La méthode des moindres carrés nous guide à utiliser dans ce cas la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On considère alors la fonction réelle $F(x_i, \lambda) = \sum_i \frac{x_i^2}{\theta_i^2} - 2\lambda(\sum_i x_i + f)$. x_i, λ solutions du système (2) sont obtenues par la résolution des équations:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \Longrightarrow 2\frac{x_i}{\theta_i^2} - 2\lambda = 0, \quad i = 1, n_t \; n_t \text{ nombre de travées}$$

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \Longrightarrow \sum_i x_i + f = 0$$

Ce qui donne:

$$\frac{x_i}{\theta_i^2} - \lambda = 0 \Longrightarrow x_i = \lambda.\theta_i^2 \Longrightarrow$$

$$(4) \qquad -f = \sum_i x_i = \lambda \sum_i \theta_i^2 \Longrightarrow \lambda = -\frac{f}{\sum_i \theta_i^2} \Longrightarrow \boxed{x_i = -\frac{f\theta_i^2}{\sum_i \theta_i^2}}$$

2.3.1.1. *Cas d'une ligne unique :* — dans ce cas, θ_i^2 sont proportionnels aux longueurs l_i, nous aurons:

$$(5) \qquad \boxed{x_i = -\frac{f.l_i}{\sum_i l_i}}$$

2.3.2. *Compensation d'un réseau ou d'un polygone.* — On distingue deux méthodes:

A - Compensation des sections: les inconnues seront la compensation à la fermeture des sections.

B - Compensation des altitudes: les inconnues seront les altitudes des nœuds non fixées. Un nœud est un repère commun à deux ou plusieurs lignes nivelées.

I - Compensation des sections:

Désignons par $x_{(q,m)}$ la compensation à rapporter à la section (q,m). Soit $f_1, f_2, \ldots, f_p$: les écarts de fermeture des polygones enveloppes. Nous aurons le système des équations de fermeture des sections:

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_i x_{i1} + f_1 = 0 \\ \sum_i x_{i2} + f_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots = 0 \\ \sum_i x_{iq} + f_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots = 0 \\ \sum_i x_{ip} + f_p = 0\end{array}\right. \tag{6}$$

soit $p+n-1$ équations indépendantes où :

- p nombre de polygones,
- n nombre des inconnues (sections).

La condition des moindres carrés est donnée respectivement pour les deux cas comme suit:

** réseau homogène:

$$\sum_{q,m} \frac{x_{qm}^2}{l_{qm}} \ minimum \tag{7}$$

** réseau non homogène:

$$\sum_{q,m} \frac{x_{qm}^2}{\theta_{qm}^2} \ minimum, \text{ les } \theta_{qm}^2 \text{ ne sont pas proportionnels aux longueurs } l_{qm} \tag{8}$$

La solution doit satisfaire en même temps à l'équation de fermeture (6) et la condition des moindres carrés (7) ou (8). On pose:

$$r = p + n - 1$$

(9)
$$X = {}_rX_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

On peut écrire le système (6) comme suit:

(10)
$${}_pB_r . {}_rX_1 = {}_pK_1$$

avec ${}_pB_r = (b_{uv})$ où b_{uv} vaut $1, -1$ ou 0 suivant les cas et ${}_pK_1^T = (-f_1, -f_2, \ldots, -f_i, \ldots, -f_p)$. On désigne par H^T la matrice transposée de H. On pose la matrice des poids la matrice carrée suivante:

(11)
$$P = {}_rP_r = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{p_i} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{p_r} \end{pmatrix} ; \quad p_i = l_i \text{ ou } \theta_i^2$$

En utilisant la méthode des multipilicateurs de Lagrange, on minimise la fonction réelle suivante:

(12)
$$min_{(X,\Lambda)} F(X,\Lambda) = F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = X^T.P.X - 2\Lambda^T(BX - K)$$

avec:

$$\Lambda = {}_p\Lambda_1 = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_p)^T$$

le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. On écrit que:

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 0 \Longrightarrow 2P.X - 2B^T\Lambda = 0 \Longrightarrow X = P^{-1}B^T\Lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda} = 0 \Longrightarrow BX - K = 0 \Longrightarrow BX = K \Longrightarrow B.P^{-1}B^T\Lambda = K \Longrightarrow \Lambda = (B.P^{-1}B^T)^{-1}K$$

Nous obtenons finalement le vecteur des inconnues X:

$$X = P^{-1}B^T\Lambda = P^{-1}B^T(B.P^{-1}B^T)^{-1}K \tag{13}$$

II- Compensation des altitudes

On considère:

- $1,2,\ldots,k,\ldots,r$ nœuds non fixés,
- $x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_r$ leurs altitudes inconnues,
- M,N,S les nœuds fixés et x_m^o,x_n^o,x_s^o leurs altitudes respectives connues.

En outre, soit:

- h_{lk}: la différence de niveau de l à k.

On aura pour la condition du minimum des moindres carrés la fonction:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_r) = \sum_{l,k} \frac{(x_l - x_k + h_{lk})^2}{\theta_{lk}^2} \quad \text{minimum}$$

et il n'y a pas d'équations de fermeture. Pour obtenir les inconnues $x_1,x_2,\ldots,x_r$ on annule les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}$,..., soit:

$$\frac{1}{2}.\frac{\partial F}{\partial x_l} = \sum_k \frac{x_l - x_k + h_{lk}}{\theta_{lk}^2} = 0$$

et en distinguant les nœuds fixés des nœuds non fixés entre l et k. Nous aurons le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x_1\sum_k \frac{1}{\theta_{1k}^2} - x_2\frac{1}{\theta_{12}^2} - x_3\frac{1}{\theta_{13}^2} + \ldots + \sum_k \frac{h_{1k}}{\theta_{1k}^2} - \sum_S \frac{x_s^o}{\theta_{1S}^2} = 0 \\ -x_1\frac{1}{\theta_{12}^2} + x_2\sum_k \frac{1}{\theta_{2k}^2} - x_3\frac{1}{\theta_{23}^2} + \ldots + \sum_k \frac{h_{2k}}{\theta_{2k}^2} - \sum_S \frac{x_s^o}{\theta_{2S}^2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{14}$$

Cas d'un réseau homogène

Les équations finales sont en nombre égal à celui du nombre des nœuds non fixés:

$$\begin{cases} x_1\sum_k \frac{1}{l_{1k}} - x_2\frac{1}{l_{12}} - x_3\frac{1}{l_{13}} + \ldots + \sum_k \frac{h_{2k}}{kl_{2k}} - \sum_S \frac{x_s^o}{l_{1S}} = 0 \\ -x_1\frac{1}{l_{21}} + x_2\sum_k \frac{1}{kl_{2k}} - x_3\frac{1}{l_{23}} + \ldots + \sum_k \frac{h_{2k}}{kl_{2k}} - \sum_S \frac{x_s^o}{l_{2S}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{15}$$

3. Coefficients caractéristiques de la précision

3.1. Les Principaux coefficients. — La précision est caractérisée par deux coefficients principaux à savoir:

* η: erreur probable accidentelle limite par kilomètre,
* ξ: erreur probable accidentelle limite par kilomètre des erreurs systématiques.

On définit aussi:
* $\tau = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$: valeur probable accidentelle limite par kilomètre de l'erreur totale,
* $\theta = \tau\sqrt{L}$: l'erreur probable totale.

Le poids attribué aux différents tronçons est inversement proprtionnel à l'erreur probable totale:

$$P = \frac{1}{\theta^2} \tag{16}$$

3.2. Les Coefficients accessoires. — - Z: distance limite au delà de laquelle les erreurs systématiques se comportent comme purement accidentelle (quelques dizaines de km).

- σ_0: coefficient de proportionnalité à courte distance de l'erreur probable systématique $\xi\sqrt{L}$ à la distance L.

On pose: $\sigma_0^2 = \dfrac{K}{Z}\xi^2$ avec $K = 2$ ou 3.

3.3. Calculs des coefficients. — On pose:

- e : discordance des 2 nivellements (aller-retour) entre 2 repères distant de R, déterminée par les observations.
- λ: discordance des 2 nivellements (aller-retour) entre les extrémités des tronçons de longueur L, déterminée par les observations.
- $U\sqrt{L}$: erreur probable kilométrique regardée comme purement accidentelle, inconnue.
- $U\sqrt{R}$:la valeur de l'erreur probable kilométrique regardée comme purement accidentelle, entre deux repères, inconnue.
- $2U\sqrt{R}$: valeur probable de la discordance entre 2 repères, inconnue.
- $3U\sqrt{R}$: valeur moyenne quadratique de la discordance entre 2 repères, inconnue.

Appelons par Δh les dénivelées observées entre 2 repères distant de R, (a),(r) désignent respectivement les mesures en aller et retour,

$< . >= moyenne(.)$. Par suite, on peut prendre:

$$e = |\sum_i \Delta h_i^{(a)} - \sum_j \Delta h_j^{(r)}|$$

Admettons que les erreurs accidentelles du nivellement de précision suivent la loi normale, les mesures sont acceptées si $e \leq 3\sigma$ où σ est la valeur moyenne quadratique de la discordance entre 2 repères. Pour estimer les paramètres inconnues ci-dessus, prenons:

$$e = 3\sigma = 3U\sqrt{R} \Longrightarrow U = \frac{e}{3\sqrt{R}} \tag{17}$$

Par suite numériquement, on a les valeurs estimées du paramètre U comme suit:

$$U_R^2 = \frac{1}{9} moy_i \left(\frac{e_i^2}{R_i}\right), \quad \text{à partir de } e_i \tag{18}$$

$$U_L^2 = \frac{1}{9} moy_i \left(\frac{\lambda_i^2}{L_i}\right), \quad \text{à partir de } L_i \tag{19}$$

Nous obtenons:

$$U_R \approx U_L \quad \text{croit de } \eta \text{ à } \tau$$

quand L croit de 0 à Z.

3.3.1. *Calcul de* η. — On a $\eta^2 = U_R^2 - \sigma_0^2 moy(R_i)$, on pose $R_m = moy(R_i), j^2 = \frac{K}{Z} R_m$. On obtient alors:

$$\eta^2 = U_R^2 - \xi^2 j^2 \tag{20}$$

Or $\tau^2 = \eta^2 + \xi^2 = U_L^2$. On résout le système:

$$\begin{cases} \eta^2 + \xi^2 = U_L^2 \\ \eta^2 + \xi^2 j^2 = U_R^2 \end{cases} \tag{21}$$

D'où :

$$\eta^2 = \frac{U_R^2 - j^2 U_L^2}{1 - j^2}, \quad \xi^2 = \frac{U_L^2 - U_R^2}{1 - j^2} \tag{22}$$

L'erreur probable totale θ est estimée par :

$$\theta = \tau\sqrt{L} = U_L\sqrt{L} \tag{23}$$

Références

[1] Abdelmajid Ben Hadj Salem. ELÉMENTS DE GÉODÉSIE ET DE LA THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS POUR LES ELÈVES-INGÉNIEURS GÉOMATICIENS, édité par Nour-Publishing. 365 pages. ISBN - 13: 978-3-330-96843-1, (2017) (link: https://www.morebooks.de/store/gb/book/eléments-de-géodésie-et-de-la-théorie-des-moindres-carrés/isbn/978-3-330-96843-1).

[2] Phillipe Hottier. THÉORIE DES ERREURS : ESTIMATION DE R GRANDEURS INCONNUES À PARIR DE N GRANDEURS OBSERVÉES PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS. Edition numérique réalisée par A. Ben Hadj Salem. 131 pages. (2020).

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM, , Résidence Bousten 8, Mosquée Raoudha, 1181 Soukra Raoudha, Tunisia. • *E-mail :* `abenhadjsalem@gmail.com`