Равновесия в атмосферах планет

Ватолин Д. Ю.
dmvatolin@rambler.ru

Abstract
Найден эффективный математический метод вывода уравнений газовой динамики. Правильно определён тепловой поток. Найдены равновесия, в которых, при отсутствии ветров масс, нарушено максвеллово распределение.

Атмосферы составляем из классического идеального газа, которому приписываем возможности излучать или поглощать световую энергию, либо приписываем отсутствие таких возможностей, и придаём другие характеристики, в зависимости от их значения в той или иной задаче. Элементы идеального газа суть – достаточно малые абсолютно твёрдые шары или их сочетания. Атмосфера находится в динамическом равновесии, когда равна нулю сумма сил, действующих на каждую макроскопическую часть атмосферы. Атмосфера находится в статистическом равновесии, если неизменно во времени статистическое распределение частиц атмосферы по координатам, скоростям и другим характеристикам. Равновесия достигаются при наличии или отсутствии в атмосферах потоков энергии, потоков массы (ветров, течений), потоков других физических величин, и при наличии или отсутствии поглощения или излучения атмосферой электромагнитных полей.

§1. Динамическое равновесие

Динамическое равновесие исследуем в следующих атмосферах:

(А) Атмосфера над бесконечной плоскостью, притягивающей атмосферу.
(Б) Атмосфера сферической планеты или звезды.

Для атмосфер, описываемых в этом параграфе, делаем допущение, что поле тяжести, создаваемое атмосферой, ничтожно мало в сравнении с гравитационным полем небесного тела или материальной плоскости, притягивающих атмосферу. Пусть атмосфера «начинается» при достаточном удалении от центра небесного тела, и отсутствует её вращение. Теоремы, подобные найденным далее, доказуемы и в случаях, когда пренебрегать гравитацией атмосферы или её вращением нельзя. В частности, когда небесное тело полностью состоит из газа. «Теоремами» здесь называются доказуемые утверждения.

«Гиббсовой», в этом параграфе, назовём равновесную атмосферу, в которой равны температуры её произвольных частей. «Однородной» назовём атмосферу, концентрация которой всюду одинакова. «Атмосферой Циолковского» назовём равновесную атмосферу, температура которой убывает с высотой или с удалением от центра планеты.

Атмосфера над плоскостью. *Пусть $n = n(h)$ – концентрация газа на высоте h от плоскости, $T = T(h)$ – температура атмосферы на высоте h. Слой газа на высоте h толщиной dh имеет вес на единицу площади $mg \cdot n \cdot dh$, где m – масса молекулы газа. Условию динамического равновесия тогда обычно приписывают вид:*

$$dp = p(h+dh) - p(h) = -mgn \cdot dh,$$

где $p(h+dh)$ и $p(h)$ – давления над слоем и под слоем газа, $p = nkT$, k – постоянная Больцмана. В итоге, уравнением динамического равновесия для «случая над плоскостью» считают такое:

$$\partial_h(nkT) = -mgn, \text{ где } \partial_h \text{ – производная по переменной } h.$$

Пусть концентрация n не зависит от высоты для всех высот h, на которых «атмосфера существует». Из условия динамического равновесия $\partial_h T = -\beta$, где $\beta = mg/k$. Отсюда, $T = -\beta h+T_0$, T_0 – температура на нулевой высоте. Т.е. равновесная однородная атмосфера совпадает с одной из атмосфер Циолковского. Так как температура падает с высотой линейно, на некой высоте L должно быть $T(L) = 0$ и, следовательно, $p = 0$. Последнее возможно, только если на высотах $h > L$ газа нет, иначе, вес газа создал бы ненулевое давление при $h = L$. Отсюда, $T_0 = \beta L$.

Для гиббсовой атмосферы, $\partial_h n = -\beta n/T$. Решение последнего уравнения есть функция $n = n_0 \cdot exp(-\beta h/T)$, $n_0 = const$.

Если не ставить дополнительных требований, то решениями уравнения динамического равновесия, в частности, будут и всякие функции $n = n_0 \cdot exp(-\gamma h)$ и $T = T_1 + T_2 \cdot exp(\gamma h)$ такие, что $\gamma = \beta/T_1$, где T_1 и T_2 – некоторые константы.

Общим решением уравнения динамического равновесия в случае плоскости, создающей тяготение, оказывается функция $n = (n_0 \cdot T_0/T) \cdot exp(-\int(\beta/T)\, dh)$, где n_0 и T_0 – константы, $\int f\, dh$ – первообразная от f, T – произвольная положительная функция от аргумента h, для которой интеграл $\int(\beta/T)\, dh$ имеет смысл. Константу к первообразной выбираем так, чтобы сама первообразная обратилась в нуль, когда $h=0$.

В отношении функций n и T полезны и необходимы ограничения, имеющие смысл при описании реальных физических явлений. И суть ограничений в требовании конечности:

– количества газа в бесконечном атмосферном столбе единичного сечения;
– полной кинетической энергии молекул бесконечного атмосферного столба;
– полной энергии всех молекул бесконечного атмосферного столба.

Подставив в уравнение динамического равновесия $T = A/(h+B)$, где A и B – положительные константы, подходящей размерности, получаем решение для n, отвечающее всем трём перечисленным ограничениям при бесконечной высоте атмосферы. Такое решение описывает атмосферу Циолковского. Гиббсова атмосфера, очевидно, также отвечает этим ограничениям. Решение вида $T = T_1 + T_2 \cdot exp(\gamma h)$ удовлетворяет требованию конечности количества вещества, когда $T_2 > 0$, но не удовлетворяет требованию конечности энергии в атмосферном столбе. Такое решение вполне допустимо, т.к. бесконечное количество энергии можно распределить по конечному количеству «идеального вещества», в частности так, чтобы на каждый конечный объём атмосферы приходилась конечная часть энергии.

Атмосфера планеты. *Равновесие произвольных атмосфер здесь опишем законом:*

$$-\boldsymbol{\partial} p + \boldsymbol{f} = 0, \text{ где}$$

∂ – символ градиента, p – давление в газе, $\boldsymbol{f}$ – плотность сил, действующих со стороны внешних источников на макроскопический объём газа. Пользуясь сферической симметрией получаем из последнего:

$$\partial_r(nT) = -\beta n/r^2,\ \beta = GmM/k,$$

где r – растояние от центра планеты до точки измерения физических величин, M – масса планеты, G – гравитационная постоянная, ∂_r – производная по переменной r. Также вводим ограничения на количества молекул и энергии, содержащихся в атмосфере, т.е. требуем конечности объёмных интегралов от величин n, nT и от плотности полной энергии газа.

Для гиббсовой атмосферы в этом случае получаем решение $n = n_\infty \cdot exp(\beta/Tr)$ для $r \geqslant R$, где R – радиус планеты. На первый взгляд оно может казаться неприемлемым, так как концентрация газа стремится к постоянной величине n_∞ при неограниченном росте r.

Для однородной атмосферы в этом случае $T = (\beta/r) - (\beta/(R+L))$, где $r \geqslant R$, $r \leqslant R + L$, где L – высота атмосферы. Это решение также описывает атмосферу Циолковского.

Пусть T – произвольная функция от r, для которой интеграл $\int(\beta/(Tr^2))\,dr$ имеет смысл. Тогда общим решением уравнения динамического равновесия для атмосферы планеты будет функция

$$n = (n_0 \cdot T_0/T) \cdot exp(-\int(\beta/(Tr^2)) \cdot dr), \text{ где}$$

n_0 и T_0 – концентрация и температура газа на расстоянии $r = R$ от центра планеты. Константу для первообразной выбираем так, чтобы интеграл $\int(\beta/(Tr^2)) \cdot dr$ обратился в нуль, когда $r = R$.

Пусть $T = A/r^2$ для $r \geqslant R$, где $A = const$. Тогда, $n = (n_0 \cdot T_0 \cdot r^2/A) \times exp(-\beta(r-R)/A)$. Последнее решение подчиняется всем требованиям по ограничению количества вещества и энергии в атмосфере.

Пусть $T = Br^4$, $B = const > 0$, $r \geqslant R$. Тогда функция-решение концентрации n подчинена только условию конечности количества вещества в атмосфере, но не конечности энергии. Возможно ли, что такое или подобное решение имеет смысл для идеальной звезды, нагревавшей газ продолжительное время?

Решений уравнения динамического равновесия, ограниченных требованиями конечности количества вещества и полной энергии атмосферы, и для случая сферической планеты без вращения, бесконечно много. Находятся такие решения, для которых температура падает и поднимается на некоторых конечных интервалах переменной r, и тогда же, при неограниченном росте r она стремится к нулю.

§2. Роль закона теплопроводности и потоков энергий, и потоков других величин в определении статистического равновесия

Поскольку, температура и концентрация частиц в атмосфере не определены однозначно одним только требованием динамического равновесия, то для полного определения этих величин необходима дополнительная их связь. Логично предположить, что такую связь можно извлечь из закона передачи тепловой энергии. Предполагаемая одинаковость температуры всех частей равновесной атмосферы должна вытекать или из закона теплопроводности, или из *иного условия, не зависящего от требования динамического равновесия. Статистическое равновесие должно подчиниться закону передачи тепла, найденному в теории или в опыте. Обратно, из статистического распределения молекул по скоростям, координатам и другим величинам, по-видимому, можно извлечь правило теплопередачи в газе. Казалось бы, простая идея найти закон теплопроводности таким способом приводит к удивительным теоремам.*

Пусть в декартовых координатах: v_i *– компоненты скорости* $\mathbf{v}$ *частицы,* $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, x_i *– компоненты радиус-вектора* $\mathbf{x}$ *для точки, в которой находится частица. «Распределением Гиббса» названа функция* $Ђ = Ђ(\mathbf{x},\mathbf{v})$*, описанная далее. Вероятность найти частицу атмосферы в физическом объёме* $\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$*, окружающем точку* $\mathbf{x}$ *и, одновременно, в объёме пространства скоростей* $dv_1 dv_2 dv_3$*, когда частица имеет скорость близкую к* $\mathbf{v}$*, есть величина*

$$dw = Ђ(\mathbf{x},\mathbf{v}) \cdot \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \cdot dv_1 dv_2 dv_3, \text{ и}$$

$$Ђ(\mathbf{x},\mathbf{v}) = A \cdot (\alpha/\pi)^{3/2} \cdot exp(- (mv^2/2kT) - (m\varphi(\mathbf{x})/kT)),$$

где $\alpha = m/(2kT)$*,* φ *– гравитационный потенциал,* m *– масса молекулы,* T *– величина, называемая «температурой»,* A *– нормирующий множитель.*

Утверждение (гипотеза)*. В статистическом равновесии температура атмосферы всюду одинакова.*

Это утверждение можно назвать и «постулатом», и «гипотезой Гиббса» по следующим причинам. Сам Гиббс предположил «простейший мыслимый случай», который «чрезвычайно упрощает исследование» в широком классе термодинамических коллекций, см. [1] стр. 43. Утверждение же извлекаемо из гиббсова предположения.

Из утверждения немедленно заключаем, что вероятность найти частицу в элементарном объёме $\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$*, окружающем точку* $\mathbf{x}$*, когда начало координат помещено в центр планеты, есть величина*

$$dw' = A \cdot exp(GMm/kTr) \cdot \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3, \text{ где } r \text{ – длина вектора } \mathbf{x}.$$

Отсюда, находим, применяя последнее выражение для всего числа частиц атмосферы, что статистическая концентрация частиц на расстоянии r *от центра планеты есть функция*

$$n = n_\infty \cdot exp(GMm/kTr),$$

в точности совпадающая с полученной из условия динамического равновесия.

Чтобы не следовать догме – даже если гипотеза об одинаковости температуры всех частей равновесной атмосферы окажется верной – попробуем найти дополнительные условия на функции n *и* T*. Для последнего, уточним, что значит «равновесие атмосферы».*

Для ориентировки рассмотрим простейший случай: Газ заключён между двумя материальными плоскостями «левой» и «правой», температуры которых $T_Л$ *и* $T_П$*,* $T_Л < T_П$*, и гравитация не имеет значения. Когда в газе установится равновесие, поток вещества между плоскостями будет отсутствовать. «Давление» между плоскостями в каждой локальной области будет равно «давлению» в любой другой области, что следует из условия динамического равно-*

весия. Но будет ли существовать поток тепла от «горячей» плоскости к «холодной»? Вопрос этот, как далее будет показано, нетривиален. Конечно, исходя из физического опыта, следует допустить переток тепла. Но что значит «поток вещества», «поток тепла»? Стр 13

*Статистические распределения позволяют точно определить потоки. Пусть задано произвольное статистическое распределение молекул Ψ по скоростям. Т.е. вероятность dw, обнаружения частицы в окрестности точки **x**, имеющей скорость **v**, в пределах отклонений dv_1, dv_2, dv_3, есть величина:*

$$dw = \Psi(\mathbf{x},\mathbf{v})\, dv_1 dv_2 dv_3.$$

Когда в каждой пространственной точке определена концентрация частиц $n = n(\mathbf{x})$, «ветром (течением) массы» назовём локальную векторную величину:

$$\mathbf{s} = \iiint m\mathbf{v}n(\mathbf{x})\, \Psi(\mathbf{x},\mathbf{v})\, dv_1 dv_2 dv_3, \text{ где}$$

здесь и далее интегрирование проводится по пространству скоростей. Ветер массы эквивалентен плотности импульса частиц.

Наведём порядок в терминологии. Здесь «ветром величины», когда величина переносится в направлении перпендикулярном поверхности, назовём «количество величины», проходящей через локальный кусок поверхности за единицу времени, в отношении к площади куска. Ветер всегда характеризуем ещё и направлением. Поэтому, ветер скалярной величины – вектор. Ветер векторной величины – набор трёх ветров, каждый из которых – ветер скалярной компоненты переносимого вектора. Все ветра определяем только локально.

Почему бы ни использовать термин «поток величины»?

*Пусть **б** – векторное поле. Формула «поток вектора **б**» традиционно означает скалярную величину и сумму всех элементов вида **б**·d**σ** по поверхности, через которую «идёт поток», где d**σ** – векторный элемент поверхности. Т.е. как будто бы вектор-функция **б** описывает «течение отвлечённой величины», отличной от самой **б**. К примеру, «поток электрического поля» отождествляем с зарядом. Но в смысле, применённом здесь, и если бы употреблялась такая фраза, «поток скалярной величины» был бы вектором. Кроме того, «поток вектора **б**» означал бы «поток, переносящий **б** как векторную величину», когда **б** зависит от частицы, которой **б** приписан. Фраза «плотность потока импульса» означала бы «ветер, переносящий импульсы частиц». Если **б** – плотность импульса, фраза «поток плотности импульса» должна означать традиционный поток – интеграл от векторного поля **б** по поверхности. Т.е. имел бы значение порядок слов. «Поток плотности импульса» совпадал бы с «потоком массы» в ином смысле словосочетания. Чтобы заведомо ничего не путать, будем говорить о ветрах или течениях.*

«Ветром (течением) кинетической энергии» одноатомного газа назовём величину

$$\mathbf{q} = \iiint (mv^2/2)\cdot\mathbf{v}\cdot n(\mathbf{x})\cdot\Psi(\mathbf{x},\mathbf{v})\, dv_1 dv_2 dv_3.$$

*В общем случае, пусть б – произвольная скалярная, векторная, или величина другой природы, характеризующая молекулу, когда определимо то или иное произведение скорости частицы **v** на компоненты величины б, например, когда б – тензор. Тогда «ветер (течение) величины б» определим формулой:*

$$B = \iiint b\cdot\mathbf{v}\cdot n(\mathbf{x})\cdot \Psi(\mathbf{x},\mathbf{v})\, dv_1 dv_2 dv_3.$$

Например, можно определить ветер спинов частиц газа. Ветер импульса частиц газа есть тензор, составленный из ветров компонент импульса частиц – из ветров величин mv_i. Компоненты этого тензора задаются интегралами:

$$B_{ij} = \iiint mv_i v_j\cdot n(\mathbf{x})\cdot \Psi(\mathbf{x},\mathbf{v})\, dv_1 dv_2 dv_3.$$

B_{ij} трактуем в качестве j-ой компоненты ветра i-ой компоненты импульса. Старое название этих интегралов – «компоненты плотности тензора энергии-импульса».

Когда b=1, B будет течением единиц (частиц), ветром частиц.

Необходимо учитывать, что распределение Ψ зависит ещё и от времени t. Равновесие в атмосфере может достигаться, и когда потоки величин равны нулю, и когда некоторые из потоков величин не будут нулевыми. Собственно «равновесие» определим как статистическое состояние, когда потоки не зависят от времени – постоянны во времени ветры, течения величин.

*Функцию Ψ всегда можно подобрать в окрестности каждой точки **x** так, что ветер массы обратится в ноль, но в той же окрестности, ветер кинетической энергии не окажется нулевым. Тогда ветер кинетической энергии отождествим в точности с передачей тепла, с тепловым ветром.*

Вернёмся к примеру с двумя плоскостями. Докажем, что если одноатомный газ находится в равновесии и через него идёт тепловой поток, то распределение по скоростям молекул в окрестности каждой пространственной точки немаксвеллово.

*Действительно, предположим распределение максвеллово. Тогда функция Ψ(**x**,**v**) обладает сферической симметрией в пространстве скоростей, и тепловой ветер*

$$\mathbf{q} = \iiint (mv^2/2)\cdot\mathbf{v}\cdot n(\mathbf{x})\cdot \Psi(\mathbf{x},\mathbf{v})\, dv_1 dv_2 dv_3 = 0.$$

Последнее противоречит наличию потока тепла от одной плоскости к другой. Ч.т.д.

Из последнего находим, что средние величины кинетической энергии молекул, передаваемые за единицу времени «вправо» и «влево» неодинаковы. Может ли оказаться, что «температура по направлению теплового ветра» не совпадёт с «температурой в направлении, перпендикулярном тепловому ветру»? Некоторые моменты распределения отличны от максвелловых – совершенно точно (если совпадут все моменты, то совпадут и распределения). Чем тогда исключено нарушение «свойств максвелловой температуры»?

Получаем, что может потеряться сам смысл решения задачи, поставленной в начале параграфа. Может измениться смысл «условия динамического равновесия» – потребуется другое уравнение. Что тогда будет означать слово «давление»? Что опишет «уравнение теплопередачи»? Что обозначит слово «температура»?

*Отметим ещё один важный вопрос. Величина **q** абсолютно определяет тепловой поток, вне зависимости от статистических и физических теорий («ньютоновых тепловых скоростей»), использующих одноатомные частицы, не передающие друг другу свой спин. Если сохра-*

нять распределение по скоростям частиц в газе между плоскостями, но изменять концентрацию газа, то «зависимость температуры газа от координат» – как бы ни определялась подобная величина – не должна меняться от изменения концентрации частиц. Увеличение же концентрации газа, т.е. переносчиков тепла, к примеру, в сотни раз, приведёт к увеличению в сотни раз теплового потока. Зависимость теплового потока от концентрации газа в точности подтверждает формула ветра $\mathbf{q}$. *Следовательно, ошибочны любые формулы теплопередачи, в которых поток тепла не зависит от концентрации частиц.*

§3. Вывод «непрерывности в концентрации частиц»

Пусть далее, Ψ – распределение молекул по скоростям, зависящее от пространственной точки и времени. И концентрация частиц n *пусть также зависит от пространственной точки и момента времени. Пусть* $\mathbf{g}$ *– напряжённость гравитационного поля, зависящая от* $\mathbf{x}$.

Число частиц в момент t, *в объёме величиной* $\delta x_1\delta x_2\delta x_3$, *окружающем точку* $\mathbf{x}$, *равно* $n(t,\mathbf{x})\cdot\delta x_1\delta x_2\delta x_3$. *Пусть частицы не сталкиваются. Тогда, за время* dt, *из объёма величиной* $\delta x_1\delta x_2\delta x_3$, *окружающего точку* $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{x}$, *где* $d\mathbf{x} = -\mathbf{v}dt - \mathbf{g}dt^2/2$, $\delta x_i \ll \|dx_i\|$, *стартуя в момент* $t' = t - dt$ *с начальной скоростью* $\mathbf{v}$, *до элементарного объёма, окружающего точку* $\mathbf{x}$, *к моменту* t *долетело бы количество частиц равное*

$$n(t',\mathbf{x}')\cdot\Psi(t',\mathbf{x}',\mathbf{v})\cdot dv_1dv_2dv_3\cdot\delta x_1\delta x_2\delta x_3,\ \text{когда}\ dv_i = (\delta x_i)/dt.$$

Все частицы, бывшие в элементарном объёме, окружающем $\mathbf{x}$, *за время* dt *покинут этот объём. Суммируя по всем точкам* $\mathbf{x}'$, *получаем, что, при отсутствии столкновений, число частиц, оказавшихся в элементарном объёме в окрестности точки* $\mathbf{x}$ *в момент* t, *равно*

$$n(t,\mathbf{x})\cdot\delta x_1\delta x_2\delta x_3 = \iiint n(t',\mathbf{x}')\cdot\Psi(t',\mathbf{x}',\mathbf{v})\cdot dv_1dv_2dv_3\cdot\delta x_1\delta x_2\delta x_3,\ \text{т.е.}$$

$$n(t,\mathbf{x}) = \iiint n(t-dt,\mathbf{x}-\mathbf{v}dt-\mathbf{g}dt^2/2)\cdot\Psi(t-dt,\mathbf{x}-\mathbf{v}dt-\mathbf{g}dt^2/2,\mathbf{v})\cdot dv_1dv_2dv_3,$$

где интегрирование производится по всему пространству скоростей.

Траекторию, по которой частица двигалась без столкновений, назовём «простой». Простая траектория близка к прямой линии, если время движения частицы достаточно мало. «Сложной траекторией частицы» назовём ломаную, собранную из конечного числа звеньев, каждое звено которой – простая траектория этой частицы. Суммирование по точкам $\mathbf{x}'$ *есть «суммирование по простым траекториям». Для учёта столкновений, суммируем вклады в состав элементарного объёма, сделанные частицами, которые двигались по сложным траекториям с концом в* $\mathbf{x}$. *Когда число звеньев ломаной* L, *вычисляем* L*-кратный интеграл по пространству скоростей, с учётом доли частиц, отклонившихся от траектории. Чтобы найти концентрацию частиц в элементарном объёме, окружающем точку* $\mathbf{x}$, *необходимо найти предел многократного интеграла при неограниченном росте* L.

Но необходимость в многократных интегралах отведём без потери точности выводов. Когда интервал dt *устремлён к нулю, стремится к нулю и доля частиц, вылетающих из объёма, окружающего точку* $\mathbf{x}'$ *и отклонившихся от простой траектории. Частицы, которые отклонились от простой траектории, но достигли объёма, окружающего* $\mathbf{x}$, *к моменту* t, *при* достаточно малом dt учитываем уже как частицы, идущие в финальный объём по простым, более коротким траекториям – по последнему звену ломаной. Этот приём уточнён ниже.

Как совместить точечность частиц, неявно использованную в выводе, и возможность их столкновения? И как совместить появление бесконечно малых объёмов с конечными размерами частиц в случае, когда мы допускаем достаточную вероятность столкновения частиц?

Рассмотрим всевозможные конкретные, не статистические, материальные распределения частиц газа по скоростям и координатам и при конечном размере частиц, например, как твёрдых классических шаров, т.е. возникающие по физическому факту. Материальных распределений бесконечно много, и каждому соответствует своя атмосфера. Атмосферы «термодинамически эквивалентны», неотличимы, когда макроскопически неотличимы соответствующие распределения – по показаниям приборов, измеряющих термодинамические величины. Совместим в пространстве достаточно много эквивалентных атмосфер. Каждые два атома из разных атмосфер пусть никак не взаимодействуют – находятся в «параллельных мирах». Тогда, с одной стороны, атомы сталкиваются друг с другом внутри каждой атмосферы, и в одинаковых статистических пропорциях для разных совмещённых атмосфер. С другой стороны, какова бы ни была сколь угодно малая область пространства, в ней окажется достаточно много центров атомов из разных эквивалентных атмосфер. Наличие центров атомов в каком-либо объёме отождествляем с наличием частиц газа в таком объёме.

Далее получаем

$$n(t-dt,\ \mathbf{x}+d\mathbf{x})\cdot\Psi(t-dt,\ \mathbf{x}+d\mathbf{x},\mathbf{v}) =$$

$$= n(t,\mathbf{x})\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) + \langle(-\,\mathbf{v}dt - \mathbf{g}dt^2/2)\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle\cdot(n(t,\mathbf{x})\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v})) - dt\cdot\partial_t(n(t,\mathbf{x})\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v})) + \ldots \qquad (1)$$

Пусть θ – доля частиц, достигших финального объёма за время dt по простым траекториям, взятая от порции частиц, стартовавших из соседнего элементарного объёма со скоростью $\mathbf{v}$. Величина θ зависит от момента времени t, положения финального объёма $\mathbf{x}$ и от скорости $\mathbf{v}$. Назовём «функцией потерь» величину ι такую, что $\iota\cdot dt = 1 - \theta$ – с точностью до величин больше первого порядка малости по dt. Умножим на θ правую часть формулы (1). Итог проинтегрируем по пространству скоростей, уровняв этот интеграл с величиной $n(t,\mathbf{x})$. После интегрирования, слагаемые первого порядка малости по величине dt обязаны обратится в нуль. Поэтому,

$$\partial_t n(t,\mathbf{x}) = -\iiint \langle\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle\cdot n(t,\mathbf{x})\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\cdot dv_1dv_2dv_3 - J\cdot n(t,\mathbf{x}), \qquad (2)$$

$$\text{где } J = \iiint \iota(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\cdot dv_1dv_2dv_3,$$

$\langle\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle = \Sigma_i v_i\boldsymbol{\partial}_i$, Σ_i – сумма по всем значениям индекса i, $\boldsymbol{\partial}_i$ – компоненты оператора градиента $\boldsymbol{\partial}$, т.е. производная по i-ой координате. ↻Стр 16

Если $v_i = U_i + V_i$, где U_i – компоненты средней макроскопической скорости $\mathbf{U}$ движущейся массы газа, измеряемые в точке $\mathbf{x}$, V_i – компоненты «тепловой скорости» $\mathbf{V}$, то

$$U_i = \iiint v_i\cdot\ \Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\cdot dv_1dv_2dv_3,$$

$$\iiint V_i\cdot\ \Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{V}+\mathbf{u}(\mathbf{x}))\cdot dV_1dV_2dV_3 = 0.$$

Выводя операторы $\boldsymbol{\partial}_i$ за знак интеграла, из (2) получаем уравнение для величины n:

$$\partial_t n = -\Sigma_i \partial_i \iiint v_i \cdot n(t,\boldsymbol{x}) \cdot \Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \cdot dv_1 dv_2 dv_3 - J \cdot n =$$

$$= -\Sigma_i \partial_i \left(n(t,\boldsymbol{x}) \cdot \iiint v_i \cdot \Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \cdot dv_1 dv_2 dv_3\right) - J \cdot n =$$

$$= -\Sigma_i \partial_i (n(t,\boldsymbol{x}) \cdot U_i(t,\boldsymbol{x})) - J \cdot n = -\langle \boldsymbol{\partial}(\boldsymbol{U} n)\rangle - J \cdot n.$$

Полученное уравнение обязано совпасть с уравнением непрерывности. Отсюда, $J = 0$. Влечёт ли последнее $\iota(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = 0$ – с точностью до бесконечно малых по dt относительно ι? Порция частиц, стартовавших из некоторого элементарного объёма в сторону финального объёма, может как терять, так и приобретать частицы, присоединяемые на более коротких участках простой траектории. Поэтому, мы допустим, что величина ι может быть как положительной, так и отрицательной. *Стр 16*

Заметим, если $d\boldsymbol{x}$ зависит от бесконечно малых степеней dt более сложно, для степеней выше первой, то для уравнений первого порядка сложность таких степеней не имеет значения.

Когда частицы – твёрдые шары, статистически значима только «пространственно-временная концентрация двойных столкновений». Вероятность «столкновений бóльших кратностей» нулевая для твёрдых шаров и ничтожно мала для реальных молекул. Конечный четырёхмерный пространственно-временной «объём» содержит «конечное количество столкновений». Столкновения, произошедшие за время dt – если указать где произошли эти события – распределены в физическом трехмерном пространстве уже с чисто «пространственной плотностью мест парных столкновений», устремлённой нулю, когда $dt \to 0$. Отсюда, стремится к нулю отношение числа частиц, испытавших столкновения в финальном объёме, к полному числу частиц такого объёма. Поэтому, обмен ударами уже в финальном объёме ничтожен, бесконечно мал, для того, чтобы статистический вес таких ударов мог повлиять на какое-либо распределение, привнесённое частицами, пришедшими в финальный объём к моменту t из других элементарных объёмов.

Статистика ударов имеет значение в подсчёте излучений. Пусть известны статистика излучений порций электромагнитной энергии в зависимости от скоростей сталкивающихся частиц газа и распределение по скоростям частиц. Учёт излучений ведём через двойные интегралы по пространству скоростей. Когда стремится к нулю отведённое для столкновений время dt, отношение числа двойных столкновений к числу всех частиц стремится к нулю. И потому, стремится к нулю полная энергия излучений за это время.

§4. Вывод уравнений атмосферы для других физических величин

Когда $b = b(\boldsymbol{v})$ – скалярная, векторная или иная величина, характеризующая молекулу атмосферы, $\beta(t,\boldsymbol{x}) = \iiint b \cdot n(t,\boldsymbol{x}) \cdot \Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \cdot dv_1 dv_2 dv_3$ есть плотность, концентрация величины b в физическом пространстве. В частности, для $b=1$, $\beta(t,\boldsymbol{x}) = n(t,\boldsymbol{x})$.

Заменим фразу «количество частиц в элементарном объёме» на «количество величины b в элементарном объёме» в предыдущих рассуждениях, и проведём похожие рассуждения вновь. Тогда, опустив степени dt выше первой, находим:

$$\beta(t,\boldsymbol{x}) = \iiint \theta \cdot b(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}dt) \cdot n(t-dt, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}dt) \cdot \Psi(t-dt, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}dt, \boldsymbol{v}) \cdot dv_1 dv_2 dv_3,$$

поскольку, необходимо учесть, что за время dt скорость частиц изменилась на вектор $dt\cdot\boldsymbol{g}$ *– к моменту, когда они пришли в элементарный объём, окружающий* $\boldsymbol{x}$*. В итоге, приходим к формуле:*

$$\theta\cdot b(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}dt)\cdot n(t-dt,\ \boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t-dt,\ \boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) =$$

$$= (1-dt\cdot\iota)\cdot b(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}dt)\cdot(n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) - dt\cdot\langle\boldsymbol{v}\boldsymbol{\partial}\rangle\cdot n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) - dt\cdot\partial_t(n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) + \ldots) \quad (3)$$

Раскрываем: $b(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}dt) = b(\boldsymbol{v}) + dt\cdot\boldsymbol{g}\cdot\partial_v b(\boldsymbol{v}) + \ldots$, $\partial_v b$ *– градиент величины b в пространстве скоростей, когда b – скаляр. Если же b – вектор, который пусть будет вектором* $\boldsymbol{b}$*, компоненты которого суть* b_i*, то* $\partial_v b$ *– матрица, компоненты которой суть* $\partial b_i/\partial v_j$ *. Более сложные случаи рассматривать не будем. Из (3), т.к. обратится в нуль множитель перед dt (вне зависимости от наличия или отсутствия равновесия), находим:*

$$\begin{aligned}\partial_t\beta(t,\boldsymbol{x}) &= \partial_t\iiint b(\boldsymbol{v})\cdot n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\cdot dv_1dv_2dv_3 = \\ &= -\iiint b(\boldsymbol{v})\langle\boldsymbol{v}\boldsymbol{\partial}\rangle(n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))\cdot dv_1dv_2dv_3 + \\ &+ \iiint\langle\boldsymbol{g}\cdot\partial_v b(\boldsymbol{v})\rangle\cdot n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\cdot dv_1dv_2dv_3 - \\ &- \iiint \iota\cdot b(\boldsymbol{v})\cdot n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\cdot dv_1dv_2dv_3.\end{aligned} \quad (4)$$

В частности, пусть $b = v^2/2$*. Тогда,* $\partial_v b = \boldsymbol{v}$*. Если* $b = \boldsymbol{v}$*, то* $\partial_v b$ *– единичная матрица. Если* $b = v^2\boldsymbol{v}/2$*, то компоненты матрицы* $\partial_v b$ *суть величины* $v^2\delta_{ij} + v_iv_j$*, где* δ_{ij} *– компоненты единичной матрицы. Приходим к уравнениям атмосферы:*

$$\begin{aligned}\partial_t\iiint \boldsymbol{v}\cdot n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\cdot dv_1dv_2dv_3 &= \\ = -\iiint \boldsymbol{v}\langle\boldsymbol{v}\boldsymbol{\partial}\rangle(n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))\cdot dv_1dv_2dv_3 &+ \\ + \iiint \boldsymbol{g}\cdot n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\cdot dv_1dv_2dv_3 &- \\ - \iiint \iota\cdot\boldsymbol{v}\cdot n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\cdot dv_1dv_2dv_3 &\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\partial_t\iiint (v^2/2)\cdot n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\cdot dv_1dv_2dv_3 &= \\ = -\iiint (v^2/2)\cdot\langle\boldsymbol{v}\boldsymbol{\partial}\rangle(n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))\cdot dv_1dv_2dv_3 &+ \\ + \iiint\langle\boldsymbol{g}\boldsymbol{v}\rangle\cdot n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\cdot dv_1dv_2dv_3 &- \\ - \iiint \iota\cdot(v^2/2)\cdot n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\cdot dv_1dv_2dv_3. &\end{aligned} \quad (6)$$

$$\partial_t \iiint (v^2/2)\cdot v_i\cdot n(t,\mathbf{x})\cdot \Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \cdot dv_1dv_2dv_3 =$$
$$= - \iiint (v^2/2)\cdot v_i\cdot \langle \mathbf{v}\boldsymbol{\partial}\rangle(n(t,\mathbf{x})\cdot \Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v})) \cdot dv_1dv_2dv_3 +$$
$$+ \iiint \Sigma_j((v^2/2)\cdot\delta_{ij} + v_iv_j)\cdot g_j\cdot n(t,\mathbf{x})\cdot \Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \cdot dv_1dv_2dv_3 - \qquad (7)$$
$$- \iiint \imath\cdot(v^2/2)\cdot v_i\cdot n(t,\mathbf{x})\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \cdot dv_1dv_2dv_3.$$

В формуле (5) перетаскиваем операторы $\boldsymbol{\partial}_j$ за интеграл, используем замену $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$, приходим к уравнению:

$$\partial_t(m\cdot nU_i) = - \Sigma_j\boldsymbol{\partial}_j \iiint m\cdot V_iV_j\cdot n(t,\mathbf{x})\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \cdot dv_1dv_2dv_3 + mg_in - m\cdot n\cdot\iiint \imath\cdot V_i\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \cdot dv_1dv_2dv_3 -$$
$$- m\cdot n\cdot\iiint \imath\cdot U_i\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \cdot dv_1dv_2dv_3 - \Sigma_j\boldsymbol{\partial}_j(U_iU_j\cdot m\cdot n) - \qquad (8)$$
$$- \Sigma_j\boldsymbol{\partial}_j \iiint m\cdot U_iV_j\cdot n(t,\mathbf{x})\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{U}+\mathbf{V}) \cdot dv_1dv_2dv_3 - \Sigma_j\boldsymbol{\partial}_j \iiint m\cdot V_iU_j\cdot n(t,\mathbf{x})\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{U}+\mathbf{V}) \cdot dv_1dv_2dv_3.$$

Допустим, ветры масс отсутствуют, т.е. $\mathbf{U} = \mathbf{0}$, а распределение по скоростям молекул максвеллово в окрестности каждой пространственной точки. Тогда $V_i = v_i$, и уравнение (8) превращается в уравнение динамического равновесия:

$$- \boldsymbol{\partial}(nkT) + mn\cdot\mathbf{g} - mn\cdot\mathbf{a} = 0, \qquad (9)$$

где $\mathbf{a} = \iiint \imath\cdot\mathbf{V}\cdot\Psi\cdot dv_1dv_2dv_3$. Конечно, $\mathbf{a}$ – функция, зависящая от координат. Считаем функцию $\mathbf{a}$ определённой указанным интегралом, каково бы ни было Ψ. Тем самым, функция $\mathbf{a}$ есть ещё результат применения некоторого оператора к распределению Ψ.

Пусть ветры масс отсутствуют, вне зависимости от симметрии или не симметрии Ψ, и вне зависимости от отсутствия или наличия гравитации. Вынесем в уравнении (6) за знак интеграла операторы $\boldsymbol{\partial}_j$, превратив их в дивергенцию. Интегралы, содержащие g_iv_i, обратятся в нуль. И в окрестности некоторого момента времени:

$$\partial_t Q = - \langle\boldsymbol{\partial}\mathbf{q}\rangle - m\cdot n\cdot\Upsilon,$$

где Q – плотность тепловой энергии, $\mathbf{q}$ – тепловой ветер, $\Upsilon = \iiint\imath\cdot(v^2/2)\cdot\Psi\cdot dv_1dv_2dv_3$. Из последнего извлекаем, что, в отсутствии ветров масс и источников и стоков тепла, $\Upsilon = 0$.

§5. Дополнительное уравнение равновесия

При условии, что ветер массы и тепловой ветер равны нулю, и распределение Ψ локально максвеллово, получаем из уравнения (7):

$$- \Sigma_j\boldsymbol{\partial}_j \iiint (v^2/2)\cdot v_iv_j\cdot n(t,x)\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \cdot dv_1dv_2dv_3 +$$
$$+ \Sigma_j g_j \iiint ((v^2/2)\cdot\delta_{ij} + v_iv_j)\cdot n(t,\mathbf{x})\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \cdot dv_1dv_2dv_3 - n\cdot W_i = 0,$$

где $W_i = \iiint \imath\cdot(v^2/2)\cdot v_i\cdot\Psi(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \cdot dv_1dv_2dv_3$ – компоненты вектора $\mathbf{W}$.

Когда $i \neq j$, интегралы, содержащие $v_i v_j$, обратятся в нуль. Поэтому,

$$- \partial_i \iiint \Sigma_l (v_l^2 v_i^2/2) \cdot n(t,x) \cdot \Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \cdot dv_1 dv_2 dv_3 +$$

$$+ g_i \iiint v_i^2 \cdot n(t,\boldsymbol{x}) \cdot \Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \cdot dv_1 dv_2 dv_3 + \qquad (10)$$

$$+ g_i \iiint (v^2/2) \cdot n(t,\boldsymbol{x}) \cdot \Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \cdot dv_1 dv_2 dv_3 - n \cdot W_i = 0.$$

Для распределения Максвелла, когда $\eta = 2kT/m$, верны следующие равенства:

$$\iiint v^2 \cdot \Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \cdot dv_1 dv_2 dv_3 = 3\eta/2 ,$$

$$\iiint v_i^2 \cdot \Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \cdot dv_1 dv_2 dv_3 = \eta/2,$$

$$\iiint v_i^2 v_j^2 \cdot \Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \cdot dv_1 dv_2 dv_3 = \eta^2/4 \text{ , когда } i \neq j,$$

$$\iiint v_i^4 \cdot \Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \cdot dv_1 dv_2 dv_3 = 3\eta^2/4.$$

Используя η в равенстве (10) вместо интегралов, получаем

$$- (1/2) \cdot \partial_i (3/4) \cdot \eta^2 \cdot n - 2 \cdot (1/2) \cdot \partial_i (1/4) \cdot \eta^2 \cdot n + g_i (1/2) \cdot \eta \cdot n + g_i (1/2) \cdot (3/2) \cdot \eta \cdot n - n \cdot W_i = 0.$$

В итоге, находим независимое от требования динамического равновесия уравнение:

$$\boldsymbol{\partial}(kT^2 n) = T \cdot m \cdot n \cdot \boldsymbol{g} - (2m^2/5k) \cdot n \cdot \boldsymbol{W} \qquad (11)$$

Атмосфера будет иметь всюду одинаковую температуру, если $\boldsymbol{\partial} T = 0$. Из требования динамического равновесия $\boldsymbol{\partial}(kTn) = m \cdot n \cdot \boldsymbol{g} - m \cdot n \cdot \boldsymbol{a}$, находим $\boldsymbol{\partial} T = 0$, только когда $2m \cdot \boldsymbol{W} = 5kT\boldsymbol{a}$.

В частности, когда вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{W}$ равны нулю, атмосфера будет гиббсовой. Если, один из этих векторов нуль, а другой не равен нулю, то одинаковость температуры во всех частях атмосферы нарушается (при условии локально максвеллова распределения).

Концентрация $n = n_\infty \cdot exp(GMm/kTr)$ приводит к бесконечному количеству частиц идеальной атмосферы. Но для атмосферы Земли величина n_∞ столь мала, что если распределить в пространстве все атомы земной атмосферы с концентрацией n_∞, то занятый ими объём во много раз превысит объём видимой Вселенной. Последнее влечёт, что атмосфера Земли будет «испаряться» время много большее «возраста Вселенной». Кроме того, доля молекул, имеющих вторую космическую скорость ничтожно мала для заметного «испарения атмосферы» даже в течении миллиардов лет. В итоге, с точностью до веры «в локальную максвелловость распределения по скоростям частиц», и в равенство нулю векторов $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{a}$, находим, что «идеальная атмосфера Земли» должна находиться в весьма устойчивом гиббсовом квази-равновесии.

Всю атмосферу в поле тяжести или её часть можно поместить под купол и получить уже точное равновесие. Термин «гиббсова атмосфера» применён здесь для атмосфер, имеющих всюду одинаковую температуру, только в связи с обсуждением гиббсовой гипотезы, для упрощения оборотов речи. Правильнее же применять этот термин к атмосфере, «имеющей гиббсову статистику». Для других статистик «всюду одинаковость температур» ничем не исключена.

§6. Задачи равновесия и газовой динамики

Возможно читатель будет разочарован, поскольку закон теплопередачи остаётся по-прежнему неизвестным. Может ли температура равновесной не излучающей атмосферы быть разной в различных областях атмосферы в условиях гравитации? Оказалось, что только лишь предположения о «локально максвелловом распределении» ещё не достаточно для разрешения вопроса «о неодинаковости температуры». Задача же доказать или опровергнуть в условиях гравитации «немаксвелловость распределения» нетривиальна.

Отклонение моментов распределения Ψ от пропорций, использованных в выводе формул (9) и (11), в частности, также ведёт к температуре, меняющейся от высоты, и отсутствию теплового потока. По этому поводу требуется полное исследование.

Но теперь приобретены существенная ориентировка в вопросах и их точная формулировка. Можно делать следующие шаги. Возможно, какой-нибудь читатель найдёт дальнейшие доказательства и достигнет цели. Кроме того, найдены неожиданные приложения развитой здесь теории к трактовке квантовой механики и к «второму началу термодинамики» (см. §8, §9). Пока же, обратим внимание на другие «задачи равновесия»:

Для «атмосферы между плоскостями» в отсутствии гравитации, не известна ни истинная теоретическая функция температуры, ни распределение по скоростям частиц.

*Обратятся ли величины **a** и **W** всюду в нуль, когда размер частиц атмосферы конечен? Как зависит ι от размера частиц? Уверено можно говорить только о том, что ι устремлён к нулю, когда размер частиц стремится к нулю. Каков вклад сложных траекторий, «многократных отражений» частиц от других частиц газа, в величину давления? Может ли малое число частиц за время dt (но не бесконечно малое в отношении всех частиц переносящих импульс за время dt) из-за «отражений» кратно перенести импульс, что приведёт к давлению, превосходящему «каноническое»? Может ли из-за «отражений» импульс частиц не достигать площадки, на которую «давит» газ, и итоговое давление окажется меньше «канонического»?*

Большинство вопросов, на которые хотелось бы получить «инженерный ответ», могут быть разрешены нахождением подходящих статистик, или хотя бы, нахождением полезных свойств таких статистик. При том, не известны статистика столкновений и распределение по скоростям (статистика скоростей) частиц газа в некоторых «типичных случаях».

На равновесие влияют излучения. Каково распределение источников и стоков излучений по атмосфере? Какую роль играет излучение в распределении температуры по высоте в идеальной атмосфере? В равновесии, сумма дивергенций потока излучений и теплового потока всюду равна нулю (но могут быть не равны потоки). Потеря энергии атмосферой через излучение неизбежно рождает тепловой ветер, поглощаемый в точках излучения, в котором скорости частиц распределены не по Максвеллу. Каково же такое распределение?

Когда источники и стоки тепловой энергии лежат на поверхности, требуется решить задачу, аналогичную краевой. В таком случае, вместо скалярной величины на поверхности, видимо, необходимо задать первичную функцию распределения по скоростям частиц. Каково распределение внутри объёма, если оно задано таким способом на границе объёма? Если источники и стоки тепловой энергии имеют пространственную плотность, то они заданы каким-то первичным распределением по скоростям частиц, определённым в каждой точке объёма. Как газ «ответит» на такое «задание»? Каково будет итоговое распределение в газе?

«Ветры масс», создаваемые собственным вращением частиц, могут не подчиниться законам «обычной механики газа». Собственное вращение частиц может создать «ветер», не

испытывающий «трения» и не замечаемый приборами. Но тогда же, возможен обмен энергией и моментом импульса между «вращательным» и «поступательным» движениями, даже для одноатомных молекул, влияющий на динамику газа. Имеет ли значение такой обмен для реальных газов?

Извлечённые из уравнения (8) слагаемые $\partial_t(m \cdot n V_i)$ и $\Sigma_j \partial_j(V_i V_j \cdot m \cdot n)$ приводят к субстанциональной производной. Поскольку ещё $JV_i = 0$ (каково бы ни было распределение скоростей частиц), то уравнение (8) приводимо к уравнению, похожему на уравнение Навье-Стокса, где «трению» может соответствовать только слагаемое $-mn \cdot \mathbf{a}$. Отсюда возникает неразрешённый вопрос: Существует ли трение между движущимися слоями идеального газа? Вопрос полезен и в теории «нового эфира», и для теории сверхпроводимости (для «электронного газа»), и важен для реальных газов: Определено ли «трение слоёв» в идеальном газе «простым упругим соударением абсолютно твёрдых молекул», или оно следствие только в «неупругого взаимодействия» оболочек реальных частиц? Какова, поэтому, связь между трением и излучением реальных газов?

§8. Применение математического метода к трактовке квантовой механики

Некоторые уравнения второго порядка, получаемые способом, изложенным здесь, имеют вид «волновых уравнений» и похожи на уравнение Шредингера для одной частицы. Без сомнений, такие уравнения описывают распространение звука в условиях гравитации.

Подобные уравнения выводимы в пространстве конфигураций. В самом деле, множество молекул атмосферы разобьём на пары. По распределению частиц газа по координатам и скоростям однозначно определено распределение «по координатам и скоростям» в «пространстве пар». «Частица» в «пространстве пар», отождествляема с парой частиц обычного пространства, имеет шесть координат и шесть компонент скоростей. Способом, похожим на описанный в §3-§4, в пространстве пар находим волновое уравнение, похожее на двучастичное уравнение Шредингера. Разбивая газ на N-ки, получаем N-частичные уравнения, похожие на многочастичное уравнение Шредингера. Тем самым видно, откуда могут быть взяты многочастичные волновые уравнения квантовой механики. То, что для обычной атмосферы получаемые таким способом уравнения отличны от шредингеровых – не принципиально. Величины «квантовой атмосферы» могут быть совершенно непохожими на всё, что известно. Идея вывода многочастичных волновых уравнений не привязана ни к конкретному уравнению, ни к свойствам среды. В пространстве конфигураций получаемы и уравнения первого порядка. Можно ли тогда вывести «многочастичное уравнение Дирака»? Из конечности полной энергии и других величин «квантовой атмосферы», исключение и учёт кривых траекторий производим без искусственных допущений – через уменьшение времени движения частиц. В пространстве конфигураций «столкновения» могут происходить между конфигурациями, находящимися на «большом удалении» друг от друга, или могут происходить «столкновения конфигурации с собой» (вероятность их ничтожно мала).

§9. Действие планет и центров сил на эволюцию космоса

Докажем особую роль планет и центров сил в уменьшении хаоса.

Рассмотрим идеальную планету, атмосфера которой не получает от звезды тепло, и изолирована от любого обмена энергией с телом планеты, не поглощает и не излучает любую другую электромагнитную энергию. Атмосфера пусть имеет совокупную тепловую энергию, *которой не достаточно для «удаления атмосферы на бесконечность». В частности тогда, когда средняя скорость молекул атмосферы много меньше второй космической скорости.*

Такого рода атмосфера будет неизбежно и безвозвратно терять частицы. Действительно, когда материальная концентрация частиц уменьшается до нуля при удалении от планеты, уходящим частицам не с чем сталкиваться для того, чтобы вернуться на планету, и доказуемо, что любое ограничение скорости частиц будет статистически преодолено. Тогда, планета работает как «страж Максвелла», разделяя атмосферу на две фракции. Первая фракция покинет планету, нагретая до ненулевой температуры. Вторая фракция – останется на планете и «замёрзнет», в пределе достигнув температуры абсолютного нуля. В самом деле, какова бы ни была температура оставшейся части, «планету покинут» частицы, с кинетической энергией бóльшей, чем средняя кинетическая энергия молекул атмосферы. Но вся атмосфера не покинет планету – полной тепловой энергии атмосферы не достаточно для этого.

В процессе разделения на фракции все ушедшие молекулы на достаточно удалённой сфере можно собрать в один конечный объём. Для чего не потребуется совершение работы. Затем, горячая фракция может быть возвращена на планету, где пользуясь разной температурой фракций, можно совершить уже «работу полезную», например, для сборки «сложной машины». Для описанного цикла не требуется сложно организованного процесса «поимки фотонов» и т.п.

К любой потенциальной яме можно применить в точности подобную логику. В самом деле, пусть некоторое количество частиц находится в потенциальной яме, приготовленное в состоянии, когда не хватает полной тепловой энергии частиц для того, чтобы всё их количество покинуло яму. Тогда, неизбежно, что среди частиц появятся «горячие частицы», относительно «дна ямы», которые в состоянии покинуть эту силовую ловушку. Оставшаяся в яме фракция будет «замерзать». В данном случае не понадобится ждать миллиарды лет, т.к. вся система может находиться в «колбе», на выходе которой улавливаются «горячие частицы».

Но усмотрим и большее. Силовой центр сбрасывает с себя излишек энергии и беспорядка по естественной причине, без намеренного руководства. Оставим в «холодной фракции» некие «детали», которые потенциально собираемы в «высшую машину». Если «замёрзшая конструкция из деталей» окажется «неудачной», вернувшаяся фракция пусть уничтожит «неподходящий вариант». После многократных циклов требуемая «машина» может быть собрана.

Излучения тел и атмосферы, даже в большей степени, чем при потере частиц, могут сбрасывать энергию и беспорядок в пространство или иное тело. Полной аналогии между излучением и передачей тепла холодильнику, или между излучением и передачей вещества фракции нет. По этому поводу можно привести примеры, выводящие за рамки традиционной термодинамики.

Каждый раз, когда реальная планета на ночной стороне посредством выбросов энергии увеличивает порядок, звезда, обогревающая планету, вносит беспорядок на дневной стороне. Может ли такая «игра» в течение миллиардов лет приводить к перебору подходящих вариантов конструкций для сложных «живых машин»?

Центры белков, плавающие в клеточной цитоплазме, похожи на металлические шары, притягивающие любую конструкцию зарядов в окрестности центра. Из беспорядочной массы атомов и молекул к центру притянутся те молекулы, которые пройдут ещё «фильтр формы». Притянутые молекулы вступят в устойчивую химическую связь, сбросив часть энергии и беспорядочного движения. При наличии белковых центров сил, и после многократных циклов, существует статистически средний срок для неизбежной сборки «живой машины» (подобно тому, как статистически неизбежно раделение на фракции атмосферы планеты). В работе же *клетки участвует пара планета – звезда. В самом деле, если планета замёрзнет, «перебор подходящих вариантов» и «сборка машин» остановится. Если планета не сбросит лишний хаос, то никаких «высших машин» не появится.*

Приложение.
Уравнения второго порядка ↩Стр 14

Выпишем ряд Тейлора для величины $\theta\cdot n(t',\boldsymbol{x}')\cdot\Psi(t',\boldsymbol{x}',\boldsymbol{v})$, *где* $\theta = 1- \iota dt - \kappa dt^2$, $t' = t - dt$, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$, $d\boldsymbol{x} = - \boldsymbol{v}dt - \boldsymbol{g}dt^2/2$, *обозначив* $n\Psi = n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$:

$$(1- \iota dt - \kappa dt^2) \cdot n(t - dt,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}dt - \boldsymbol{g}dt^2/2)\cdot\Psi(t - dt,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}dt - \boldsymbol{g}dt^2/2,\boldsymbol{v}) =$$

$$= (1- \iota dt - \kappa dt^2) \cdot (n\Psi + (-dt\cdot\partial_t + \langle d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle) (n\Psi) +$$

$$+ (1/2) (dt^2\cdot\partial_{tt} + \langle d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle^2 - 2\cdot dt\cdot\partial_t\langle d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle) (n\Psi) +\ldots) =$$

$$= n\Psi - dt\cdot((\partial_t + \langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle) (n\Psi) + \iota\cdot n\Psi) +$$

$$+ dt^2\cdot(-\kappa\cdot n\Psi + \iota\cdot(\partial_t + \langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle)(n\Psi) - (1/2)\langle\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle(n\Psi) + (1/2)(\partial_{tt} + \langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle^2 + 2\cdot\partial_t\langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle)(n\Psi)) + \ldots$$

После интегрирования по пространству скоростей множитель при dt^2 *должен обратиться в нуль. По уравнению непрерывности (и потому, что* $J = 0$*) находим:*

$$\partial_t \iiint\langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle\cdot n(t,\boldsymbol{x})\cdot\Psi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\cdot dv_1dv_2dv_3 = - \partial_{tt}n,$$

Поэтому, интеграл от $(\partial_{tt} + \langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle^2 + 2\cdot\partial_t\langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle)(n\Psi)$ *по пространству скоростей преобразуется в величину* $= - \partial_{tt}n + \iiint\langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle^2 n\Psi\cdot dv_1dv_2dv_3$. *В итоге, приходим к следующему уравнению:*

$$-\kappa\cdot n + K\cdot n + \langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle n - (1/2)\langle\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle n + (1/2)\iiint\langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle^2 n\Psi\cdot dv_1dv_2dv_3 = \partial_{tt}n, \qquad (12)$$

где $K = \iiint \iota\cdot(\partial_t + \langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle)\Psi\cdot dv_1dv_2dv_3$, $\boldsymbol{a} = \iiint\boldsymbol{v}\cdot\iota\cdot\Psi\cdot dv_1dv_2dv_3$. *Если, в грубом приближении тепловые скорости частиц газа допустить существенно бóльшими средней скорости движения газовой среды, и распределение* Ψ *близким к сферически симметричному, то интеграл*

$$m\cdot\iiint\langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle^2 n\Psi\cdot dv_1dv_2dv_3 = m\cdot\Sigma_{ij}\boldsymbol{\partial}_i\boldsymbol{\partial}_j\, n\cdot\iiint v_iv_j\Psi\cdot dv_1dv_2dv_3$$

преобразуется в лапласиан от величины близкой к nkT. *В равновесии, когда предположено, что* Ψ *есть распределение Максвелла в окрестности каждой пространственной точки, последний интеграл точно равен* $\Delta(nkT)$. *В итоге, (12) преобразуем в «грубо приближённое уравнение»*

$$\Phi\cdot n + \langle\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\partial}\rangle n + (k/2m)\,\Delta(Tn) = \partial_{tt}n,$$

*где Ф и **б** – скалярная и векторная функции. Строго говоря, последнее уравнение обоснуется пока только «физическим соображением для достаточно малых амплитуд»: При фиксированной длине звукой волны, макроскопическая скорость среды должна стремится к нулю с уменьшением амплитуды волны, так как концентрация частиц почти не меняется при достаточно малых амплитудах, и величина **nυ** должна стремиться к нулю. Интересно отметить также, что температура Т пропорциональна квадрату «скорости звука».*

Для двучастичных конфигураций находим похожее уравнение:

$$Ф'\cdot n' + (\mathbf{б}'\cdot\boldsymbol{\partial}')n' + (k/2m)\Delta_1(T'n') + (k/2m)\Delta_2(T'n') = \partial_{tt}n',$$

*где величины **б'**, Ф', Т' и n' зависят от шести пространственных координат и времени, Δ_1 и Δ_2 – лапласианы по координатам первой и второй частицы, **∂'** – градиент в пространстве пар, n' – концентрация в пространстве пар. Подобные «волновые уравнения» верны для других величин, характеризующих газ, отличных от «концентрации частиц».*

До окончательной квантовой теории отсюда ещё далеко. «Демонстрация многочастичных лапласианов» по сути – качественный аргумент для обоснования «квантовой атмосферы». Трактовка «статистической концентрации в неоэфире» объясняет случаи ненормируемости концентрации – частица эфира окажется в местах с большей концентрацией частиц вероятнее, чем в местах с меньшей их концентрацией, даже когда функция концентрации не может быть нормирована. Статистическая и нестатистическая трактовки примиряются в том, что «квантовый газ» можно рассматривать как «нестатистическую упругую среду». Не будут ли тогда же «материальные частицы» всего лишь «колебаниями в эфире»?

В эту работу сделал вклад Всеволод Ботвиновский, который изначально заинтересовал меня задачей доказательства или опровержения «нулевого градиента температуры в условиях гравитации» из более твёрдых логических оснований, чем те, что до сих пор были известны. Обсуждение тем статьи с ним позволило отточить формулировки. Кроме того, Ботвиновский внёс полезные правки в часть текста.

Литература

1. Дж. В. Гиббс «Основные принципы статистической механики». Перевод К.В. Никольского. ОГИЗ. Государственное Издательство Технико-Теоретической Литературы. Москва, Ленинград, 1946. – По изданию: The collected Works of J. Willard Gibbs Ph.D. LLD on two volumes Longmans, Green and Co., New York, 1931. ↻ Стр. 4

*2. К. Э. Циолковский «Второе начало термодинамики». – Калуга, Типография С.А. Семёнова, 1914 г. Опубликовано **повторно**, считая с 1914 года, – в журнале ЖРФМ, 1991, № 1, стр. 22-39.*