

Эволюция скопления гравитирующих тел с учётом абсолютно неупругих столкновений

Кирьян Д. Г., Кирьян Г. В.

*Институт Проблем Машинovedения РАН
В.О., Большой проспект 61, Санкт-Петербург, Россия, 199178
эл.адрес: diki.ipme@gmail.com*

В рамках классической механики рассмотрена задача о численном моделировании эволюции скопления конечного числа гравитирующих тел с учётом гравитационной аккреции. Численное моделирование показало, что характерный вид кривой «скоростей вращения» звёзд некоторых галактик, определяется только текущей конфигурацией орбит тел и их массами. Это означает, что отсутствует необходимость вводить в рассмотрение некую «тёмную материю», а так же нет необходимости в модификации классического закона Ньютона о гравитационном взаимодействии двух материальных тел. При моделировании динамики конечного числа гравитирующих тел, была учтена возможность столкновения тел, при этом удар считаем абсолютно неупругими. Внешние, по отношению к рассматриваемому скоплению тел, силовые воздействия любой природы были исключены. Из всех внутренних силовых факторов, действующих в скоплении, рассмотрено только гравитационное взаимодействие. Затронуты вопросы определения естественных начальных условий для решения задачи Коши на заданном интервале времени.

1. Цель

Численным экспериментом показать, что характерный вид «кривой вращения»¹ скопления гравитирующих тел, реализуется без привлечения «тёмной материи».

¹Это зависимость орбитальной скорости звёзд в галактике от радиуса вращения вокруг центра притяжения галактики. Именно характерная особенность этой кривой, постоянство орбитальных скоростей звёзд по мере удаления их от условного центра галактики, и стала причиной появления такой нематериальной сущности, как «тёмная материя», а так же попыток модифицировать классический закон Ньютона о гравитационном взаимодействии двух материальных тел.

2. Постановка задачи

Классический закон о гравитационном взаимодействии материальных тел гласит, что сила гравитационного притяжения двух однородных сфер (материальных точек) прямо пропорциональна их гравитирующим массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между их центрами симметрии (центрами масс).

Рассмотрим динамику замкнутой системы, состоящей из n тел (однородных сфер) с массами m_i , $i = 1, \dots, n$ с учётом только гравитационной аккреции. Кинематических ограничений на элементы скопления не накладываем. Исключаем все внешние силовые факторы. Внутренние силовые взаимодействия тел ограничиваем только гравитационным взаимодействием, иные процессы не гравитационной природы игнорируем. Считаем, что при столкновении тел реализуется абсолютно неупругого соударение.

Эволюция скопления гравитирующих тел, это процесс непрерывного гравитационного взаимодействия между телами скопления, приводящий к пространственной перестройке структуры скопления, а так же к снижению общего количества тел, вследствие абсолютно неупругих столкновений. Таким образом, формулируем следующую задачу — смоделировать эволюцию скопления гравитирующих тел с учётом только гравитационной аккреции.

Введём неподвижную декартовую систему координат $Oxyz$ (рис. 1)

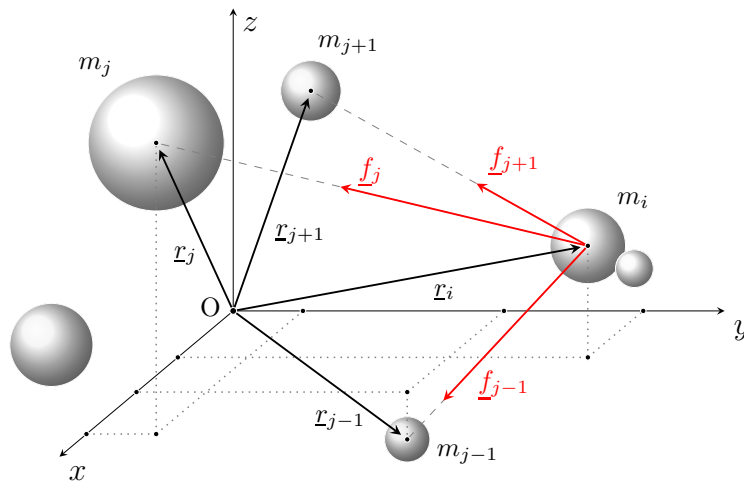


Рис. 1. Пример гравитационного воздействия на тело скопления с массой m_i , со стороны тел с массами m_{j-1} , m_j и m_{j+1}

Пространственное положение и скорость каждого i -ого тела скопления определяется радиус-вектором \underline{r}_i и \underline{v}_i соответственно. Каждое тело

взаимодействует с каждым. Свойство аддитивности позволяет нам суммировать гравитационные воздействия на тело с массой m_i со стороны всех тел системы. Сила гравитационного воздействия на тело m_i со стороны тела с массой m_j определяется произведением напряжённости гравитационного поля тела m_j в точке, где расположено тело с массой m_i , на массу m_i . Обозначим через \underline{f}^* совокупность сил, иной, не гравитационной природы, действующих на движущееся тело m_i со стороны окружающей её материальной среды. Это сделано для полноты записи, но для нашей задачи эти силы исключим из рассмотрения.

Запишем систему дифференциальных уравнений второго порядка, моделирующих динамику гравитационного взаимодействия тел объединённых в скопление:

$$m_i \frac{d^2 \underline{r}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \overbrace{\underline{E}(m_j, \underline{r}_j - \underline{r}_i)}^{\underline{f}_j} m_i + \underline{f}^*(t, \underline{r}_i, \dot{\underline{r}}_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Здесь \underline{E} — напряжённость гравитационного поля j -ого тела на расстоянии $\underline{r}_j - \underline{r}_i$. Каждое гравитирующее тело, рассматриваемого скопления, обладает своим гравитационным полем, характеризуемым вектором напряженности \underline{E} .

$$\underline{E}(m_j, \underline{r}_j - \underline{r}_i) = \mathbf{G} \frac{m_j}{|\underline{r}_j - \underline{r}_i|^2} (\underline{r}_j - \underline{r}_i), \quad (2)$$

где \mathbf{G} — согласующий масштабно-размерный множитель².

В ходе решения системы (1) будем контролировать сближение тел на критическую дистанцию, равную полусумме диаметров тел, которая определяет момент абсолютно неупругого столкновения. Условимся считать, что после столкновения двух тел, вновь образованное тело имеет диаметр равный большему из двух тел и массу равную их сумме масс.

Под абсолютно неупругим столкновением мы понимаем следующее: после касания двух тел, вновь образованное тело продолжает своё движение в гравитационном поле скопления со скоростью определяемой законом сохранения импульса. Например, столкнулись два тела с массами

²В настоящее время, решением международной организации Committee on Data for Science and Technology (CODATA) рекомендовано использовать следующее значение «гравитационной постоянной» [1]

$$\mathbf{G} = 6,67384(80) \times 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2). \quad (3)$$

Следует заметить, что приведённая точность константы вызывает определённые сомнения в достоверности. Реально можно говорить только о двух знаках после запятой в системе СИ. Об этом подробно изложено в работах [2, 3].

m_1 и m_2 со скоростями \underline{v}_1 и \underline{v}_2 соответственно, тогда, согласно закону сохранения импульса, скорость «слипнувшихся тел» записывается следующим образом:

$$\underline{v} = \frac{m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2}{(m_1 + m_2)} \quad (4)$$

Теперь, для решения системы дифференциальных уравнений второго порядка (1), необходимо определиться с естественными начальными условиями, но об этом в следующем параграфе.

3. Начальные условия

Итак, объект исследования определён — скопление тел взаимодействующих друг с другом только посредством гравитации. Теперь начальные условия. Какое начальное пространственное распределение тел выбрать? Какие задать скорости? Так как мы хотим смоделировать реальные, наблюдаемые фазы эволюции скопления гравитирующих тел (например галактик), то начальные условия должны соответствовать реальному состоянию системы в выбранный момент времени. Это мы и называем естественными начальными условиями.

Совместим центр масс скопления с точкой O , началом системы координат $Oxyz$ (рис. 1). Полагаем, что все тела, рассматриваемого скопления, движутся вокруг точки O , в плоскости xOy , против часовой стрелки.

В какой-то момент эволюции скопления, стали преобладать силы гравитационного взаимодействия, появилось упорядоченное вращение тел относительно их совокупного центра массы.

Собственное вращение скопления гравитирующих тел вокруг центра массы, есть следствие комбинации взаимного притяжения тел и движения скопления, как единого целого, во внешнем, изначально неоднородном, гравитационном поле по криволинейной траектории. Кривизна траектории и определяет направление собственного вращения скопления.

Рассмотрим детальнее механизм появления собственного вращения скопления, на примере двух тел (рис. 2). Пусть два тела с массами m_1 и m_2 образуют скопление и находятся на одной круговой траектории, хотя это условие и необязательно, но для наглядности примем так. Круговая траектория обусловлена некой внешней гравитирующей массой в точке O . Гравитационное взаимодействие, в условиях совместного движения тел не по прямой, приводит к появлению вращения вокруг их совместного центра массы \odot . Взаимное притяжение тел, совместно движущихся по криволинейной траектории (окружность), против часовой

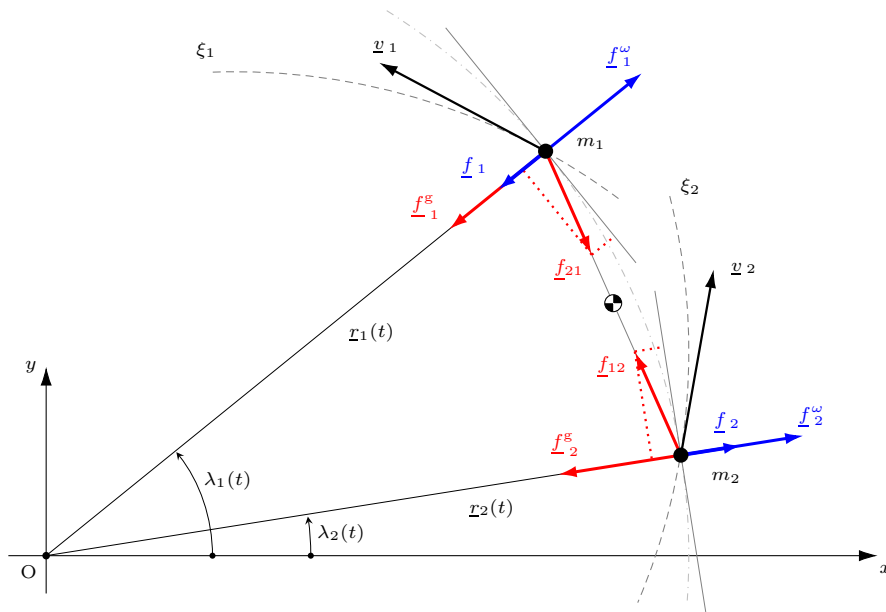


Рис. 2. Иллюстрация появления условий для возникновения собственного вращения системы состоящей из двух тел.

стрелки, тормозит тело с массой m_1 и разгоняет тело с массой m_2 . В результате баланс гравитационных \underline{f}^g и центробежных \underline{f}^ω сил нарушен для каждого тела. Увеличение скорости тела с массой m_2 приводит к «поднятию» его орбиты, а торможение тела с массой m_1 к «снижению» его орбиты. Следовательно, система из двух тел начнёт «прямое» вращение вокруг их общего центра массы \odot , который, в свою очередь, движется по круговой траектории. На рис. 2 траектории тел обозначены как ξ_1 и ξ_2 . По аналогии возникает вращение тел скопления и по часовой стрелке.

Поэтому, выбор направления вращения тел скопления вокруг его центра массы не принципиален, главное, что вращение должно быть и пусть оно будет против часовой стрелки.

В работе, мы рассматриваем ту часть общей эволюции материи [4] в космосе, которая определена только гравитационным взаимодействием материальных тел. Одной из интересных особенностей эволюции гравитирующих систем (галактик) является появление плато на «кривой вращения» галактики³, то есть линейные скорости тел будут практически неизменны по мере роста радиуса их орбиты. На рис. 3 приведены в

³Рубин В. (Rubin, V. C.) по результатам систематических наблюдений (измерение доплеровского смещения спектральных линий звёзд) за 21-ой спиральной галактикой [5], получает характерное радиальное распределение «орбитальной» скорости с участком в виде плато.

одном масштабе «кривые вращения» галактик с характерным плато.

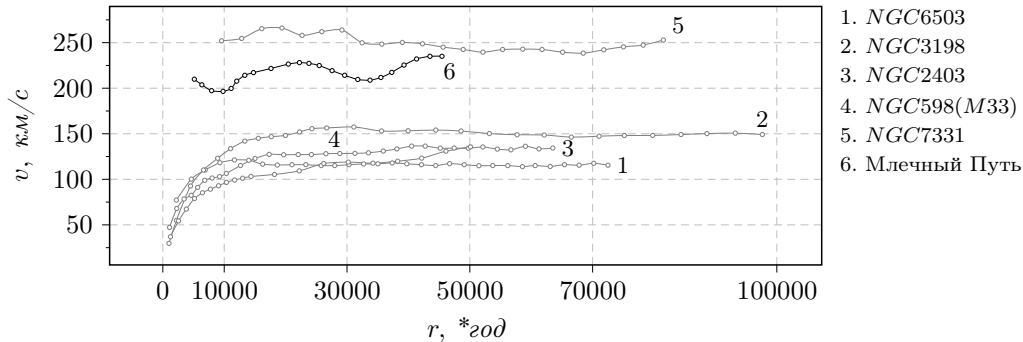


Рис. 3. Примеры «кривых вращения» галактик из работы [6]. v — лучевая скорость; r — расстояние выраженное в единицах времени.

Ранее, в работах [7, 8] было показано, в рамках классической механики, что плато на «кривой вращения» (рис. 3) просто-напросто отражает текущий момент эволюции некоторых галактик.

Если не вдаваться в детали, то эволюция скоплений гравитирующих тел с учётом гравитационной аккреции имеет три основных момента:

- 1) Начальный. Объёмно распределение гравитирующих тел, как результат аккреции различной природы.
- 2) Пограничный. Чётко выраженное упорядоченное вращение тел скопления вокруг его центра массы. Наличие плато на «кривой вращения» скопления.
- 3) Заключительный. Проявление гравитационной аккреции — минимально.

Исходя из всего выше изложенного, в качестве начальных условий для решения поставленной задачи (1) мы должны взять координаты и скорости тел скопления в момент времени, который предшествует появлению плато на «кривой вращения».

Полагаем, что изначально все тела в скоплении движутся по круговым орбитам. Но как расположены орбиты тел или вернее, как должны быть расположены по отношению друг к другу? Какие задать скорости? Наша задача не просто просчитать динамику тел скопления с учётом гравитационной аккреции, но и в ходе численного эксперимента получить «кривую вращения» с плато и сопоставить её с доплеровскими измерениями лучевых скоростей звёзд для некоторых галактик.

Из общих соображений, для задания начального распределения радиусов орбит воспользуемся следующей эмпирической формулой:

$$r_i = r^* \left(\sqrt[3]{i} \right)^\alpha, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где r^* — минимальный радиус круговой орбиты тела скопления; α — параметр, определяющий характер распределение круговых орбит; i — номер орбиты.

На основе последовательности радиусов орбит (5), характер которой определяются параметром α , формируем упорядоченную последовательность вложенных *Сфер* [7, 8]. Масса каждой *Сферы* определяется массой всех тел, радиус орбит которых меньше радиуса *Сферы*. Массы и плотности i -ой *Сферы* определяем так:

$$m_i^s = \sum_{j=1}^{i-1} m_j, \quad \rho_i^s = m_i^s / \left(\frac{4}{3} \pi r_i^3 \right), \quad i = 2, \dots, n, \quad (6)$$

где m_i^s и ρ_i^s — масса и плотность i -ой *Сферы* соответственно. Верхний символ s обозначает, что мы работаем с упорядоченной последовательностью вложенных *Сфер*.

Теперь о скорости. Каждая *Сфера* последовательности обладает уникальной характеристикой, это скорость тела движущегося по круговой орбите с радиусом *Сферы*. Запишем выражение для определения круговой скорости i -ого тела:

$$v_i^s = \sqrt{\mathbf{G} \frac{m_i^s}{r_i}}, \quad i = 2, \dots, n, \quad (7)$$

где v_i^s — круговая скорость движения i -ого тела по орбите с радиусом равным r_i ; m_i^s — масса i -ой *Сферы*.

На рис. 4 показаны варианты (5 строк) распределений орбит тел скопления, для различных значений параметра α . Каждой упорядоченной последовательности орбит соответствует своя последовательность вложенных *Сфер*, а так же последовательности их масс m^s , круговых скоростей v^s и плотностей ρ^s .

Далее, руководствуясь рис. 4, выберем такое распределение орбит, определяемое параметром α , которое будет предшествовать появлению плато на «кривой скоростей». В нашем случае, это $\alpha < 2,7$.

Таким образом, мы определились с естественными начальными условиями для нашей задачи (1).

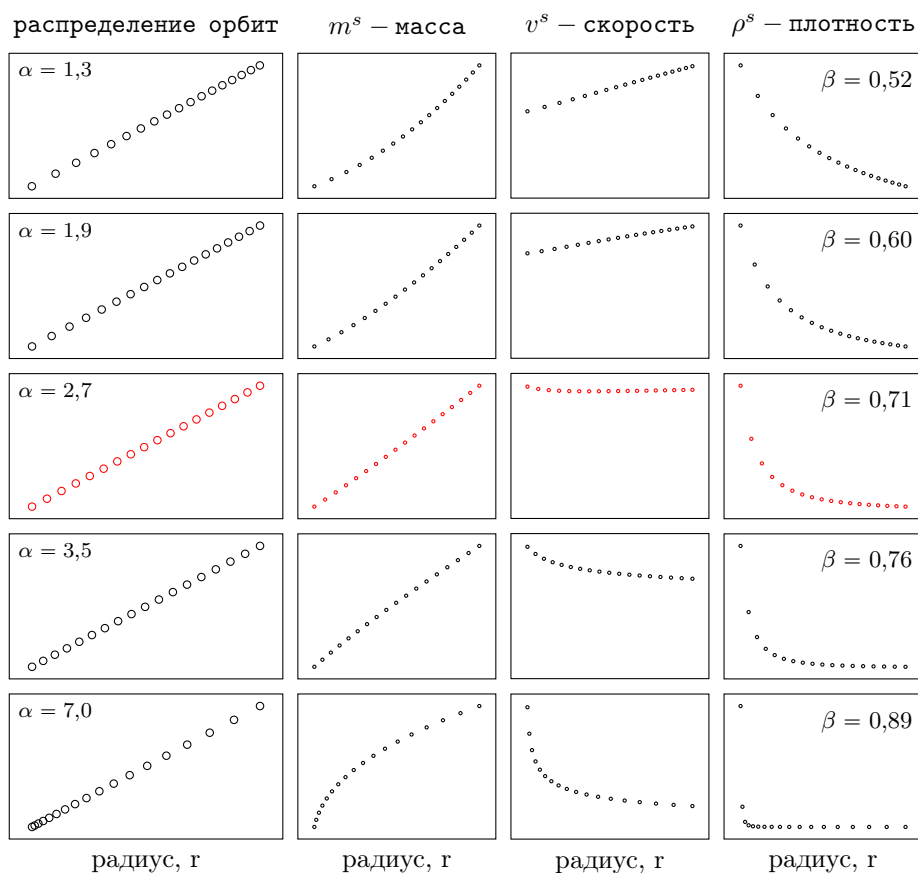


Рис. 4. Варианты естественных начальных условий для радиусов орбит тел для различных моментов эволюции скопления. β – эволюционный показатель.

4. Численное моделирование

Расчётная модель скопления гравитирующих тел представляет собой n однородных сфер равного радиуса r^* и плотности ρ^* .

$$m_i = m^* = 100 \text{ кг} , \quad \rho_i = \rho^* = 2500 \text{ кг/м}^3 , \quad i = 1, \dots, n = 100 \quad (8)$$

Решаем задачу (1) в двумерной постановке, то есть все траектории тел лежат в плоскости xOy . Координаты i -ого тела заданы радиусом r_i и углом λ_i . Угол откладывается от оси Ox против часовой стрелки. Для каждого тела угловая координата λ_i выбирается случайным образом в диапазоне от 0 до π . Начальное распределение радиусов орбит находим по формуле (5), принимая значения параметров $\alpha = 0,97$ и $r^* = 500 \text{ м}$. По формуле (7) вычисляем начальные круговые скорости v_i для тел скопления.

Теперь, определившись с начальными условиями для системы уравнений второго порядка (1), численно решаем задачу Коши с постоянным контролем дистанции между телами, для определения момента времени выполнения условия столкновения. Два тела (сферы) считаются столкнувшимися если расстояние между их центрами масс будет меньше или равно полусумме их диаметров. После контакта эти два тела продолжают движение с одной скоростью и в одном направлении, как одно целое, так как мы рассматриваем абсолютно неупругое столкновение. На рис. 5 показаны расчётные траектории тел до и после абсолютно неупругого соударения.

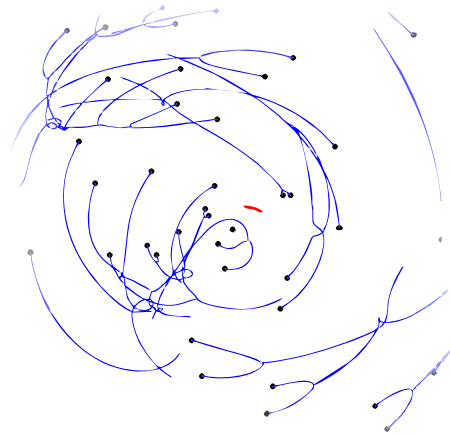


Рис. 5. Расчётные траектории тел до и после абсолютно неупругого соударения. Общее вращение тел происходит против часовой стрелки.

Результат моделирования эволюции скопления гравитирующих тел (рис. 6) выглядит как хаотичное нагромождение траекторий, но это только она первый взгляд.

Как количественно оценить полученный результат с точки зрения эволюции? Для этого вычислим эволюционный показатель β , который был введён в работах [7, 8]. Он позволяет оценить текущее состояние эволюции галактики (скопление гравитирующих тел). Эволюционный показатель β принимает значения в пределах от 0 (начальная фаза эволюции) до 1 (заключительная фаза эволюции) и обладает свойством инвариантности по отношению к размерам скопления и массам его образующих тел.

Рассчитывается β следующим образом. Формируем упорядоченную последовательность вложенных *Сфер* по уже известным координатам тел и их массам, то есть формируем последовательность m^s по формуле (6). Аппроксимируем вычисленное распределение масс *Сфер*, степенной функцией общего вида. Это позволяет максимально сократить

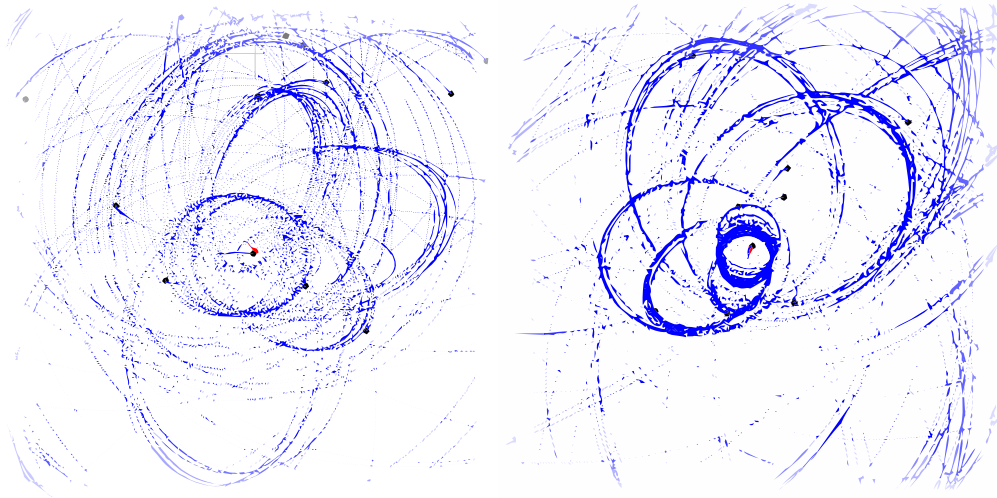


Рис. 6. Примеры расчётных траекторий гравитирующих тел скопления.

длительность эволюции и число тел скопления. Теперь, зная массы *Сфер* и их радиусы, определяем последовательность значений плотностей ρ^s . С помощью метода наименьших квадратов аппроксимируем полученную последовательность ρ^s степенной функцией (9), тем самым определяя эволюционный показатель β .

$$\rho(r) = ar^{-3\beta} + \rho_0, \quad r > 0, \quad \rho_0 \leq 0, \quad 0 < \beta < 1. \quad (9)$$

Здесь: r — радиусы *Сфер*; ρ — плотность *Сфер*; β — безразмерный коэффициент, эволюционный показатель; ρ_0 — плотность среды в которой находится скопление гравитирующих тел; a — масштабный множитель.

Результат моделирования динамики тел скопления, для разных времён эволюции $T = \{1200; 1500; 2500; 3000; 5000\}$ сут., представлен на рис. 7 в виде последовательности 5-ти фаз эволюции.

На графиках красным цветом отражено исходное состояние системы и её характеристик, а синим — состояние на момент времени T .

Первый столбец, сверху вниз, отражает изменение распределения масс тел и их орбит по мере роста длительности эволюции скопления. Цифры в правом верхнем углу графиков первого столбца показывают соотношение исходного количества тел и текущего.

Второй столбец показывает динамику изменения масс вложенных *Сфер*. Число *Сфер* равно числу гравитирующих тел, а их радиусы определяются текущим значением расстояния от центра системы координат *Охуз*. Последовательность вложенных *Сфер* образуется после сортировки радиусов *Сфер* по возрастанию. Таким образом, для каждого

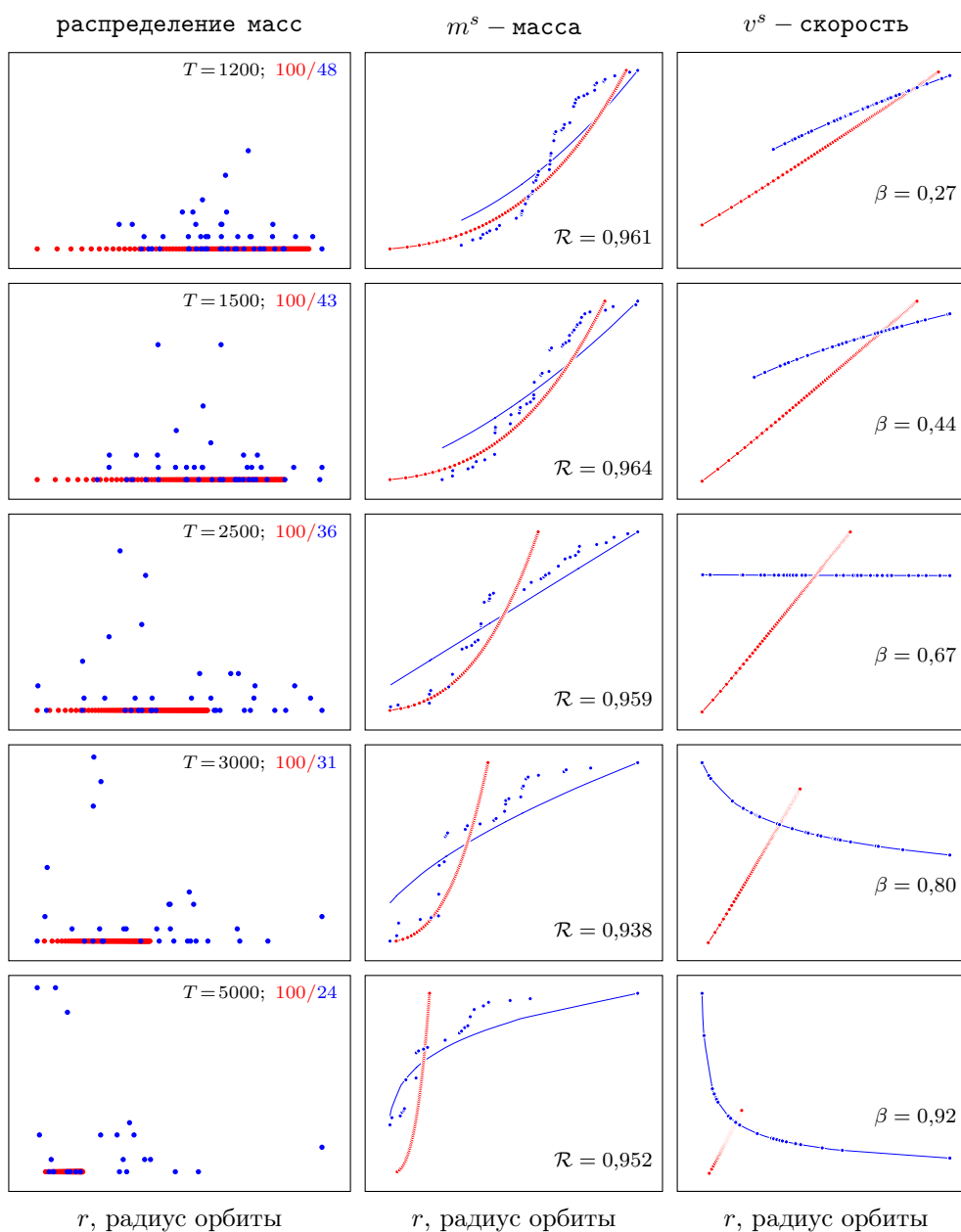


Рис. 7. Фазы эволюции скопления гравитирующих тел. Красным цветом отмечено исходное состояние тел скопления, синим текущее. T — длительность эволюции в сутках; \mathcal{R} — коэффициент корреляции; β — эволюционный показатель. 100/48 — это соотношение исходного количества тел к оставшемуся.

момента времени, мы строим упорядоченную последовательность *Сфер*, масса каждой — есть сумма масс всех тел, включённых в текущую *Сферу* последовательности. Все *Сферы* определены в декартовой системе коор-

динат $Oxyz$ и их центры совпадают с точкой O . Синими точками показано расчётное распределение масс вложенных *Сфер*, а сплошная синяя линия, это её аппроксимация степенной функцией. Качество аппроксимации последовательности m^s характеризует коэффициент корреляции \mathcal{R} , значение которого позволяет нам в дальнейшем использовать полученную степенную функцию с соответствующими параметрами.

Третий столбец показывает, как изменяется распределение орбитальной скорости v^s (7) в ходе эволюции скопления гравитирующих тел и как меняется эволюционный показатель β .

5. Выводы

- 1) Численное моделирование эволюции скопления гравитирующих тел с учётом гравитационной аккреции показало, что «загадочное» плато на графиках «кривых вращения», для некоторых галактик, имеет прозаическое объяснение — это просто этап эволюции скопления, где преобладает гравитационная аккреция.
- 2) Значение эволюционного показателя β позволяет дать количественную оценку текущему состоянию эволюции скопления.
- 3) Показана эффективность анализа текущего состояния скопления гравитирующих тел с использованием упорядоченной последовательности вложенных *Сфер*.

6. Послесловие

Небольшой комментарий по «кривой вращения» с учётом вышеизложенного. Обратимся к графикам на рис. 8. Здесь мы видим «кривую вращения» галактики и её теоретически ожидаемую Кеплеровскую «кривую вращения». Они не совпадают и какой же мы должны из этого сделать вывод, с учётом полученных результатов?

«Кривая вращения», это результат доплеровских измерений лучевых скоростей звёзд галактики. Каждая звезда удерживается на почти круговой орбите совокупной массой материи заключённой в *Сферу* с радиусом равным радиусу орбиты звезды. Плато на «кривой вращения», это экспериментальный факт. Результаты численного моделирования эволюции скопления гравитирующих тел с учётом гравитационной аккреции показали, что «загадочное» плато на графиках «кривых вращения» (рис. 3, рис. 8) просто отражает один из моментов эволюции галактики.

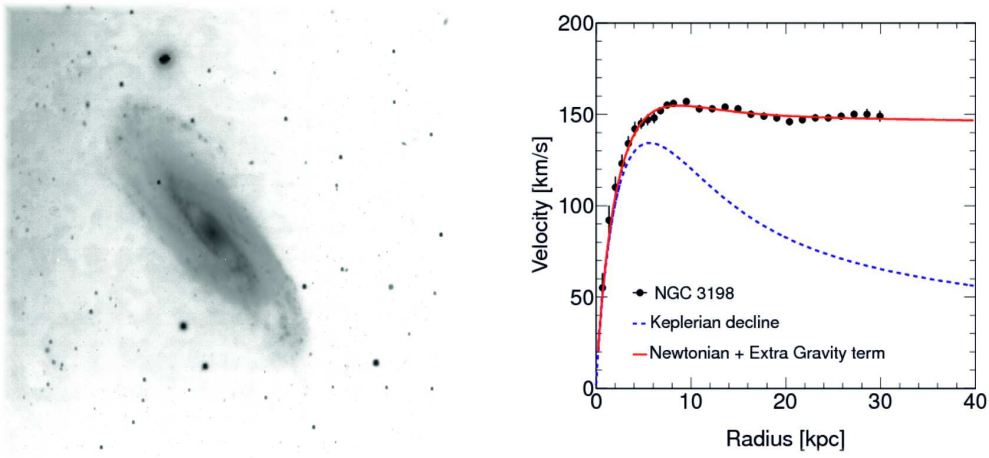


Рис. 8. Характерное распределение, наблюдаемых и вычисленных, линейных скоростей звёзд по мере их удаления от центра для галактики NGC3198 [9].

Численный эксперимент показал, что нет никакой насущной необходимости в привлечении дополнительной массы в виде «тёмной материи» или в модификации Закона Всемирного тяготения Ньютона. Всё объясняется в рамках классической механики.

Список литературы

- [1] *Mohr, P. J.* CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010 / P. J. Mohr, B. N. Taylor, D. B. Newell // *Reviews of Modern Physics*. — 2012. — Nov. — Vol. 84, no. 4. — Pp. 1527–1605.
- [2] *Кирьян, Д. Г.* Поразрядный анализ значения гравитационной постоянной на примере крутильных весов / Д. Г. Кирьян, Г. В. Кирьян // *e-prints viXra:1708.0245 v2*. — 2017. — P. 12. — <http://vixra.org/abs/1708.0245>.
- [3] *Kiryman, D. G.* Decimal-by-Decimal Analysis of the Gravitational Constant Value as Exemplified by Torsion Balance / D. G. Kiryan, G. V. Kiryan // *e-prints viXra:1708.0245 v3*. — 2017. — P. 12. — <http://vixra.org/abs/1708.0245>.
- [4] *Альвен, Х.* Эволюция Солнечной системы / Х. Альвен, Г. Аррениус. — МИР, 1979.
- [5] *Rubin, V. C.* Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R=4kpc/ to UGC 2885 /R=122 kpc/ / V. C. Rubin, W. K. J. Ford, N. . Thonnard // *The Astrophysical Journal*. — 1980. — Jun. — Vol. 238. — Pp. 471–487.
- [6] *Kiryman, D. G.* The Evolution of the System of Gravitating Bodies / D. G. Kiryan, G. V. Kiryan // *e-prints viXra:1607.0390v4*. — 2016. — P. 19. — <http://vixra.org/abs/1607.0390>.
- [7] *Кирьян, Д. Г.* Эволюция системы гравитирующих тел. / Д. Г. Кирьян, Г. В. Кирьян // *e-prints viXra:1607.0390v3*. — 2016. — С. 20. — <http://vixra.org/abs/1607.0390>.
- [8] *Kiryman, D. G.* The Evolution of the System of Gravitating Bodies / D. G. Kiryan, G. V. Kiryan // *International Journal of Applied and Fundamental Research*. — 2017. — Dec. — Vol. 4. — P. 19. — <http://www.science-sd.com//472-25367>.
- [9] *Yang, Y.* A new approach to the yang-mills gauge theory of gravity and its applications / Y. Yang, W. B. Yeung // *ArXiv e-prints*. — 2013.