Sur la dérivée des suites de réels

Antoine Balan

September 29, 2020

Abstract

Avec le choix d'une base des entiers naturels, il est possible de définir une dérivée pour une suite de nombres réels.

1 Les bases

Un nombre entier naturel a peut s'écrire selon une base n :

$$a = \sum_{k=0}^{N} a_k.n^k$$

avec $a_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

2 L'application φ_n

On définit une application φ_n des entiers dans les rationnels par :

$$\varphi_n(a) = \sum_{k=0}^{N} a_k.n^{-k}$$

Cette application vérifie :

$$\varphi_n(a+b) \leq \varphi_n(a) + \varphi_n(b)$$

$$\varphi_n(a.b) \leq \varphi_n(a).\varphi_n(b)$$

C'est une norme sur le monoïde des entiers naturels.

3 La notion de dérivée d'une suite de réels

Soit $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ une suite de réels, cette fonction est dérivable en a si :

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a)}{\varphi_n(h)} = f'_n(a)$$

On prend la limite en zéro pour la norme définie par l'application φ_n.

4 Exemples de dérivées

La fonction φ_n est dérivable de dérivée 1.

$$(\varphi_n)'_n = 1$$

On a les relations :

$$(f \circ g)'_n = (f' \circ g).g'_n$$

pour une fonction réelle f et une suite g.

$$(f + g)'_n = f'_n + g'_n$$

$$(f.g)'_n = f'_n.g + f.g'_n$$

pour des suites f et g.

$$(x.f)'_n = x.(f'_n)$$

pour un réel x et une suite f.