Une équation fonctionnelle généralisée pour la fonction zeta de Riemann

A.Balan

1 La fonction zeta de Riemann

Une généralisation de la fonction zeta de Riemann est définie par :

$$\zeta_{a,b}(s) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{e^{2i\pi(n+a)b}}{(n^2+2na+a^2)^s}$$

Elle est définie si $a \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ et $s > 0$. On la définit ensuite sur l'ensemble es nombres complexes avec pôle au moyen de la fonction gamma. On définit aussi :

$$\tilde{\zeta}_{a,b}(s) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{e^{2i\pi na}}{(n^2-2nb+b^2)^s}$$

2 L'automorphisme de la fonction theta

La fonction theta est définie par :

$$\theta_3(p,q) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} p^n q^{n^2}$$

Elle vérifie une équation fonctionnelle, $q = e^{-\pi t}$ et $p = e^{2i\pi a}$:

$$\theta_3(a,t) = \frac{e^{-\pi a^2/t}}{\sqrt{t}} \theta_3(ia/t, 1/t)$$

3 L'équation fonctionnelle de z

L'équation fonctionnelle de zeta est alors :

Théorème 1 *On a la formule fonctionnelle suivante :*

$$[\frac{\Gamma(s)}{\pi^s}]\zeta_{a,b}(s) = [\frac{\Gamma(1/2-s)}{\pi^{1/2-s}}]\tilde{\zeta}_{a,b}(1/2-s)$$

Elle se démontre en utilisant l'automorphisme de la fonction theta.