THE RELATIVITY OF LOST ENERGIES

(italian version below)

Leonardo ***Rubino***

May 2019

Abstract: When a physical system loses energy instead of gaining it, another kind of relativity holds, that of lost energies and, as we will see, the atom will give us a numerical proof of all that.

In one of my previous publications, I have obtained the equations of relativity from a classic Newtonian reasoning, which is here reported again.
When I push from the back a car, by my hands, a mechanical contact between my hands and the trunk of the car is just apparent, as between the matter of my hand and that of the trunk there is an electromagnetic field; one pushes the other by photons. Electrons do not push one another directly.

Let's start from the definition of energy:

$dE = dL = Fds$,

but $ds = vdt$ and $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$, so:

$$dE = dL = Fds = m\frac{dv}{dt}vdt = mvdv \qquad (1.1)$$

Even if this is not going to be our case, we know that in case the mass is constant, it can get out of the integral and then we have the well known expression for the classic kinetic energy:

((($E = \int dE = \int mvdv = \frac{1}{2}mv^2$)))

Moreover, we know that from the definition of force above given, $dq = fdt = mdv$, but out of generalization, we can also write: $dq = fdt = mdv = d(mv)$, where $d(mv) = mdv$ and nothing more if the mass is constant and so if it can get out of the derivative. Therefore, we can write: $dq = d(mv) = mdv + vdm$ (now we no more exclude the variation of the mass) and $q = mv$. So, still out of generalization, from the less general (1.1), that is $dE = mvdv = mdv \cdot v$ we jump to the following:

$$dE = (mdv + dm \cdot v) \cdot v \qquad (1.2)$$

The small photon is carrying a small energy dE: $dE = hf$, but we can believe it also have a small mass dm, somehow, due to its corpuscular properties and not only like a wave, and dm is a dynamic mass (and let's take into account the (1.2)) : $dE = hf = (dm \cdot c + m \cdot dc)c = (dm \cdot c + 0)c = dm \cdot c^2 = dE$

The photon cannot be accelerated or decelerated, as it is, in the universe, like an insect that can be caught by a net (absorbed by matter), but in the net it can go on flying with its speed c (photon orbiting around an electron, as an example). In fact, a non moving body can absorb (incorporate) a photon and later it can emit it back with speed c. As the photon cannot be caught in an absolute sense, it keeps the speed it has since its birth, due to the universe, that is c. And, as a consequence, dc=0.
As a further example, also a propagating wave, if it interferes with its reflection, can hide into a "standing" wave. But after that, if we mathematically subtract the reflected wave, the original wave is back what it was at the beginning and takes up propagating again as before.

Now, let's imagine a simple and naive situation of a photon whose mass is dm and it bumps against the above car, whose mass is M_0, initially not moving. Let's evaluate the energy before and after the meeting.
Before (due to the (1.2)):

$$dE_{photon} + dE_{car} = [(dm \cdot c + 0)c] + [(dM_0 v_0 + M_0 dv_0)v_0] = [(dm \cdot c + 0)c] + [0] = dm \cdot c^2 = dE_{photon}$$

as $dM_0 = dv_0 = v_0 = 0$ (car still not moving, with a constant mass and speed)

After the meeting between the photon and the car, M_0 will become M, as it will catch dm inside and v_0 will be a certain v; in other words, just a body will exsist: the car with the photon on board:
$dE_{car+photon} = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v$. Now, we notice that $dM = dm$, as the change of mass of the car is due to having taken on board the dm of the photon and then both energies, before and after, must be the same, for the conservation of the energy:

$dE_{photon} + dE_{car} = dE_{car+photon}$, that is:

$dm \cdot c^2 = dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v$. Let's write it again:

$$dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v \tag{1.3}$$

Now, if we integrate this differential equation:

$dM(c^2 - v^2) = Mvdv$, that is: $\dfrac{dM}{M} = \dfrac{1}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} vdv$.

Now, let's integrate between M_0 and M and between 0 and v:

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M} = \int_0^v \frac{1}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} vdv$$

$\ln\dfrac{M}{M_0} = -\dfrac{1}{2}\ln(1-\dfrac{v^2}{c^2})$, that is:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.4}$$

which is the well known relativistic equation for the dynamic mass!

((We had to write the conservation of the energy in a differential form, like in (1.3) and not like a sum of terms like $\frac{1}{2}mv^2$, like in the theory of collision, as expressions like $\frac{1}{2}mv^2$ presuppose the integral has been already carried out and that the mass m was constant, so getting out of the integral and giving energies like $\frac{1}{2}mv^2$, indeed.))

In terms of energy, from (1.4) we can write that:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} M_0 c^2 = \gamma \cdot M_0 c^2$$

and it holds in particle accelerators, where the operators give energy to the particles.

Now, you get the kinetic energy by removing the rest energy from the total one:

$$E_k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} M_0 c^2 - M_0 c^2 = M_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right) = M_0 c^2 (\gamma - 1) \tag{1.5}$$

Now, still taking into account the (1.2), let's consider the car as not moving and then it suddenly loses a photon. Let's not forget that the change of state by losing energy is normally happening in atoms, or in a collapsing universe, where all the matter is falling.
Then, before the losing of the photon by the car, we have no photon and the car is still unchanged, so:

$$dE_{photon} + dE_{car} = 0 + [(dM_0 v_0 + M_0 dv_0)v_0] = 0 + 0 = 0 \qquad \text{(BEFORE)} \tag{1.6}$$

($dE_{photon} = dM_0 = dv_0 = v_0 = 0$)
While after that the car releases a photon, we have:

$$dE_{photon} + dE_{car} = [(dm \cdot c + 0)c] + [(-vdM + Mdv)v] = dm \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v \qquad \text{(AFTER)} \tag{1.7}$$

(we have $-dM$ in place of dM , as now the car lost mass)
By making the two energies "before" and "after" equal, that is (1.6) and (1.7), and by taking into account that $dm = dM$, as lost mass by the car is that of the photon just created, we have:

$0 = dm \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v = dM \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v = 0$, that is:

$$dM \cdot c^2 = v(vdM - Mdv)$$

from which: $dM(c^2 - v^2) = -vMdv$, that is:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{v}{(c^2 - v^2)}dv \tag{1.8}$$

Now, by integrating (1.8) between $M_0 - M$ and 0 - v , we get:

$M = M_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}M_0$. Once again, for the energy we have: $E = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}M_0 c^2$ and by subtracting such an energy by the energy of the mass M which lost it, that's what's left:

$$E = M_0 c^2 - M_0 c^2 \frac{1}{\gamma} = M_0 c^2 (1 - \frac{1}{\gamma}) = M_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}) \tag{1.9}$$

Now, let's test the (1.9) with the atom.

We know and we already showed (see appendix) that the total energy in Bohr's atom is:

$$E_{n-Bohr} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2} \tag{1.10}$$

and the speed of the electron is:

$$v = \frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0} \tag{1.11}$$

and (1.9) gives the same values as (1.10) does, for sure at non relativistic speeds:

$$E_{n-AltraR} = m_e c^2 [1 - \sqrt{1 - (\frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0 c})^2}\,] \tag{1.12}$$

and we will soon explain what $E_{n-Dirac}$ is:

$$E_{n-Dirac} = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon^2 h^2} [1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} (\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4})] \tag{1.13}$$

At relativistic speeds (high Z and low n) Bohr and Other Relativity-Relativity of Lost Energies (AltraR) values, as expected, are a bit different; in fact, we see that:

a)n=1 and Z=80:

$$E_{1-Bohr-80} = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon_0^2h^2} = -\frac{80^2(1,6)^4(10^{-19})^4 9,1\cdot 10^{-31}}{8(8,85)^2(10^{-12})^2(6,625)^2(10^{-34})^2} = \boxed{-13,879\cdot 10^{-15}J} \quad (1.14)$$

$$E_{1-AltraR-80} = -m_ec^2[1-\sqrt{1-(\frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0 c})^2}\,] = -81,7867\cdot 10^{-15}[1-0,8127734] = \boxed{-15,313\cdot 10^{-15}J} \quad (1.15)$$

$$E_{n-Dirac} = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon^2h^2}[1+\frac{\alpha^2Z^2}{n^2}(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4})]$$

which, with n=1 and j=ℓ+1/2=0+1/2 (and α as the Fine Structure Constant), yields:

$$E_{1-Dirac-80} = -\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon^2h^2}[1+\alpha^2Z^2(1-\frac{3}{4})] = -\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon^2h^2}(1+\frac{\alpha^2Z^2}{4}) = E_{1-Bohr-80}\cdot(1+\frac{\alpha^2Z^2}{4}) =$$

$$= E_{1-Bohr-80}\cdot(1+\frac{\alpha^2Z^2}{4}) = -13,879\cdot 10^{-15}(1+\frac{(\frac{1}{137})^2 80^2}{4}) = \boxed{-15,063\cdot 10^{-15}J} \quad (1.16)$$

b)n=1 and Z=60:

$$E_{1-Bohr-60} = -7,872\cdot 10^{-15}J$$

$$E_{1-AltraR-60} = \boxed{-8,220\cdot 10^{-15}J}$$

$$E_{1-Dirac-60} = \boxed{-8,250\cdot 10^{-15}J}$$

c)n=1 and Z=70:

$$E_{1-Bohr-70} = -10,626\cdot 10^{-15}J$$

$$E_{1-AltraR-70} = \boxed{-11,424\cdot 10^{-15}J}$$

$$E_{1-Dirac-70} = \boxed{-11,320\cdot 10^{-15}J}$$

but we notice there is also a matching with $E_{n-Dirac}$.

$E_{n-Dirac}$ is the Bohr's energy corrected by the official and ordinary Relativity; although there is also an exact Dirac/Sommerfeld equation about, here we use the above one, which comes from the perturbation theory, but gives good values which match the real situations. You can find it in many books of spectroscopy and structure of matter, or also at the link: http://en.wikipedia.org/wiki/Fine_structure etc.

At low values of Z, no relativistic situations hold and everything is as expected:

d)n=1 and Z=10:

$$E_{1-Bohr-10} = -2,169\cdot 10^{-16}J$$

$$E_{1-AltraR-10} = -2,172\cdot 10^{-16}J$$

$$E_{1-Dirac-10} = -2,172\cdot 10^{-16}J$$

e)n=1 and Z=20:

$$E_{1-Bohr-20} = -8,675\cdot 10^{-16}J$$

$$E_{1-AltraR-20} = -8,721\cdot 10^{-16}J$$

$$E_{1-Dirac-20} = -8,721\cdot 10^{-16}J$$

f)n=1 and Z=30:

$$E_{1-Bohr-30} = -1{,}952 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-30} = -1{,}976 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-30} = -1{,}975 \cdot 10^{-15} J$$

g)n=1 and Z=40:

$$E_{1-Bohr-40} = -3{,}470 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-40} = -3{,}546 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-40} = -3{,}544 \cdot 10^{-15} J$$

and here are further values:

h)n=1 and Z=50:

$$E_{1-Bohr-50} = -5{,}422 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-50} = -5{,}614 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-50} = -5{,}602 \cdot 10^{-15} J$$

i)n=1 and Z=90:

$$E_{1-Bohr-90} = -17{,}566 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-90} = -20{,}015 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-90} = -19{,}461 \cdot 10^{-15} J$$

j)n=1 and Z=100:

$$E_{1-Bohr-100} = -21{,}687 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-100} = -25{,}736 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-100} = -24{,}575 \cdot 10^{-15} J$$

k)n=1 e Z=108:

$$E_{1-Bohr-108} = -25{,}295 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-108} = -31{,}275 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-108} = -29{,}216 \cdot 10^{-15} J$$

l)n=1 and Z=137:

$$E_{1-Bohr-137} = -40{,}704 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-137} = -76{,}203 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-137} = -50{,}880 \cdot 10^{-15} J$$

You can see from the above calculations that the equation of the energy of the Other Relativity-Relativity of Lost Energies, apart from the case Z=137 and with very high Z (and this must make you think…), matches somewhat well the $E_{n-Dirac}$ and so, as previously predicted, as its structure is exact and not corrected, it proves to work well with systems which collapse and lose energy, while $E_{n-Dirac}$ does it in an unnatural and corrective way, as to put back to rails a train which always wants to go off the rails… Moreover, although also (1.5), as well as (1.9), at low speeds gives the Newton's kinetic energy, when developed in series of Taylor, on the contrary, it will not give acceptable values with small n and high Z values (relativistic situations), if it is used as a relativistic equation for the calculation of the energy levels of the atom.
Next possible studies on Z values higher than those we have today, will be very fruitful…

APPENDIX:

Bohr's atom:

In an atom, we make equal the coulombian attraction force and the centrifugal one:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r} \quad , \tag{A}$$

from which:

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = m_e v^2$. By multiplying, now, by 1/2:

$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = \frac{1}{2}m_e v^2 = E_k \tag{B}$$

Now, we remind that, in general, in physics we have, for the energy, the following formulas: $E = hf$ and also $E = m_e c^2$, from which, by equalling: $hf = m_e c^2$, so: $\frac{c}{f} = \frac{h}{m_e c}$, but we know that c/f is the wavelength λ, and so: $\lambda = \frac{h}{m_e c}$; now, according to De Broglie, we extend such an equation and we also give the orbiting electron a wavelength:

$\lambda_e = \frac{h}{m_e v}$ (De Broglie). Now, we multiply numerator and denominator by $\frac{1}{2}v$, so getting:

$$\lambda_e = \frac{\frac{1}{2}vh}{\frac{1}{2}m_e v^2} = \frac{hv}{2E_k} \quad . \tag{C}$$

Now, the Quantization Condition of Bohr requires the quantization of the angular moment:

$$m_e vr = n\frac{h}{2\pi} , \tag{D}$$

where n is the Principal Quantum Number.
Such a Bohr condition is the will to have the circumference of the orbit to be equal to n times the De Broglie wavelength; in fact, equation (D) can be read also like this:

$$2\pi r = n\frac{h}{m_e v} = n\lambda_e . \tag{E}$$

Now, by using (C) in (E), we get:

$$2\pi r = n\frac{hv}{2E_k} \tag{F}$$

but from (B) we see that 2πr is also:

$$2\pi r = \frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{E_k} , \tag{G}$$

so, by equaling (F) to (G), we have:

$$n\frac{hv}{2E_k}=\frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{E_k}$$, that is:

$$v=\frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0} \tag{H}$$

and, so far, we have used absolutely well established physics, almost a century old!

Bohr also figured out the total energy of the electron (kinetic + potential):

$$E=E_k+V=\frac{1}{2}m_e v^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \tag{I}$$

in fact, in order to evaluate V, by considering a v=0 at an infinite distance from the nucleus, then the wotk to bring the electron from r to infinite is:

$V(r)=\int_{R=r}^{R=\infty}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R=r}^{R=\infty}\frac{Ze^2}{R^2}dR=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$, from which you have the (I), after having well considered signs.

(force F is that of Coulomb, of course)

Now, thanks to (B), (I) becomes:

$$E=E_k+V=\frac{1}{2}m_e v^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}=-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}, \tag{J}$$

and, by reminding of (A): ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}=m_e\frac{v^2}{r}$) and of (D): ($m_e vr=n\frac{h}{2\pi}$), according to which: $v=n\frac{1}{m_e}\frac{h}{2\pi r}$ we get:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}=m_e v^2=m_e(n\frac{1}{m_e}\frac{h}{2\pi r})^2,$$

and so: $r=\frac{n^2\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e Ze^2}$, (K)

and this one, that is (K), when is put into (J) (i.e. in: $E=-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$), yields:

$E=-\frac{Z^2e^4m_e}{8n^2\varepsilon_0^2h^2}$; now, as E is depending on n, we rewrite it as follows:

$$E_n=-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon_0^2h^2} \tag{L}$$

This equation, well known in physics, provides the energies corresponding to levels, in the atom.

Thank you for your attention.
Leonardo RUBINO.

LA RELATIVITÀ DELLE ENERGIE CEDUTE

Leonardo ***Rubino***
Maggio 2019

Abstract: Quando un sistema fisico cede energia invece che guadagnarla, si applica un altro tipo di relatività, ossia quella delle energie cedute e, come vedremo, l'atomo ci dà la conferma numerica di tutto ciò.

In una mia precedente pubblicazione, ho fatto scaturire le formule della relatività da un ragionamento newtoniano classico che qui ripetiamo brevemente.
Quando io spingo da dietro un'automobile, con le mani, il contatto meccanico tra le mie mani ed il baule della macchina è solo apparente, perché, in realtà, tra la materia della mia mano e quella del baule c'è campo elettromagnetico; una spinge l'altra con dei fotoni. Non è che gli elettroni si spingono direttamente l'un l'altro.

Partiamo dalla definizione di energia:
$dE = dL = Fds$,

ma $ds = vdt$ e $F = ma = m\frac{dv}{dt}$, da cui:

$$dE = dL = Fds = m\frac{dv}{dt}vdt = mvdv \qquad (1.1)$$

Anche se non sarà il nostro caso, notiamo che nel caso di massa costante, la massa può uscire dall'integrale e si ha la nota espressione dell'energia cinetica classica:

((($E = \int dE = \int mvdv = \frac{1}{2}mv^2$)))

Ricordiamo inoltre che, dalla definizione di forza di cui sopra, $dq = fdt = mdv$, ma per generalizzare, possiamo anche scrivere che: $dq = fdt = mdv = d(mv)$, dove $d(mv) = mdv$ e basta se la massa è costante e dunque se può uscire dalla derivata. Più in generale, scriviamo dunque: $dq = d(mv) = mdv + vdm$ (dove ora non si esclude più la variazione della massa) e $q = mv$. Allora, sempre per motivi di maggior generalità, dalla meno generale (1.1), ossia da $dE = mvdv = mdv \cdot v$ si passa alla:

$$dE = (mdv + dm \cdot v) \cdot v \qquad (1.2)$$

Il piccolo fotone è portatore di una piccola energia dE: $dE = hf$, ma possiamo riconoscergli, per le sue qualità non solo ondulatorie, ma anche corpuscolari, una piccola massa dm, che sappiamo essere dinamica (e si ricordi la (1.2)) :
$dE = hf = (dm \cdot c + m \cdot dc)c = (dm \cdot c + 0)c = dm \cdot c^2 = dE$
Il fotone, evidentemente, è inaccelerabile ed indecelerabile, in quanto è, nell'universo, come un insetto che può sì essere catturato con un retino (assorbito dalla materia), ma nel retino continua a volare con la sua velocità c (fotone in orbita intorno all'elettrone, ad esempio). Infatti, un corpo per noi fermo può assorbire (inglobare) un fotone e poi riemetterlo a velocità c. Essendo il fotone non catturabile in senso assoluto, esso conserva la velocità che ha alla nascita, dettata dall'universo, ossia c. E, di conseguenza, dc=0.
Come ulteriore esempio, anche un'onda che si propaga può, se interagisce con la sua riflessa, nascondersi dentro l'onda "stazionaria" che ne scaturisce. Ma poi, se matematicamente si risottrae la riflessa, l'onda originaria torna ad essere quella di prima ed a ripropagarsi come prima.

Immaginiamo ora il semplice ed ingenuo esempio di un fotone di massa dm che urta la macchina di prima, di massa M_0, inizialmente ferma. Valutiamo l'energia prima e dopo l'incontro.
Prima (in forza della (1.2)):
$$dE_{fotone} + dE_{macchina} = [(dm \cdot c + 0)c] + [(dM_0 v_0 + M_0 dv_0)v_0] = [(dm \cdot c + 0)c] + [0] = dm \cdot c^2 = dE_{fotone}$$
poiché $dM_0 = dv_0 = v_0 = 0$ (macchina ancora ferma, che non varia né di massa, né di velocità)

Dopo l'incontro del fotone con la macchina, M_0 diventerà M, in quanto avrà incapsulato la dm del fotone, e v_0 diventerà una certa v; in altre parole, esiste solo un corpo, ossia la macchina con a bordo il fotone:
$dE_{macchina+fotone} = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v$. Ora, innanzitutto notiamo che $dM = dm$, in quanto la variazione di massa della macchina è causata dall'aver conglobato la dm del fotone, e poi le due energie, prima e dopo, devono eguagliarsi, per la conservazione dell'energia:

$dE_{fotone} + dE_{macchina} = dE_{macchina+fotone}$, ossia:

$dm \cdot c^2 = dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v$. Riscriviamola:

$$dM \cdot c^2 = (Mdv + dM \cdot v) \cdot v \tag{1.3}$$

Ora, integriamo questa equazione differenziale:

$dM(c^2 - v^2) = Mvdv$, ossia: $\dfrac{dM}{M} = \dfrac{1}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} vdv$. Integriamo ora tra M_0 ed M e tra 0 e v:

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M} = \int_0^v \frac{1}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} vdv$$

$\ln\dfrac{M}{M_0} = -\dfrac{1}{2}\ln(1-\dfrac{v^2}{c^2})$, ossia:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma M_0 , \tag{1.4}$$

che è la ben nota equazione relativistica per la massa dinamica!

((La conservazione dell'energia la si è dovuta scrivere in termini differenziali, come nella (1.3) e non come somma di termini del tipo $\frac{1}{2}mv^2$, come avviene ordinariamente in teoria dell'urto, in quanto espressioni del tipo $\frac{1}{2}mv^2$ presuppongono che l'integrale è già stato fatto e che la massa m era costante, così uscendo dall'integrale e fornendo appunto energie del tipo $\frac{1}{2}mv^2$.))

In termini di energia, dunque, dalla (1.4), possiamo scrivere che:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} M_0c^2 = \gamma \cdot M_0c^2$$

che, palesemente, vale negli acceleratori di particelle, dove gli addetti conferiscono energia alle particelle.

Si ottiene l'energia cinetica, notoriamente, togliendo l'energia di riposo da quella totale:

$$E_k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} M_0c^2 - M_0c^2 = M_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1) = M_0c^2(\gamma - 1) \tag{1.5}$$

Adesso, sempre tenendo a mente la (1.2), facciamo che la macchina sia ferma e, ad un certo punto, emetta (perda) un fotone. Non dimentichiamo che il cambiamento di stato per perdita di energia avviene ordinariamente negli atomi, oppure in un universo collassante, dove tutta la materia precipita.
Allora, dicevamo, prima della perdita del fotone da parte della macchina, non vi sono fotoni e la macchina è ancora integra, dunque:

$$dE_{fotone} + dE_{macchina} = 0 + [(dM_0 v_0 + M_0 dv_0) v_0] = 0 + 0 = 0 \quad \text{(PRIMA)} \tag{1.6}$$

($dE_{fotone} = dM_0 = dv_0 = v_0 = 0$)
mentre, dopo che l'auto cede un fotone, si ha:

$$dE_{fotone} + dE_{macchina} = [(dm \cdot c + 0)c] + [(-vdM + Mdv)v] = dm \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v \quad \text{(DOPO)} \tag{1.7}$$

(si ha $-dM$ in luogo di dM, in quanto la macchina, questa volta, ha perso massa)
Eguagliando dunque le due energie "prima" e "dopo", ossia le (1.6) e (1.7), e tenendo conto che $dm = dM$, in quanto la massa ceduta dalla macchina è quella che si ritrova nella creazione del fotone emesso, si ottiene:

$0 = dm \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v = dM \cdot c^2 + (-vdM + Mdv)v = 0$, ossia:

$$dM \cdot c^2 = v(vdM - Mdv)$$

da cui: $dM(c^2 - v^2) = -vMdv$, ossia:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{v}{(c^2 - v^2)} dv \tag{1.8}$$

Integrando ora la (1.8)) tra M_0 – M e 0 - v, si ottiene:

$M = M_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} M_0$. Ancora una volta, per l'energia, si ha: $E = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} M_0 c^2$ e togliendo tale energia dalla energia della massa M che l'ha ceduta, si ha ciò che rimane:

$$E = M_0 c^2 - M_0 c^2 \frac{1}{\gamma} = M_0 c^2 (1 - \frac{1}{\gamma}) = M_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}) \tag{1.9}$$

Mettiamo ora alla prova la (1.9) con l'atomo.

Sappiamo, ed ho già dimostrato (vedi appendice) che l'energia totale nell'atomo di Bohr è:

$$E_{n-Bohr} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 e^4 m_e}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \tag{1.10}$$

e la velocità dell'elettrone è:

$$v = \frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0} \tag{1.11}$$

e la (1.9) fornisce gli stessi valori della (1.10), sicuramente per velocità non relativistiche:

$$E_{n-AltraR} = m_e c^2 [1 - \sqrt{1 - (\frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0 c})^2}] \tag{1.12}$$

e, tra breve, spiegheremo anche cosa è la $E_{n-Dirac}$:

$$E_{n-Dirac} = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{8 \varepsilon^2 h^2} [1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} (\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4})] \tag{1.13}$$

Per velocità relativistiche (alto Z e basso n) i valori Bohr e Altra Relatività-Relatività delle Energie Cedute, come atteso, differiscono un po'; vediamo infatti che:

a)n=1 e Z=80:

$$E_{1-Bohr-80} = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon_0^2h^2} = -\frac{80^2(1{,}6)^4(10^{-19})^4 9{,}1\cdot 10^{-31}}{8(8{,}85)^2(10^{-12})^2(6{,}625)^2(10^{-34})^2} = \boxed{-13{,}879\cdot 10^{-15}J} \qquad (1.14)$$

$$E_{1-AltraR-80} = -m_ec^2[1-\sqrt{1-(\frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0c})^2}\,] = -81{,}7867\cdot 10^{-15}[1-0{,}8127734] = \boxed{-15{,}313\cdot 10^{-15}J} \qquad (1.15)$$

$$E_{n-Dirac} = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon^2h^2}[1+\frac{\alpha^2Z^2}{n^2}(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4})]$$

che, con n=1 e j=ℓ+1/2=0+1/2 (e α Costante di Struttura Fine) dà:

$$E_{1-Dirac-80} = -\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon^2h^2}[1+\alpha^2Z^2(1-\frac{3}{4})] = -\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon^2h^2}(1+\frac{\alpha^2Z^2}{4}) = E_{1-Bohr-80}\cdot(1+\frac{\alpha^2Z^2}{4}) =$$

$$= E_{1-Bohr-80}\cdot(1+\frac{\alpha^2Z^2}{4}) = -13{,}879\cdot 10^{-15}(1+\frac{(\frac{1}{137})^2 80^2}{4}) = \boxed{-15{,}063\cdot 10^{-15}J} \qquad (1.16)$$

b)n=1 e Z=60:

$$E_{1-Bohr-60} = -7{,}872\cdot 10^{-15}J$$
$$E_{1-AltraR-60} = \boxed{-8{,}220\cdot 10^{-15}J}$$
$$E_{1-Dirac-60} = \boxed{-8{,}250\cdot 10^{-15}J}$$

c)n=1 e Z=70:

$$E_{1-Bohr-70} = -10{,}626\cdot 10^{-15}J$$
$$E_{1-AltraR-70} = \boxed{-11{,}424\cdot 10^{-15}J}$$
$$E_{1-Dirac-70} = \boxed{-11{,}320\cdot 10^{-15}J}$$

ma vediamo che c'è corrispondenza con $E_{n-Dirac}$.

$E_{n-Dirac}$ è l'energia di Bohr corretta con la Relatività ufficiale, ordinaria; sebbene ci sia anche una equazione esatta di Dirac/Sommerfeld, noi qui utilizziamo questa, che scaturisce dalla teoria delle perturbazioni, ma che fornisce valori soddisfacenti e che rispecchiano la realtà. La stessa può, ad esempio, essere trovata su vari libri di spettroscopia e di struttura della materia, oppure ancora al link: http://it.wikipedia.org/wiki/Struttura_fine ecc.

Per bassi valori di Z, nulla di relativistico e tutto come atteso:

d)n=1 e Z=10:

$$E_{1-Bohr-10} = -2{,}169\cdot 10^{-16}J$$
$$E_{1-AltraR-10} = -2{,}172\cdot 10^{-16}J$$
$$E_{1-Dirac-10} = -2{,}172\cdot 10^{-16}J$$

e)n=1 e Z=20:

$$E_{1-Bohr-20} = -8{,}675\cdot 10^{-16}J$$
$$E_{1-AltraR-20} = -8{,}721\cdot 10^{-16}J$$
$$E_{1-Dirac-20} = -8{,}721\cdot 10^{-16}J$$

f)n=1 e Z=30:

$$E_{1-Bohr-30} = -1{,}952 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-30} = -1{,}976 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-30} = -1{,}975 \cdot 10^{-15} J$$

g)n=1 e Z=40:

$$E_{1-Bohr-40} = -3{,}470 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-40} = -3{,}546 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-40} = -3{,}544 \cdot 10^{-15} J$$

ed ecco altri valori:

h)n=1 e Z=50:

$$E_{1-Bohr-50} = -5{,}422 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-50} = -5{,}614 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-50} = -5{,}602 \cdot 10^{-15} J$$

i)n=1 e Z=90:

$$E_{1-Bohr-90} = -17{,}566 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-90} = -20{,}015 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-90} = -19{,}461 \cdot 10^{-15} J$$

j)n=1 e Z=100:

$$E_{1-Bohr-100} = -21{,}687 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-100} = -25{,}736 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-100} = -24{,}575 \cdot 10^{-15} J$$

k)n=1 e Z=108:

$$E_{1-Bohr-108} = -25{,}295 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-108} = -31{,}275 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-108} = -29{,}216 \cdot 10^{-15} J$$

l)n=1 e Z=137:

$$E_{1-Bohr-137} = -40{,}704 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-AltraR-137} = -76{,}203 \cdot 10^{-15} J$$

$$E_{1-Dirac-137} = -50{,}880 \cdot 10^{-15} J$$

Si vede, dai calcoli qui sopra, che l'equazione dell'energia dell'Altra Relatività-Relatività delle Energie Cedute, a parte il caso Z=137 e con Z altissimi (e ciò deve far riflettere…), per il resto rispecchia abbastanza bene la $E_{n-Dirac}$ e, dunque, come preannunciato in passato, la sua espressione, essendo una forma esatta, non corretta, dimostra di funzionare bene per i sistemi che collassano perdendo energia, mentre la $E_{n-Dirac}$ lo fa in modo artificioso e correttivo, come a voler rimettere sui binari un treno che tende continuamente a deragliare …… Inoltre, sebbene anche la (1.5), come la (1.9), per basse velocità dà l'energia cinetica di Newton se sviluppata in serie di Taylor, non fornisce però assolutamente valori accettabili, per n piccoli e Z elevati (casi relativistici), qualora venga usata come formula relativistica per il calcolo dei livelli energetici dell'atomo.
Studi futuri con eventuali Z più elevati di quelli odierni risulteranno molto interessanti….

APPENDICE:

L'atomo di Bohr:

In un atomo si eguaglia banalmente la forza di attrazione coulombiana con la forza centrifuga:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r} \quad , \tag{A}$$

da cui:

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = m_e v^2$. Moltiplico ora per 1/2:

$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = \frac{1}{2}m_e v^2 = E_k \tag{B}$$

Ora, ricordiamo che, in generale, in fisica, si hanno, per l'energia, le seguenti espressioni:

$E = hf$ ed anche $E = m_e c^2$, da cui, eguagliando: $hf = m_e c^2$, da cui: $\frac{c}{f} = \frac{h}{m_e c}$, ma sappiamo che c/f altro non è che la lunghezza d'onda λ, da cui: $\lambda = \frac{h}{m_e c}$; ora, con De Broglie, estendiamo tale equazione ed attribuiamo anche all'elettrone orbitante una lunghezza d'onda:

$\lambda_e = \frac{h}{m_e v}$ (De Broglie). Ora, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\frac{1}{2}v$, ottenendo:

$$\lambda_e = \frac{\frac{1}{2}vh}{\frac{1}{2}m_e v^2} = \frac{hv}{2E_k} \ . \tag{C}$$

Ora, la Condizione di Quantizzazione di Bohr, notoriamente, vuole la quantizzazione, appunto, del momento angolare:

$$m_e vr = n\frac{h}{2\pi} , \tag{D}$$

dove n è il Numero Quantico Principale.

Tale condizione di Bohr altro non è che il voler imporre che la circonferenza dell'orbitale deve essere n volte la lunghezza d'onda di De Broglie; infatti, la (D) può essere anche letta così:

$$2\pi r = n\frac{h}{m_e v} = n\lambda_e . \tag{E}$$

Tornando a noi, usando la (C) nella (E), si ottiene:

$$2\pi r = n\frac{hv}{2E_k} \tag{F}$$

ma dalla (B) si evince che 2πr vale anche:

$$2\pi r = \frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{E_k} , \tag{G}$$

da cui, eguagliando la (F) con la (G), si ha:

$$n\frac{hv}{2E_k} = \frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{E_k}$$, ossia:

$$v = \frac{Ze^2}{2nh\varepsilon_0} \tag{H}$$

e, fin qui, abbiamo usato fisica assolutamente consolidata, vecchia di quasi un secolo!

Bohr valutò poi anche l'energia totale dell'elettrone (cinetica + potenziale):

$$E = E_k + V = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} \tag{I}$$

infatti, per valutare V, considerando una v=0 a distanza infinita dal nucleo, segue che il lavoro necessario per portare l'elettrone da r ad infinito è:

$$V(r) = \int_{R=r}^{R=\infty} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R=r}^{R=\infty}\frac{Ze^2}{R^2}dR = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$$, da cui la (I), considerando bene i segni.

(la forza F è quella data da Coulomb, ovviamente)

Ora, grazie alla (B), la (I) diventa:

$$E = E_k + V = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}, \tag{J}$$

e, ricordando la (A): ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r}$) e la (D): ($m_e vr = n\frac{h}{2\pi}$), che vuole che: $v = n\frac{1}{m_e}\frac{h}{2\pi r}$, si ha:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = m_e v^2 = m_e\left(n\frac{1}{m_e}\frac{h}{2\pi r}\right)^2,$$

da cui: $r = \frac{n^2\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e Ze^2}$, (K)

e quest'ultima equazione, ossia la (K), inserita nella (J) (ossia, nella: $E = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$), dà:

$$E = -\frac{Z^2e^4m_e}{8n^2\varepsilon_0^2h^2}$$, ed essendo, così, E dipendente da n, riscriviamo quest'ultima equazione così:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon_0^2h^2} \tag{L}$$

Questa equazione, notissima in fisica, fornisce le energie corrispondenti ai vari livelli, nell'atomo.

Grazie per l'attenzione.
Leonardo RUBINO.