Algèbre d'Appell

Par : Méhdi Pascal

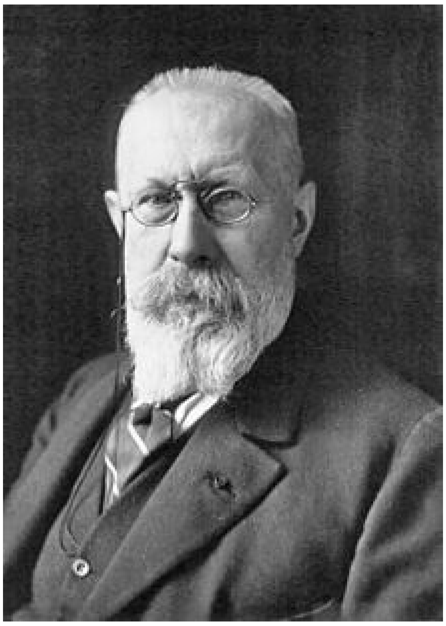
11 Juin 2019

Maroc

Dédié à monsieur Simon Plouffe

&

Mon frère Jamal Elouazzani



Paul Émile Appell, mathématicien français 1855-1930.

Abstract :

The aim of this algebra is to give tools that make it possible to study the sequences of numbers, and to find the new formulas that bind them together, for example I take as the first sequence, the Bernoulli numbers, defined by:

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$$

And I take for the second sequence, the Fibonacci numbers defined by the following recurrence:

$$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} := \begin{cases} F_0=0,\ F_1=1 \\ \forall n\geq 2,\ \ F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \end{cases}$$

Then Appell's algebra allows us to get the following formula:

$$nF_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(F_{2n-2j+1}-F_{n-j+1}\right)b_j$$

Résumé :

Le bute de cette algèbre est de donner des outils qui permettent d'étudier les séquences des nombres, et de trouver les nouveaux formules qui les lient entres eux, par exemple je prends comme première séquence, les nombres de Bernoulli, définies par :

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$$

Et je prends pour la seconde séquence, les nombres de Fibonacci définies par la récurrence suivante :

$$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} := \begin{cases} F_0=0,\ F_1=1 \\ \forall n\geq 2,\ \ F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \end{cases}$$

Alors l'algèbre d'Appell nous permet d'obtenir la formule suivante :

$$nF_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(F_{2n-2j+1}-F_{n-j+1}\right)b_j$$

Je noterai aussi que je ne suis pas un professionnel, je suis juste un passionné, donc l'erreur est bien entendu.

Remerciements :

Je remercie cordialement viXra car c'est l'unique qui publie ma passion.

Je remercie monsieur Simon Plouffe, car j'ai un jours osé de lui écrire à propos d'un papier comme celui là, et il m'a rependu avec gentillesse, et il m'a appris des choses vraiment importantes, c'est un homme avec une grande sympathie alors merci. il m'a conseillé de se représenter avec mon vrai nom, je trouve ça vraie, et donc mon vrai nom c'est elouazzani mohamed, mais je serai vraiment ravi si vous m'appelez Méhdi Pascal, et merci.

Je remercie *Les Mathematiques.net* surtout les membres du forum arithmétique, j'ai un jours deviné une formule pour la factorielle, mais je n'ai pas pue la démontrer, alors j'ai posé la question dans ce forum, et puis monsieur F.Chaurien il m'a surpris avec sa démonstrations, il a prouvé cette formule d'une manière comme s'il se moque de moi, cela veut dire que ce monsieur est un vrai génie, et que ce forum contient des vrais génies.

Le théorème de Chaurien :

$$n! = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j+t)^n$$

$$\forall t \in \mathbb{C}$$

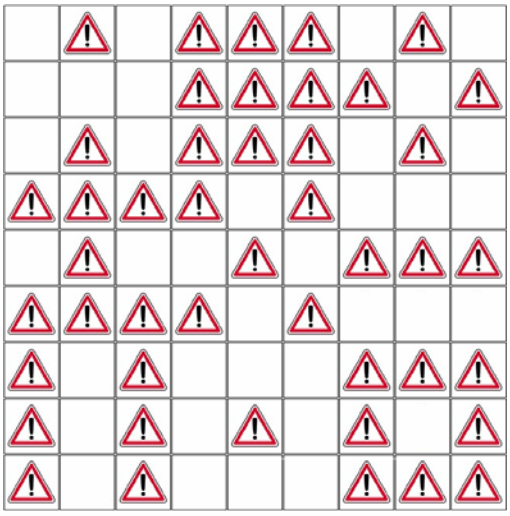
Pour la preuve voir le forum dans *Les Mathematiques.net*
Merci à ce monsieur, aussi à Fin de partie, à Gabuzomu et à tous les autres, je suis navré si je ne me rappels pas de tous les noms.

Merci à mes frères et mes sœurs pour leur soutien.

Cordialement

Méhdi Pascal
Maroc
Mehdi-Pascal@hotmail.fr
Ou encore,
Mehdipascal38@Gmail.com

Avis à tous les élèves et les étudiants,



Le contenu de ce document n'est plus académique, il peut contenir des erreurs, ou des notions qui ne sont plus admis. Bien que je serai très heureux si vous trouvez des choses qui peuvent être utiles pour vos études, mais avant de le faire, prenez l'avis de vos enseignants.

§1 Motivation & Partie théorique

L'idée de ces triangles me vient du grand théorème de Fermat, si $x^n+y^n=z^n$ est soluble par des entiers non nuls, alors d'évidence ils existent deux entiers non nuls a et b tels que a=z-x, et b=z-y, on remplace et on obtient,

(1.1) : $$H_n(z)=(z-a)^n+(z-b)^n-z^n=0$$

Soit,

(1.2) : $$H_n(z)=z^n+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(a^j+b^j)z^{n-j},\ (a,b)\in\mathbb{N}^*$$

Une première remarque montre que cette suite de polynôme vérifie que l'on a,

(1.3) : $$\begin{cases} H_n(z) \text{ est de degré égale à } n \\ \dfrac{d}{dz}H_n(z)=nH_{n-1}(z) \end{cases}$$

Un raisonnement banal me dit que si $H_n(z)$ admet une solution entière pour un ordre n quelconque, alors on auras des solutions entiers pour tous ordres qu'il lui sont inférieurs, et avec les mêmes paramètres a et b, mais c'est juste une banalité qui ne permet rien du tout, à part qu'elle m'a permet de généraliser les triangles de Pascal.

Dans ce papier il s'agit tout simplement d'étudier la structure de certains triangles analogues au triangle de Pascal, à chacun de ces triangle on associe une progression $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de polynôme $\left(A_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de degré n analogue à la suite $(x+1)^n$.

Autrefois j'avais appeler ces éléments par la progression de Pascal associée, et le polynôme de Pascal associé, ainsi les coefficients de $A_n(x)$ par les coefficients binomiaux associés, mais j'ai eu de la chance de tomber sur un article de Dominique Dumont, sous titre « ***Matrice d'Euler-Seidel*** », qui montre que ces polynômes associés sont déjà connu par les polynômes d'Appell, « Pour Paul Emile Appell », à l'aide de l'Internet j'ai réussie à trouver l'article original d'Appell, sous titre « Sur une classe de polynôme », c'est un article très riche, il m'a permet vraiment de bien développer ce premier chapitre, car avant, mes calculs étant une algèbre épuisante, qui devient amusante par introduction des séries génératrices.

Par conséquence j'ai modifié le titre de cette exposition, au lieu de l'algèbre de Pascal, pour Blaise Pascal, je trouve que le mérite revient à Appell, d'où l'algèbre d'Appell.

Il est important de signaler que cette étude est complètement formelle, je la représente ainsi sans m'occuper de savoir si le résultat formé converge ou non.

[]

Avant d'entrer dans le sujet de ces triangles, j'aimerai commencer par le produit de Cauchy, car même simple, c'est fondamental.

(1.4) : Pour deux séries ordinaires, on a formellement,

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right)=\sum_{n\geq 0} c_n x^n$$

Avec,

$$c_n=\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

On remplace a_n par $\dfrac{a_n}{n!}$, et b_n par $\dfrac{b_n}{n!}$, donc $c_n=\sum_{j=0}^{n}\dfrac{a_j}{j!}\dfrac{b_{n-j}}{(n-j)!}=\sum_{j=0}^{n}\dfrac{1}{n!}\binom{n}{j}a_j b_{n-j}$

Ainsi,

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n\geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}$$

Avec,

$$c_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_j b_{n-j}$$

[]

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une progression, nous pouvons associer un triangle à cette progression, par analogie au triangle de Pascal, de la manière suivante :

(1.5) :

$$\begin{array}{lllllll}
a_0\binom{0}{0} & & & & & & \\
a_1\binom{1}{0} & a_0\binom{1}{1} & & & & & \\
a_2\binom{2}{0} & a_1\binom{2}{1} & a_0\binom{2}{2} & & & & \\
a_3\binom{3}{0} & a_2\binom{3}{1} & a_1\binom{3}{2} & a_0\binom{3}{3} & & & \\
a_4\binom{4}{0} & a_3\binom{4}{1} & a_2\binom{4}{2} & a_1\binom{4}{3} & a_0\binom{4}{4} & & \\
a_5\binom{5}{0} & a_4\binom{5}{1} & a_3\binom{5}{2} & a_2\binom{5}{3} & a_1\binom{5}{4} & a_0\binom{5}{5} & \\
a_6\binom{6}{0} & a_5\binom{6}{1} & a_4\binom{6}{2} & a_3\binom{6}{3} & a_2\binom{6}{4} & a_1\binom{6}{5} & a_0\binom{6}{6}
\end{array}$$

..[]..

On pose,

(1.6) :
$$A_j^t = \binom{j}{t} a_{j-t}$$

Et on les appelles les coefficients d'Appell associés à la progression $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le triangle associé devient :

(1.7) :
$$\begin{array}{ccccccc}
A_0^0 \\
A_1^0 & A_1^1 \\
A_2^0 & A_2^1 & A_2^2 \\
A_3^0 & A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \\
A_4^0 & A_4^1 & A_4^2 & A_4^3 & A_4^4 \\
A_5^0 & A_5^1 & A_5^2 & A_5^3 & A_5^4 & A_5^5 \\
A_6^0 & A_6^1 & A_6^2 & A_6^3 & A_6^4 & A_6^5 & A_6^6
\end{array}$$

..[]..

On appels ce triangle le triangle d'Appell associé à la progression $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il est aisé d'avoir, dans un premier cas « le cas où $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ » la relation de récurrence suivante :

(1.8) :
$$A_j^t = A_{j-1}^{t-1} + \frac{a_{j-t}}{a_{j-t-1}} A_{j-1}^t$$

Dans le cas où la progression $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient des Zéros, on les notes par ε,

et puis on cherche à interpréter cet ε par une limite, si ça marche alors c'est ok, sinon alors on peux trouver une autre récurrence, à savoir qu'elles ne sont plus uniques, par exemple, tout le monde sait que,

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}$$

Mais il est aisé d'obtenir la suivante,

(1.9) :
$$\binom{n}{j} = (j-n+1)\binom{n-1}{j-1} + (j+1)\binom{n-1}{j}$$

Les polynômes Associés :

Nous associons aussi à la progression $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un ensemble des polynômes, tels que :

(1.10) :
$$A_n(x) = \sum_{t=0}^{n} A_n^t x^t = \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} a_{n-t} x^t$$

Les polynômes associes à la progression $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. sont dites les polynômes d'Appell, il est important de signaler que le degré de ce polynôme est inférieur ou égale à n, si par exemple les k premiers termes de la progression a_n sont nuls, est que $a_{k+1} \neq 0$ alors $A_n(x)$ sera de degré n-k, ceci est une légère modification aux polynômes d'Appell, car dans le document original d'Appell, ces polynômes sont définies avec un degré qui vaut exactement à n, et pour justifier cette modification je prends comme exemple, les deux célèbres suites de polynômes, les polynômes de Bernoulli et les polynômes d'Euler, les deux sont des polynômes d'Appell, qui se coïncident pour les deux premiers termes de leurs progressions associées comme indiquent ces premier valeurs :

$$B_0(x)=1 \qquad E_0(x)=1$$
$$B_1(x)=x-\frac{1}{2} \qquad E_1(x)=x-\frac{1}{2}$$
$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6} \qquad E_2(x)=x^2-x$$
$$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x \qquad E_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$$

Alors si on prend leur différence, on aura un polynôme qu'il a les mêmes propriétés d'un polynôme d'Appell, sauf que son degré est réduit par 2.

Dans ce qui suit, un triangle est une matrice triangulaire inférieure, noté par $\left[T_n^j\right]$, est on a,

(1.11) : $\left[A_n^j\right]$ est un triangle d'Appell si-si $\dfrac{A_{n+1}^{j+1}}{A_n^j}=\dfrac{n+1}{j+1}$.

Preuve :

$\left[A_n^j\right]$ est un triangle d'Appell, donc $\dfrac{A_{n+1}^{j+1}}{A_n^j}=\dfrac{a_{n-j}\binom{n+1}{j+1}}{a_{n-j}\binom{n}{j}}=\dfrac{n+1}{j+1}$.

Dans l'autre sens on pose $A_n^0=a_n$, et on obtient étape par étape le triangle de Pascal-Appell,

$$\begin{array}{lllll}
a_0 & & & & \\
a_1 & a_0 & & & \\
a_2 & 2a_1 & a_0 & & \\
a_3 & 3a_2 & 3a_1 & a_0 & \\
a_4 & 4a_3 & 6a_2 & 4a_1 & a_0
\end{array}$$

..[]..

Ceci preuve que c'est vrai pour les premières lignes du triangle, par récurrence on suppose que c'est vrai jusqu'à la ligne d'ordre n, pour la ligne d'ordre n+1, on a :

$$\frac{n+1}{j+1}A_n^j=\frac{n+1}{j+1}\binom{n}{j}a_{n-j}=\binom{n+1}{j+1}a_{n-j}=A_{n+1}^{j+1}$$

C.Q.F.D

(1.12) : Le produit de deux triangles d'Appell est un triangle d'Appell.

En effet soient $\left[A_n^j\right]$ & $\left[B_n^j\right]$ deux triangles d'Appell, et $\left[P_n^j\right]$ leur produit, alors on a, (1.13) : $$P_n^j = \sum_{t=j}^{n} A_n^t B_t^j = \sum_{t=j}^{n} \binom{n}{t}\binom{t}{j} a_{n-t} b_{t-j}$$

De même,

$$P_{n+1}^{j+1} = \sum_{t=j+1}^{n+1} \binom{n+1}{t}\binom{t}{j+1} a_{n+1-t} b_{t-j-1}$$

Apres un changement d'indice, on obtient

$$P_{n+1}^{j+1} = \sum_{t=j}^{n} \binom{n+1}{t+1}\binom{t+1}{j+1} a_{n-t} b_{t-j}$$

Or,

$$\binom{n+1}{t+1}\binom{t+1}{j+1} = \frac{n+1}{j+1}\binom{n}{t}\binom{t}{j}$$

Donc,

$$P_{n+1}^{j+1} = \sum_{t=j}^{n} \frac{n+1}{j+1}\binom{n}{t}\binom{t}{j} a_{n-t} b_{t-j} = \frac{n+1}{j+1} P_n^j$$

C.Q.F.D

Ce produit de triangles se traduit pour les polynômes d'Appell par un certain produit de convolution définie comme suivant :

Soient $A_n(x)$ et $B_n(x)$ deux suites de polynôme d'Appell, et $P_n(x)$ leur produit définie comme suivant,

(1.14)[1] : $$P_n(x) = A_n(x) \blacktriangle B_n(x) = \sum_{t=0}^{n} \left(\sum_{j=t}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{t} a_{n-j} b_{j-t} \right) x^t$$

Où a(n) et b(n) sont les deux progressions associés.

Comme le produit de deux triangles d'Appell est un triangle d'Appell, alors le polynôme $P_n(x)$ est aussi un polynôme d'Appell, dont la progression associe est donné par la formule suivante :

(1.15) : $$p_n = P_n(0) = \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t}\binom{t}{0} a_{n-t} b_t = \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} a_{n-t} b_t$$

On appliques de nouveau (1.6) on obtient,

(1.16) : $$P_n^j = \binom{n}{j} p_{n-j} = \sum_{t=0}^{n-j} \binom{n-j}{t}\binom{n}{j} a_{n-j-t} b_t$$

<u>Quelques exemples,</u>

- La matrice identité $\left[I_n^j \right]$ est un triangle d'Appell associé à la progression,

  $$i_n = \begin{cases} 1, \; si \; n=0 \\ 0, \; ailleur \end{cases}$$

  Dont la fonction génératrice est $i(x)=1$.

  De même l'inverse de $i(x)$ est $i^{-1}(x) = \frac{1}{i(x)} = i(x)$.

- La matrice nulle est un triangle d'Appell, dont la progression associé est la progression nulle, et dont la fonction génératrice est la fonction nulle.

[1] J'ai noté ce produit par un triangle « ◣ » pour ne pas le confondre avec le produit habituel de deux polynômes, ce produit est induit de produit matriciel de deux triangles.

Comme on ne peut pas inverser la matrice nulle, alors on ne peut pas inverser ça fonction génératrice.

- Le triangle de pascal est un triangle d'Appell associé à la progression constante 1, Dont la fonction génératrice est $p(x)=e^{x}$, son inverse est associé à la progression alterné $(-1)^{n}$ Dont la fonction génératrice est $p^{-1}(x)=\dfrac{1}{p(x)}=e^{-x}$.
- La multiplication d'un triangle d'Appell par un scalaire, est un triangle d'Appell dont la progression associée est la multiplication par le même scalaire de la progression initiale.

(1.17) : Soit $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des triangles d'Appell, on a ($\mathcal{A}_n$,+, ◣) est un anneau commutatif.

Preuve :

Pour l'anneau c'est aisé puisque c'est un sous anneau des matrices carrés, reste de prouver son caractère abélien, en effet, soit $\left[P_n^j\right]$ le produit de $\left[A_n^j\right]$ et $\left[B_n^j\right]$, on a,

$$P_n^j=\sum_{t=j}^{n}\binom{n}{t}\binom{t}{j}a_{n-t}b_{t-j}$$

$$P_n^j=\binom{n}{j}\binom{j}{j}a_{n-j}b_0+\binom{n}{j+1}\binom{j+1}{j}a_{n-j-1}b_1+\ ..[]..\ +\binom{n}{n-1}\binom{n-1}{j}a_1b_{n-j-1}+\binom{n}{n}\binom{n}{j}a_0b_{n-j}$$

Or pour certains valeurs de k, on a,

(1.18) :
$$\binom{n}{j+k}\binom{j+k}{j}=\binom{n}{n-k}\binom{n-k}{j}$$

Il suit,

$$P_n^j=\binom{n}{n}\binom{n}{j}a_{n-j}b_0+\binom{n}{n-1}\binom{n-1}{j}a_{n-j-1}b_1+\ ..[]..\ +\binom{n}{j+1}\binom{j+1}{j}a_1b_{n-j-1}+\binom{n}{j}\binom{j}{j}a_0b_{n-j}$$

$$P_n^j=\sum_{t=j}^{n}\binom{n}{t}\binom{t}{j}b_{n-t}a_{t-j}$$

Ce qui preuve le caractère abélien de cet anneau.

Théorème & définition (1.19) :

Soit $A_n(x)$ une suite de polynômes, on a,

$$A_n(x)\ \text{est un polynôme d'Appell si-si}\ \begin{cases}\dfrac{d}{dx}A_n(x)=nA_{n-1}(x)\\ A_n(x)\ \textit{est de degré}\ \leq n\end{cases}.$$

Preuve

Pour le premier sens, on a $A_n(x)=\sum_{t=0}^{n}A_n^t x^t=\sum_{t=0}^{n}a_{n-t}\binom{n}{t}x^t$ qui est un polynôme de degré ≤n, « ***le degré=n si le premier terme de la progression associée est non nul, ≤n sinon*** » et donc on a,

$$\frac{d}{dx}A_n(x)=\sum_{t=1}^{n}a_{n-t}\binom{n}{t}tx^{t-1} \text{ puisque } \frac{d}{dx}x^0=0,$$

Apres un changement d'indice,

$$\frac{d}{dx}A_n(x)=\sum_{t=0}^{n-1}a_{n-t-1}\binom{n}{t+1}(t+1)x^t$$

Or, $n\binom{n-1}{t}=(t+1)\binom{n}{t+1}$ donc,

$$\frac{d}{dx}A_n(x)=\sum_{t=0}^{n-1}a_{n-t-1}n\binom{n-1}{t}x^t=nA_{n-1}(x)$$

Pour le sens inverse on applique la formule de Taylor, en effet,

$$\frac{d}{dx}A_n(x)=nA_{n-1}(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}A_n(x)=n(n-1)A_{n-2}(x)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}A_n(x)=n(n-1)(n-2)A_{n-3}(x)$$

..[]..

$$\frac{d^t}{dx^t}A_n(x)=n(n-1)(n-2)..[]..(n-t+1)A_{n-t}(x)=t!\binom{n}{t}A_{n-t}(x)$$

..[]..

$$\frac{d^n}{dx^n}A_n(x)=n!A_0(x)$$

& $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}A_n(x)=0$ « car vu le degré qui est ≤n »

On appliquant Taylor, et on a,

$$A_n(x)=\sum_{t=0}^{n}\left(\frac{d^t}{dx^t}A_n(x)\bigg|_{x=0}\right)\frac{x^t}{t!}=\sum_{t=0}^{n}t!\binom{n}{t}a_{n-t}\frac{x^t}{t!}=\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}a_{n-t}x^t$$

C.Q.F.D

Exemples :

Les exemples les plus célèbres des polynômes d'Appell sont les polynômes de Bernoulli, les polynômes d'Euler et les polynômes d'Hermite.

Note :

Soient a_n et b_n deux quelconques progressions, supposons qu'on a :

$a_0=b_0$, $a_1=b_1$, ..[].. $a_k=b_k$, et que $a_{k+1}\neq b_{k+1}$

Ces deux progressions sont censés comme égaux, et en écrie $a_n\approx b_n$. Au niveau des polynômes associés, posons $c_n=a_n-b_n$ et $C_n(x)$ le polynôme associé à c_n, là on a bien $\frac{dC_n(x)}{dx}=nC_{n-1}(x)$, mais le degré est réduit à n-k, donc $C_n(x)$ est un polynôme d'Appell, sauf que son degré est inférieur à n, là l'unique problème c'est que $C_n(x)$ n'est pas inversible, ce problème ce traduit au niveau des séries génératrices par l'existence des fonctions qui ne se développent pas en série de Taylor, par exemple, soit $C_n(x)=(x+1)^n-x^n$ le triangle associé :

$$\begin{array}{lllll} 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \end{array}$$

La progression associée est $c_n := \begin{cases} 0, \; pour \; n=0 \\ 1, \; Ailleur \end{cases}$ dont la fonction génératrice est $\sum_{n\geq 0} c_n \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$. L'inverse de cette fonction est $\frac{1}{e^x-1}$, c'est la fonction génératrice de la réciproque de c_n, mais elle n'admet pas un développement en série de Taylor sauf erreur.

Par conséquence l'algèbre d'Appell se limite à un anneau commutative, et malheureusement l'anneau $(\mathcal{A}_n, +, \blacktriangle)$ n'a aucune chance d'être un corps.

[]

Théorème (1.20) :

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une progression, $g(x)=\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$ sa fonction génératrice, et $A_n(t)$ le polynôme d'Appell associer a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors formellement la fonction génératrice des polynômes $A_n(t)$ est donné par :

$$G(x)=\sum_{n\geq 0} A_n(t)\frac{x^n}{n!} = g(x)e^{tx}$$

Preuve :

C'est une simple application de (1.4), et on a,

$$g(x)e^{tx} = \left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} t^n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} a_{n-j} t^j\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} A_n(t)\frac{x^n}{n!}$$

C.Q.F.D

*Notons que e^{tx} n'est que la fonction génératrice de $I_n(t)=t^n$, qui est une suite de polynômes d'Appell associé à la progression identité $i_n = \begin{cases} 1, \; si \; n=0 \\ 0, \; ailleur \end{cases}$. Donc e^{tx} est censé comme le **1** de l'anneau des fonctions génératrices des polynômes d'Appell.*

Dans la suite de ce paragraphe on note par a_n et b_n deux progressions quelconques, $A_n(x)$ et $B_n(x)$ leurs polynômes d'Appell associés, $P_n(x)=A_n(x)\blacktriangle B_n(x)$, p_n est la progression associée à $P_n(x)$, et les fonctions génératrices suivantes :

$$g(x)=\sum_{n\geq 0}a_n\frac{x^n}{n!} \quad \& \quad G(x)=\sum_{n\geq 0}A_n(t)\frac{x^n}{n!}$$

$$h(x)=\sum_{n\geq 0}b_n\frac{x^n}{n!} \quad \& \quad H(x)=\sum_{n\geq 0}B_n(t)\frac{x^n}{n!}$$

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}p_n\frac{x^n}{n!} \quad \& \quad F(x)=\sum_{n\geq 0}P_n(t)\frac{x^n}{n!}$$

Théorème (1.21) :

$$f(x)=g(x)h(x)$$

En effet,

$$g(x)h(x)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}a_t b_{n-t}\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}p_n\frac{x^n}{n!}=f(x)$$

C.Q.F.D

Une identité remarquable (1.22) :

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A_j(t)b_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(t)a_{n-j}$$

Preuve :

On a,

$$F(x)=f(x)e^{xt}=g(x)h(x)e^{xt}=(g(x)e^{xt})h(x)=G(x)h(x)$$

$$=\left(\sum_{n\geq 0}A_n(t)\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}b_n\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A_j(t)b_{n-j}\right)\frac{x^n}{n!}$$

Mais on peut aussi écrire,

$$F(x)=H(x)g(x)$$

$$=\left(\sum_{n\geq 0}B_n(t)\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}a_n\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(t)a_{n-j}\right)\frac{x^n}{n!}$$

Et la formule s'obtient par l'identification des coefficients.

Note :

Le calcule symbolique a était introduit par Edouard Lucas, « Mathématicien français, 1842-1891 », ainsi l'identité (1.22) s'écrie symboliquement :

$$\left(A(t)+b\right)^n=\left(B(t)+a\right)^n$$

On développe les membres de cette identité comme s'il s'agit de binôme de Newton, puis on remplace les exposons par les indices, ainsi $A^j(t)$ deviens $A_j(t)$, b^n deviens b_n &..[]..

Théorème de binôme « cas simple » (1.23) :

Pour toute suite $A_n(x)$ de polynôme d'Appell, on a,

$$A_n(x+y)=\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}A_t(x)y^{n-t}$$

Symboliquement,

$$A^n(x+y)=\left(A(x)+y\right)^n=\left(A(y)+x\right)^n$$

Preuve :

On a, $$g(t)e^{(x+y)t}=g(t)e^{xt}.e^{yt}=\left(\sum_{n\geq 0}A_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}y^n\frac{t^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A_j(x)y^{n-j}\right)\frac{t^n}{n!}$$

Donc, $A_n(x+y)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A_j(x)y^{n-j}$

C.Q.F.D

Théorème de binôme « Cas générale » (1.24) :

$$P_n(x+y)=\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}A_t(x)B_{n-t}(y)$$

Symboliquement,

$$P^n(x+y)=\left(A(x)+B(y)\right)^n$$

Preuve :

On a,

$$f(t)e^{(x+y)t}=g(t)e^{xt}h(t)e^{yt}=\left(\sum_{n\geq 0}A_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}B_n(y)\frac{t^n}{n!}\right)$$

$$=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A_j(x)B_{n-j}(y)\right)\frac{t^n}{n!}$$

C.Q.F.D

Théorème de la différence finie (1.25) :

Pour toute suite de polynôme d'Appell $A_n(x)$, on a :

$$\Delta\left(A_n(x)\right)=A_n(x+1)-A_n(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}A_j(x)$$

Preuve :

Soit,

$$\Gamma=\sum_{n\geq 0}\frac{A_n(x+1)-A_n(x)}{n!}t^n=\left(\sum_{n\geq 0}a_n\frac{x^n}{n!}\right)\left(e^{t(x+1)}-e^{tx}\right)$$

$$=\left(\sum_{n\geq 0}a_n\frac{x^n}{n!}\right)e^{tx}(e^t-1)=\left(\sum_{n\geq 0}A_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(e^t-1\right)$$

Or,

$$e^t-1=\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}\lambda_n\frac{t^n}{n!}\quad , \text{ avec } \lambda_n=\begin{cases}0, & si\quad n=0\\ 1, & Ailleur\end{cases}$$

Donc,

$$\Gamma=\left(\sum_{n\geq 0}A_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}\lambda_n\frac{t^n}{n!}\right)$$

On appliquant (1.4) on obtient

$$\Gamma=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A_j(x)\lambda_{n-j}\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}A_j(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

Et la formule s'obtient par égalité des coefficients.

En réalité ce n'est qu'un corollaire du théorème de binôme pour les Appell's, en effet,

$$A^n(x+1) = \left(A(x)+1\right)^n$$

$$A^n(x+1) - A^n(x) = \left(A(x)+1\right)^n - A^n(x)$$

Donc,

$$\Delta\left(A^n(x)\right) = \left(A(x)+1\right)^n - A^n(x)$$

C.Q.F.D

(1.26) le petit théorème de Fermat :

Soit p un nombre premier, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une quelconque progression entière, « *c-à-d* $a_n \in \mathbb{N}$, *pour tout entier n* », et tel que $a_p \equiv a_1$ *Modulo*(p).

Soit $A_n(x)$ la suite de polynôme d'Appell associé à la progression a_n, alors on a :

Pour tout entier x, $A_p(x) - A_1(x)$ est multiple de p.

Symboliquement en écrie,

$$A^p(x) \equiv A(x)\ Modulo(p)$$

Preuve :

On a, $A_p(x) = \sum_{t=0}^{p}\binom{p}{t}a_{p-t}x^t$ et $A_1(x) = a_1 + a_0x$ donc,

$$A_p(x) - A_1(x) = (a_p - a_1) + \sum_{t=1}^{p-1}\binom{p}{t}a_{p-t}x^t + a_0\left(x^p - x\right)$$

$$A_p(x) - A_1(x) \equiv (a_p - a_1)\ Modulo(p)$$

C.Q.F.D

§2
Exemples d'applications

Dans cette partie je donne des exemples pour les Bernoulli's et leurs réciproques.

Les nombres de Bernoulli sont définis par la fonction génératrice suivante :

(2.1) : $$\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x - 1}, \quad |x| < 2\pi$$

Les polynômes d'Appell associés à ces nombres sont dites les polynômes de Bernoulli, et par (1.20) on les définis par,

(2.2) : $$\sum_{j=0}^{+\infty} B_n(t)\frac{x^n}{n!} = \frac{xe^{xt}}{e^x - 1}, \quad |x| < 2\pi$$

Puisque le premier terme de ces nombres n'est pas nul, alors on peut inverser ces nombres, on appels les réciproques les réciproques des nombres de Bernoulli, et on les note par $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la fonction génératrice est,

(2.3) : $$\sum_{n\geq 0}\eta_n\frac{x^n}{n!}=\frac{e^x-1}{x}$$

Donc,

$$\forall n\in\mathbb{N}\text{ , }\ \eta_n=\frac{1}{n+1}\text{ .}$$

Les polynômes associés sont dites les polynômes réciproques, et on les notes par $N_n(x)$, et on a,

(2.4) : $$N_n(x)=\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}\eta_{n-t}x^t=\sum_{t=0}^{n}N_n^t x^t$$

Les nombres N_j^t sont dites les coefficients réciproques, tel que,

(2.5) : $$N_j^t=\binom{j}{t}\eta_{j-t}=\frac{1}{j-t+1}\binom{j}{t}=\frac{j!}{t!(j-t+1)!}$$

Il est facile d'avoir,

(2.6) : $$N_j^t=\frac{1}{j+1}\binom{j+1}{t}$$

J'ai étudié ces réciproques pour deux raison, la première est étrange, il s'agit d'un tout petit théorème qui s'énonce comme une grande hypothèse, et qui dit que les zéros réciproques ont tous pour partie réels (-1/2), la seconde c'est parce que on a bien $\sum_{n\geq 0}\eta_n=\zeta(1)$ *.*

Pour l'instant on a besoin de prouver qu'on a,

(2.7) : $$N_n(x)=\int_x^{x+1}t^n dt=\frac{1}{n+1}\left((x+1)^{n+1}-x^{n+1}\right)=\frac{\Delta(x^{n+1})}{n+1}$$

<u>Preuve :</u>

$$\int_x^{x+1}t^n dt=\frac{1}{n+1}\left((x+1)^{n+1}-x^{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\left(\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j\right)-x^{n+1}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{j}x^j=\sum_{j=0}^{n}N_n^j x^j$$

Car vu, $\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{j}=N_n^j$

C.Q.F.D

Par conséquence on a $N_j(1)=\frac{2^{j+1}-1}{j+1}$, on appliques l'identité (1.22) pour les Bernoulli's et les réciproques, tel que,

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}N_j(t)b_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(t)\eta_{n-j}$$

Pour t=1, on a,

<u>Pour le premier membre :</u>

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}N_j(1)b_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{2^{j+1}-1}{j+1}b_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{n-j}\frac{2^{n+1-j}-1}{n+1-j}b_j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{2^{n+1-j}-1}{n+1-j}b_j$$

Pour le second membre :

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(1)\eta_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(1)\frac{1}{n-j+1}=1+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_j\frac{1}{n-j+1}$$

Donc,

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{2^{j+1}-1}{j+1}b_{n-j}=1+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_j\frac{1}{n-j+1}$$

$$1=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{2^{n+1-j}-1}{n+1-j}b_j-\frac{1}{n-j+1}b_j\right)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{2^{n+1-j}-2}{n+1-j}b_j$$

Noté que le terme de cette couleur s'annule pour n=0. D'où,

(2.8) : $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{2^{n+1-j}-2}{n+1-j}b_j=1$$

En générale le produit d'un triangle par son inverse conduit à une relation de récurrence, pour les Bernoulli's on a,

(2.9) : $$\left[N_j^t\right].\left[B_j^t\right]=\left[B_j^t\right].\left[N_j^t\right]=\left[\delta_j^t\right]$$

Où δ_j^t est le symbole de Kronecker.

Comme conséquence on a la formule suivante :

$$\sum_{t=0}^{j}N_j^t b_t=\begin{cases}1, & \text{Si } j=0\\ 0, & \text{Ailleurs}\end{cases}$$

Qu'on obtient par la multiplication matricielle de triangle réciproque par la première colonne de triangle de Bernoulli.

Il suffit donc de multiplier par j+1 pour retrouver la relation de récurrence qui permet de calculer les nombres de Bernoulli, tel que :

(2.10) : $$(j+1)\sum_{t=0}^{j}N_j^t b_t=\sum_{t=0}^{j}\binom{j+1}{t}b_t=\begin{cases}1, & \text{Si } j=0\\ 0, & \text{Ailleurs}\end{cases}$$

Soit $A_n(t)=(t+1)^n$ dont la progression associée est $a_n=1$, l'identité (1.22) nous permet d'écrire :

(2.11) : $$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(t)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(t+1)^j b_{n-j}$$

Pour t=-1, « où il ne faut pas oublier que $0^0=1$ », on obtient,

(2.12) : $$b_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(-1)$$

Notons que :

$$B_n(-1):=\begin{cases}B_{2n}(-1)=b_{2n}+n\\ B_{2n+1}(-1)=-n,\ n\neq 0\\ B_1(-1)=-3/2\end{cases}$$

C'est une conséquence de $\Delta\left(B_n(x)\right)=nx^{n-1}$.

Pour t=1 on a,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(2^j b_{n-j}-b_j\right)$$

Et par la symétrie des coefficients binominaux on obtient,

(2.13) : $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \left(2^{n-j} - 1\right) b_j$$

Nous substituions t par t-1 dans (2.11) et on obtient,

(2.14) : $$B_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j(t-1)$$

Notons que (2.14) est vraie pour toute suite de polynôme d'Appell, et non seulement pour les Bernoulli's.

Soit $A_n(t) = (t-1)^n$ une suite de polynômes d'Appell, dont la progression associée est $a_n = (-1)^n$ pour tout entier n, et donc on a,

(2.15) : $$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} B_j(t) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (t-1)^j b_{n-j}$$

Pour t=1 on a,

(2.16) : $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} b_j$$

Soit $a_n = n+1$, le triangle associé à cette progression est :

1					
2	1				
3	4	1			
4	9	6	1		
5	16	18	8	1	
6	25	40	30	10	1

Les polynômes d'Appell associés, premières valeurs :

$$A_0(x) = 1 = (x+1)(x+1)^{-1}$$
$$A_1(x) = x + 2 = (x+2)(x+1)^0$$
$$A_2(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)^1$$
$$A_3(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = (x+4)(x+1)^2$$
$$A_4(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 16x + 5 = (x+5)(x+1)^3$$
$$A_5(x) = x^5 + 10x^4 + 30x^3 + 40x^2 + 25x + 6 = (x+6)(x+1)^4$$

..[]..

$$A_n(x) = \left(x + n + 1\right)(x+1)^{n-1}$$

Et on a,

(2.17) : $$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(t + j + 1\right)(t+1)^{n-1} b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (n+1-j) B_j(t)$$

Pour t=-1, on a, $A_0(-1) = A_1(-1) = 1$ et $A_{n\geq 2}(-1) = 0$, ainsi on a,

(2.18) : $$b_n + n b_{n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (n+1-j) B_j(-1)$$

Soit $A_n(x)=\left(x^2+(3n+2)x+(n+1)^2\right)(x+1)^{n-2}$ on vérifie facilement que c'est une suite de polynômes d'Appell, donc la progression associée est $a_n=A_n(0)=(n+1)^2$.

Pour x=-1, on a, $A_0(-1)=1$; $A_1(-1)=3$; $A_2(-1)=2$, et pour tout n≥3 $A_n(-1)=0$, donc,

(2.19) : $$b_n+3nb_{n-1}+(n-1)nb_{n-2}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n+1-j)^2B_j(-1)$$

De même pour $A_n(x)=\left(x^3+(7n+3)x^2+(6n^2+8n+3)x+(n+1)^3\right)(x+1)^{n-3}$ dont la progression associée est $a_n=A_n(0)=(n+1)^3$.

Pour x=-1, on a, $A_0(-1)=1$; $A_1(-1)=7$; $A_2(-1)=12$; $A_3(-1)=6$, et pour tout n≥4 $A_n(-1)=0$, donc,

(2.20) : $$b_n+7nb_{n-1}+6n(n-1)b_{n-2}+n(n-1)(n-2)b_{n-3}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n+1-j)^3B_j(-1)$$

..[]..

On redéfinie les nombres de Fibonacci avec une légère modification, telle que,

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}:=\begin{cases}f_0=f_1=1\\ \forall n\geq 2,\ \ f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\end{cases}.$$

Notons par $\left(F_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes associés, alors on a,

(2.21) : $$F_n(1)=f_{2n}$$

Preuve :

Soient ϕ_1 et ϕ_2 les deux solution de l'équation $\phi^2=\phi+1$, alors on sait qu'ils existent deux réels a et b tels que,

$$f_n=a\phi_1^n+b\phi_2^n$$

On a,

$$\begin{aligned}F_n(1)&=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f_j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(a\phi_1^j+b\phi_2^j\right)\\&=a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\phi_1^j+b\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\phi_2^j\\&=a\left(\phi_1+1\right)^n+b\left(\phi_2+1\right)^n\\&=a\phi_1^{2n}+b\phi_2^{2n}\\&=f_{2n}\end{aligned}$$

C.Q.F.D

(1.22) nous permet d'écrire,

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}F_j(1)b_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(1)f_{n-j}$$

Pour le premier membre, on a,

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}F_j(1)b_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f_{2j}b_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{n-j}f_{2n-2j}b_j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f_{2n-2j}b_j$$

Pour le second membre, on a,

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j(1)f_{n-j}=nf_{n-1}+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_jf_{n-j}$$

Donc,

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} f_{2n-2j} b_j = n f_{n-1} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} b_j f_{n-j}$$

Ainsi on a,

(2.22) :
$$n f_{n-1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(f_{2n-2j} - f_{n-j}\right) b_j$$

Il est claire que cette formule reste aussi varie pour les nombres de Lucas, avec toujours cette petite modification, telle que :

$$(l_n)_{n\in\mathbb{N}} := \begin{cases} l_0 = 1,\ l_1 = 3 \\ \forall n \geq 2,\ l_n = l_{n-1} + l_{n-2} \end{cases}$$

(2.23) :
$$n l_{n-1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(l_{2n-2j} - l_{n-j}\right) b_j$$

[]

Merci pour la lecture de ce papier, et à la prochaine.
Cordialement

Méhdi Pascal
MehdiPascal38@Gmail.com
Juin 2019,
Khenifra, Maroc

Références

[1] Sur une classe de polynôme, Paul Emile Appell, 1882, le document est disponible dans le lien suivant :
www.numdam.org/article/ASENS_1880_2_9__119_0.pdf

[2] Matrice d'Euler-Seidel, Dominique Dumont 1981.
https://docplayer.fr/112953805-Matrices-d-euler-seidel-dominique-dumont.html

[3] Autour des nombres et des polynômes de Bernoulli, Gaëtan Bisson
https://gaati.org/bisson/tea/bernoulli.pdf

[4] les nombres de Bernoulli, par André Joyal, pour le camp mathématique.

[5] http://mathworld.wolfram.com/BernoulliNumber.html